第二讲　极限部分

【考试要求】

1. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

2. 掌握极限的性质及四则运算法则.

3. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

4. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

考点：极限的定义

1. 数列极限的定义及存在的充要条件

定义1　如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在正整数N,当$n>N$时,
恒有$|x_n-a|<\varepsilon$成立.则称常数a是数列$\{x_n\}$在$n\to\infty$时的极限,
或称数列$\{x_n\}$收敛于a,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$;
如果不存在这样的常数a,则称数列$\{x_n\}$发散.

注: (1)定义中的ε是衡量x_n与a无限接近的一个标准,所以ε必须且只需可以任意足够小;
(2)定义中的正整数N是保证不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立的分界点,它随ε的给定而选定;
(3)数列$\{x_n\}$是否有极限,如果有极限其极限值为多少,跟$\{x_n\}$的前有限项无关.

[例1]下列关于数列$\{x_n\}$的极限是a的定义,哪些是对的,哪些是错的？说明理由.

(1)对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在$N\in N_+$,当$n>N$时,有无穷多项x_n,使不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立;

(2)对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在$N\in N_+$,当$n>N$时,不等式$|x_n-a|<c\varepsilon$成立,其中c为某个正常数;

(3)对于任意给定的$m\in N_+$,存在$N\in N_+$,当$n>N$时,不等式$|x_n-a|<\dfrac{1}{m}$成立.

[例2]若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a\neq0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$,并举例说明反之不对.

定义2　在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原来数列$\{x_n\}$中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列（或子列）.

定理1　如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子列也收敛,且极限也是a.

注:若数列$\{x_n\}$的某子列发散或某两个子列极限值不相等,则数列$\{x_n\}$发散.

定理2　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A.$

[例2,2015数三]设$\{x_n\}$是数列,则下列不正确的是____.

(A)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$

(B)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

(C)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n-1}=a$

(D)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n-1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

[例3]$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$____.

2. 函数极限的定义

定义3　如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,当x满足$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-a|<\varepsilon$成立,则称常数a是$f(x)$在$x\to x_0$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

注:$f(x)$在x_0处的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在与$f(x)$在$x_0$处是否有定义无关.

类似可定义$x\to x_0^-$和$x\to x_0^+$时的**单侧极限** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

定理1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A.$

[例4]设$f(x)=\begin{cases} x-1, x<0 \\ 0, \quad x=0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$,证明:当$x\to 0$时$f(x)$的极限不存在.

定义3 如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$X>0$,当x满足$|x|>X$时,恒有$|f(x)-a|<\varepsilon$成立，则称常数a是$f(x)$在$x\to\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a.$

类似可定义$x\to+\infty$和$x\to-\infty$时的**单侧极限** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

定理2 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A.$

[例5]当$a=$____,$b=$____时,有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+2|x|}{bx-|x|}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

总结: 需要分别考察左右极限的情形有（即何时使用定理1与定理2）

(1)分段函数的分段点处（包含带有绝对值的情形）；如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$;

(2)e^{∞}型　$e^{+\infty}\to+\infty, e^{-\infty}\to 0$; 如$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$和$\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$;

(3)$\arctan\infty$型　$\arctan(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}, \arctan(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$; 如$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$和$\lim\limits_{x\to 1}\arctan\dfrac{1}{x-1}$.

[例6]当$x\to 1$时,函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限____.

(A)等于2　　(B)等于0　　(C)为∞　　(D)不存在但不为∞

考点：极限的性质

1. 数列极限的性质

性质1（唯一性） 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么它的极限唯一.

性质2（有界性） 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

性质3（局部保号性） 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$(或$<0$),那么存在正整数$N$,当$n > N$时,有$x_n > 0$($<0$).

注: 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > b$($<b$),那么存在正整数$N$,当$n > N$时,都有$x_n > b$($<b$).

2. 函数极限的性质

性质1（唯一性） 如果$\lim f(x)$存在,那么这极限唯一.

性质2（局部有界性） 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,那么当$x\to x_0$时,$f(x)$有界.

注: $x\to x_0$可以改成其他方式,如$x\to x_0^+$, $x\to\infty$等, 结论也对应改之即可,
下面的保号性也一样.

性质3（局部保号性） 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0$(或$<0$),那么当$x\to x_0$时,
$f(x) > 0$(<0).

注: 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > b$(或$<b$),那么当$x\to x_0$时,$f(x) > b$($<b$).

[例1]设$f'(1)=0$,且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{(x-1)^3}=2$,则$f(x)$在$x=1$处____.

(A)不取极值　　(B)取极大值

(C)取极小值　　(D)是否取极值无法确定

3. 函数与数列极限的关系（归结原则、海涅定理）

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$ 存在,则对任一收敛于x_0但又不等于x_0的数列$\{x_n\}$（或$x_n\to\infty$),

其所对应的函数值数列$\{f\{x_n\}\}$必收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f\{x_n\}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$.

注: 若存在某收敛于x_0数列$\{x_n\}$使$\lim\limits_{n\to\infty} f\{x_n\}$不存在或存在某两个收敛于$x_0$数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$使$\lim\limits_{n\to\infty} f\{x_n\}$和$\lim\limits_{n\to\infty} f\{y_n\}$不相等,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

[例2] 证明$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

[例3] 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}$.

考点：无穷小与无穷大

1. 无穷小的定义

定义1 如果$f(x)$在$x \to x_0$时极限为零, 那么称$f(x)$为$x \to x_0$时的无穷小, 当然, 这里的$x \to x_0$可以是其他情形, 如$x \to x_0^+, x \to \infty$等.

注:(1) 有限个无穷小的和仍是无穷小;
(2) 有限个无穷小的积仍是无穷小;
(3) 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

定理1(无穷小与极限的关系) $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中$\alpha$是无穷小.

[例1](2007数三) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3}(\sin x + \cos x) =$ ______.

2. 无穷小的比较

设$\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$, 且$\alpha \neq 0$

(1) 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称$\beta$是比$\alpha$的高阶无穷小, 记为$\beta = o(\alpha)$;

(2) 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小;

(3) 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称$\beta$与$\alpha$是等阶无穷小, 记为$\alpha \sim \beta$;

(4) 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 则称$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小.

注: 等价无穷小具有以下性质
(1) (自反性) $\alpha \sim \alpha$;
(2) (对称性) 若$\alpha \sim \beta$, 则$\beta \sim \alpha$;
(3) (传递性) 若$\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, 则$\alpha \sim \gamma$.

[例2] 判断下列等式是否正确,并说明理由.($x\to 0$)

(1) $o\left(x^2\right)\pm o\left(x^2\right)=o\left(x^2\right)$; (2) $o\left(x^2\right)\pm o\left(x^3\right)=o\left(x^2\right)$;

(3) $x^2\cdot o\left(x^3\right)=o\left(x^5\right)$; (4) $o\left(x^2\right)\cdot o\left(x^3\right)=o\left(x^5\right)$;

(5) $o\left(2x^2\right)=o\left(x^2\right)$.

[例3] 设$f(x)=2^x+3^x-2$,则当$x\to 0$时, 有____.

(A) $f(x)$与x是等价无穷小 (B) $f(x)$与x同价但非等价无穷小

(C) $f(x)$是比x高阶的无穷小 (D) $f(x)$是比x低阶的无穷小

3. 无穷大的定义

定义2 如果对于任意给定的正数M(不论它多么大),总存在$\delta>0$(或$X>0$),对适合$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)的一切x,对应的函数值$f(x)$总满足$|f(x)|>M$,那么称$f(x)$是$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大.

注: $n\to\infty$时, 有$\ln^\alpha n\ll n^\beta\ll a^n\ll n!\ll n^n$,其中$\forall\alpha,\beta>0,a>1$.

定理2(无穷小与无穷小的关系) 在自变量的同一变化过程中,如果$f(x)$为无穷大,那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;

反之, 如果$f(x)$为无穷小, 且$f(x)\neq 0$,那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

4. 无穷大与无界的关系

$$对\left|f(x)\right|>\forall M成立\begin{cases}要求x\to x_0或x\to\infty的一切x\Rightarrow 这是无穷大\\ 要求x\to x_0或x\to\infty的某一x\Rightarrow 这是无界\end{cases}.$$

[例4] 证明函数$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界, 但$x\to 0^+$时这函数不是无穷大.

[例5] 函数$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？这函数是否为$x\to+\infty$时的无穷大？

考点：极限的四则运算法则

定理1 如果$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，那么

$\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

$\lim\left[f(x)g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

注：数列对应有以上运算法则.

[例1]下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的？

(1) 如果$\lim f(x)$存在,但$\lim g(x)$不存在, 那么$\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]$不存在；

(2) 如果$\lim f(x)$和$\lim g(x)$都不存在, 那么$\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]$不存在；

(3) 如果$\lim f(x)$存在, 但$\lim g(x)$不存在, 那么$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]$不存在；

(4) 如果$\lim f(x)$和$\lim g(x)$都不存在, 那么$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]$不存在.

[例2]求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

[例3]求（1）（$\frac{0}{0}$型）$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$； （2）（$\frac{\infty}{\infty}$型）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

（3）（$0\cdot\infty$型）$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$； （4）（$\infty-\infty$型）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

[例4]证明:（1）若$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$, 且$\lim g(x)=0$, 则$\lim f(x)=0$,

（2）若$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$, 且$\lim f(x)=0$, 则$\lim g(x)=0$.

考点:极限存在准则

1. 夹逼准则

如果数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足以下条件:

(1) 从某项起, 即$\exists N>0$,当$n>N$时,有$x_n \le y_n \le z_n$;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

则数列$\{y_n\}$有极限, 且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

注:函数对应有以上夹逼准则.

[例1]证明: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

[例2]证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

[例3]求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$,其中$a_1,a_2,\cdots,a_m \ge 0$.

2. 单调有界准则

若数列$\{x_n\}$单调增加,且有上界,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在;

若数列$\{x_n\}$单调减少,且有下界,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

注:函数对应有以上单调有界准则.

[例4]设$x_1=2,x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$有极限.

[例5]设$x_1=2,x_{n+1}=\dfrac{3+4x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$,证明:数列$\{x_n\}$有极限.

[例6]设$0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$,证明:数列$\{x_n\}$有极限.

考点:用等价无穷小求极限

1. 常用的等价无穷小

1.$x \to 0$时,$\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x$;

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, a^x - 1 \sim x\ln a, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

2.若$\beta = o(\alpha)$,即β是α的高阶无穷小,则$\alpha \pm \beta \sim \alpha$,

特别地$x \to 0$时,$x^m \pm x^n (m < n) \sim x^m$.

2. 等价无穷小替换原则

若$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$,则$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha_1} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$.

[例1]求极限$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x}$.

[例2]$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^3} =$ ____.

[例3]$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} =$ ____.

[例4]求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$.

[例5]求极限$\lim\limits_{x\to \infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

[例6]求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}$.

考点:幂指函数的极限

定理1 设$y=f\left[g(x)\right]$是由$y=f(u)$与$u=g(x)$复合而成,若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,

而函数$y=f(u)$在$u=u_0$连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f\left[g(x)\right]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\right]=f(u_0)$.

[例1]求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

定理2(幂指函数极限运算法则)

若$\lim u(x)=a>0,\lim v(x)=b$,则$\lim u(x)^{v(x)}=\lim u(x)^{\lim v(x)}=a^b$.

[例2]设$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & 0<|x|<\dfrac{\pi}{2}\\ a, & x=0\end{cases}$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$____.

[例3](1)(0^0型)$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=$____;(2)($\infty^0$型)$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=$____;

(3)(1^∞型)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=$____.

[例4] $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$ _____.

[例5] 设 $u(x)\to 1, v(x)\to\infty$，证明：$\lim u(x)^{v(x)}=e^A$，其中 $A=\lim v(x)\left[u(x)-1\right]$，

并用此公式计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$（$a,b,c>0$）和 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.