

第三讲 连续部分

【考试要求】

- 1. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
- 2. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

考点:函数的连续性与间断点

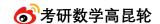
1. 函数的连续性

- **定义1** 设函数y = f(x)在点 x_0 的某邻域内有定义, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) f(x_0)$ 如果 $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, 则称f(x)点 x_0 连续.
- **定义2** 设函数y = f(x)在点 x_0 的某邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称f(x)在点 x_0 连续.
- **定义3** 若 $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$,则称f(x)在点 x_0 左连续. 若 $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$,则称f(x)在点 x_0 右连续.
- **定义4** 若f(x)在(a,b)内每一点都连续,则称f(x)在(a,b)内连续. 若f(x)在(a,b)内连续,且在x = a处右连续,在x = b处左连续,则称f(x)在[a,b]上连续.

2. 函数的间断点

设函数y = f(x)在点 x_0 的某去心邻域内有定义,如果f(x)有下列三种情形之一:

- (1) 在 $x = x_0$ 处没有定义;
- (2) 虽在 $x = x_0$ 处有定义,但 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;
- (3) 虽在 $x = x_0$ 处有定义,且 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 也存在,但 $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 那么f(x)在点 x_0 处不连续,点 x_0 称为f(x)的间断点.



3. 间断点的分类

第一类间断点: 左、右极限都存在的间断点

∫可去间断点:左、右极限都存在且相等的间断点; 跳跃间断点:左、右极限都存在但不相等的间断点.

第二类间断点: 左、右极限至少有一个不存在的间断点

常见的有无穷间断点和振荡间断点.

4. 连续函数的运算

(1) 若函数f(x), g(x)在点 x_0 处连续,

则
$$f(x)\pm g(x)$$
、 $f(x)\cdot g(x)$ 、 $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0$ 时)都在点 x_0 处连续.

(2) 设函数 $y = f \lceil g(x) \rceil$ 是由y = f(u)与u = g(x)复合而成,

若u = g(x)在 $x = x_0$ 连续, $g(x_0) = u_0$, 且y = f(u)在 $u = u_0$ 连续,

则复合函数 $y = f \lceil g(x) \rceil \Delta x = x_0$ 也连续.

(3) 若函数y = f(x)在区间 I_x 上单调且连续,

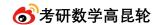
则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在对应区间 I_y 上也连续且有相同单调性.

5. 初等函数的连续性

基本初等函数在它们的定义域内都是连续的; 初等函数在其定义区间内都是连续的.

[例1]已知
$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x^{-2}}, 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \\ a, & x = 0 \end{cases}$$
 在 $x = 0$ 处连续,则 $a =$ ____.

$$[M2] 求 f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$$
的间断点,并指明类型.



[例3]讨论 $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ 的连续性, 若有间断点, 则判别其类型.

[例4]设f(x)在a处连续,证明|f(x)|也在a处连续,并举例说明反之不对.

[例5]设f(x)与g(x)在a处都连续,分别证明 $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\},$ $\phi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 在a处也连续. [例6]设f(x)和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, f(x)为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则_____.

$$(A)\varphi[f(x)]$$
必有间断点

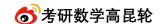
$$(B)[\varphi(x)]^2$$
必有间断点

$$(C) f[\varphi(x)]$$
必有间断点

$$(D)\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$
必有间断点.

[例7]设
$$f(x) = \begin{cases} x, x \in Q \\ 0, x \in R \setminus Q \end{cases}$$
,证明:

(1) f(x)在x = 0处连续;(2) f(x)在非零的x处都不连续.



考点:闭区间上连续函数的性质

定理1 (有界性与最大值最小值定理)设f(x)在闭区间[a,b]上连续,

则f(x)在[a,b]上有界且能取到最大值M与最小值m.

定理2(零点定理)设f(x)在闭区间[a,b]上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

定理3(介值定理)设f(x)在闭区间[a,b]上连续,且 $f(a) \neq f(b)$,则对于f(a)和f(b)之间的任何一个数 μ ,至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使 $f(\xi) = \mu$.

定理4(连续函数的局部保号性)设f(x)在 x_0 处连续,且 $f(x_0) > (或 <)0$,则存在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$,当 $x \in U(x_0)$ 时,f(x) > (或 <)0.

「例1]证明方程 $x = a \sin x + b$,其中a > 0, b > 0,至少有一个正根,并且它不超过a + b.

「例2]证明奇次方程 $a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_{1}x+a_{0}=0$ 至少有一实根.

[例3]设f(x)在[a,b]上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$,证明:存在 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

[例4]设f(x)在(a,b)内连续,且 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 都存在(不必相等),证明:f(x)在(a,b)内有界. 这里a可以是有限数也可以是 $-\infty$,同理对b.