Logique et raisonnement mathématique

1. Les propositions

Définition 1.1

Une proposition est un énoncé dont on peut dire s'il est vrai ou bien faux.
Un théorème est une proposition vraie particulièrement importante.
Un lemme est une proposition vraie utile à la démonstration d'un théorème.
Un corolaire est une proposition vraie conséquence immédiate d'une autre proposition vraie.
Une conjecture est une proposition qu'on pense généralement vraie sans en avoir la preuve
Les axiomes sont des propositions déclarées vraies sans démonstration.

Définition 1.2

À partir des propositions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, on définit ainsi :
- la *négation* « non $\mathcal{A}$ » (ou encore $\overline{\mathcal{A}}$, ou encore $\neg\mathcal{A}$).
- la *disjonction* « $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ » (notée également $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$).
- la *conjonction* « $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ » (notée également $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$).
- l'*implication* : la proposition « $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$ » (notée $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$)
- l'*équivalence* : la proposition « $\mathcal{A}$ équivaut à $\mathcal{B}$ » (notée $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$)

La valeur des propositions précédentes est résumée dans les *tableaux de vérité* ci-dessous.

$\mathcal{A}$	$\overline{\mathcal{A}}$
V	F
F	V

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Définition 1.3

Soit $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.
- La proposition « $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » dit qu'au moins un un élément x de E vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
  On dit que « $\exists$ » est le *quantificateur existentiel*.
- La proposition « $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » exprime que tout élément x de E vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
  On dit que « $\forall$ » est le *quantificateur universel*.
- La proposition « $\exists!\, x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » exprime qu'un et un seul élément x de E vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Proposition 1.1

Soit $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.
La négation de la proposition « $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » est « $\forall x \in E,\ \text{non}\, \mathcal{P}(x)$ »
La négation de la proposition « $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » est « $\exists x \in E,\ \text{non}\, \mathcal{P}(x)$ »

Définition 1.4

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.
Pour exprimer que la proposition « $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ » est vraie, on dit indifféremment :

- La proposition $\mathcal{A}$ est une *condition suffisante* de la proposition $\mathcal{B}$.
- La proposition $\mathcal{B}$ est une *condition nécessaire* de la proposition $\mathcal{A}$.
- Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie) il *faut* que $\mathcal{B}$ (soit vraie).
- Pour que $\mathcal{B}$ (soit vraie), il *suffit* que $\mathcal{A}$ (soit vraie).
- $\mathcal{B}$ (est vraie) *si* $\mathcal{A}$ (est vraie).
- $\mathcal{A}$ (est vraie) *seulement si* $\mathcal{B}$ (est vraie).

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.
Pour exprimer que « $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ » est vraie, on dit indifféremment :

- $\mathcal{A}$ est une condition *nécessaire et suffisante* (CNS) de $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{A}$ (est vraie) *si et seulement si* $\mathcal{B}$ (est vraie).
- Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie), *il faut et il suffit* que $\mathcal{B}$ (soit vraie).

Dans ces énoncés on peut bien sûr échanger le rôle de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

2. Raisonnements mathématiques

Proposition 2.1

(la règle du « modus ponens »)
L'implication suivante est toujours vraie : $\big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{A}\big) \Rightarrow \mathcal{B}$

(le raisonnement par contraposition)
L'équivalence suivante est toujours vraie : $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow ((\text{non}\,\mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non}\,\mathcal{A}))$.

(le raisonnement par l'absurde)
L'équivalence suivante est toujours vraie : $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \text{non}\,(\mathcal{A} \text{ et } \text{non}\,\mathcal{B})$.

(le syllogisme)
Soit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions.
L'implication suivante est toujours vraie : $\big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})\big) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$.

(la disjonction des cas)
Soit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions.
L'implication suivante est vraie : $\big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})\big) \Rightarrow \big((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}\big)$

Axiome

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Proposition 2.2

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Proposition 2.3

(principe de récurrence)
Soit A une partie de $\mathbb{N}$, contenant 0.
On suppose que si A contient un entier n, alors A contient $n+1$. Dans ces conditions, $A = \mathbb{N}$.

Proposition 2.4

(récurrence simple)

Soit $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les entiers naturels.

Soit n_0 un entier naturel. On suppose que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

On suppose également, pour tout entier $n \geqslant n_0$, que l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Proposition 2.5

(récurrence de pas 2)

Soit $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les entiers naturels.

Soit n_0 un entier naturel. On suppose que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.

On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, l'implication « $(\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ » est vraie.

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Proposition 2.6

(récurrence forte)

Soit $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les entiers naturels.

Soit n_0 un entier naturel. On suppose que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, l'implication $(\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1) \cdots$ et $\mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.