

Ensemble, application et relation

1. Ensemble

Exercice 1.1

Que dire de deux sous-ensembles A et B de E tels que $A \cup B = A \cap B$?

Exercice 1.2

Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

Exercice 1.3

Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$.

Exercice 1.4

Soient E et F deux ensembles. Quelle relation y-a-t-il :

1. Entre $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
2. Entre $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?
3. Entre $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

Exercice 1.5

Soit E un ensemble et A une partie de E , on note :

$$\begin{aligned} \chi_A &: E \longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

χ_A est appelée la fonction caractéristique de la partie A .

Montrer que pour toute parties A et B de E , on a :

1. $A \subset B \iff \chi_A \leq \chi_B$
2. $A = B \iff \chi_A = \chi_B$
3. $\chi_A^2 = \chi_A$
4. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$
5. $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$
6. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
7. $\chi_{A \setminus B} = \chi_A (1 - \chi_B)$
8. $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B$