TI DSP, MCU, Xilinx Zynq FPGA 기반의 프로그래밍 전문가 과정

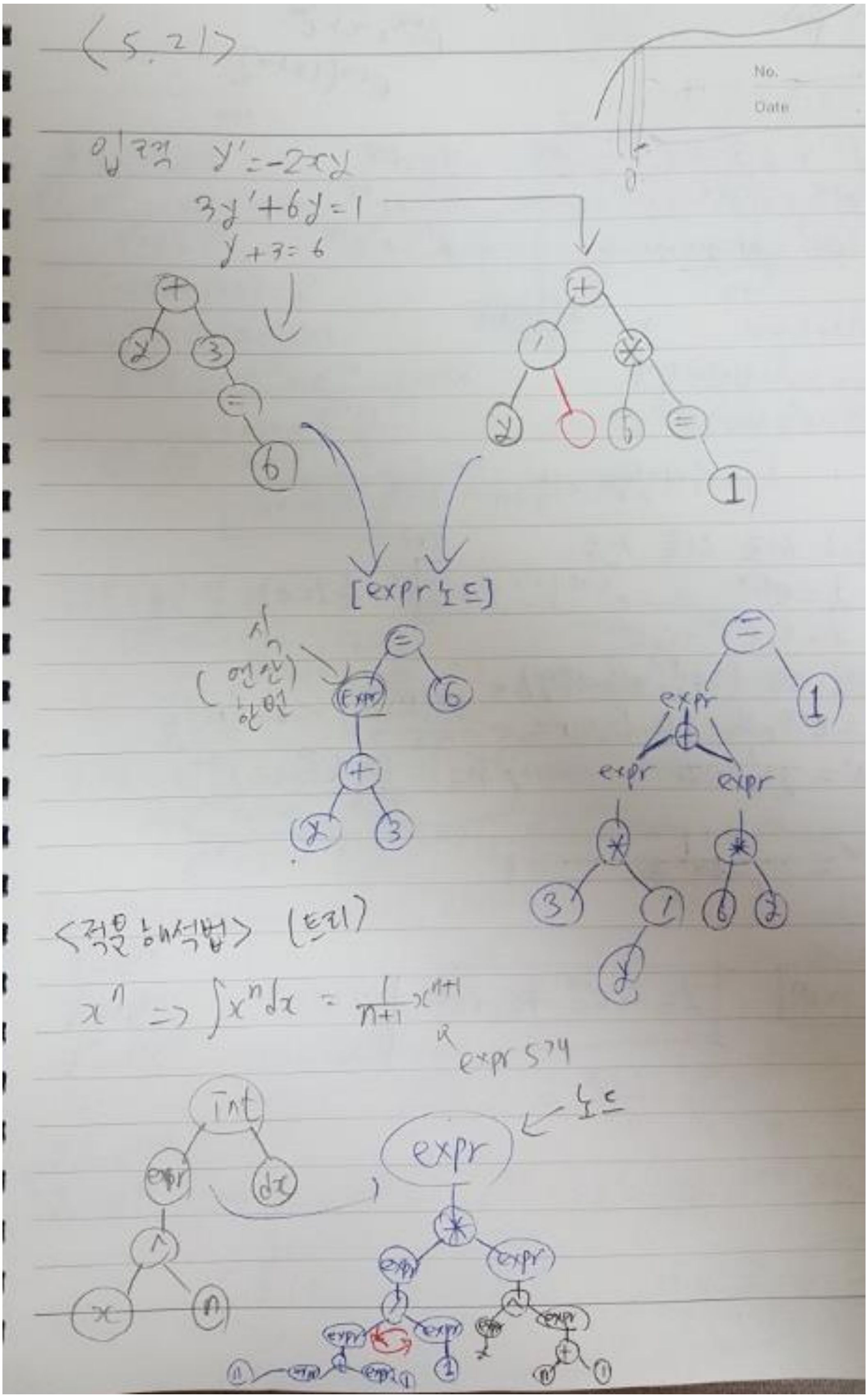
<공학 수학>

2018.05.21 - 58일차

강사 – Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com

학생 – 안상재
sangjae2015@naver.com

- 적분해석법



- 이계 선형 미분방정식 풀이

$y'' + \underbrace{\frac{b}{a}}_{p(x)}y' + \frac{c}{a}y = 0$

e^{rx}, xre^{rx}

$e^{rx}(1+rx)$

표준형

(a, b, c는 상수)

$ay'' + by' + cy = 0$ $\quad y = e^{rx}$

$\to ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ $\quad y' = re^{rx}$

$\to e^{rx}(\underbrace{ar^2 + br + c}_{\hookrightarrow 0}) = 0$ $\quad y'' = r^2e^{rx}$

$ar^2 + br + c = 0$ $\quad r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

↳ 특성방정식

중근, e^x, xe^x

↳ 계수내림법을 이용해서 중근을 찾기!

1) r값이 서로 다를 경우

$y_1 = e^{r_1x}$, $y_2 = e^{r_2x}$ $\left(\because y'' + \overbrace{\boxed{\frac{b}{a}}}^{p(x)}y' + \frac{c}{a}y = 0\right)$

$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$

2) 중근일 경우 (핵심: 계수 내림법)

$y_1 = e^{rx}$, $y_2 = y_1u$ $\left(\because r = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ $\quad b^2 - 4ac = 0$

$u' = \frac{1}{y_1^2 e^{\int p(x)dx}}$ $\quad r = -\frac{b}{2a}$

$u' = \frac{1}{e^{-\frac{b}{a}x}e^{\frac{b}{a}x}} = 1$

$\Downarrow$

$u = x$

$\boxed{\therefore y_2 = xe^{rx}}$ $\quad \boxed{y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}}$

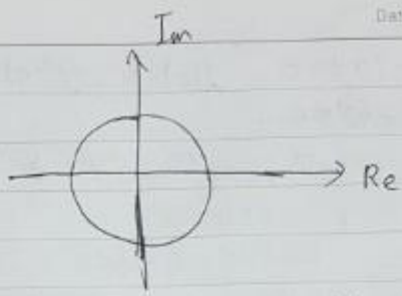
- 오일러 공식
- 이계 선형 미분방정식의 서로 다른 두 실근

함수 ⇐ 에너지 표현 $\begin{cases} \frac{1}{2}CV^2 \\ \frac{1}{2}LI^2 \end{cases}$

No.

Date

*오일러 공식



① $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$x^2+y^2=r^2$

$\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} = \vec{r}$

② $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

①+② ⇒ $e^{ix}+e^{-ix} = 2\cos x$

$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}$

①-② ⇒ $e^{ix}-e^{-ix} = 2i\sin x$

$\boxed{\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$

(무한번 미분 가능)

e^x ⇐ 테일러급수 사용 가능

3) 복소근일 경우

if) $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$

$y_1 = e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x}\cdot e^{i\mu x} = e^{\lambda x}(\cos\mu x + i\sin\mu x)$

$y_2 = e^{(\lambda-i\mu)x} = e^{\lambda x}e^{-i\mu x} = e^{\lambda x}(\cos\mu x - i\sin\mu x)$

$y_1+y_2 = e^{\lambda x}(\cos\mu x + i\sin\mu x) + e^{\lambda x}(\cos\mu x - i\sin\mu x)$

⇒ $e^{\lambda x}\cos\mu x = \frac{y_1+y_2}{2}$, $e^{\lambda x}\sin x = \frac{y_1-y_2}{2}$ ⇒ $\boxed{\therefore y = C_1 e^{\lambda x}\cos\mu x + C_2 e^{\lambda x}\sin\mu x}$

Ex) $y''+5y'+6y=0$ $y(0)=1$, $y'(0)=3$

$y = e^{rx}$

$y' = re^{rx}$

$y'' = r^2e^{rx}$

→ $r^2e^{rx} + 5re^{rx} + 6e^{rx} = 0$

→ $r^2+5r+6=0$

→ $r = \frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5\pm1}{2}$ $\begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 = e^{-2x} \\ y_2 = e^{-3x} \end{cases}$ ⇒ $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$ → $y' = -2C_1e^{-2x} - 3C_2e^{-3x}$

$y(0) = C_1+C_2 = 1$

$y'(0) = -2C_1-3C_2 = 3$

$2C_1+2C_2 = 2$

$-C_2 = 5$ $C_1 = 6$ $C_2 = -5$

$\therefore y = 6e^{-2x} - 5e^{-3x}$

- 이계 선형 미분방정식의 복소근
- 이계 선형 미분방정식의 중근

Ex) $3y'' - 6y' + 12y = 0$, $y(0)=3$, $y'(0)=7$

↳ $y'' - 2y' + 4y = 0$

$y = e^{rx}$ $\quad r^2 e^{rx} - 2re^{rx} + 4e^{rx} = 0$

$y' = re^{rx}$ $\quad r^2 - 2r + 4 = 0$

$y'' = r^2 e^{rx}$ $\quad b^2 - 4ac = 4 - 16 < 0$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}\, i}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2} = \boxed{1 \pm \sqrt{3}\, i}$$

$y_1 = e^{(1+\sqrt{3}i)x} = e^x \cdot e^{\sqrt{3}ix} = e^x(\cos\sqrt{3}x + i\sin\sqrt{3}x)$

$y_2 = e^{(1-\sqrt{3}i)x} = e^x \cdot e^{-\sqrt{3}ix} = e^x(\cos\sqrt{3}x - i\sin\sqrt{3}x)$

$y_1 + y_2 = e^x(\cos\sqrt{3}x + i\sin\sqrt{3}x) + e^x(\cos\sqrt{3}x - i\sin\sqrt{3}x)$

$\frac{y_1+y_2}{2} = e^x \cos\sqrt{3}x$

$\frac{y_1-y_2}{2i} = e^x \sin\sqrt{3}x$

$\therefore y = c_1 e^x \cos\sqrt{3}x + c_2 e^x \sin\sqrt{3}x$

$y(0) = \boxed{c_1 = 3}$

$y' = c_1(e^x \cos\sqrt{3}x - \sqrt{3}e^x \sin\sqrt{3}x) + c_2(e^x \sin\sqrt{3}x + \sqrt{3}e^x \cos\sqrt{3}x)$

$y'(0) = c_1 + \sqrt{3}c_2 = 7 \rightarrow \sqrt{3}c_2 = 4$

$\boxed{c_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}}$

$$\boxed{\therefore y = 3e^x \cos\sqrt{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3} e^x \sin\sqrt{3}x}$$

Ex) $3y'' - 12y' + 12y = 0$ $\quad y(0)=3,\ y'(1)=7$

$r=2$ $\quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} x$ $\quad y(0) = c_1 = 3$

$y' = 2c_1 e^{2x} + 2xc_2 e^{2x} + c_2 e^{2x}$

$y'(1) = 2c_1 e^2 + 2c_2 e^2 + c_2 e^2 = 6e^2 + 3c_2 e^2 = 7$

$3c_2 e^2 = 7 - 6e^2$

$c_2 = \frac{7-6e^2}{3e^2}$

$\therefore y = 3e^{2x} + \frac{7-6e^2}{3e^2} e^{2x} x$

- 코시 오일러 방정식

$\frac{y_1+y_2}{2} = e^{-2x}\cos x$

$\frac{y_1-y_2}{2j} = e^{-2x}\sin x$

EX) $y''+4y'+5y=0$ $y(0)=1,\ y'(0)=2$

$r = \frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2} = \boxed{-2\pm j}$ λ $\mu=1$

$y_1 = e^{(-2+j)x} = e^{-2x}(\cos x + j\sin x)$

$y_2 = e^{(-2-j)x} = e^{-2x}(\cos x - j\sin x)$

$y = c_1e^{-2x}\cos x + c_2e^{-2x}\sin x \to y(0) = c_1 = 1$

$y' = -2c_1e^{-2x}\cos x - c_1e^{-2x}\sin x - 2c_2e^{-2x}\sin x + c_2e^{-2x}\cos x \Rightarrow y'(0) = -2c_1+c_2 = 2$

$c_2 = 4$

$\boxed{\therefore y = e^{-2x}\cos x + 4e^{-2x}\sin x}$

- $\boxed{y = a^x \to y' = a^x\ln x}$

EX) $a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$

$x^2y'' + \frac{a_1}{a_2}xy' + \frac{a_0}{a_2}y = 0$ ← 계수 없앰(표준형)

$\boxed{y = x^m}$ 이라 가정, $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$

원 식에 대입 → $x^2(m(m-1)x^{m-2}) + ax\,mx^{m-1} + bx^m = 0$

$= (m^2-m)x^m + amx^m + bx^m = 0$

$= x^m(m^2+(a-1)m+b) = 0 \Rightarrow m = \frac{-(a-1)\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$

코시오일러 특성방정식

y에 관한 이계미분 식이 아니라 x,y 섞여 있을 때

$y_1 = x^{m}$, $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$, $y_2 = x^{\frac{1-a}{2}}\ln x$

1) 서로 다른 두 실근

$m = m_1, m_2$

$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$

2) 중근

$y_1 = c_1x^m$, $y_2 = y_1u$

$u' = y_1^{-2}e^{-\int p(x)dx} = x^{-2m}e^{-ax}$

- 코시 오일러 방정식의 중근, 복소근 풀이

$\int u' = \int x^{-2m} e^{-ax} dx$

$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + \int f(x)g'(x)$

$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)$

$f'(x) = e^{-ax}$, $g(x) = x^{-2m}$

$f(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax}$, $g'(x) = -2m x^{-2m-1}$

2) 중근

$y_1' = C_1 m x^{m-1}$

$y_1'' = C_1 m(m-1)x^{m-2}$

$y_1 = C_1 x^m$, $y_2 = y_1 u$

$y'' + ax^{-1}y' + bx^{-2}y = 0$, $u' = y^{-2} e^{-\int p(x)dx} = x^{-2m} e^{-a\ln x} = \frac{1}{x^{2m} e^{a\ln x}}$

$m = -\frac{(a-1)}{2}$

$u' = x^{-2m} x^{-a}$

$\int u' = \int x^{-2m-a} dx = \int x^{2\cdot\frac{a-1}{2} - a} dx = \int x^{-1} dx = \ln x$

$u = \frac{1}{-2m-a+1} x^{-2m-a+1}$

$\therefore y_2 = x^m \ln x \Rightarrow \boxed{y = C_1x^m + C_2 x^m \ln x}$

$y_2 = x^m \frac{1}{-2m-a+1} x^{-2m-a+1} \Rightarrow y = C_1 x^m + C_2 x^m \ln x$

$m = \lambda \pm i\mu$

$y_1 = x^{\lambda + i\mu} = x^\lambda e^{i\mu \ln x} = x^\lambda\{\cos(\mu\ln x) + i\sin(\mu \ln x)\}$

3) 복소근

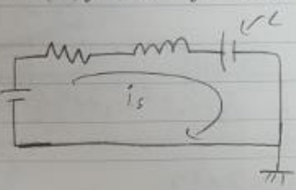
$y = C_1 x^\lambda \cos(\mu\ln x) + C_2 x^\lambda \sin(\mu \ln x)$

$\therefore y = C_1 x^\lambda\cos(\mu\ln x) + C_2 x^\lambda \sin(\mu\ln x)$

Ex 1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

- 코시 오일러 방정식의 일반해, 특정해, 동차해 (일반해 = 특정해+동차해)

$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$



$V_s = i_s R + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$

y_p = 특정해

y_g = 일반해 $\quad y_g = y_p + y_h$

y_h = 동차해 $\quad y_h = y_g - y_p$ = 일반해 - 특정해

$y_g'' + a(x)y_g' + b(x)y_g = g(x)$

$y_p'' + a(x)y_p' + b(x)y_p = g(x)$

$y_h'' + a(x)y_h' + b(x)y_h = g(x)$

$(y_g''-y_p'') + a(x)(y_g'-y_p') + b(x)(y_g-y_p)$

$\underbrace{y_g''+a(x)y_g'+b(x)y_g}_{g(x)} - \underbrace{(y_p''+a(x)y_p'+b(x)y_p)}_{g(x)} = \boxed{g(x)}$

y_h가 $y''+a(x)y'+b(x)y = 0$의 해가 되는것의 증명

y_p(특정해) 조건

1) $g(x)$가 다항식인 경우 $y_p = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$

2) $g(x)$가 지수함수인 경우 $y_p = Ae^{mx}$

3) $g(x)$가 삼각함수인 경우 $y_p = A\cos(mx) + B\sin(mx)$

⇒ y_p, y_p', y_p''를 구해서 대입하고 $g(x)$와 비교해서 y_p를 구함

y_g = 동차해 + 특정해

$y_g = y_h + y_p$

- 코시 오일러 방정식의 일반해 구하기
- 키르히호프의 법칙을 이용한 RC 회로 분석

Ex) $y''+2y'+y=2x^2+4$

$y_h = C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$ (동차해)

$y_p = Ax^2+Bx+C$

$y_p' = 2Ax+B$

$y_p'' = 2A$

(일반해)

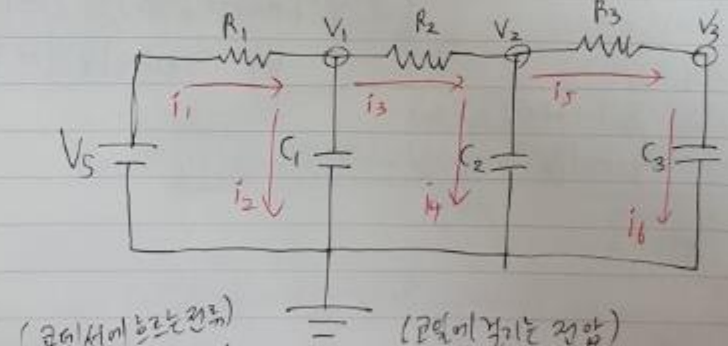
$\therefore y_g = (C_1e^{-x}+C_2xe^{-x})+(2x^2-8x+16)$

→ 대입 : $2A+2(2Ax+B)+(Ax^2+Bx+C)=2x^2+4$

$= Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B+C)=2x^2+4$

$\boxed{A=2,\ B=-8,\ C=16}$

⇒ $y_p = 2x^2-8x+16$



(콘덴서에 흐르는 전류) (코일에 걸리는 전압)

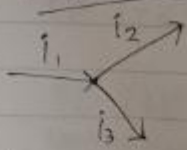
$i_c = C\frac{dv}{dt}$, $V_L = L\frac{di}{dt}$

1. $\overset{i_1}{\frac{V_s-V_1}{R_1}} = \overset{i_2}{C_1\frac{dV_1}{dt}} + \overset{i_3}{\frac{V_1-V_2}{R_2}}$

2. $\overset{i_3}{\frac{V_1-V_2}{R_2}} = \overset{i_4}{C_2\frac{dV_2}{dt}} + \overset{i_5}{\frac{V_2-V_3}{R_3}}$

3. $\overset{i_5}{\frac{V_2-V_3}{R_3}} = \overset{i_6}{C_3\frac{dV_3}{dt}}$

● 키르히호프의 법칙



$i_1 = i_2 + i_3$

들어간 전류 = 나오는 전류