引 言

一、基础阶段任务:

(1)熟记基本概念、定理、公式
(2)掌握基本方法与技术
(3)培养基本计算能力:求极限、求导数、求积分

二、目标:

(1)建成基础知识结构
(2)形成基础数学素养

三、内容安排:

(1)极限
(2)一元微分学 高数上
(3)一元积分学
(4)多元微分学
(5)二重积分 高数下
(6)微分方程

第一讲　极限

核心考点：

(1)定义
(2)性质
(3)计算
(4)应用

一、极限定义

1. 函数极限

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$， 使当 $0<\lvert x-x_0\rvert$ $<\delta$ 时， 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0$， $\exists\delta>0$， 使当 $0<\lvert x-x_0\rvert$ $<\delta$ 时， 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0$， $\exists\delta>0$， 使当 $0<\lvert x-x_0\rvert$ $<\delta$ 时， 即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$， $\exists\delta>0$， 使当 $0<\lvert x-x_0\rvert$ $<\delta$ 时， 即有 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$， 使当 $0<x-x_0<\delta$ 时， 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0$， $\exists\delta>0$， $0<x-x_0<\delta$ 时， 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0$， $\exists\delta>0$， $0<x-x_0<\delta$ 时， 即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$， $\exists\delta>0$， $0<x-x_0<\delta$ 时， 即有 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$， $0<x_0-x<\delta$ 时， 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0$， $\exists\delta>0$， $0<x_0-x<\delta$ 时， 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0$， $\exists\delta>0$， $0<x_0-x<\delta$ 时， 即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$， $\exists\delta>0$， $0<x_0-x<\delta$ 时， 即有 $f(x)<-M$.

续表

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\lvert x\rvert>X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0$, $\exists X>0$, $\lvert x\rvert>X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0$, $\exists X>0$, $\lvert x\rvert>X$ 时, 即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$, $\exists X>0$, $\lvert x\rvert>X$ 时, 即有 $f(x)<-M$.
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $x>X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0$, $\exists X>0$, $x>X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0$, $\exists X>0$, $x>X$ 时, 即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$, $\exists X>0$, $x>X$ 时, 即有 $f(x)<-M$.
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $x<-X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0$, $\exists X>0$, $x<-X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0$, $\exists X>0$, $x<-X$ 时, 即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$, $\exists X>0$, $x<-X$ 时, 即有 $f(x)<-M$.

【例 1】[张宇带你学高等数学·上册 P16 第 10 题]

证明:若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A,则

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P17 第 11 题］

根据函数极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

【分析】

【例 3】［张宇带你学高等数学·上册 P17 第 12 题］

试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

【定理】若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在，则存在 $X>0$ 及 $M>0$，使对 $\forall\ |x|>X$ 均有 $|f(x)|\leqslant M$.

【分析】

2. 数列极限

n 为自然数，$n \to \infty$ 专指 $n \to +\infty$，而略去"+"不写

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$

【例 4】［张宇带你学高等数学·上册 P14 第 6 题］

若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明：如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限，但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

【分析】

【例 5】［张宇带你学高等数学·上册 P14 第 8 题］

对于数列$\{x_n\}$，若 $x_{2k-1} \to a(k \to \infty)$，$x_{2k} \to a(k \to \infty)$，证明：$x_n \to a(n \to \infty)$.

【分析】

二、极限三大性质

1. 唯一性

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,则 A 唯一.

【分析】

【例 6】［张宇带你学高等数学·上册 P15 第 4 题］

求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

【分析】

【例 7】［张宇带你学高等数学·上册 P44 例 6(1)］

当 $x \to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为（　　）.

(A)2　　　　(B)0

(C)∞　　　　(D) 不存在但不为 ∞

【分析】

2. 局部有界性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\exists M>0,\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)|<M$.

【分析】

【例 8】$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在(　　)内有界.

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$

C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

【分析】

3. 局部保号性

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$，则 $x \to x_0$ 时，$f(x) > 0$

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A < 0$，则 $x \to x_0$ 时，$f(x) < 0$

【分析】

【例 9】 设$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-2$,则$x=0$是(　　).

A. 极大值点　　　　B. 极小值点

C. 非极值点　　　　D. 无法判断

【分析】

三、极限的计算

1. 函数极限计算

① 七种未定式 $\left\{\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty\cdot 0,\infty-\infty,\infty^0,0^0,1^\infty\right\}$

【注】0 不是真的 0,1 不是真的 1.

② 计算工具

(1) 洛必达法则

a) 若 $\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=0,\lim\limits_{x\to\cdot}g(x)=0$

b) 且 $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\exists$,则 $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

隐含条件:$f(x)$,$g(x)$ 都为无穷小量;都可导;导函数比值的极限存在.

【注 1】 如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$

洛必达法则能不能用,用了再说,用了若存在,则存在;用了若不存在,只能说洛必达法则失效,并不能说原极限一定不存在,如:

【例 10】[张宇带你学高等数学·上册 P97 第 2 题]

验证极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$存在,但不能用洛必达法则得出.

【分析】

【例 11】［张宇带你学高等数学·上册 P97 第 3 题］

验证极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

【分析】

【注 2】常用等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$\tan x \sim x$

$\arctan x \sim x$

$e^x - 1 \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

第一组$\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty\cdot 0\right)$

【例 1】［张宇带你学高等数学·上册 P95 第 1(9) 题］

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}\left(\frac{0}{0}\right).$$

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P95 第 1(7)题］

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x} \left(\dfrac{\infty}{\infty} \right)$.

【分析】

【例 3】［张宇带你学高等数学·上册 P95 第 1(12)题］

$\lim\limits_{x\to0}x^2\mathrm{e}^{1/x^2}$ $(0\cdot\infty)$.

【分析】

第二组($\infty-\infty$)

①有分母,则通分

【例】[张宇带你学高等数学·上册 P123 第 10(2)题]

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right](\infty-\infty).$$

【分析】

②没有分母，创造分母

【例】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$.

【分析】

第三组(∞^0,0^0,1^∞)

$U(x)^{V(x)}=\mathrm{e}^{V(x)\ln U(x)}$

【例 1】［张宇带你学高等数学·上册 P95 第 1(16)题］

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$($\infty^0$).

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P95 第 1(15)题］

$\lim\limits_{x \to 0^{+}} x^{\sin x}\left(0^{0}\right)$.

【分析】

【例 3】［张宇带你学高等数学·上册 P123 第 10(4)题］

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]^{nx}$ （其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$）

(1^{∞}).

【分析】

（2）泰勒公式

任何可导函数 $f(x)=\sum a_n x^n$

当 $x\to 0$ 时，

①$\sin x = x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$

②$\arcsin x = x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$

③$\tan x = x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

④$\arctan x = x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

⑤$\cos x = 1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+o(x^4)$

⑥$\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)$

⑦$e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$

⑧$\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+o(x^3)\ (|x|<1)$

⑨$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$

【例 1】[张宇带你学高等数学·上册 P99 第 6 题]

求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有佩亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式.

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P98 第 3 题］

求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.

【分析】

【例 3】［张宇带你学高等数学·上册 P100 第 10(1)(3) 题］

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}$.

【分析】

2. 数列极限运算

(1) 若 x_n 易于连续化,转化为函数极限计算

依据:若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$

【例】[张宇带你学高等数学·上册 P41 第 4(3) 题]

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{an}-1)(a>0)$.

【分析】

(2) 若$\{x_n\}$不易于连续化,用“夹逼准则”(或定积分定义)

【例 1】[张宇带你学高等数学·上册 $P44$ 第 4(1) 题]

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P41 第 4(1) 题］

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

【分析】

(3) 若$\{x_n\}$由递推式 $x_n=f(x_{n-1})$ 给出,用“单调有界准则”:

给出$\{x_n\}$,若$\{x_n\}$单增且有上界或者单减且有下界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n\,\exists \Leftrightarrow \{x_n\}$ 收敛

【例】[张宇带你学高等数学·上册 $P41$ 第 4(2) 题]

设 $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$,试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

【分析】

四、极限的应用 —— 连续与间断

1. 基本常识

任何初等函数在其定义区间内连续（只要见到的函数都是初等函数），故考研中只研究两类特殊的点：

分段函数的分段点（可能间断）

无定义点（必然间断）

2. 连续的定义

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则 $f(x)$ 称在 $x = x_0$ 处连续.

【注】 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 三者相等才连续.

3. 间断的定义

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点的某去心邻域有定义

(1) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (3) $f(x_0)$

a) 第一类间断点(1)，(2) 均存在，且

(1) $\neq$ (2)：x_0 为跳跃间断点

(1) $=$ (2) $\neq$ (3)：x_0 为可去间断点

b) 第二类间断点(1)，(2) 至少一个不存在（目前为止考研只考了(1)(2) 均不存在）

若不存在 $= \infty \Rightarrow$ 无穷间断点

若不存在 $=$ 振荡 $\Rightarrow$ 振荡间断点

【注】① 单侧定义不讨论间断性

② 若出现左右一边是振荡间断，一边是无穷间断，则我们应该分侧讨论

【例 1】[张宇带你学高等数学·上册 P97 第 4 题]

讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P27 第 3 题］

下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点，那么补充或改变函数的定义使它连续：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, x=1, x=2$；

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}, x=k\pi, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}, x=0$；

(4) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}\ x=1.$

【分析】