TI DSP, MCU 및 Xilinx Zynq FPGA 프로그래밍 전문가 과정

2018-05-25 (61 회차)

강사 - Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com
학생 - 정유경
ucong@naver.com

오늘 배운 내용

- 톱니파 푸리에 급수로 나타내기 : 함수발생기의 톱니파 생성방법과 동일함
- 푸리에 적분
- 비주기 함수 푸리에 적분으로 표현하기 : T 를 무한대로 보낼 때 , 레이더에서 활용
- 라플라스 적분 : 복잡한 함수의 적분에도 사용가능
- 푸리에 변환 : 푸리에 변환을 컴퓨터가 계산하면 DFT 혹은 FFT 가 된다.
- 테일러 급수 : lim x->0 [sin(x) / x] = 1 증명 (매클로린 급수에서 a=0)

"로피탈 정리, 샌드위치 정리"라고도 한다

무한미분이 가능한 함수의 극한은 매클로린 급수를 이용한다.

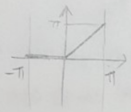
톱니파 푸리에 급수로 표현하기

ex) $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ x & (0 < x < \pi) \end{cases}$

(구형 신호·정현·톱니파)

함수발생기에

푸리에 급수가 사용된다



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cdot \cos\frac{n\pi}{T}x + b_n \cdot \sin\frac{n\pi}{T}x\right\}$$

주의! (표현 방식이 다름)

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\cancel{-\pi}\,0}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

부분적분 or ~~도표적분~~

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\cancel{-\pi}\,0}^{\pi} x\cdot\cos(nx)\,dx = \left[\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\cdot x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx\right]\times\frac{1}{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[+\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\{\cos n\pi - 1\}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\cancel{-\pi}\,0}^{\pi} x\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\cdot x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cdot\cos(nx)\,dx\right.$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\{\cos(n\pi)\cdot\pi\} + \frac{1}{n^2}\left[\cancel{\sin(nx)}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\cos(n\pi)}{n}$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}\{\cos(n\pi) - 1\}\cos nx - \frac{1}{n}(\cos n\pi)\sin nx\right\}$$

n이 커질수록 원래의 f(x)에 가까워진다.

즉 $y=x$와 동치 $(x>0)$

샘플링 AA

부분 AA

비용 AA

주용 system은 테이블 계산 필요?

비용적 → 실현 가능한 푸리에 급수가 좋다.

주기 $L \to \infty$ $\quad -L<x<L$

* 푸리에 적분 $\quad$ 급수

주기가 꼭 필요

비주기 함수도 표현 가능.

by $x_k = a + k\Delta x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \Leftarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x.$$

∴ 주기, 비주기 함수 모두 사인과 코사인의 합으로 나타낼 수 있다.

푸리에 급수.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) + b_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\right\}$$

$$\hookrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(p)\,dp}_{a_0} + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\underbrace{\int_{-T}^{T} f(p)\cdot\cos\left(\overset{w_n}{\frac{n\pi}{T}}p\right)dp}_{a_n}\cdot\cos\left(\overset{w_n}{\frac{n\pi}{T}}x\right)dx\right.$$

○ 주기적분하면

기함수 X

우함수 0만 남는다

$$\left. + \underbrace{\int_{-T}^{T} f(p)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{T}p\right)dp}_{b_n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx\right]$$

※ 등속 원운동.

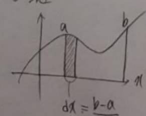
원주 $2\pi r$.

$$\underset{(주기)}{시간} = \frac{거리}{속도} = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega}$$

$v = r\omega$ 이므로

$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow$ "$\omega = 2\pi f$"

※ 적분



$dx = \frac{b-a}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overset{사다리꼴}{\frac{\{f(a) + f(a+dx)\}\times dx}{2}} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ 가 된다.}$$

<fo 다자인방식의 미분.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x[1] - x[0]}{0.001}$$

※ 한바퀴는 2π

∠θ에 대해서는 $\frac{T}{n}$ (적분해서 전개) $\xrightarrow{?}$ $\omega_n = \frac{n\pi}{T}$

각도는 $\frac{2\pi}{2n} = \theta$

※ $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{n+1}{T}\pi - \frac{n\pi}{T} = \frac{\pi}{T}$ 에서 $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{\pi}$ 이용.

※ 주파수 같을 때 $(m=n)$ 직교하지 X 즉 내적 $\neq 0$.

따라서 푸리에 급수는 다음과 같이 바꿀수 있다.

$$f(x) = \cancel{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(p)\,dp} + \frac{\Delta\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\cos(\omega_n p)\underbrace{\boxed{\int_{-T}^{T} f(p)\cos(\omega_n p)}}_{A_\omega} + \sin(\omega_n p)\underbrace{\boxed{\int_{-T}^{T} f(p)\cdot\sin(\omega_n p)\,dp}}_{B_\omega}\Big\}$$

$$\lim_{T\to\infty} f(x) = 0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega p)\cdot\boxed{A_\omega} + \sin(\omega p)\boxed{B_\omega}\,d\omega.$$

$$\begin{cases} A_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\cdot\cos(\omega p)\,dp \\ B_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\cdot\sin(\omega p)\,dp \end{cases}$$

왜했지?

$$\therefore f(x) = \int_0^{\infty}\{A_\omega\cos(\omega p) + B_\omega\sin(\omega p)\}\,d\omega$$

※ $e^{i(a-b)} = \cos(a-b) + i\sin(a-b)$
$= \cos a\cos b + \sin a\sin b$
$+ i\{\sin a\cos b - \cos a\sin b\}$

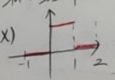
$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{ia}e^{ib}$

$e^{-i(a+b)} = \cos(a+b) - i\sin(a+b) = e^{-ia}e^{-ib}$

$(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$
$= \cos a\cos b + i\sin a\cos b + i\sin b\cos a - \sin a\sin b$.

푸리에 적분 구하기

ex)



$$A_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\cos(\omega p)\,dp$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} 0\,dp + \int_0^1 \cos(\omega p)\,dp + \int_1^{\infty} 0\,dp\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega}[\sin\omega p]_0^1 = \frac{1}{\omega\pi}\sin\omega.$$

$$B_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\cdot\sin(\omega p)\,dp$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} 0\,dp + \int_0^1 \sin(\omega p)\,dp + \int_1^{\infty} 0\,dp\right] = -\frac{1}{\omega\pi}[\cos\omega p]_0^1 = -\frac{\cos\omega}{\omega\pi} + \frac{1}{\omega\pi}$$

$$\therefore f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega\pi}\sin\omega\cdot\cos\omega p - \frac{1}{\omega\pi}\cos\omega\sin\omega p + \frac{1}{\omega\pi}\sin\omega p\,d\omega$$ 주의!

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega\pi}\sin(\omega - \omega p) + \frac{1}{\omega\pi}\sin\omega p\,d\omega.$$

ex) $f(x) = e^{-2x}$ $(x>0)$ 푸리에 적분 구하기

$A_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\cdot\cos\omega p\,dp$ 이므로

$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-2p}\cos\omega p\,dp$ → 풀이방법

1. 부분적분 복잡!
2. 오일러
3. 라플라스 변환 응용

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ 이므로

$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\omega^{s}}{2^2+\omega^2}$ ← 잘못한듯? check 필요.

① "라플라스 적분" Laplace Integral.

② or 헤비사이드 함수 이용해서 e^{-2x} 없앨수 있다?

$B_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\cdot\sin\omega p\,dp$. 이므로

$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-2p}\sin\omega p\cdot dp = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\overset{\omega}{\cancel{2}}}{2^2+\omega^2}\right)$

$$\therefore f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\omega}{2^2+\omega^2}\cos\omega x + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{2^2+\omega^2}\sin\omega x\,dx$$

예제의 푸리에 적분을 이용하여

$e^{-2x} \overset{?}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega\cos\omega t}{2^2+\omega^2}\,dx$ 이므로 $\int_0^{\infty} \frac{\omega\cdot\cos\omega t}{2^2+\omega^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-2x}$ 있음을 알수있다

이런 형태도 적분가능!

$e^{-2x} \overset{?}{=} \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{2^2+\omega^2}\cdot\sin\omega x\,dx$ 이므로 $\int_0^{\infty} \frac{1}{2^2+\omega^2}\sin(\omega x)\,dx = \frac{\pi}{4}e^{-2x}$

* Fourier $\frac{1}{\pi}$? Transform. 주파수 성분만 뽑아낸다. (W성분 주파수)

$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx$ ← 이것을 컴퓨터가 계산하는 DFT 혹은 FFT

※ 부분적분으로 풀수 없으면 $\mathcal{L}$ 변환을 응용하자!

그러나 $y=e^{-x^2}$은 계산할 수 없다.

해결! → 급수함수, 테일러 급수.
↳ 1:1 적분이 가능하도록 해줌.
살림!

테일러 전개 이상 → 각각 정적분의 오차는 가짐.
세서
↳ 참지키면: 급수함수 (근사의 연산)

* 테일러 급수 Taylor Series.

전제: 무한번 미분이 가능 (당연히 연속)
∵ 부분적분으로 증명되기 때문.

- 다항식 지는 계산보다 테일러 급수로 근사치 구하기가 더 쉬운 경우 많다.
- 조지탈 정리에도 Taylor 급수가 사용된다

<테일러 정리 증명>

$\int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a)$. 에서 $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$

~~$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$~~ 미분과 적분되는 함수를 만들자! 따라서 (+1)을 $f'(x)$로 놓는다. ~~g(x)~~

$$\int_a^x f'(t)\cdot 1\, dt = \left[t f'(t)\right]_a^x - \int_a^x t f^{(2)}(t)\, dt$$

$$= xf'(x) - af'(a) - \int_a^x t\cdot f^{(2)}(t)\, dt$$

대입 ← $\int_a^x x f''(t)dt = x\int_a^x f''(t)dt = x\{f'(x) - f'(a)\}$

$\therefore x f'(x) = \int_a^x x f''(t)dt + x f'(a)$

$$= \int_a^x x f''(t)dt + xf'(a) - af'(a) - \int_a^x t f''(t)\,dt$$

$$= \int_a^x (x-t)f''(t)dt + f'(a)\cdot(x-a)$$

$\therefore f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \int_a^x (x-t)\cdot f^{(2)}(t)\,dt$ 로 표현 가능

이 부분을 변경시켜 보면

※ $\int_a^x (x-t)\cdot f''(t)\,dt = \left[-\frac{1}{2}(x-t)^2\cdot f''(t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{1}{2}(x-t)^2\cdot f^{(3)}(t)\,dt$

$$= -\frac{1}{2}\{0 - (x-a)^2 f''(a)\} + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2\cdot f^{(3)}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2\cdot f^{(3)}(t)\,dt$$

⇒ $f(x)$에 대입하면,

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2\cdot f^{(3)}(t)\,dt$$

※ 규칙성을 찾기 위해 살펴보자

$$\int_a^x (x-t)^{n-1}\cdot f^{(n)}(t)\,dt = \left[-\frac{1}{n}(x-t)^n\cdot f^{(n)}(t)\right]_a^x + \int +\frac{1}{n}\cdot(x-t)^n\cdot f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{n}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{n}\int_a^x (x-t)^n\cdot f^{(n+1)}(t)\,dt$$ 이다.

⇒ 1에 3, 4, 5 … 를 대입해보면

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}(x-a)^3 f^{(3)}(t) + \frac{1}{3}\int_a^x (x-t)^3 f^{(4)}(t)\,dt\right\}$$

⋮

$$f(x) = \underbrace{\left[f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}(x-a)^3 f^{(3)}(a) + \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)\right]}_{P_n} + \underbrace{\left[\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\right]}_{R_n}$$

$f(x) = P_n + R_n$ 이라고 할때

$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\cdot f^{(n+1)}(t)\,dt$ → t의 함수로 보고 '일반화된 적분의 평균값 정리'를 적용

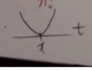
($g(x)$가 구간에서 부호 안바뀔때.)

$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$ 인 c가 $c\in(a,b)$에 존재.

$f(t) = f^{(n+1)}(t)$, $g(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ 인 case.

① n이 홀수이면
$x<a \to g<0$
$x>a \to g>0$.

② n이 짝수이면 $g>0$.



∴ 적분의 평균값정리 적용가능 :)

$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c) \int_a^x (x-t)^n dt = f^{(n+1)}(c) \cdot \underbrace{\int_a^x \frac{1}{n!}(x-t)^n dt}$ 이 (c)가 x와 a사이에 존재하여

$\int_a^x \frac{1}{n!}(x-t)^n dt.$

$x-t=u$ 라하면 $t=x-u.$

$\int_{x-a}^{0} \frac{1}{n!} u^n(-du) = \int_0^{x-a} \frac{1}{n!} u^n du = \left[\frac{1}{(n+1)!} u^{n+1}\right]_0^{x-a}$

$= \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$

$\therefore R_n = f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ 이므로.

$f(x) = P_n + R_n$에서

$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$

$+ f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ 이다

(c는 x와 a 사이의 수)

∘ 오차는 허용하지 않으므로 $a=0$.

즉, 매클로린 급수로 바뀐다!

$f(x) = f(0) + xf'(0) - \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \cdots$

ex) $f(x) = \sin x$ 일때 매클로린 급수

$\sin x = 0 + x \cdot 1 - 0 + \frac{1}{3!} x^3 + 0 + \frac{1}{5!} x^5 + \cdots$ → 프로그래밍?

cf. $\lim_{x \to 0} \sin x$ (우리가 구하려는 값)

$x =$ (매우 작은수) $10^{-1억}$ 넣으면 다 없어지고 x만 남는다.

따라서 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 임을 증명 가능하다.