

TI DSP, MCU 및 Xilinx Zynq FPGA

프로그래밍 전문가 과정

강사 - Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com
학생 - 하성용
accept0108@naver.com

59 일차

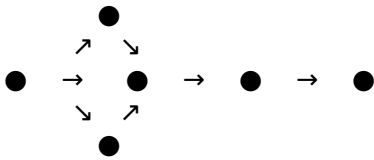
Laplace Transform(라플라스 트랜스폼)

사용이유 :

Block Diagram(블록 다이어그램)

Signal Flow Graph(시그널 그래프)

시그널그래프란? 그래프이론을 하게되면 네트워크구성같은



라플라스트랜스폼이랑 합치면

같이 라플라스변환을 한결과가 이거다 라는걸 알수있음

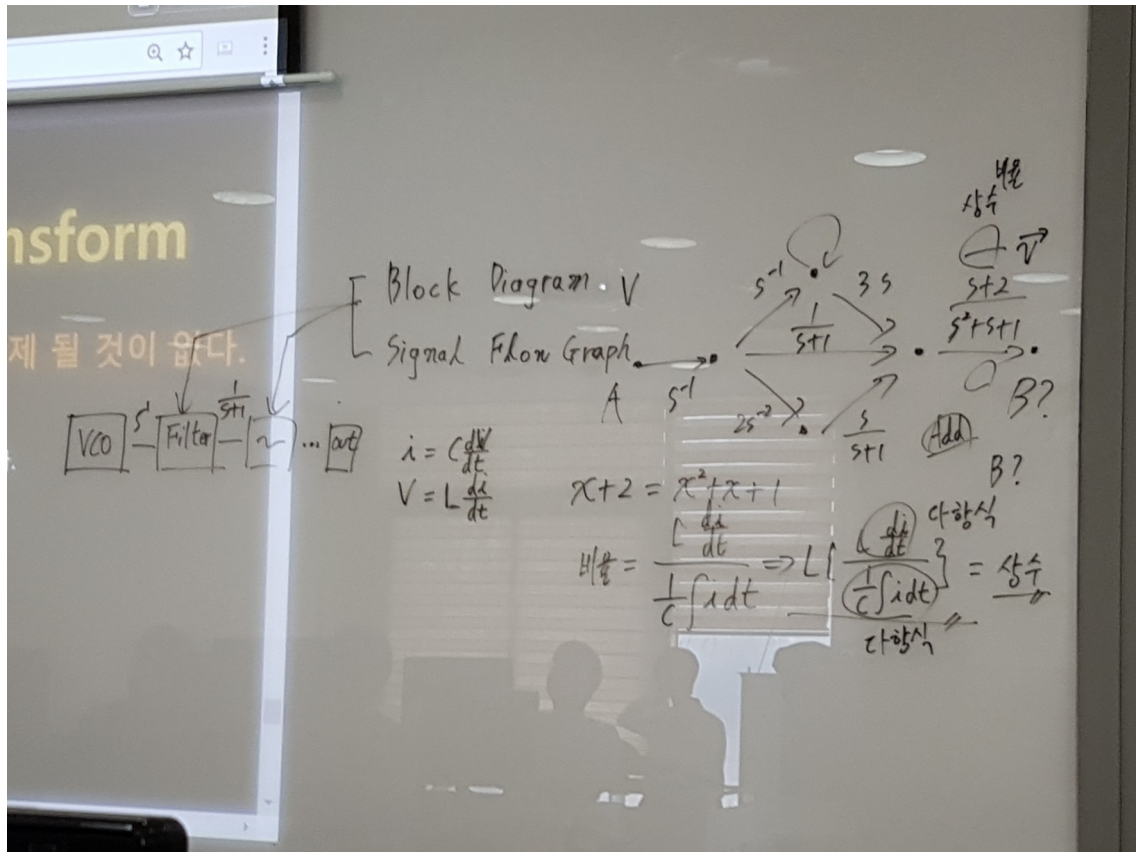
각각케이스에 대해서 아웃풋이 고정된다

제어공학을할때 복잡한것

$i=C$ 와 dt 분에 dw

$V=L$ 과 dt 분에 di

미분방정식



미분방정식을 푸는게 쉬울지 $x+2=x^2/x+1$ 다항식푸는게 쉬운지 보면알수있음

다항식을 가능하게 해주는게 s^{-1} 같은

상수, 비율

비율 = $\int c$ 와 dt 분에 di ?

비율 = c 분에 1 과 $\int idt$ 분에 L 과 dt 분에 $di \Rightarrow L\{ c \text{ 분에 } 1 \text{ 과 } \int idt \text{ 분에 } L \text{ 과 } dt \text{ 분에 } di \}$ 다항식

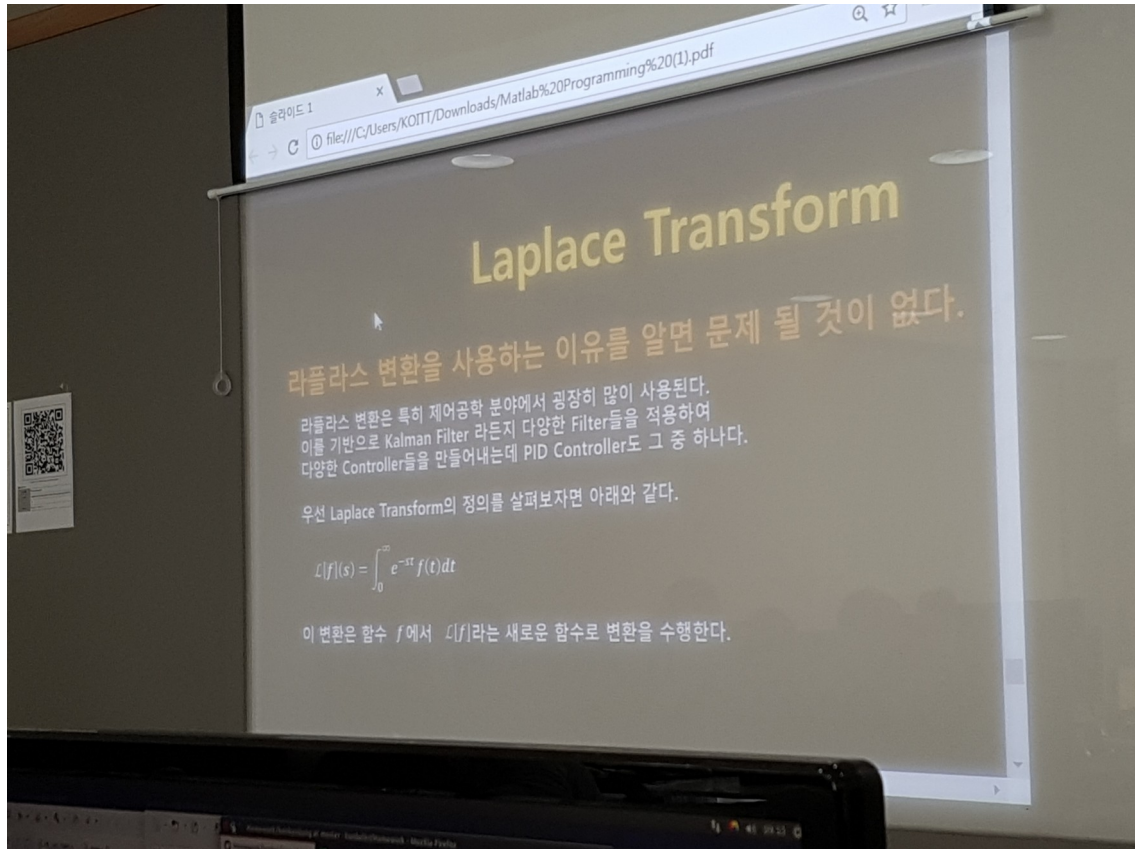
= 상수

라플라스변환쓰는이유는 미분과적분에 들어간식의 비율을 보기위해

//블록다이어그램은

[VCO]가 있고 Filter 가 있고 ~~가있고 .. output

계산을 하기위해서 VCO 랑 필터가 s+1 분에 1 같은 관계를 가지고있다같은 표현을 할수있다
즉 기능적으로 라플라스와 블록다이어그램은 같다



$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$L(f(t))(s)$$

0~∞적분 => 미적분학(이상적분)

0 부터 무한대 접근 어떻게 계산할지? 치환

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-sk} f(k) dt \Rightarrow \text{부분적분}$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + \int f(x)g'(x)$$

$$\int f(x)g(x) = \int f(x)g(x) - \int f(x)g(x)$$

$$\int e^{-sk} f(k) = -s \text{ 분에 } 1 \text{ 과 } e^{-sk} f(k) - \int -s \text{ 분에 } 1 \text{ 과 } e^{-sk} f(k)$$

다항식의 경우 차수만큼..

삼각함수는 두번하고 합성 혹은 e^{ix} 를 해도됨

리미트를하면 0 부터 무한대까지 접근가능해짐//?

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad 0 \sim \infty \text{ 적분} \Rightarrow \text{미적분학 (역상적분)}$$

어떻게 계산하지? 치환

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-sk} f(k) dk \Rightarrow \text{부분적분}$$

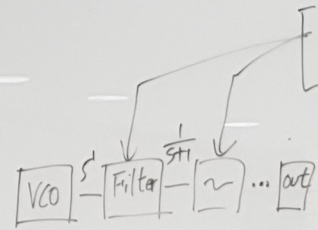
$$f(x)g(x) = \int f(x)g(x) + \int f(x)g'(x)$$

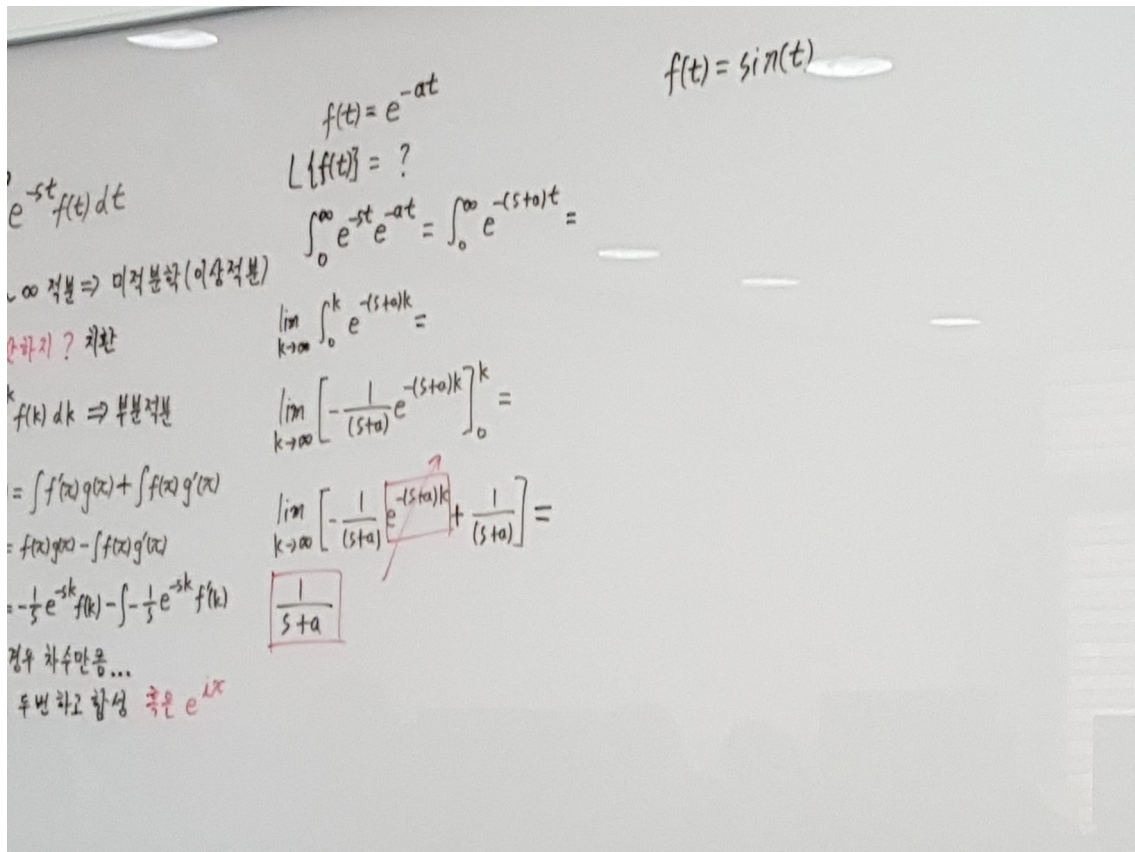
$$\int f(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)$$

$$\int e^{-sk} f(k) = -\frac{1}{s} e^{-sk} f(k) - \int -\frac{1}{s} e^{-sk} f'(k)$$

다항식의 경우 하수만큼...

삼각함수는 두번 라고 함성





//문제

$$f(t) = e^{-at}$$

$$L\{f(t)\} = ?$$

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{-at} dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-(s+a)t} dt =$$

익스퍼넨셜 사라지는이유: 익스퍼넨셜 -승
 2 분에 1 은 0.5
 2 의 -1 승
 4 는 2 의 -2 승

0.5 고 0.25
 이렇게 무한대로가면 0 에 수렴
 s 는 주파수
 s 도메인은 별도

앞에 -부호는 음수로 취급하고 0 에수렴
 - - 로 양수가될수도있지만 그렇게되면 의미없는값이 되버림
 - 붙여놓은이유가 발상못하게하려고붙여놓음

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sin(t) \\
 \cos(t) &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\
 \int_0^\infty e^{-st} \sin(t) dt &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-st} (e^{it} - e^{-it}) dt \\
 &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-(s-i)t} - e^{-(s+i)t} dt \\
 &= \frac{1}{2i} \left[-\frac{1}{(s-i)} e^{-(s-i)t} + \frac{1}{(s+i)} e^{-(s+i)t} \right]_0^\infty \\
 &= -\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(s-i)(s+i)} \left\{ (s+i)e^{-(s-i)t} - (s-i)e^{-(s+i)t} \right\} \right]_0^\infty \\
 &= -\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s^2+1} h \right]_0^\infty \\
 &= -\frac{1}{2i} \frac{1}{s^2+1} \{ -(s+i) + (s-i) \} \\
 &= -\frac{1}{2i} \frac{1}{s^2+1} - 2i \\
 &= \frac{1}{s^2+1}
 \end{aligned}$$

//문제

$$f(t) = \sin(t)$$

sin 을 e 써서 푸는방법

$f(t) = \sin(t)$ 를 라플라스 트랜스폼

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \sin(t) dt = \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-st} (e^{it} - e^{-it}) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-(s-i)t} - e^{-(s+i)t} dt \\
 &= \frac{1}{2i} \left[-\frac{1}{(s-i)} e^{-(s-i)t} + \frac{1}{(s+i)} e^{-(s+i)t} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{1}{2i} \left[-\frac{1}{(s-i)} + \frac{1}{(s+i)} \right]
 \end{aligned}$$

h 사라지는이유 :

계산완료된걸 여기다적은것

h 를 무한대로보내면 사라짐

0 이 들어갔을때는 어차피 0 이니 $s+i$ 랑 $-i$ 는 보는대로 살아남음

복소평면에서 계산하더라도 무한대로가면 수렴이가서 사라짐

h 로 치환한것

두번째식에서 끝내도됐었음

컬레복소수니까

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \cos(t) \\
 \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos(t) \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} \sin(t) dt \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin(t) \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s^2} e^{-st} \cos(t) dt \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt \\
 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt \\
 &= \left(1 + \frac{1}{s^2} \right) \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt = \frac{1}{s} \\
 \frac{s^2+1}{s^2} \therefore \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt &= \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}
 \end{aligned}$$

//부분적분

$$f(t) = \cos(t)$$

$$f_0^\infty e^{-st} \cos(t)$$

$$= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos(t) \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} \sin(t) dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin(t) \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s^2} e^{-st} \cos(t) dt \quad // \sin 0 = 0 \text{ 이니까 } [] \text{ 항 날아감}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} \cos(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt$$

$$= \left(1 + \frac{1}{s^2} \right) \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt = \frac{1}{s} \quad // s^2 \text{ 나누는거니까 역수를 취함}$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-st} \cos(t) dt = \frac{1}{s} - \frac{s^2}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}$$

객관적으로 오일러 사용하는게 편함

$$\begin{aligned}
 f(t) &= t^2 \\
 \int_0^{\infty} e^{-st} t^2 &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} 2t \\
 &= h - \frac{2}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \\
 &= \frac{2}{s} \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} \\
 &= \frac{2}{s^2} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} \\
 &= \boxed{\frac{2}{s^3}} \Rightarrow \boxed{\frac{n!}{s^{n+1}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sin(t) \\
 \cos(t) &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\
 \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(t) &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(s-i)t} - e^{-(s+i)t} \\
 &= \frac{1}{2i} \left[-\frac{1}{(s-i)} e^{-(s-i)t} + \frac{1}{(s+i)} e^{-(s+i)t} \right]_0^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(s-i)(s+i)} \right] \\
 &= -\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s^2+1} \right] \\
 &= -\frac{1}{2i} \frac{1}{s^2+1} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(t)
 \end{aligned}$$

문제

$$//f(t)=t^2$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^2 = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} 2t$$

$$= h - \frac{2}{s} \left\{ \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \right\}$$

$$= \frac{2}{s} \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st}$$

$$= \frac{2}{s^2} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{2}{s^3} \Rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \cos(\omega t) & \cos(\omega t) &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \\
 \int_0^\infty e^{-st} \cos(\omega t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(s-i\omega)t} + e^{-(s+i\omega)t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(s-i\omega)} e^{-(s-i\omega)t} - \frac{1}{(s+i\omega)} e^{-(s+i\omega)t} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s-i\omega)} + \frac{1}{(s+i\omega)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{2s}{(s-i\omega)(s+i\omega)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega^2} \\
 &= \boxed{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= t^2 \\
 \int_0^\infty e^{-st} t^2 dt &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} 2t dt \\
 &= 0 - \frac{2}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} dt \\
 &= \frac{2}{s} \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-st} dt \\
 &= \frac{2}{s^2} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty \\
 &= \boxed{\frac{2}{s^3}} \Rightarrow \boxed{\frac{n!}{s^{n+1}}}
 \end{aligned}$$

//f(t)=cos(ωt)

익스퍼넨셜 적극활용

x는 x도메인이 별도로 있다고 봐야됨

x는 주파수와 관련이있음

//1 계도함수의 라플라스변환
을하기위해 부분적분을 쓴것

Handwritten derivation on a whiteboard:

$$f'(t)$$

$$\boxed{L\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)}$$

$$L\{f'(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \underbrace{\left[f(t) e^{-st} \right]_0^{\infty}}_{-f(0)} - \int_0^{\infty} \underbrace{-s e^{-st}}_{g'} \underbrace{f(t)}_f dt = -f(0) + sF(s)$$

동일

1계도함수의 라플라스 변환

$$\boxed{sF(s) - f(0)}$$

$$L\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$L\{f'(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left[f(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -s e^{-st} f(t) dt$$

결론적으로 1 계도함수의 라플라스 변환
 $sF(s) - f(0)$

Handwritten derivation on a whiteboard:

$$f''(t)$$

$$L\{f''(t)\}(s) = \int_0^{\infty} \underbrace{f''(t)}_{f'} \underbrace{e^{-st}}_g dt = \underbrace{\left[f'(t) e^{-st} \right]_0^{\infty}}_{-f'(0)} - \int_0^{\infty} \underbrace{f'(t)}_{f'} \underbrace{-s e^{-st}}_{g'} dt$$

$$= -f'(0) + s \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

$$= -f'(0) + s(sF(s) - f(0))$$

$$= \boxed{s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)}$$

2계도함수의 라플라스 변환

$f'(t)$

$$\boxed{L\{f(t)\}(s)}$$

$$L\{f'(t)\}(s)$$