第三讲　连续部分

【考试要求】

1. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

2. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

考点:函数的连续性与间断点

1. 函数的连续性

定义1　设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$
如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称$f(x)$点$x_0$连续.

定义2　设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，
如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$连续.

定义3　若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$左连续.
若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$右连续.

定义4　若$f(x)$在(a,b)内每一点都连续，则称$f(x)$在(a,b)内连续.
若$f(x)$在(a,b)内连续，且在$x=a$处右连续，在$x=b$处左连续，
则称$f(x)$在$[a,b]$上连续.

2. 函数的间断点

设函数$y=f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义，如果$f(x)$有下列三种情形之一:

（1）在$x=x_0$处没有定义；

（2）虽在$x=x_0$处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

（3）虽在$x=x_0$处有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$也存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f\left(x_0\right)$.

那么$f(x)$在点x_0处不连续，点x_0称为$f\left(x\right)$的间断点.

3. 间断点的分类

第一类间断点： 左、右极限都存在的间断点

$$\begin{cases}\text{可去间断点：左、右极限都存在且相等的间断点；} \\ \text{跳跃间断点：左、右极限都存在但不相等的间断点.}\end{cases}$$

第二类间断点： 左、右极限至少有一个不存在的间断点

常见的有无穷间断点和振荡间断点.

4. 连续函数的运算

（1）若函数$f(x), g(x)$在点x_0处连续,

则$f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$g(x_0)\neq 0$时）都在点x_0处连续.

（2）设函数$y=f\left[g(x)\right]$是由$y=f(u)$与$u=g(x)$复合而成,

若$u=g(x)$在$x=x_0$连续, $g(x_0)=u_0$, 且$y=f(u)$在$u=u_0$连续,

则复合函数$y=f\left[g(x)\right]$在$x=x_0$也连续.

（3）若函数$y=f(x)$在区间I_x上单调且连续,

则其反函数$x=f^{-1}(y)$在对应区间I_y上也连续且有相同单调性.

5. 初等函数的连续性

基本初等函数在它们的定义域内都是连续的；

初等函数在其定义区间内都是连续的.

[例1]已知$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & 0<|x|<\dfrac{\pi}{2} \\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续, 则$a=$____.

[例2]求$f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$的间断点, 并指明类型.

[例3] 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的连续性, 若有间断点, 则判别其类型.

[例4] 设 $f(x)$ 在 a 处连续, 证明 $|f(x)|$ 也在 a 处连续, 并举例说明反之不对.

[例5] 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 处都连续, 分别证明 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$,
$\phi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 在 a 处也连续.

$\left[\text{例6}\right]$设$f\left(x\right)$和$\varphi\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上有定义，$f\left(x\right)$为连续函数，且$f\left(x\right)\neq 0$，$\varphi\left(x\right)$有间断点，则____.

$(A)\varphi\left[f\left(x\right)\right]$必有间断点　　(B)$\left[\varphi\left(x\right)\right]^2$必有间断点

（C）$f\left[\varphi\left(x\right)\right]$必有间断点　　(D)$\dfrac{\varphi\left(x\right)}{f\left(x\right)}$必有间断点.

$\left[\text{例7}\right]$设$f\left(x\right)=\begin{cases} x, x\in Q \\ 0, x\in R\setminus Q \end{cases}$，证明：

（1）$f\left(x\right)$在$x=0$处连续;（2）$f\left(x\right)$在非零的x处都不连续.

考点:闭区间上连续函数的性质

定理1(有界性与最大值最小值定理) 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,
则$f(x)$在$[a,b]$上有界且能取到最大值M与最小值m.

定理2(零点定理) 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续, 且$f(a)\cdot f(b)<0$
则至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使$f(\xi)=0$.

定理3(介值定理) 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续, 且$f(a)\neq f(b)$,
则对于$f(a)$和$f(b)$之间的任何一个数μ, 至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使$f(\xi)=\mu$.

定理4(连续函数的局部保号性) 设$f(x)$在x_0处连续, 且$f(x_0)>$(或$<$)0,
则存在x_0的某个邻域$U(x_0)$, 当$x\in U(x_0)$时, $f(x)>$(或$<$)0.

[例1] 证明方程$x=a\sin x+b$, 其中$a>0,b>0$, 至少有一个正根, 并且它不超过$a+b$.

[例2] 证明奇次方程$a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0=0$至少有一实根.

[例3] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 证明: 存在 $\xi\in[x_1,x_n]$, 使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

[例4] 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在（不必相等）, 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内有界. 这里 a 可以是有限数也可以是 $-\infty$, 同理对 b.