

第二讲 极限部分

【考试要求】

- 1. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与 左极限、右极限之间的关系.
 - 2. 掌握极限的性质及四则运算法则.
- 3. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
- 4. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价 无穷小量求极限.

考点:极限的定义

1. 数列极限的定义及存在的充要条件

定义1 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在正整数N,当n > N时,

恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立.则称常数a是数列 $\{x_n\}$ 在 $n \to \infty$ 时的极限,

或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于a,记为 $\lim x_n = a$;

如果不存在这样的常数a,则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

- $\mathbf{\dot{z}}$:(1) 定义中的 ε 是衡量 x_n 与a无限接近的一个标准,所以 ε 必须且只需可以任意足够小;
 - (2) 定义中的正整数N是保证不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立的分界点, 它随 ε 的给定而选定;
 - (3)数列 $\{x_n\}$ 是否有极限,如果有极限其极限值为多少,跟 $\{x_n\}$ 的前有限项无关.

「例1]下列关于数列 $\{x_n\}$ 的极限是a的定义,哪些是对的,哪些是错的?说明理由.

- (1)对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in N_+$,当n>N时,有无穷多项 x_n , 使不等式 $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$ 成立;
- (2)对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 $N \in N_+$,当n > N时,不等式 $\left|x_n a\right| < c\varepsilon$ 成立,其中c为某个正常数;
- (3) 对于任意给定的 $m \in N_+$, 存在 $N \in N_+$, 当n > N时, 不等式 $\left| x_n a \right| < \frac{1}{m}$ 成立.



[例2]若 $\lim_{n\to\infty}u_n=a\neq 0$,证明 $\lim_{n\to\infty}|u_n|=|a|$,并举例说明反之不对.

定义2 在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原来数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列(或子列).

定理1 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于a,那么它的任一子列也收敛,且极限也是a.

注: 若数列 $\{x_n\}$ 的某子列发散或某两个子列极限值不相等,则数列 $\{x_n\}$ 发散.

定理2
$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = A.$$

 $\lceil M_2, 2015$ 数三 \rceil 设 $\{x_n\}$ 是数列,则下列不正确的是____.

$$(A)$$
若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$

$$(B)$$
若 $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$,则 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

$$(C)$$
若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim_{n\to\infty} x_{3n} = \lim_{n\to\infty} x_{3n-1} = a$

$$(D) 若 \lim_{n \to \infty} x_{3n} = \lim_{n \to \infty} x_{3n-1} = a, 则 \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

$$\left[\text{Fig.} \right] \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\qquad}.$$

2. 函数极限的定义

定义3 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在 $\delta > 0$,当x满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - a| < \varepsilon$ 成立,则称常数a是f(x)在 $x \to x_0$ 时的极限,记为 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

注: f(x)在 x_0 处的极限 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 是否存在与f(x)在 x_0 处是否有定义无关.



类似可定义 $x \to x_0^-$ 和 $x \to x_0^+$ 时的**单侧极限** $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

定理1
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

$$[例4] 设 f(x) = \begin{cases} x-1, x < 0 \\ 0, \quad x = 0, 证明: \exists x \to 0 \text{时} f(x) \text{的极限不存在.} \\ x+1, x > 0 \end{cases}$$

定义3 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在X > 0,当x满足|x| > X时,恒有 $|f(x)-a| < \varepsilon$ 成立,则称常数a是f(x)在 $x \to \infty$ 时的极限,记为 $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$. 类似可定义 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时的**单侧极限** $\lim_{x \to \infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

定理2
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

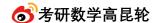
[例5] 当
$$a = _____, b = ____$$
时,有 $\lim_{x \to \infty} \frac{ax + 2|x|}{bx - |x|}$ arctan $x = -\frac{\pi}{2}$.

总结:需要分别考察左右极限的情形有(即何时使用定理1与定理2)

- (1) 分段函数的分段点处(包含带有绝对值的情形);如 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$;
- $e^{+\infty} \rightarrow +\infty, e^{-\infty} \rightarrow 0;$ 如 $\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 和 $\lim_{x \to 1} e^{\frac{1}{x-1}};$ $(2)e^{\infty}$ 型
- (3) $\arctan \infty$ 型 $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x}$ $\lim_{x\to 1} \arctan \frac{1}{x-1}$.

[例6]当 $x \to 1$ 时,函数 $\frac{x^2 - 1}{x - 1}e^{\frac{1}{x - 1}}$ 的极限_____.

- (A)等于2 (B)等于0 (C)为∞ (D)不存在但不为∞



考点:极限的性质

1. 数列极限的性质

性质1(唯一性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,那么它的极限唯一.

性质2(有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

性质3(局部保号性) 如果 $\lim_{n\to\infty}x_n=a>0$ (或<0),那么存在正整数N,当n>N时, 有 $x_n>0$ (<0).

注:如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a > b(< b)$,那么存在正整数N,当n > N时,都有 $x_n > b(< b)$.

2. 函数极限的性质

性质1(唯一性) 如果 $\lim f(x)$ 存在,那么这极限唯一.

性质2(局部有界性) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在,那么当 $x\to x_0$ 时,f(x)有界.

注: $x \to x_0$ 可以改成其他方式,如 $x \to x_0^+$, $x \to \infty$ 等,结论也对应改之即可, 下面的保号性也一样.

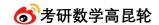
性质3(局部保号性) 如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a > 0$ (或 < 0), 那么当 $x \to x_0$ 时, f(x) > 0(< 0).

注:如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a > b($ 或< b),那么当 $x \to x_0$ 时,f(x) > b(< b).

[例1]设
$$f'(1) = 0$$
,且 $\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{(x-1)^3} = 2$,则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处_____.

- (A)不取极值 (B)取极大值
- (C)取极小值 (D)是否取极值无法确定





3. 函数与数列极限的关系(归结原则、海涅定理)

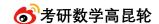
如果 $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在,则对任一收敛于 x_0 但又不等于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ (或 $x_n \to \infty$),

其所对应的函数值数列 $\{f\{x_n\}\}$ 必收敛,且 $\lim_{n\to\infty}f\{x_n\}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$.

注:若存在某收敛于 x_0 数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim_{n\to\infty} f\{x_n\}$ 不存在或存在某两个收敛于 x_0 数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 使 $\lim_{n\to\infty} f\{x_n\}$ 和 $\lim_{n\to\infty} f\{y_n\}$ 不相等,则 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

[例2]证明 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

[例3]求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$.



考点: 无穷小与无穷大

1. 无穷小的定义

定义1 如果f(x)在 $x \to x_0$ 时极限为零,那么称f(x)为 $x \to x_0$ 时的无穷小, 当然,这里的 $x \to x_0$ 可以是其他情形,如 $x \to x_0^+, x \to \infty$ 等.

注:(1)有限个无穷小的和仍是无穷小;

- (2)有限个无穷小的积仍是无穷小;
- (3) 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

定理1(无穷小与极限的关系) $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$,其中 α 是无穷小.

[例1](2007数三)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = ____.$$

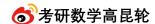
2. 无穷小的比较

设 $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, 且 $\alpha \neq 0$

- (1) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$,则称 β 是比 α 的高阶无穷小,记为 $\beta = o(\alpha)$;
- (2) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$,则称 β 与 α 是同阶无穷小;
- (3) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$,则称 β 与 α 是等阶无穷小,记为 $\alpha \sim \beta$;
- (4) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$,则称 β 是 α 的k阶无穷小.

注:等价无穷小具有以下性质

- (1) (自反性) $\alpha \sim \alpha$;
- (2) (对称性) 若 $\alpha \sim \beta$,则 $\beta \sim \alpha$;
- (3) (传递性) 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma, 则 \alpha \sim \gamma$.



「例2]判断下列等式是否正确,并说明理由 $(x \rightarrow 0)$

(1)
$$o(x^2) \pm o(x^2) = o(x^2);$$
 (2) $o(x^2) \pm o(x^3) = o(x^2);$

(3)
$$x^2 \cdot o(x^3) = o(x^5);$$
 (4) $o(x^2) \cdot o(x^3) = o(x^5);$

(5)
$$o(2x^2) = o(x^2)$$
.

「例3]设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$,则当 $x \to 0$ 时,有_____

- (A) f(x)与x是等价无穷小
- (B) f(x)与x同价但非等价无穷小
- (C) f(x)是比x高阶的无穷小
- (D)f(x)是比x低阶的无穷小

3. 无穷大的定义

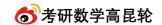
定义2 如果对于任意给定的正数M(不论它多么大),总存在 $\delta > 0$ (或X > 0), 对适合 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或|x| > X) 的一切x,对应的函数值f(x)总满足|f(x)| > M, 那么称f(x)是 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的无穷大.

注: $n \to \infty$ 时,有 $\ln^{\alpha} n \ll n^{\beta} \ll a^n \ll n! \ll n^n$,其中 $\forall \alpha, \beta > 0, a > 1$.

定理2(无穷小与无穷小的关系) 在自变量的同一变化过程中,如果f(x)为 无穷大,那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小;

反之, 如果f(x)为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$,那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.



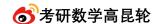


4. 无穷大与无界的关系

对
$$|f(x)|$$
>∀ M 成立 $\begin{cases} \overline{y} = \overline{x}x \rightarrow x_0 \overline{y}x \rightarrow \infty$ 的一切 $x \Rightarrow \overline{y} = \overline{y}$ 是无穷大 $\overline{y} = \overline{y} = \overline{y}$ 。

[例4]证明函数
$$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$
在(0,1)内无界, 但 $x \to 0$ 时这函数不是无穷大.

[例5]函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界?这函数是否为 $x \to +\infty$ 时的无穷大?



考点:极限的四则运算法则

定理1 如果 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B,$ 那么

$$\lim \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$\lim [f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

注:数列对应有以上运算法则.

「例1]下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的?

- (1) 如果 $\lim f(x)$ 存在,但 $\lim g(x)$ 不存在,那么 $\lim [f(x)\pm g(x)]$ 不存在;
- (2) 如果 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都不存在,那么 $\lim [f(x)\pm g(x)]$ 不存在;
- (3) 如果 $\lim f(x)$ 存在,但 $\lim g(x)$ 不存在,那么 $\lim [f(x)\cdot g(x)]$ 不存在;
- (4) 如果 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都不存在,那么 $\lim [f(x)\cdot g(x)]$ 不存在.

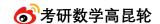
[例2]求
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+3}$$
.

[例3]求 (1)
$$(\frac{0}{0}$$
型) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$; (2) $(\frac{\infty}{\infty}$ 型) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

(3)
$$(0 \cdot \infty \stackrel{\text{mat}}{=}) \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right);$$
 (4) $(\infty - \infty \stackrel{\text{mat}}{=}) \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right).$

[例4]证明:(1)若
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$$
,且 $\lim g(x) = 0$,则 $\lim f(x) = 0$,

(2) 若
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$$
, 且 $\lim f(x) = 0$, 则 $\lim g(x) = 0$.



考点:极限存在准则

1. 夹逼准则

如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足以下条件:

- (1) 从某项起, 即 $\exists N>0, \exists n>N$ 时, 有 $x_n\leq y_n\leq z_n;$
- $(2)\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}z_n=a.$

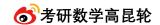
则数列 $\{y_n\}$ 有极限,且 $\lim_{n\to\infty}y_n=a$.

注:函数对应有以上夹逼准则.

[例1]证明:
$$\lim_{x\to 0^+} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1$$
.

[例2]证明:
$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \dots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1.$$

[例3]求
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n}$$
,其中 $a_1, a_2, \dots, a_m \ge 0$.



2. 单调有界准则

若数列 $\{x_n\}$ 单调增加,且有上界,则极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在;

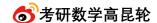
若数列 $\{x_n\}$ 单调减少,且有下界,则极限 $\lim x_n$ 存在.

注:函数对应有以上单调有界准则.

[例4]设
$$x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) (n = 1, 2, \dots)$$
,证明数列 $\{x_n\}$ 有极限.

[例5]设
$$x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{3+4x_n}{1+x_n} (n=1,2,\cdots)$$
,证明:数列 $\{x_n\}$ 有极限.

[例6]设 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \cdots)$,证明:数列 $\{x_n\}$ 有极限.



考点:用等价无穷小求极限

1. 常用的等价无穷小

 $1.x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x$;

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$
, $a^x - 1 \sim x \ln a$, $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$.

2.若 $\beta = o(\alpha)$,即 β 是 α 的高阶无穷小,则 $\alpha \pm \beta \sim \alpha$,

特别地 $x \to 0$ 时, $x^m \pm x^n (m < n) \sim x^m$.

2. 等价无穷小替换原则

若
$$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$$
,则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha_1} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$.

[例1]求极限
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3+3x}$$
.

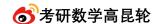
$$\left[\sqrt[a]{2} \right] \lim_{x \to 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^3} = \underline{\qquad}.$$

$$\left[\boxed{9} \right] \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \underline{\qquad}.$$

[例4]求极限
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x} - x}$$
.

[例5]求极限
$$\lim_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

[例6]求极限
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(3+2\sin x\right)^x-3^x}{\tan^2 x}$$
.



考点:幂指函数的极限

定理1 设 y = f[g(x)] 是由 y = f(u) 与 u = g(x) 复合而成,若 $\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0$,而函数 y = f(u) 在 $u = u_0$ 连续,则 $\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \to x_0} g(x)] = f(u_0)$. [例1] 求 $\lim_{n \to \infty} \sin n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right)$.

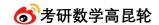
定理2(幂指函数极限运算法则)

若 $\lim u(x) = a > 0$, $\lim v(x) = b$, 则 $\lim u(x)^{v(x)} = \lim u(x)^{\lim v(x)} = a^b$.

[例2]设
$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{-x^2}, 0 < |x| < \frac{\pi}{2}, \text{则} \lim_{x \to 0} f(x) = \underline{\qquad}. \\ a, \qquad x = 0 \end{cases}$$

[例3](1)
$$(0^0 \mathbb{Z}) \lim_{x \to 0^+} x^x = \underline{\qquad};(2) (\infty^0 \mathbb{Z}) \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \underline{\qquad};$$
(3) $(1^{\infty} \mathbb{Z}) \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \underline{\qquad}.$





$$\left[\text{Im} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\tan x} = \underline{\qquad}.$$

[例5]设
$$u(x) \rightarrow 1, v(x) \rightarrow \infty$$
,证明: $\lim u(x)^{v(x)} = e^A$,其中 $A = \lim v(x)[u(x)-1]$,

并用此公式计算
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} (a,b,c>0)$$
 和 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.