TI DSP, MCU 및 Xilinx Zynq FPGA 프로그래밍 전문가 과정

강사 – Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com

학생 – GJ (박현우)
uc820@naver.com

목차

수학 – Laplace Transform

1) 라플라스 변환 계산하는 방법

2) 도함수의 라플라스 변환법 / 부분분수 전개 (행렬식과 가우스 소거법)

3) Heaviside Function

4) 라플라스 역변환

5) 라플라스 변환으로 RC-RC 필터 해석

1) 라플라스 변환 계산하는 방법

- 라플라스 변환 계산하는 방법

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$ (0 ~ ∞ 적분 ⇒ 미적분학 이상적분)

어떻게 계산할까? 치환

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k \underbrace{e^{-sk}}_{f'(x)} \underbrace{f(k)}_{g(x)}\, dk \Rightarrow \text{부분적분} \qquad \int f'(x) g(x) = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx$$

$$\int e^{-sk} f(k) = -\frac{1}{s} e^{-sk} f(k) - \int -\frac{1}{s} e^{-sk} f'(k)\, dk$$

- 다항식의 경우 차수 만큼 반복
- 삼각함수는 두 번하고 합성 or 오일러 공식

라플라스를 쓰는 이유? 무엇인가의 비율을 알고 싶어서...

예) 비율 $= \dfrac{L \cdot \frac{di}{dt}}{\frac{1}{c}\int i\,dt} \Rightarrow \mathcal{L}\{\ \ \} = {}^{*}$상수

- 문제

① $f(t) = e^{-at}$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = ?$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{-at}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-(s+a)k}\, dk$$

$$\lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{(s+a)} e^{-(s+a)k} \right]_0^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{s+a} \boxed{e^{-(s+a)k}}^{\to 0} + \frac{1}{s+a} \right]$$

$$\therefore \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

② $f(t) = \sin(t)$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = ?$

$$\sin(t) = \frac{e^{+it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\, dt$$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{(-s+i)k} - e^{-(s+i)k}\, dk$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{-s+i} e^{(-s+i)k} + \frac{1}{s+i} e^{-(s+i)k} \right]_0^k$$

$$-\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{-s+i} + \frac{1}{s+i} \right] = -\frac{1}{2i} \left(\frac{2i}{-s^2-1} \right)$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

- 문제

③ $f(t) = t^2$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = ?$ $\quad \int f'(x) g(x) = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^2\, dt = \left[-\frac{1}{s} \cancel{e^{-st} t^2}^{\to 0} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st}\, 2t\, dt$$

$$= \frac{2}{s} \left\{ \left[-\frac{1}{s} \cancel{e^{-st} t}^{\to 0} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st}\, dt \right\}$$

$$= \frac{2}{s} \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} \Rightarrow \frac{2}{s^2} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{2}{s^3} \Rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

④ $f(t) = \cos(wt)$, $\cos(wt) = \dfrac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cos(wt) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} \left(e^{iwt} + e^{-iwt} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(-s+iw)t} + e^{-(s+iw)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-s+iw} e^{(-s+iw)t} - \frac{1}{(s+iw)} e^{-(s+iw)t} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-iw} + \frac{1}{s+iw} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2s}{(s-iw)(s+iw)}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\cos(wt)\} = \frac{s}{s^2+w^2}$$

2) 도함수의 라플라스 변환법 / 부분분수 전개 (행렬식과 가우스 소거법)

○ 도함수의 라플라스 변환법

1) $f'(t)$, $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = ?$

동일

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{g}\,\underbrace{f'(t)}_{f'}\,dt = \underbrace{\Big[\underbrace{f(t)}_{f}\underbrace{e^{-st}}_{g}\Big]_0^\infty}_{-f(0)} - \underbrace{\int_0^\infty \underbrace{-se^{-st}}_{g'}\,\underbrace{f(t)}_{f}\,dt}_{+\,sF(s)}$$

1계 도함수의 라플라스 변환

$$\therefore\ sF(s) - f(0)$$

2) $f''(t)$, $\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = ?$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = \int_0^\infty \underbrace{f''(t)}_{f'}\,\underbrace{e^{-st}}_{g}\,dt = \Big[\underbrace{f'(t)}_{f}\,\underbrace{e^{-st}}_{g}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{f'(t)}_{f}\,\underbrace{(-se^{-st})}_{g'}\,dt$$

$$= -f'(0) + s\boxed{\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt}$$

$$= -f'(0) + s\big(sF(s) - f(0)\big)$$

2계 도함수의 라플라스 변환

$$\therefore\ s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

○ 문제

$$y' + 4y + 1 = 0$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \Big[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) + \frac{1}{s} = 0$$

$$Y(s)(s+4) = y(0) - \frac{1}{s}$$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{1}{(s+4)}\Big(y(0) - \frac{1}{s}\Big)$$

※ 부분 분수 전개

1. $\dfrac{A}{(x-a_0)} + \dfrac{B}{(x-a_1)} + \dfrac{C}{(x-a_2)} = \dfrac{D}{ax^3+bx^2+cx+d}$
2. $\dfrac{A}{(x-a_0)} + \dfrac{B}{(x-a_1)} + \dfrac{Cx+D}{x^2+a_2x+a_3} = \dfrac{E}{ax^3+bx^2+cx+d}$
3. $\dfrac{A}{(x-a_0)} + \dfrac{B}{(x-a_1)^2} + \dfrac{C}{(x-a_1)} = \dfrac{E}{ax^3+bx^2+cx+d}$

○ 부분분수 전개 계산 (행렬식과 가우스 소거법 활용)

$$\frac{x^2+2x-3}{(x^2+x+5)(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+5}$$

$$\to (A+C)x^3 + (-A+B-4C+D)x^2 + (3A+B+4C-4D)x + (-10A+5B+4D)$$

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ -A+B-4C+D &= 1 \\ 3A+B+4C-4D &= 2 \\ -10A+5B\quad+4D &= -3 \end{aligned}
\ \xRightarrow{\text{행렬식}}\
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ -10 & 5 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right]
\ \xRightarrow{\text{가우스소거법}}\
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{121}{4} & -\frac{57}{4} \end{array}\right]$$

$A = \dfrac{41}{121}$, $B = \dfrac{5}{11}$

$C = -\dfrac{41}{121}$, $D = -\dfrac{57}{121}$

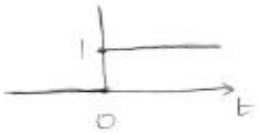
$$\therefore\ \frac{x^2+2x-3}{(x^2+x+5)(x-2)^2} = \frac{41}{121}\frac{1}{(x-2)} + \frac{5}{11}\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{41}{121}\Big(\frac{x}{x^2+x+5}\Big) - \frac{57}{121}\frac{1}{(x^2+x+5)}$$

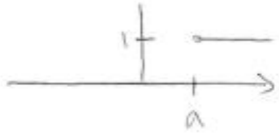
3) Heaviside Function

o Heaviside Fuction

RC회로에서 스위치를 눌렀을 경우와 그렇지 않은 경우를 한번에 표현이 가능하다. 시간차를 가지고 있는 두 개의 함수를 합성할 수 있게 해줌

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases} \qquad H(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t\geq a \end{cases}$$





예) $0\leq t<2$, $t\geq 2$

$g(t)=0$ $\quad g(t)=t^2+1$

$$g(t)=H(t-2)(t^2+1)$$

$$\Rightarrow H(t-2)\{(t-2)^2+1\}$$

모순 : 원식은 t^2

헤비사이드는 $t-2$

시간 변환을 맞추기 위해

$t-2$를 넣었더니 원식이 붕괴됨.

$$(\underbrace{t-2}_{h}+2)(\underbrace{t-2}_{h}+2)$$

$$h^2+4h+4$$

$$(t-2)^2+4(t-2)+4$$

$$H(t-2)\{(t-2+2)^2+1\}$$

$$= H(t-2)\{(t-2)^2+4(t-2)+5\}$$

$$\therefore G(s)= e^{-2s}\left\{\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{5}{s}\right\}$$

4) 라플라스 역변환

○ 라플라스 역변환

$f(t) = \sin(\omega t)$

$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt$$

$$= F(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4s+20}\right\} = \frac{4}{(s+2)^2+4^2} \quad \omega=4,\ a=-2$$

$$= \sin(\omega t)\cdot e^{at}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4s+20}\right\} = \sin(4t)\cdot e^{-2t}$$

○ 문제

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s^2-6s+2}\right\} \Rightarrow s^2-6s+2 = (s-3)^2-7$$

$$= \frac{3(s-3)}{(s-3)^2-7} + \frac{8}{(s-3)^2-7}$$

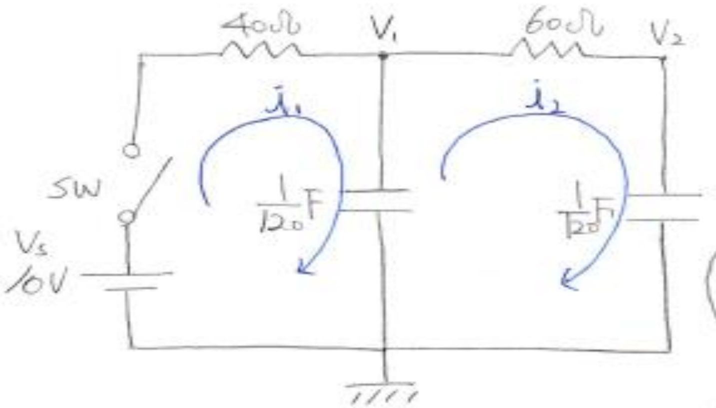
$$\mathcal{L}\{e^{at}\sinh(\omega t)\} = \frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cosh(\omega t)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$$

$$\underline{3\cdot e^{3t}\cos(7t) - \frac{8}{\sqrt{7}} e^{3t}\sinh(7t)}$$

5) 라플라스 변환으로 RC-RC 필터 해석

○ 라플라스 변환으로 RC RC 필터 해석



Laplace Transform Based RC-RC Filter

• 망전류법

$$1.\ 40 i_1 + 120 \int (i_1 - i_2)\, dt = 10$$

$$2.\ 60 i_2 + 120 \int i_2\, dt + 120 \int (i_2 - i_1)\, dt = 0$$

• 적분의 라플라스

$$\mathcal{L}\left\{ \int f(t)\, dt \right\}(s) = \frac{1}{s} F(s)$$

$$i_c = C \cdot \frac{dV}{dt} \Rightarrow V = \frac{1}{C} \int i_c\, dt$$

$$\frac{dQ}{dt} = i\ ,\quad Q = C \cdot V$$

• 각각을 라플라스 변환한다.

$$1.\ 40 I_1(s) + \frac{120}{s} \{ I_1(s) - I_2(s) \} = \frac{10}{s}$$

$$2.\ 60 I_2(s) + \frac{120}{s} I_2(s) + \frac{120}{s} \{ I_2(s) - I_1(s) \} = 0$$

$$I_1(s) = \frac{s+4}{4s^2 + 28s + 24}$$

$$I_2(s) = \frac{1}{2s^2 + 14s + 12}$$

→ 부분분수 → 역라플라스

$$i_1(t) = \frac{3}{20} e^{-t} + \frac{1}{10} e^{-6t}$$

$$i_2(t) = \frac{1}{10} e^{-t} - \frac{1}{10} e^{-6t}$$