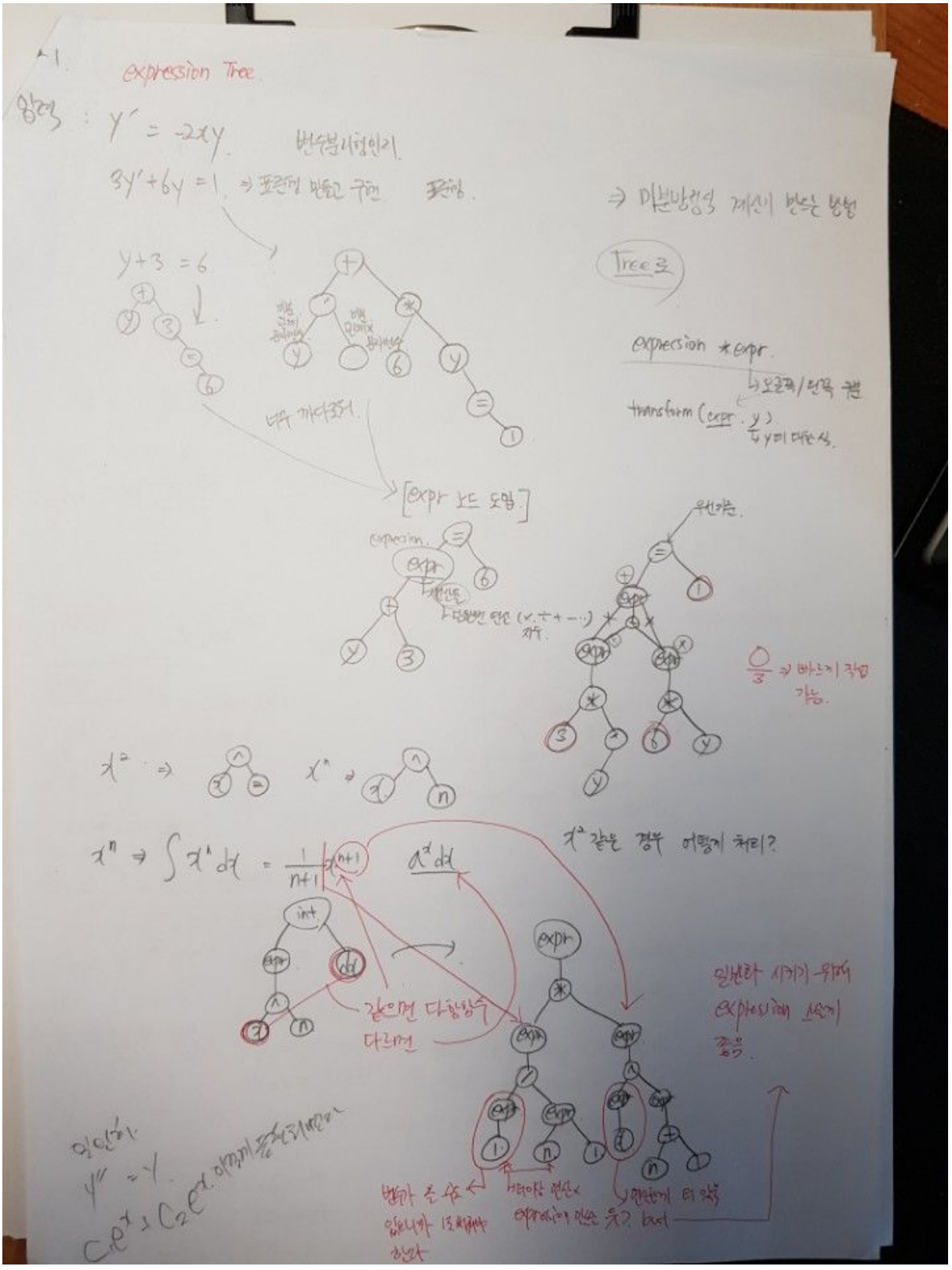
Xilinx Zynq FPGA, TI DSP, MCU기반의 프로그래밍 및 회로 설계 전문가 과정

강사 - Innov (이상훈)
gcccompil3r@gmail.com
학생 - 이유성
dbtjd1102@naver.com

1)Expression Tree
2)2계미분방정식 - 특성방정식
3)오일러 공식
4)코시-오일러 방정식



21-② 2계 미분방정식 -②

2,3계 미분 구하기 중요!

특성방정식

$ay'' + by' + cy = 0$ (계수가 상수)

$y = e^{rx}$ 3가정 why?

$y = e^{rx}$
$y' = re^{rx}$
$y'' = r^2 e^{rx}$

⇒ 특성방정식은 a.b.c가 상수여야 함

$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$

$e^{rx} \neq 0$ 이므로 $ar^2 + br + c = 0$

⇒ 미분방정식 2차 대수방정식으로 가는 것이다.

서로 다른 실근. $y_1 = e^{r_1 x}$ $y_2 = e^{r_2 x}$

중근 $y_1 = e^{rx}$

$y_2 = y_1 \cdot u$

$(\therefore r = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$ 중근 $=0$

$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$ ($\frac{b}{a} = p(x)$)

$u' = y_1^{-2} \cdot e^{-\int \frac{b}{a} dx}$

$u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} = \frac{1}{e^{-\frac{b}{a}x} \cdot e^{\frac{b}{a}x}} = 1$

$u = x$

$y_2 = x \cdot e^{rx}$

$y = C_1 e^{rx} + C_2 x \cdot e^{rx}$

적분상수 바뀌어 들어가 수학적 방정식

오일러 공식

자연상수 - 오일러 (복소수 미지수가 미치는 것)

실수만으로는? 복소수 평면에서?

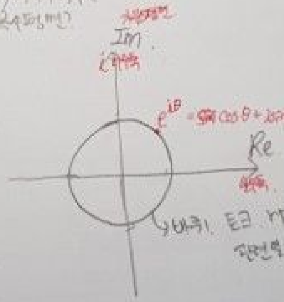
1. $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (허수)

$x^2 + y^2 = r^2$

$\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} = \vec{r}$ (원의 방정식)

$x \to -x$

2. $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$



전기회로에서 허수가 E 표현.

1+2 ⇒ $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ ⇒ $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

1-2 ⇒ $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$ ⇒ $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

→ programming으로 sin, cos 표현 X ⇒ e로 표현.

exponential? 지수로 할 수 있기 때문에 미분이 가능하다.

3. 복소근인 경우

i) $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$

$y_1 = e^{(\lambda + i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x}(\cos\mu x + i\sin\mu x)$

$y_2 = e^{(\lambda - i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{-i\mu x} = e^{\lambda x}(\cos\mu x - i\sin\mu x)$

$y_1 + y_2 = e^{\lambda x}(\cos\mu x + i\sin\mu x) + e^{\lambda x}(\cos\mu x - i\sin\mu x)$

⇒ $e^{\lambda x}\cos\mu x = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$e^{\lambda x}\sin\mu x = \frac{y_1 - y_2}{2i}$

$\therefore y = C_1 e^{\lambda x}\cos\mu x + C_2 e^{\lambda x}\sin\mu x$

ex) 1. $y'' + 5y' + 6y = 0$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 3$

2. $3y'' - 12y' + 12y = 0$ $y(0) = 3$ $y'(0) = 7$

3. $4y'' + y' + 5y = 0$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 2$

ex1) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$

$y = e^{rx}$ 가정.

$r^2 \cdot e^{rx} + 5 \cdot r \cdot e^{rx} + 6e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 + 5r + 6r) = 0$

$r = -2, -3$

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x}$

$C_1 + C_2 = 1$

$-2C_1 - 3C_2 = 3$ $\quad \therefore C_1 = 6,\ C_2 = -5$

$\Rightarrow \therefore 6 \cdot e^{-2x} - 5 \cdot e^{-3x}$

ex2) $3y'' - 12y' + 12y = 0$, $y(0)=3$, $y'(0)=7$

$r^2 \cdot e^{rx} - 4r \cdot e^{rx} + 4e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 - 4r + 4) = 0$

$r = 2$

$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{2x} \cdot x$

$y' = 2 C_1 \cdot e^{2x} + 2 \cdot C_2 e^{2x} x + C_2 \cdot e^{2x}$

$C_1 = 3 \quad 2C_1 + C_2 = 7$

$C_2 = 1$

$\Rightarrow \therefore y = 3 \cdot e^{2x} + e^{2x} \cdot x$

ex3) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$

$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-5}}{1}$ $\quad r = -2 \pm i$ $\quad e^{rx} = e^{-2x+xi},\ e^{-2x-xi}$

⇒ 일반해에 대입.

$C_1 \cdot e^{-2x} e^{xi} + C_2 e^{-2x} \cdot e^{-xi}$ (cos x, sin x)

$y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 \cdot e^{-2x} \sin x$

$y' = -2 \cdot C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos x - C_1 e^{-2x} \sin x - 2 \cdot C_2 e^{-2x} \sin x + C_2 e^{-2x} \cos x$

$C_1 = 1,\ C_2 = 4$ $\quad -2 + C_2 = 2$

$\Rightarrow \therefore y = e^{-2x} \cdot \cos x + 4 \cdot e^{-2x} \sin x$

$y_1 = e^{rx}$, $y_2 = x e^{rx}$

$y_2 = u y_1 = x e^{rx}$, $y_1 = e^{rx}$ ⟩ $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

이게 조합하기 쉬우니까 이 2개 다 표현하고 사용

$y_1 = e^{(-2+i)x} = e^{-2x} e^{ix} = e^{-2x}(\cos x + i \sin x)$

$y_2 = e^{(-2-i)x} = e^{-2x} e^{-ix} = e^{-2x}(\cos x - i \sin x)$

$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{-2x} \cos x$ $\qquad y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x$

$\frac{y_1 - y_2}{2} = + e^{-2x} i \sin x$

Cauchy - Euler 방정식

$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$

$x^2y'' + \frac{a_1}{a_2}xy' + \frac{a_0}{a_2}y = 0$ (y'' 계수 1 만드는 것 ⇒ 표준형 만드는 것.)

$y = x^m$ 가정 (why?) 해 찾아보기.

$y = x^m$, $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$.

$m(m-1)x^m + a\cdot mx^m + bx^m = 0$

⇒ $x^m(m^2 - m + am + b) = 0$

$\neq 0$ $\quad = 0$ $\quad m^2 + (a-1)m + b$. ⇒ 근의 공식.

$m = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 + b}}{2}$

차수 낮추기 특수 방정식

$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0$

$u = y_1^{-2} \cdot e^{\int -\frac{a}{x}dx} \cdot \ln x$ $\quad x^a$

$u = y_1 \cdot x \cdots$

$y_2 = uy_1$

$y_2 = \frac{1}{y_1}$

1) 서로 다른 두 실근.

$m = m_1,\ m_2$

$\therefore y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$

2) 중근

$y_1 = C_1x^m$. $y_2 = y_1 \cdot u$ $\quad \therefore y = C_1x^m + C_2x^m\ln x$. 중근 $m = -\frac{(a-1)}{2}$

$y'' + ax^{-1}y' + bx^{-2}y = 0$. ⇒ $u' = \frac{1}{y_1^2 e^{\int P(x)dx}} = \frac{1}{x^{2m}e^{a\ln x}}$.

⇒ $\int u' = \int x^{-2m}e^{-a\ln x}$. ⇒ $\int x^{-2m-a}dx = \int x^{-1}dx = \ln x$ $\quad \therefore y_2 = x^m\ln x$.

$\therefore C_1x^m + C_2x^m\ln x$

3) 복소근.

$m = \lambda \pm i\mu$

$y_1 = x^\lambda x^{i\mu} = x^\lambda \cdot e^{i\mu\ln x}$.

$= x^\lambda\{\cos(\mu\ln x) + i\sin(\mu\ln x)\}$

$\therefore y = C_1x^\lambda\cos(\mu\ln x) + C_2x^\lambda\sin(\mu\ln x)$