Ensemble, application et relation

1. Ensemble

1.1 Ensemble, partie et élément

Définition 1.1.1

On dit qu'un *ensemble* E est constitué d'*éléments* et qu'un élément a *appartient* à E (on écrit : $a \in E$) ou n'appartient pas à E (on écrit : $a \notin E$).
Deux ensembles E, F sont dits *égaux* (on note $E = F$) s'ils sont constitués des mêmes éléments.
Par convention l'*ensemble vide*, noté $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Remarques

Un même objet mathématique peut, selon les circonstances, être vu comme un ensemble, ou comme un élément d'un ensemble. Par exemple, l'intervalle $[0, 1]$ est un *ensemble* de nombres réels, mais c'est également un *élément* de l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Un ensemble *fini* peut être défini en *extension*, c'est-à-dire par la liste (non ordonnée) de ses éléments. C'est le cas par exemple de l'ensemble $E = \{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55\}$.
Dans une écriture comme $\{a, b, c, \dots\}$ les éléments a, b, c, etc. sont à priori supposés distincts, et l'ordre dans lequel ils sont donnés n'a aucune importance.

Un ensemble E peut être défini en *compréhension* (par une propriété caractérisant ses éléments).
Ainsi $E = \left\{\frac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant n \leqslant 10\right\}$ est une autre définition de $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55\}$.

Définition 1.1.2

Par convention l'*ensemble vide*, noté $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.
Un ensemble $\{a\}$, formé d'un seul élément, est appelé un *singleton*.
Un ensemble $\{a, b\}$, formé de deux éléments *distincts*, est appelé une *paire*.

Définition 1.1.3

On dit qu'un ensemble F est *inclus* dans un ensemble E, et on note $F \subset E$, pour exprimer que tout élément de F est également élément de E.
On dit encore que E *contient* F, ou que F est une *partie* (ou un *sous-ensemble*) de E.

Conséquence

Soient E et F deux ensembles.

$$E = F \iff \begin{cases} E \subset F \\ F \subset E \end{cases}$$

Définition 1.1.4

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Conséquences

- Évidemment, si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.
- On a l'équivalence $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$.

  De même : $a \in E \Leftrightarrow \{a\} \subset E \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(E)$.

  Les *ensembles* E et $\emptyset$ sont toujours des *éléments* de $\mathcal{P}(E)$.

1.2 Opérations sur les ensembles

1.2.1 Réunion et intersection

Définition 1.2.1

Soit E et F deux ensembles.
$E \cap F$ est l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans E et dans F.
$E \cup F$ est l'ensemble formé des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles E et F.

Conséquence

$$x \in E \cup F \Longleftrightarrow x \in E \text{ ou } x \in F$$

$$x \in E \cap F \Longleftrightarrow x \in E \text{ et } x \in F$$

Définition 1.2.2

On dit que E, F sont *disjoints* si $E \cap F$ est vide.
Dans ce cas, on dit que $E \cup F$ est une *réunion disjointe*.

Remarque

On ne confondra pas *distincts* et *disjoints* :
- Dire que E et F sont distincts, c'est dire : $(\exists x \in E, x \notin F)$ ou $(\exists x \in F, x \notin E)$.
- Dire que E et F sont disjoints, c'est dire : $(\forall x \in E, x \notin F)$ et $(\forall x \in F, x \notin E)$.

Définition 1.2.3

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On dit que A et B sont complémentaires dans E si leur réunion est l'ensemble E et leur intersection est vide.
Dans ce cas on note $B = \complement_E A$ ou $A = \complement_E B$. Parfois, on utilise la notation $\bar{B}$ pour désigner le complémentaire de B.

Remarque

La réunion, l'intersection, sont des *opérations binaires* sur $\mathcal{P}(E)$, en ce sens qu'à deux éléments de $\mathcal{P}(E)$ elles associent un élément de $\mathcal{P}(E)$.
Le passage au complémentaire est donc une opération *unaire* sur $\mathcal{P}(E)$.

Proposition 1.2.1

Soit E un ensemble, et A, B et C des parties de E.

- *Double passage au complémentaire :* $\overline{\overline{A}} = A$.
- *Idempotence :* $\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{cases}$
- *Commutativité :* $\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$
- *Associativité :* $\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{cases}$
- *Distributivité :* $\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$
- *Dualité :* $\begin{cases} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{cases}$
- *Partie vide et partie pleine :* $\begin{cases} A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{B} \end{cases}$ $\begin{cases} A \cap E = A \qquad A \cup E = E \\ A \cup B = E \Leftrightarrow \overline{B} \subset A \end{cases}$

Proposition 1.2.2

Soit A, B, C trois parties quelconques d'un ensemble E.

$A = B \Leftrightarrow (A \subset B)$ et $(B \subset A)$ $\qquad A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

$(A \cup B) \subset C \Leftrightarrow (A \subset C)$ et $(B \subset C)$ $\qquad A \subset (B \cap C) \Leftrightarrow (A \subset B)$ et $(A \subset C)$

1.2.2 Différence et différence symétrique

Définition 1.2.4

Soit E et F deux ensembles.

- *Différence* : l'ensemble $E \setminus F$ est formé des éléments qui sont dans E mais pas dans F.
- *Différence symétrique* : on note $E \Delta F$ l'ensemble $(E \cup F) \setminus (E \cap F)$.
  C'est l'ensemble des éléments qui sont dans un et un seul des deux ensembles E et F.

Conséquences

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

Soit E et F deux ensembles. $\quad E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$

Proposition 1.2.3

Pour toutes parties A, B, C d'un ensemble E,

$$A\Delta B = B\Delta A \qquad A\Delta A = \emptyset \qquad A\Delta E = \overline{A} \qquad A\Delta\emptyset = A$$
$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C \qquad A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

1.2.3 Partition d'un ensemble

Définition 1.2.5

Soit E un ensemble et $\mathscr{T}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. On dit que $\mathscr{T}$ est une partition de E si

i/ $\forall B \in \mathscr{T}, \quad B \neq \varnothing.$

ii/ $\forall B, C \in \mathscr{T}, \quad (B \neq C \Longrightarrow B \cap C = \varnothing).$

iii/ $\forall x \in E, \exists B \in \mathscr{T} / \quad x \in B.$

Exemples

1. $\{\mathbb{R}_-^*, \{0\}, \mathbb{R}_+^*\}$ est une partition de $\mathbb{R}$.
2. Pour tout ensemble E et toute partie A de E différente du vide et de E, la paire $\{A, \overline{A}\}$ est une partition de E.

1.3 Produit cartésien d'ensembles

Définition 1.3.1

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles (non nécessairement distincts deux à deux), avec $n \geqslant 2$.

- Pour tout entier k (compris entre 1 et n), soit x_k un élément de l'ensemble E_k. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est appelé un *n-uplet* de *composantes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (dans cet ordre).
- On appelle *produit cartésien* de E_1, E_2, ..., E_n, et on note $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Par exemple, $E \times F = \{(a,b), a \in E, b \in F\}$.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \iff x_i = y_i, \ \forall i : 1 \leqslant i \leqslant n.$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0) \iff \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} / x_i \neq 0.$$

Remarques

- Un n-uplet est donc le moyen de regrouper n éléments dans un ordre bien défini.
- On parle de *couple* si $n = 2$, de *triplet* si $n = 3$, de *quadruplet* si $n = 4$, etc.
- On ne confondra pas (par exemple) la *paire* $\{a, b\}$ avec le *couple* (a, b) :
  - Si a et b sont différents, les couples (a, b) et (b, a) désignent en effet deux objets différents, alors que $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ désignent le même ensemble.
  - De même si $a = b$: l'ensemble $\{a, b\}$ se réduit au singleton $\{a\}$, alors que (a, a) est toujours un couple (mais dont les deux composantes sont égales).
- Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont égaux à un même ensemble E, on note E^n plutôt que $E \times E \times \cdots \times E$.
- Par définition, la *diagonale* de E^2 est l'ensemble $\Delta = \{(x, x), x \in E\}$.