

TI DSP, MCU 및 Xilinx Zynq FPGA

프로그래밍 전문가 과정

강사 - Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com
학생 - 하성용
accept0108@naver.com

60 일차

라플라스 트랜스폼 응용 예제

회로가 어떻게 동작하는지//안테나회로

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$i_c = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow V_c = \frac{1}{C} \int i dt$$

힌트 :

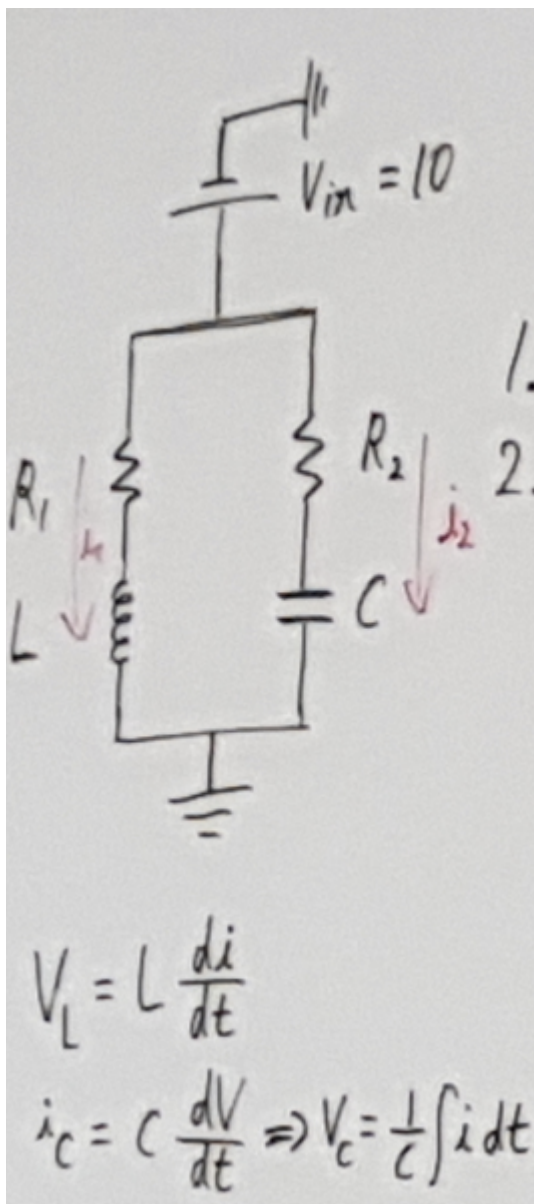
콘덴서는 전압을 저장

저장하게되면 전기장이 생김

전기장을 미분하면 전압

L 은 자기장을 가지고있다는건 전류에 의존적

R₁ R₂ 합치기 가능



//10 V 돌림
=10

//좌측 저항기(R)와 인덕터(L)에 걸리는 전압

1. $10 = i_1 R_1 + L i_1'$

//우측 저항기(R)와 콘덴서(C)에 걸리는 전압

2. $i_c = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow V_c = \frac{1}{C} \int i dt$

2. $10 = i_2 R_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt$

//이렇게 하나는 미분 하나는 적분방정식이 나옴

↓
//처음키자마자 전류가 안흘러서 $i(0)=0$
 $10/s = i_1(s) R_1 + L \{s i_1(s) - i(0)\}$

$10/s = i_2(s) R_2 + \frac{1}{C} \frac{1}{s} i_2(s)$

↓
 $10 = s i_1(s) R_1 + L s^2 i_1(s)$
 $10 = s i_2(s) R_2 + \frac{1}{C} i_2(s)$

↓
 $i_1(s) = 10 / (L s^2 + R_1 s)$

$i_2(s) = 10 / (1/C + R_2 s) = 10 / (R_2 s C + 1/C) = 10 C / (R_2 s C + 1)$

//L 로 묶기

$i_1(s) = 10 / (L s^2 + R_1 s) = 10 / (L (s^2 + R_1/L s))$
 $(s + R_1/2L)^2 - R_1^2/4L^2$

$i_1(s) = 10 / L \{ (s + R_1/2L)^2 - R_1^2/4L^2 \}$

$w/s^2 - w^2 = L^{-1} \{ \cosh(wt) \}$

$w = R_1/2L$, 그러므로 계수는 $2L/R_1$ 10

$i_1(t) = 20/R_1 \cosh(R_1/2L t) e^{-R_1/2L t}$

i_1 값 구했고

이제 우리는 인덕터에 걸리는 전압도알수있음
한번더 미분하면됨

$$V_L(t) = R_1 / 2L \cdot 20 / R_1 \sinh(R_1 / 2L t) e^{-R_1 / 2L t} - R_1 / 2L \cdot 20 / R_1 \cosh(-R_1 / 2L t) e^{-R_1 / 2L t}$$

i2 도 마무리

다해보니

i1 과 i2 가 서로 관계가 없다

그렇다면 바로 풀수있음

$$I_1(s) = 10 / (s^2 + R_1 s)$$

$$I_2(s) = 10 / (1/c + R_2 s) = 10 / (R_2 s c + 1/c) = 10c / (R_2 s c + 1)$$

//L 로 묶기

$$I_1(s) = 10 / (s^2 + R_1 s) = 10 / (L(s^2 + R_1 / L s))$$

$$\rightarrow I_2(s) = 10c / (R_2 s c + 1) = 10c / (R_2 c(s + 1/R_2 c)) = 10 / (R_2 \cdot 1 / (s + 1/R_2 c))$$

$$i_2(t) = 10 / R_2 e^{-t/R_2 c}$$

콘덴서에 걸리는전압은 Vc 로 구할수있음

$$V_C(t) = 1/c \int i_2(t) dt$$

$$= 1/c \cdot 10 / R_2 \int_0^t e^{-t/R_2 c} dt$$

$$= -10 / R_2 c \cdot R_2 c [e^{-t/R_2 c}]_0^t$$

$$= -10 e^{-t/R_2 c} + 10$$

$$= 10(1 - e^{-t/R_2 c})$$

The image shows a handwritten solution for an RL circuit problem. On the left, a circuit diagram is drawn with a voltage source \$V_{in} = 10\$, a resistor \$R_1\$, an inductor \$L\$, and a parallel combination of a resistor \$R_2\$ and a capacitor \$C\$. The current through the inductor is \$i_1\$ and the current through the capacitor is \$i_2\$. The voltage across the capacitor is \$V_C\$.

The derivation proceeds as follows:

- For the inductor branch: \$10 = i_1 R_1 + L \frac{di_1}{dt}\$
- For the capacitor branch: \$10 = i_2 R_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt\$
- Transforming to the s-domain:
 - \$I_1(s) = \frac{10}{s^2 + R_1 s}\$
 - \$I_2(s) = \frac{10}{\frac{1}{C} + R_2 s} = \frac{10C}{R_2 s c + 1/c} = \frac{10c}{R_2 s c + 1}\$
- Partial fraction decomposition for \$I_1(s)\$:
 - \$I_1(s) = \frac{10}{s(s + \frac{R_1}{L})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{R_1}{L}}\$
 - \$A = \frac{10}{\frac{R_1}{L}} = \frac{10L}{R_1}\$
 - \$B = -\frac{10L}{R_1}\$
 - \$I_1(s) = \frac{10L}{R_1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R_1}{L}} \right)\$
- Partial fraction decomposition for \$I_2(s)\$:
 - \$I_2(s) = \frac{10c}{R_2 s c + 1} = \frac{10c}{R_2 c(s + \frac{1}{R_2 c})} = \frac{10}{R_2} \cdot \frac{1}{(s + \frac{1}{R_2 c})}\$
 - \$I_2(s) = \frac{10}{R_2} \cdot \frac{1}{(s + \frac{1}{R_2 c})}\$
- Inverse Laplace transforms:
 - \$i_1(t) = \frac{10L}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L} t} \right)\$
 - \$i_2(t) = \frac{10}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 c}}\$
- Capacitor voltage \$V_C(t)\$:
 - \$V_C(t) = \frac{1}{C} \int i_2(t) dt = \frac{1}{C} \int \frac{10}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 c}} dt\$
 - \$V_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \frac{10}{R_2} \left(-R_2 c \right) \left(e^{-\frac{t}{R_2 c}} - 1 \right)\$
 - \$V_C(t) = -10 e^{-\frac{t}{R_2 c}} + 10 = 10(1 - e^{-\frac{t}{R_2 c}})\$

example

다음 그림과 같은 회로에서 초기 전류와 축전자의 초기 전하는 0이라고 가정한다.
 $t = 2$ 초일 때 스위치를 B에서 A로 옮겨 1초 동안 머물고 난 뒤 다시 B로 돌린다.
 이와 축전기에 걸리는 전압을 구해보자!
 입력 전압은 $t = 2$ 초 이전에는 0이고 $t = 2$ 초부터 10V 가 되었다가
 $t = 3$ 초 이후에는 다시 0이 되므로 전압의 함수는 아래와 같다.

$$V_c(t) = 10[H(t-2) - H(t-3)]$$

$$I(t)R + \frac{q(t)}{C} = V_c(t) = 250000 \frac{dq(t)}{dt} + 10^6 q(t)$$

$$250000 \frac{dq(t)}{dt} + 10^6 q(t) = 250000 \frac{d}{dt}[H(t-2) - H(t-3)] + 10^6 [H(t-2) - H(t-3)]$$

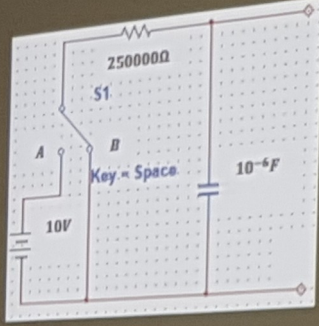
$$250000 \frac{dq(t)}{dt} + 10^6 q(t) = 10^6 [H(t-2) - H(t-3)] + \frac{10}{s} e^{-2s} - \frac{10}{s} e^{-3s}$$

$$2.5(10^5) \frac{dq(s)}{ds} + 10^6 Q(s) = \frac{10}{s} e^{-2s} - \frac{10}{s} e^{-3s} = Q(s) 10^6 \left(\frac{1}{s} + 1 \right) = Q(s) 10^6 \left(\frac{s+4}{s} \right)$$

$$Q(s) = \left(\frac{10^{-5}}{s} e^{-2s} - \frac{10^{-5}}{s} e^{-3s} \right) \left(\frac{s}{s+4} \right) = (10^{-5}) \frac{4}{s(s+4)} e^{-2s} - (10^{-5}) \frac{4}{s(s+4)} e^{-3s}$$

$$Q(s) = (10^{-5}) \left[\frac{1}{s} - \frac{4}{s+4} \right] (e^{-2s} - e^{-3s})$$

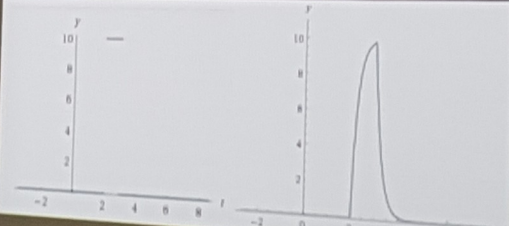
$$q(t) = (10^{-5}) [1 - e^{-4(t-2)}] H(t-2) - (10^{-5}) [1 - e^{-4(t-3)}] H(t-3)$$

$$V_c(t) = 10 [1 - e^{-4(t-2)}] H(t-2) - [1 - e^{-4(t-3)}] H(t-3)$$


Key = Space

$$\frac{4}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} \Leftrightarrow 4 = sA + 4A + sB$$

$$A + B = 0, \quad 4A = 4$$

$$A = 1, \quad B = -1$$


1 번째줄// 3 초이후엔 다시 0 으로 떨어짐 2 초와 3 초사이에 살아있음

키리호프의 전압법칙사용~

콘덴서에 걸리는 전압

$Q = Cv$

$V = Q/C$

10 볼트에 해비사이드함수

2 번째줄// 10 에 6 승

3 번째줄// $sQ(t) \rightarrow sQ(s)$

식을 앞으로 뽑아내고 라플라스 트랜스폼

6 번째줄 : 수식정리

7 번째줄 : 부분분수 전개

a 값 b 값구해서 각각이 1 이다

마지막

인버스 트랜스폼해서 정리

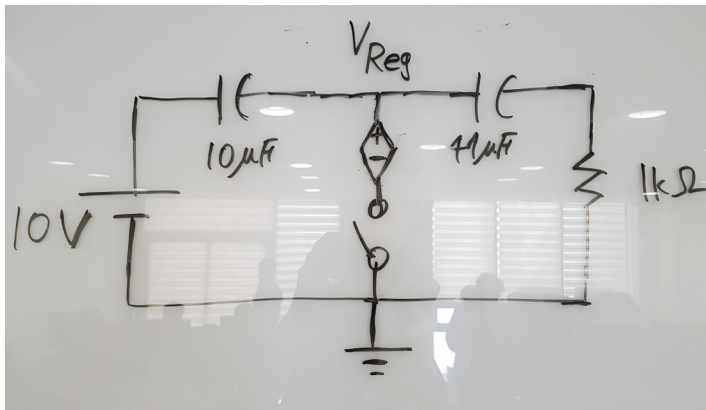
t 에다가 해비사이드값을 꼭 넣어줘야함

즉, 두개를 분리할 필요가없음

해비사이드평선을 할때 라플라스트랜스폼하면 좋다

7805 할때 매우 유용

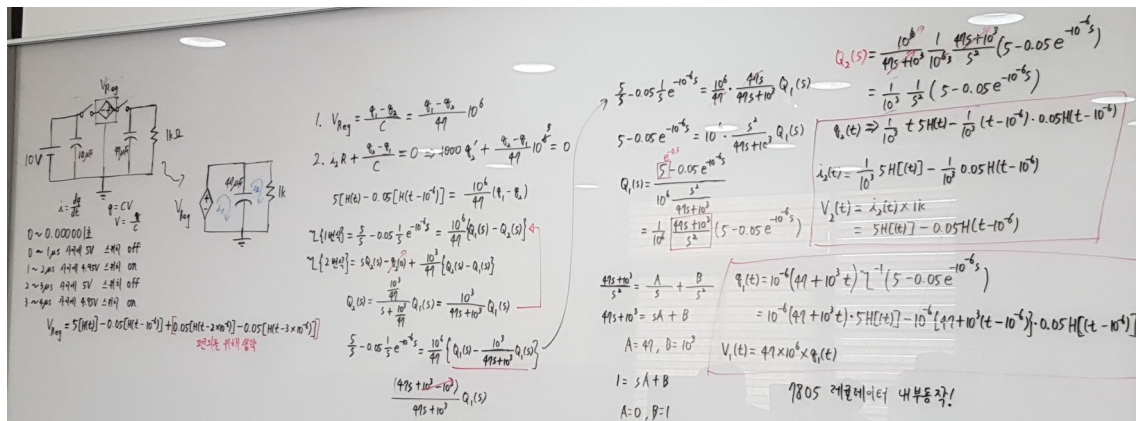
해비평선을사용해서 라플라스 트랜스폼과 함께 식을 구해보자



3~4 μ s 사이에 4.95V 스위치 on

// 0.2 초후엔 4.95 가되어야함

5 볼트를 제대로 만들어내나 리플이 제대로 동작하는지


$$V_2(t) = i_2(t) \times 1K$$

$$=5H(t)-0.05H(t-10^{-6})$$

//콘덴서와 저항기의 전압제어방법이 다르다

//코사인 엄청 많으면 직선이 만들어진다

//코사인과 사인만으로 $y=x$ 로 표현가능해진다

푸리에 급수

철판에 불을 지졌는데

열이 시간차를 두고 전달이 된다는걸 알게되고 이걸 어떻게 표현할방법이없을지

이분방정식(최초의 편미분방정식 만듦)만들

편미분방정식(열전달함수)을 풀기위해 만든게 푸리에 급수

함수가 직교를 해야 푸리에급수가 성립

함수의 내접은 어떻게?

함수의 내접을 수행하는방법

$f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 직교한다는걸 어떻게 표현?

코사인 엑스랑 사인엑스

서로 직교하는지 안하는지?

언제나 위상차이가 90 도 두함수는 언제나 직교하고있음

이걸 어떻게 표현?

함수의 직교성을 표현하는 방법

코사인 90 도 몇? 0

내적을해서 0 이되면 90 도다 직각이다

함수도 내적을해서 0 이되면 함수도 서로 직교한다는걸 알수있음

대표적으로 코사인과 사인, 코사인과 -사인

두함수를 내적한다음에 적분한다

슬라이드 1

411 / 522

에서 두 함수 f 와 g 의 내적은 상수고 아래와 같다.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

크기(Magnitude) 혹은 노름(Norm)은 $\|f\|$ 로 표기하고, 아래와 같이 정의한다.

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

란 것은 두개의 벡터가 직교라는 것을 의미한다.
수형태로 있을 경우에도 두 함수가 서로 직교하다는 것을 의미한다.
함수를 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

함수 내적이 0 이되었다= 함수가 직교한다

f 랑 g 가 아니라

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

두함수가 서로 직교한다!

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sin(2x) dx \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\sin x = e^{ix} - e^{-ix} / 2i$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix} - e^{-ix} / 2i \cdot e^{2ix} - e^{-2ix} dx$$

$$= -1/4 \int_{-\pi}^{\pi} (e^{ix} - e^{-ix})(e^{2ix} - e^{-2ix}) dx$$

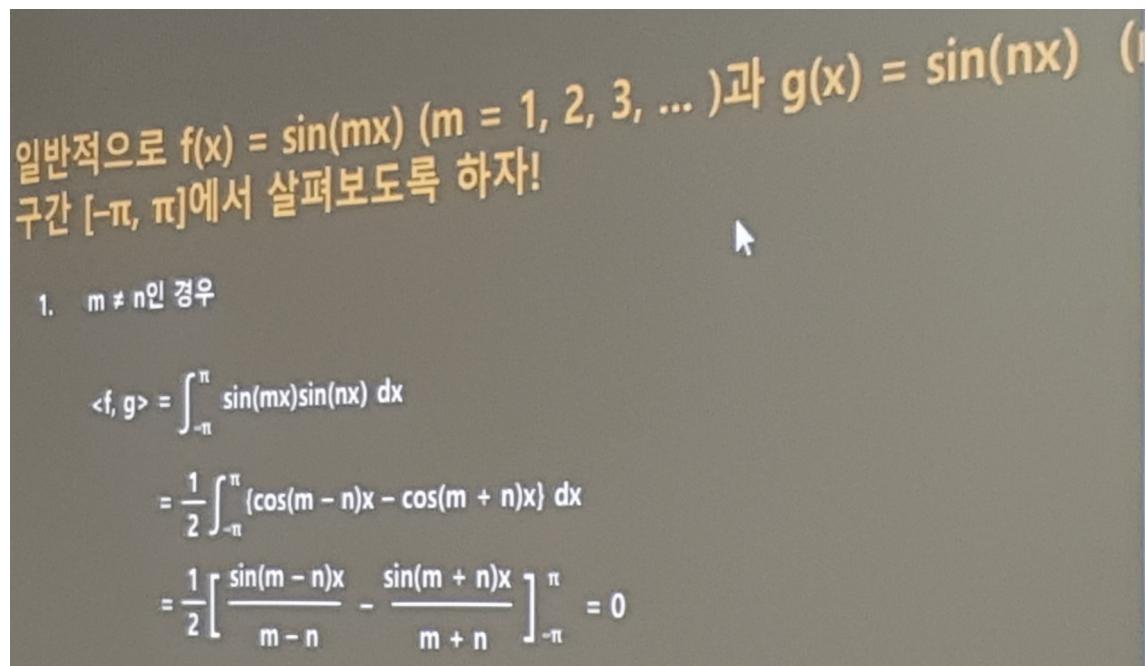
$$= -1/4 \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix} - e^{-ix} - e^{ix} - e^{-3ix} dx$$

$$= 1/2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) - \cos(3x) dx$$

$$= 1/2 [\sin(\pi) - \sin(-\pi)] - 1/2 [\sin(3\pi) - \sin(-3\pi)]$$

결론 0

sin x 랑 sin 2x 가 직교



푸리에 트랜스폼을 하기위해서 앞에 해야할 기초작업들

//sin(mx)와 sin(x)가 서로 직교하는지

주기적분의 특성상 코사인은 0 이된다

앞에 1/2 남고

$$\left[\begin{array}{cc} e^{ix} + e^{-ix} & e^{3ix} + e^{-3ix} \\ \sin(x) & \sin(2x) \end{array} \right]$$

두 계수의 합
두 계수의 차

$$e^{i(m+n)x} + e^{-i(m+n)x}, e^{i(m-n)x} + e^{-i(m-n)x}$$

//m 하고 n 이 같은경우

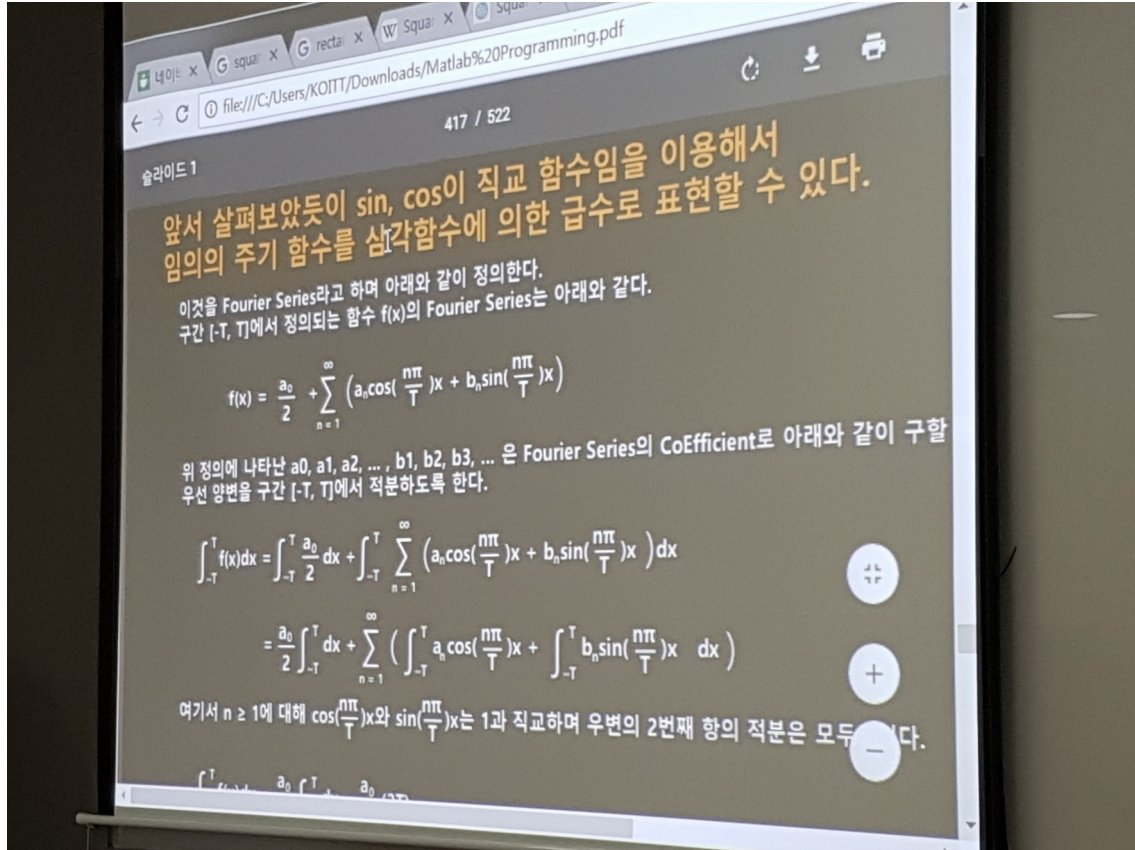
sin(nx), sin(mx)의 직교판정

$$n=m=1$$

$$\sin x = e^{ix} - e^{-ix} / 2i$$

$\int -(e^{ix} - e^{-ix})^2 / 4 = -1/4 \int e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}$
 $= -1/2 \int e^{2ix} + e^{-2ix} / 2 = 0$ 같지않다기호 0
 $\cos(2x) - 1 \rightarrow$ 주기적분 0
 즉, $n=m$ 이 같으면 직교하지 않는다!

무한히 많이 더해서 0 을 만들수있다
 초항만 더하면 직선이 만들어진다는거
 그게 푸리에급수의 시작



//주기를가지고있다면 사인과 코사인을 가지고 0 으로 표현할수있다

수식안쪽을 보면 계수가있고 T분에 $n\pi x$ 가 걸려있는데
 지금 이거는 푸리에 급수 그자체.정의를 적어놓음

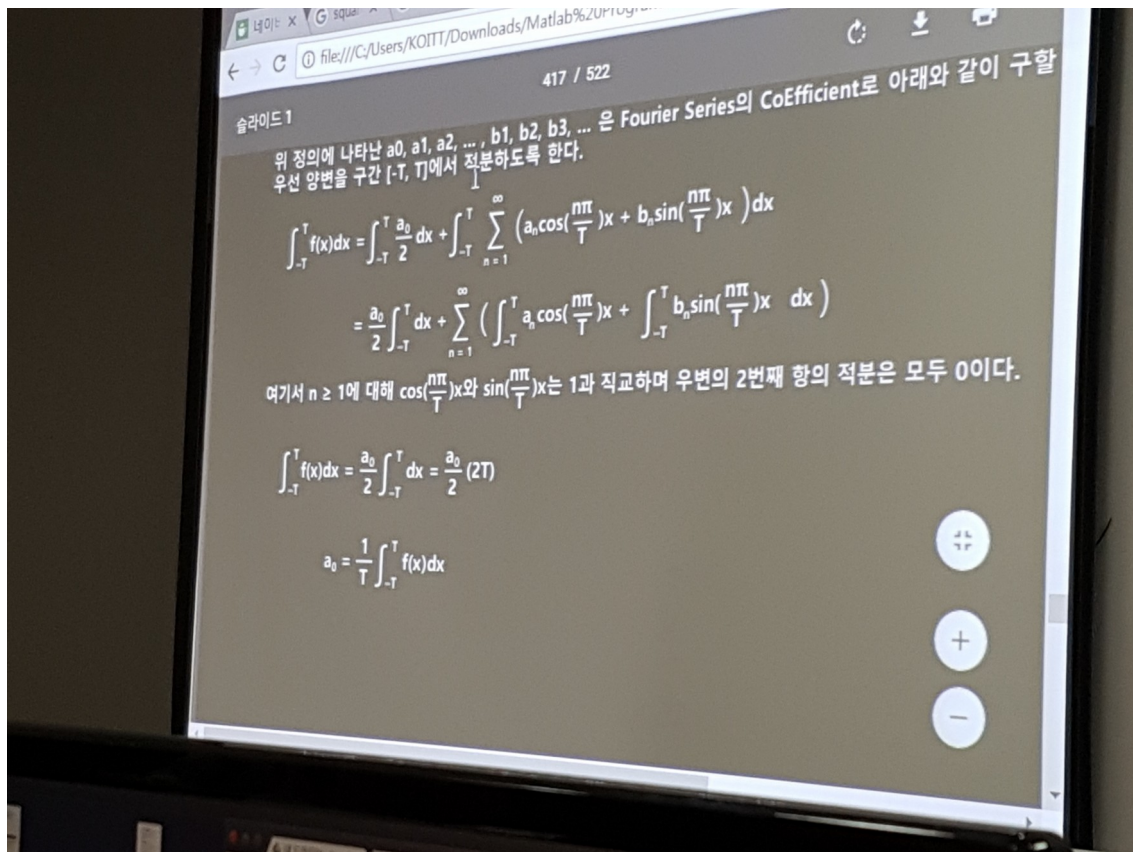
a_0, a_n, b_n 구하는데 초점을 맞춤

푸리에 급수

$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi/T x) + b_n \sin(n\pi/T x))$ - 정의

주기적분의 특성 - 푸리에 특성, 푸리에 급수
 주기가없어도 푸리에 트랜스폼을 할수있음
 푸리에 트랜스폼 약점 시간정보를 잃어버림
 그래서 Laplace(Z-transform) 사용
 Z-transform 시간정보 저장

라플라스 단점 : 스펙트럼 뽑아내지못함



$$\int_{-T}^T \cos(n\pi/T x) dx = a_0$$

주기적분의 특성 : 무조건 0

여기보면 $f(x)$ 가 값이 있을수도있음
 값이 있을수도있기에 죽일수없음
 뒤에 cos 은 죽일수있음
 cos 과 sin 은 아까 직교였음 죽이기

$$\int_{-T}^T f(x) \cos(n\pi/T x) dx = a_0/2 \int_{-T}^T \cos(n\pi/T x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \int_{-T}^T a_n \cos(n\pi/T x) \cos(m\pi/T x) dx + \int_{-T}^T b_n \sin(n\pi/T x) \cos(m\pi/T x) dx \}$$

$$\int_{-T}^T f(x) \cos(n\pi/T x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \int_{-T}^T a_n \cos(n\pi/T x) \cos(n\pi/T x) dx \} / a_n$$

$$a_n = 1/T \int_{-T}^T f(x) \cos(n\pi/T x) dx$$

//cos 제곱 주기적분
 왜 T가 나오는지 이해못하면

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

애를 제공했다는건?

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix} + 2)$$

$$= \frac{1}{2} (e^{2ix} + e^{-2ix} + 1)$$

계산결과 a_n

a_n 에 대해 정리

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos(n\pi/T x) dx$$

남은 건 sin

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \sin^2 x = -\frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2)$$

$$= -\frac{1}{2}(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} - 1)$$

$$\int_{-T}^T f(x) \sin(n\pi/T x) dx = a_0/2 \int_{-T}^T \sin(n\pi/T x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \int_{-T}^T a_n \cos(n\pi/T x) \sin(m\pi/T x) dx + \int_{-T}^T b_n \sin(n\pi/T x) \sin(m\pi/T x) dx \}$$

$$b_n$$

$$b_n = 1/T \int_{-T}^T f(x) \sin(n\pi/T x) dx$$

$$a_0 = 1/T \int_{-T}^T f(x) dx$$

사각파만들기(펄스파)

지금까지와 다른점 버터플라이

$$\left. \begin{array}{l} 0 \quad (-\pi \leq x < 0) \\ 1 \quad (0 \leq x < \pi) \end{array} \right\} f(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right) \frac{1}{\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{T} x\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{T} x\right) dx \right) = \left[\sin\left(\frac{n\pi}{T} x\right) \right]_0^{\pi} \frac{1}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{T} x\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{T} x\right) dx \right) = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{T}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{T} x\right) \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2T}{n\pi^2} \left(\cos(n\pi) - 1 \right) = -\frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{T} x\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \sin(n\pi x) \right\}$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{T} x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n} [\cos(n\pi) - 1]$$

$$= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

$$0 \quad (-\pi \leq x < 0)$$

} f(x)

$$1 \quad (0 \leq x < \pi)$$

$$a_0 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \text{적분}$$

$$\left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right) 1/\pi = 1$$

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n\pi/T x) dx$$

$$= 1/\pi \left\{ \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{T} x\right) dx \right\} = \left[\sin\left(\frac{n\pi}{T} x\right) \right]_0^{\pi} \frac{1}{\pi}$$

//cos 적분하면 sin

//sin 을 미분하면 코사인하는 것과 반대

//sin 180 도는? 0

//결론적으로 a_n 은 값이 없다

$$\begin{aligned}
 \text{마지막 } b_n &= 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n\pi/T x) dx \\
 &= 1/\pi \left\{ \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} \sin(n\pi/T x) dx \right\} \\
 &= -1/\pi \left[T/n\pi \cos(T/n\pi x) \right]_0^{\pi} \\
 // \text{사인을 적분하면 코사인되는데 - 부호가 붙음} \\
 &= -2T/n\pi^2 = -2/n\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= 1/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{-2/n\pi \sin(n\pi/T)\} \\
 &= 1/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{1/n\pi [1 - \cos(n\pi)] \sin(nx)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 // \text{어떤상황에도 적용가능} \\
 -1/x \cdot 1/n [\cos(nx)]_0^{\pi} \\
 &= -1/n\pi [\cos(n\pi) - 1] \\
 &= 1/n\pi (1 - \cos(n\pi))
 \end{aligned}$$