Logique et raisonnements mathématiques

Eléments de logique

Exercice 1

Décrire les parties de $\mathbb{R}$ qui sont définies par les propositions (vraies) suivantes :

1) $(x > 0 \text{ et } x < 1)$ ou $x = 0$ 2) $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$

3) $(x \leqslant 0 \text{ et } x > 1)$ ou $x = 4$ 4) $x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$.

Exercice 2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Exprimer verbalement la signification des propositions suivantes :

1) $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda$ 2) $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ 3) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$

4) $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ 5) $\forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Exercice 3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1) la fonction f s'annule 2) la fonction f est la fonction nulle

3) f n'est pas une fonction constante 4) f ne prend jamais deux fois la même valeur

5) la fonction f présente un minimum 6) f prend des valeurs arbitrairement grandes

7) f ne peut s'annuler qu'une seule fois

Exercice 4

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.

Exprimer les négations des propositions suivantes :

1) $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$ 2) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$

3) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M$ 4) $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$

5) $\forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ 6) $\forall x \in I,\ f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Indiquer la différence de sens entre les deux propositions proposées :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.
2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ et $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ et $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$

Raisonnements mathématiques

Exercice 6

Soit n un entier, montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 7

Soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 8

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 9

On considère une famille finie d'ensembles distincts deux à deux.
Montrer que l'un au moins de ces ensembles ne contient aucun des autres.

Exercice 10

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x - f(y)) = 2 - x - y$.

Exercice 11

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Préciser cette décomposition si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

Exercice 12

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

Exercice 13

On définit une suite (u_n) par : $u_0 = 1$, $u_1 = \cos\theta$, et pour $n \geqslant 2$: $u_n = 2u_1u_{n-1} - u_{n-2}$.
Calculer u_n, pour tout entier n.