2020

张宇考研数学

高等数学基础讲义

第二讲　一元函数微分学

核心考点

（1）定义

（2）计算

（3）应用$\begin{cases}\text{中值定理}\\\text{几何应用}\end{cases}$

一、定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{ 记为 } f'(x_0)$$

【注】（1）左右有别

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)\text{ 右导数}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)\text{ 左导数}$$

因此 $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

（2）$\Delta x\to$（广义化）狗

$$f'(x_0)\triangleq\lim_{\text{狗}\to 0}\frac{f(x_0+\text{狗})-f(x_0)}{\text{狗}}$$

（3）一静一动原则，不可违反此原则，如

$\lim\limits_{2\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$就是典型错误.

(4) 换元法,令 $x_0+\Delta x=x \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

【例 1】[张宇带你学高等数学·上册 P53 第 2 题]

当物体的温度高于周围介质的温度时,物体就不断冷却.若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$,应怎样确定该物体在时刻 t 的冷却速度?

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P53 第 3 题］

设某工厂生产 x 件产品的成本为

$$C(x)=2\,000+100x-0.1x^2(\text{元}),$$

函数 $C(x)$ 称为成本函数，成本函数 $C(x)$ 的导数 $C'(x)$ 在经济学中称为边际成本. 试求

(1) 当生产 100 件产品时的边际成本；

(2) 生产第 101 件产品的成本，并与(1) 中求得的边际成本作比较，说明边际成本的实际意义.

【分析】

【例 3】［张宇带你学高等数学·上册 P54 第 8 题］

设 $f(x)$ 可导，$F(x) = f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的（　　）.

(A) 充分必要条件　　　　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件　(D) 既非充分条件又非必要条件

【分析】

【例 4】［张宇带你学高等数学·上册 P56 第 17 题］

设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{2}, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a，b 应取什么值？

【分析】

【例 5】［张宇带你学高等数学·上册 P57 第 20 题］

证明:双曲线 $xy = a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

【分析】

二、计算

1. 基本求导公式

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$
$$(a^{x})' = a^{x}\ln a$$
$$(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \sec^{2}x$$
$$(\cot x)' = -\csc^{2}x$$
$$(\sec x)' = \sec x\tan x$$
$$(\csc x)' = -\csc x\cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^{2}}$$
$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^{2}}$$
$$(\ln(x+\sqrt{x^{2}+1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}$$
$$(\ln(x+\sqrt{x^{2}-1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$$

2. 基本求导方法

（1）复合函数求导

【例】［张宇带你学高等数学·上册 P59、60 第 7(8)(9)(10)、8(7)(9)(10) 题］

求下列函数的导数

(1) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$；

(2) $y=\ln(\sec x+\tan x)$；

(3) $y=\ln(\csc x-\cot x)$；

(4) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$；

(5) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$；

(6) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

【分析】

（2）隐函数求导

显函数：$y=f(x)$，隐函数：$F(x,y)=0$

方法：在 $F(x,y)=0$ 两边同时对 x 求导，只需注意 $y=y(x)$ 即可（复合求导）.

【例 1】［张宇带你学高等数学・上册 P68 第 2 题］

求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P68 第 3(3) 题］

求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$：

$$y = \tan(x + y).$$

【分析】

(3) 对数求导法

方法:对多项相乘、相除、开方、乘方得来的式子,先取对数再求导,称为对数求导数.

【例 1】[张宇带你学高等数学·上册 P69 第 4(3) 题]

用对数求导法求下列函数的导数:

$$y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^{4}}{(x+1)^{5}}.$$

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P69 第 4(4) 题］

用对数求导法求下列函数的导数：

$$y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-\mathrm{e}^{x}}}.$$

【分析】

(4) 反函数求导

【例】[张宇带你学高等数学·上册 P65 第 4 题]

试从$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$导出:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

【分析】

（5）参数方程求导

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$t$ 为参数

【例】［张宇带你学高等数学·上册 P71 第 9(2) 题］

求下列参数方程所确定的函数的三阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$：

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$$

【分析】

（6）高阶导数

① 高阶求导

$$\begin{cases}(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}\\ (uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'\\ \qquad\qquad +\dfrac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)}\end{cases}$$

② 常用以下公式（找规律，用数学归纳法证得的）：

$$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n,(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$$

$$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$$

$$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$$

$$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n},x>0$$

$$[\ln(x+1)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},x>-1$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

【例】［张宇带你学高等数学·上册P66第10题］

求下列函数所指定的阶的导数：

(1) $y=e^{x}\cos x$，求 $y^{(4)}$；

(2) $y=x^{2}\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

【分析】