

第一讲 函数部分

【考试要求】

- 1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
- 2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
- 3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
- 4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

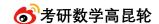
考点: 函数及其表达式的求解

1. 函数的概念

定义1 设x和y是两个变量,D是一个给定的数集,如果对于每个数 $x \in D$,变量y在对应法则f作用下总有唯一确定的一个数值y和它对应,则称y是x的函数,记为y = f(x),常称x为自变量,y为因变量,D为函数的定义域.

[例1](绝对值函数)
$$y = |x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$$

[例2](最值函数) $U = \max\{f(x), g(x)\}, V = \min\{f(x), g(x)\}.$



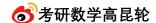
[例3](符号函数)
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

[例4](取整函数) y=[x]; 表示不超过x的最大整数,

[例5](分段函数)
$$y = \begin{cases} f(x), x \le x_0 \\ g(x), x > x_0 \end{cases}$$
 或 $y = \begin{cases} f(x), x < x_0 \\ a, x = x_0 \\ g(x), x > x_0 \end{cases}$

[例6](狄利克雷函数)
$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q \end{cases}$$
.



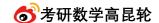


「例7](幂指函数) $y = u(x)^{v(x)}, u(x) > 0, 且u(x) \neq 1.$

[例8]设
$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=1-x$$
,求 $f(x)$.

[例9]设
$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$$
,求 $f\left(x\right)$.

[例10]设xoy平面上有正方形 $D:0 \le x \le 1,0 \le y \le 1$ 及直线 $l:x+y=t (t \ge 0)$,若S(t)表示正方形D位于直线l左下方部分的面积,求S(t)与t之间的函数关系.



考点:复合函数与反函数

1. 复合函数

定义1 设y = f(u)的定义域为 D_f ,函数u = g(x)定义域为 D_g ,且其值域 $R_g \subset D_f$,则称 $y = f\lceil g(x) \rceil$ 为y = f(u)和u = g(x)的复合函数.

「例1]设
$$f(x) = e^{x^2}$$
, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \ge 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

[例2]设
$$f(x) = \begin{cases} 1, |x| \le 1 \\ 0, |x| > 1 \end{cases}$$
, $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, |x| \le 2 \\ 2, |x| > 2 \end{cases}$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

2. 反函数

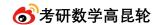
定义2 设y = f(x)的定义域为D,值域为 R_g ,如果对于任一 $y \in R_g$,有唯一确定的 $x \in D$,使得y = f(x),则称 $x = f^{-1}(y)$ 为y = f(x)的反函数.

注:(1)有时将y = f(x)的反函数也写成 $y = f^{-1}(x)$;

- (2)单调函数必有反函数,且有相同的单调性;
- (3) y = f(x)和 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线y = x对称, 而y = f(x)和 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是重合的;

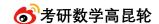
$$(4)f\left\lceil f^{-1}\left(x\right)\right\rceil = x, f^{-1}\left[f\left(x\right)\right] = x.$$





[例3] 求 $y = \sin x$ 在[0,2 π]上的反函数.

[例4] 求
$$y = f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, x > 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$
 的反函数并作图.
$$\begin{cases} -1 - x^2, x < 0 \end{cases}$$



考点:函数的几种特性

1. 有界性

定义1 设y = f(x)在数集X上有定义,如果存在正数M,使得对任意的 $x \in X$,都有 $|f(x)| \le M$,则称f(x)在X上有界;

反之,如果对于任何正数M,总存在 $x_1 \in X$,使 $|f(x_1)| > M$,则称f(x)在X上无界.

注:(1) 常见的有界函数有, $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$,

$$\left| \arcsin x \right| \le \frac{\pi}{2}, \left| \arctan x \right| \le \frac{\pi}{2};$$

(2)函数的有界(无界)是针对具体区间而言的.

2. 单调性

定义2 设y = f(x)在区间I上有定义,如果对于区间I上任意两点 x_1 及 x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称f(x) 在区间I上是单调增加(或单调减少).

注:以后经常使用导数来判定函数在区间上的单调性.

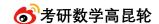
3. 奇偶性

定义3 设y = f(x)的定义域D关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$, 恒有f(-x) = f(x),则称f(x)在D上是偶函数, 如果恒有f(-x) = -f(x),则称f(x)在D上是奇函数.

注:(1) 常见的偶函数有, $x^2 \setminus |x| \cdot \cos x$,

常见的奇函数有, $\sin x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$, $\sin x$, $\ln \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

- (2) 偶函数的图形关于y轴对称,奇函数的图形关于原点对称, 且奇函数在x = 0处若有定义,则f(0) = 0;
- (3) 奇 \pm 奇 = 奇, 偶 \pm 偶 = 偶, 奇 \cdot 奇 = 偶, 偶 \cdot 偶 = 偶, 奇 \cdot 偶 = 奇.



[例1]设f(x)的定义域关于原点对称,即 $x \in (-l,l)$,证明: g(x) = f(x) + f(-x)是偶函数,h(x) = f(x) - f(-x)是奇函数.

「例2]设对任意的x, y都有, f(x+y) = f(x) + f(y), 证明: f(x)是奇函数.

4. 周期性

定义4 如果存在一个正数T, 使得对于任一x, 有f(x+T) = f(x), 则称f(x)是周期函数, T称为f(x)的周期.

注:常见的周期函数有, $\sin x$, $\cos x$ 以2π为周期, $\tan x$, $|\sin x|$, $\sin 2x$ 以π为周期.

[例3]设函数f(x)在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$,证明:f(x)是以 $T = 2\pi$ 为周期的周期函数.

[例4]设[x]表示不超过x的最大整数,则y = x - [x]是_____. (A)无界函数 (B)单调函数 (C)偶函数 (D)周期函数