第四讲　导数与微分

【考试要求】

1. 理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量（**仅数一、数二**），了解导数的经济意义（**仅数三**），理解函数的可导性与连续性之间的关系.

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式。了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分.

3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数.

4. 会求分段函数的导数，会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

考点:导数定义及可导与连续的关系

1. 导数定义

定义1 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$

定义2 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$

$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$

定理1 $f'(x_0)=A\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A.$

注:（1）$f(x)$在x_0处可导就是$f'(x_0)$存在的意思,另外$f'(x_0)$也写成$\dfrac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0}$；

（2）$f'(x_0)$不仅仅与$f(x_0)$有关系,还与x_0附近的其他点是有关的,

如由$f(x_0)=0\Rightarrow f'(x_0)=0$这是荒唐的.

2. 可导与连续的关系

若$f(x)$在x_0处可导,则$f(x)$必在x_0处连续;反之不对.

$\left[\text{例1}\right]$设$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\le 1\\ x^2, \quad x>1\end{cases}$,则$f\left(x\right)$在$x=1$处____.

$\left(A\right)$左、右导数都存在　　　　$\left(B\right)$左导数存在,右导数不存在

$\left(C\right)$左导数不存在,右导数存在　　$\left(D\right)$左、右导数都不存在

$\left[\text{例2}\right]$(1) 设$f'\left(x_0\right)$存在,问$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{2h}$是否存在?

(2) 设$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{2h}$存在,问$f'\left(x_0\right)$是否存在?

$\left[\text{例3}\right]$已知$g\left(x\right)$在$x=x_0$处连续,讨论$f\left(x\right)=\left|x-x_0\right|g\left(x\right)$在$x=x_0$处的可导性.

$\left[\text{例4}\right]$设$f\left(x\right)$在x_0处连续,且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{x-x_0}=k$,证明: $f\left(x\right)$在$x=x_0$处可导,且$f'\left(x_0\right)=k$.

[例5]设$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)(n\geq 2)$,则$f'(0)=$____.

[例6]设$f(x)$和$g(x)$都在$x=x_0$处可导, 且$g'(x_0)\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=$____.

[例7]设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$,为使$f(x)$在$x=1$处可导, 求$a,b$的值.

考点：四则、复合函数及反函数求导法则

1. 基本导数公式

$$\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1};\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a,\left(e^{x}\right)'=e^{x};\left(\log_{a}x\right)'=\frac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1),(\ln x)'=\frac{1}{x};$$

$$(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x,(\tan x)'=\sec^{2}x,(\cot x)'=-\csc^{2}x,$$

$$(\sec x)'=\sec x\tan x,(\csc x)'=-\csc x\cot x;(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}},(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}},$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^{2}},(arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^{2}};\left[\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}.$$

2. 四则求导法则

设u,v均可导，则$(u\pm v)'=u'\pm v';(uv)'=u'v+uv';\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^{2}}(v\neq0).$

3. 复合函数求导法则

设$y=f(u),u=g(x)$都可导,则复合函数$y=f[g(x)]$也可导,且$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$,

即$y'=f'(u)\cdot g'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x).$

4. 反函数求导法则

设$y=f(x)$在某区间单调可导且$f'(x)\neq0$,则其反函数$x=\varphi(y)$在对应区间也可导,

且$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$,即$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$.

[例1]证明：（1）设$f(x)$是可导的奇（偶）函数，则$f'(x)$是偶（奇）函数；

（2）$f(x)$是可导的以T为周期的周期函数，则$f'(x)$也以T为周期.

[例2]求下列函数的导数：

（1）$y=\ln|x|$；

（2）$y=\ln|f(x)|$,其中$f(x)$可导，且$f(x)\neq 0$.

[例3]设$y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$，则$y'=$____.

[例4]设$y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$，其中f可导，则$y'=$____.

[例5]设$f(x)=3x^2+e^x$有反函数$\varphi(y)$，且$f'(1)=6+e$,则$\varphi'(3+e)=$____.

考点:高阶导数

1. 高阶导数的概念

$y=f(x)$的导数$f'(x)$仍然是x的函数,称$f'(x)$的导数叫做$y=f(x)$的二阶导数,

记作y''或$\dfrac{d^2y}{dx^2}$,即$y''=(y')'$或$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$,

一般地,$y=f(x)$的n阶导数就是$f(x)$的$n-1$阶导数的导数.

2. 高阶导数的求法

(1)利用归纳法

先逐一求出$y=f(x)$的一、二、三阶导数,若能观察出规律,就可写出$y^{(n)}$的表达式.

注:$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)}=a^ne^{ax+b}$;$\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$,

$$\left[\cos(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\left[\ln(ax+b)\right]^{(n)}=(-1)^{n-1}a^n\frac{(n-1)!}{(ax+b)^n};\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^na^n\frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

(2)利用分解法

若$f(x)$可分解成$f(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$,若知道$f_1^{(n)}(x)$和$f_2^{(n)}(x)$,
则$f^{(n)}(x)=\alpha f_1^{(n)}(x)+\beta f_2^{(n)}(x)$.

(3)利用莱布尼茨公式

$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ku^{(k)}v^{(n-k)}$,这里$u^{(0)}=u,v^{(0)}=v$.

[例1]试从$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$导出:$\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

$\left[例2\right]$设$f\left(x\right)$具有任意阶导数,且$f\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2$,当$n>2$时,$f^{(n)}\left(x\right)=$____.

$(A)n!\left[f\left(x\right)\right]^{n+1}$ $(B)n\left[f\left(x\right)\right]^{n+1}$ $(C)\left[f\left(x\right)\right]^{2n+1}$ $(D)n!\left[f\left(x\right)\right]^{2n}$

$\left[例3\right]$求下列函数的n阶导数:(1)$y=\sin^2 x$; (2)$y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

$\left[例4\right]$设$y=x^2e^{2x}$,求$y^{(20)}$.

考点:隐函数及由参数方程所确定的函数求导

1. 隐函数的导数

设$y=y(x)$是由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数,为求y',
可在方程$F(x,y)=0$两端直接对x求导(注意$y=y(x)$),解出y'即可.

[例1] 设$y=y(x)$由方程$xy=e^{x+y}$确定,则$y'=$____.

[例2] 设$y=y(x)$由方程$y=\tan(x+y)$确定,求y''.

[例3] 设$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$确定,求$y'(0)$及$y''(0)$.

2. 由参数方程所确定的函数的导数

设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$所确定,$x(t)$和$y(t)$均可导,且$y'(t)\neq 0$则$y'=\dfrac{y_t'}{x_t'}$.

[例4] 设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$所确定，求$y'$及$y''$.

[例5] 设$y=y(x)$由$\begin{cases} x=\arctan t \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$所确定，求$\dfrac{dy}{dx}$.

[例6] 利用变换$x=\ln t$变换方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+e^{2x}y=0$.

考点:分段函数、绝对值函数及幂指函数求导

[例1]求$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$的导数$f'(x)$,并证明$f'(x)$在$x=0$处不连续.

[例2]设$f(x)=|x-1|\ln(1+x^2)$,则$f'(x)=$____.

[例3]设$f(x)$在x_0处可导,讨论$|f(x)|$在x_0处的可导性.

[例4]设$y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$,则$y'=$____.

考点:导数的几何意义

$y=f(x)$在x_0处的导数$f'(x_0)$就是曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率k,

切线方程是$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).(f'(x_0)\neq 0)$

法线方程是$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).(f'(x_0)\neq 0)$

[例1]设$f(x)$是以4为周期的可导函数,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,

则曲线$y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线的斜率为____.

$(A)\dfrac{1}{2}$　　$(B)0$　　$(C)-1$　　$(D)-2$

[例2]曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$在点$\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{4},\dfrac{\sqrt{2}a}{4}\right)$处的切线方程是____.

[例3]曲线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$相应点的切线方程是____.

[例4]曲线$r=e^{\theta}$在点$(r,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$处的切线的直角坐标方程是____.

考点：函数的微分

1. 微分的定义及计算

定义1 若增量$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$可以表示为$\Delta y=A\Delta x+o\left(\Delta x\right)$，其中$A$是不依赖于$\Delta x$的常数，则称$y=f\left(x\right)$在$x=x_0$处可微，$A\Delta x$称为$f\left(x\right)$在$x=x_0$处的微分，记为$dy$，即$dy=A\Delta x$.

定理1 $y=f\left(x\right)$在$x=x_0$处可微$\Leftrightarrow$

$y=f\left(x\right)$在$x=x_0$处可导，且$dy\big|_{x=x_0}=f'\left(x_0\right)\Delta x=f'\left(x_0\right)dx$.

2. 微分的几何意义

$y=f\left(x\right)$在x_0处的微分$dy=f'\left(x_0\right)dx$表示曲线$y=f\left(x\right)$的在点$\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$处切线的增量，它近似等于曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$处的实际增量$\Delta y$.

[例1] 设$f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{x}$，则$\dfrac{df\left(x\right)}{d\left(x^2\right)}=$____.

[例2] 设$y=e^{1-3x}\cos x$，则$dy=$____.

[例3] 设$y=y(x)$由方程$2^{xy}=x+y$所确定，则$dy\big|_{x=0}=$____.

[例4] 在下列等式左端括号中填入适当的函数，使等式成立.

（1）$d(\quad)=xdx$；（2）$d(\quad)=\cos\omega tdt$.