Xilinx Zynq FPGA,TI DSP, MCU 기반의 프로그래밍 전문가 과정

날 짜 : 2018 . 5. 18

강사 – Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com
학생 – 정한별
hanbulkr@gmail.com

<행렬>

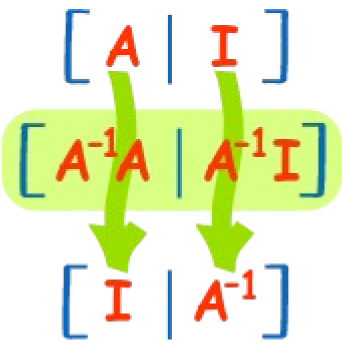
1. 정방 행렬
2. 대각 행렬
3. 전치 행렬
4. 행렬의 덧셈
5. 행렬의 빼셈
6. 행렬의 곱셈(스칼라)
7. 행렬식과 가우스 조단 소거법.(역행렬-컴퓨터)
8. 역행렬 구하는 정식 방법.
9. Detminant
10. 크래마 공식.(연립 방정식 풀기)

7. 행렬식과 가우스 조단 소거법. (역행렬을 구할때)

- 단위 행렬을 곱해서 역행렬을 구하는 방식이다.
- 밑의 그림과 같은 방식으로 역행렬을 구한다.
- 가우스 조단 소거법을 통해 **연립 방정식**을 풀 수 있다.

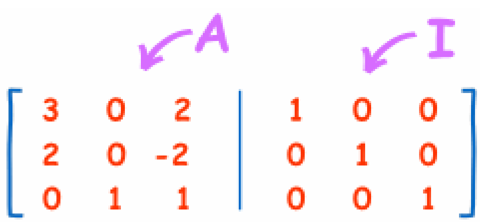
*프로그램으로 할 때, **컴퓨터적으로 속도가 더 빠르다.**

(연산되는 과정)



<예제>

초기 설정 A 행렬과 I(단위행렬)



(계산 과정)

$$\begin{array}{c} \quad A \qquad\qquad\quad I \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Start with **A** next to **I**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ Add}$$

Add row 2 to row 1,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ Divide by 5}$$

then divide row 1 by 5,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ Subtract} \times 2$$

Then take 2 times the first row, and subtract it from the second row,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ Multiply by } -\tfrac{1}{2}$$

Multiply second row by -1/2,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 & -0.3 & 0 \end{array}\right] \text{ Swap}$$

Now swap the second and third row,

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 & -0.3 & 0 \end{array}\right] \text{ Subtract} \\ I \qquad\qquad A^{-1} \end{array}$$

Last, subtract the third row from the second row,

And we are done!

8. 역행렬 구하는 정식 방법.

- **수반 행렬** 이용.
- Adj(adjoint) |+ - +| → 자리 마다 + , - 를 생각해서 구해야 한다.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

<역행렬을 구하는 일반 공식>

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A}(adj\ A)$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

detA = A 행렬 determinant 를 구하라는 뜻

$$\mathbf{det}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \mathbf{a}\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - \mathbf{b}\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + \mathbf{c}\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

위의 두 가지 공식을 이용해서 구한다.

<예제>

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&0&4\end{pmatrix}$$ 일 때, 역행렬 A^{-1} 은

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&0&4\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{\det(A)}adj(A)$$

$$=\frac{1}{\det\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&0&4\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}4&0&-1\\-2&5&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(4+0+0-(-1)-0-0)}\begin{pmatrix}4&0&-1\\-2&5&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&0&-1\\-2&5&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.8&0&-0.2\\-0.4&1&-0.4\\0.2&0&0.2\end{pmatrix}$$

10. 크래마 공식.(연립 방정식 풀기)

연립 방정식을 푸는 방법중 크래머(Cramer's Rule)공식이 있다.

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

간단히 2행2열의 행렬을 예를 들어보면
연립방정식이 다음과 같이 주어졌을 때

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

우리는 간단히 행렬로 나타낼 수 있다.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

일반화하면

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \det(A1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det(A2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \det(Ai) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{\det(A1)}{\det(A)} \qquad Y = \frac{\det(A2)}{\det(A)}$$

$$Z = \frac{\det(A3)}{\det(A)} \qquad Xi = \frac{\det(Ai)}{\det(A)}$$

< 예제 >

크래머 공식

$$\begin{cases} 2x+4y+4z = 12 \\ 6x+2y+2z = 16 \\ 4x+2y+4z = 20 \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & 2 & 16 \\ 4 & 2 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = 2(8-4) + 4(-16) + 4(4) = -40$$

$$X = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 16 & 2 & 2 \\ 20 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(X) = 12\cdot(4) + 4(-24) + 4(-8) = -80, \quad x = \frac{\det(X)}{\det(A)} = 2.$$

$$Y \begin{pmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 6 & 16 & 2 \\ 4 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(Y) = 2\cdot(24) + 12(-16) + 4(56) = 80$$

$$y = \frac{\det(Y)}{\det(A)} = -2.$$

$$Z \begin{pmatrix} 2 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & 16 \\ 4 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\det(Z) = 2(8) + 4(-56) + 12(4) = -160$$

$$z = \frac{\det(Z)}{\det(A)} = 4.$$