

第四讲 导数与微分

【考试要求】

- 1. 理解导数和微分的概念,理解导数与微分的关系,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程,了解导数的物理意义,会用导数描述一些物理量(仅数一、数二),了解导数的经济意义(仅数三),理解函数的可导性与连续性之间的关系.
- 2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式。了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,会求函数的微分.
 - 3. 了解高阶导数的概念,会求简单函数的高阶导数.
- 4. 会求分段函数的导数,会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

考点:导数定义及可导与连续的关系

1. 导数定义

定义1
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

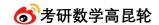
定义2 $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$
 $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

定理1 $f'(x_0) = A \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A.$

注:(1) f(x)在 x_0 处可导就是 $f'(x_0)$ 存在的意思, 另外 $f'(x_0)$ 也写成 $\frac{d}{dx}f(x)|_{x=x_0}$; (2) $f'(x_0)$ 不仅仅与 $f(x_0)$ 有关系,还与 x_0 附近的其他点是有关的,如由 $f(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=0$ 这是荒唐的.

2. 可导与连续的关系

若f(x)在 x_0 处可导,则f(x)必在 x_0 处连续;反之不对.



- (A)左、右导数都存在
- (B)左导数存在,右导数不存在
- (C)左导数不存在,右导数存在 (D)左、右导数都不存在

[例2](1) 设
$$f'(x_0)$$
存在,问 $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ 是否存在?

(2) 设
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$
存在,问 $f'(x_0)$ 是否存在?

[例3]已知g(x)在 $x = x_0$ 处连续,讨论 $f(x) = |x - x_0|g(x)$ 在 $x = x_0$ 处的可导性.

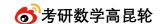
[例4]设
$$f(x)$$
在 x_0 处连续,且 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = k$,证明: $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导,且 $f'(x_0) = k$.



[例5]设
$$f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)(n \ge 2)$$
,则 $f'(0) =$ _____.

[例6]设
$$f(x)$$
和 $g(x)$ 都在 $x = x_0$ 处可导,且 $g'(x_0) \neq 0$,则 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} =$ _____.

[例7]设
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ ax+b, x > 1 \end{cases}$$
,为使 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导,求 a,b 的值.



考点: 四则、复合函数及反函数求导法则

1. 基本导数公式

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}; (a^{x})' = a^{x} \ln a, (e^{x})' = e^{x}; (\log_{a} x)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1), (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \sec^{2} x, (\cot x)' = -\csc^{2} x,$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x; (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^{2}}, (\operatorname{arc} \cot x)' = -\frac{1}{1 + x^{2}}; \left[\ln \left(x + \sqrt{x^{2} + 1}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^{2} + 1}}.$$

2. 四则求导法则

设
$$u,v$$
均可导,则 $(u\pm v)'=u'\pm v';(uv)'=u'v+uv';(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0).$

3. 复合函数求导法则

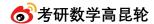
设
$$y = f(u), u = g(x)$$
都可导,则复合函数 $y = f[g(x)]$ 也可导,且 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$,即 $y' = f'(u) \cdot g'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$.

4. 反函数求导法则

设y = f(x)在某区间单调可导且 $f'(x) \neq 0$,则其反函数 $x = \varphi(y)$ 在对应区间也可导,

且
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$
,即 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

[例1]证明: (1) 设f(x)是可导的奇 (偶) 函数,则f'(x)是偶 (奇) 函数; (2) f(x)是可导的以T为周期的周期函数,则f'(x)也以T为周期.



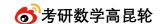
[例2]求下列函数的导数:

- (1) $y = \ln |x|$;
- (2) $y = \ln |f(x)|$, 其中f(x)可导, 且 $f(x) \neq 0$.

[例3]设
$$y = \frac{\sqrt{x+2(3-x)^4}}{(x+1)^5}$$
,则 $y' =$ _____.

[例4]设
$$y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$$
, 其中 f 可导, 则 $y' =$ ____.

[例5]设
$$f(x) = 3x^2 + e^x$$
有反函数 $\varphi(y)$, 且 $f'(1) = 6 + e$,则 $\varphi'(3 + e) = ____.$



考点:高阶导数

1. 高阶导数的概念

y = f(x)的导数f'(x)仍然是x的函数,称f'(x)的导数叫做y = f(x)的二阶导数,

记作y"或
$$\frac{d^2y}{dx^2}$$
,即y"= $(y')'$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$ = $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$,

一般地, y = f(x)的n阶导数就是f(x)的n-1阶导数的导数.

2. 高阶导数的求法

(1)利用归纳法

先逐一求出y = f(x)的一、二、三阶导数,若能观察出规律,就可写出 $y^{(n)}$ 的表达式.

$$注: (e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}; \left[\sin(ax+b)\right]^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right),
\left[\cos(ax+b)\right]^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right);
\left[\ln(ax+b)\right]^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)!}{(ax+b)^n}; \left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n a^n \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

(2)利用分解法

若
$$f(x)$$
可分解成 $f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$,若知道 $f_1^{(n)}(x)$ 和 $f_2^{(n)}(x)$,则 $f^{(n)}(x) = \alpha f_1^{(n)}(x) + \beta f_2^{(n)}(x)$.

(3)利用莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \quad \text{if } \underline{\underline{\mathbb{Z}}} \underline{\underline{\mathbb{Z}}} u^{(0)} = u, v^{(0)} = v.$$

[例1]试从
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$$
导出: $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}$.

[例2]设f(x)具有任意阶导数,且 $f(x) = [f(x)]^2$,当n > 2时, $f^{(n)}(x) = ____.$

$$(A)n![f(x)]^{n+1}$$
 $(B)n[f(x)]^{n+1}$ $(C)[f(x)]^{2n+1}$ $(D)n![f(x)]^{2n}$

$$(B)n[f(x)]^{n+1}$$

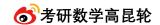
$$(C) \lceil f(x) \rceil^{2n+1}$$

$$(D)n![f(x)]^{2n}$$

[例3]求下列函数的*n*阶导数: (1) $y = \sin^2 x$; (2) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

[例4]设 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.





考点:隐函数及由参数方程所确定的函数求导

1. 隐函数的导数

设y = y(x)是由方程F(x,y) = 0所确定的隐函数,为求y', 可在方程F(x,y) = 0两端直接对x求导(注意y = y(x)),解出y'即可.

「例1]设y = y(x)由方程 $xy = e^{x+y}$ 确定,则 $y' = ____.$

「例2]设y = y(x)由方程 $y = \tan(x+y)$ 确定,求y''.

「例3]设y = y(x)由方程 $e^{y} + xy = e$ 确定, 求y'(0)及y''(0).

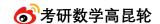
2. 由参数方程所确定的函数的导数

设y = y(x)由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 所确定, x(t)和y(t)均可导, 且 $y'(t) \neq 0$ 则 $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$.

[例4]设
$$y = y(x)$$
由参数方程
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$
所确定, 求 y' 及 y'' .

[例5]设
$$y = y(x)$$
由
$$\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$$
所确定,求 $\frac{dy}{dx}$.

[例6]利用变换
$$x = \ln t$$
变换方程 $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + e^{2x}y = 0$.



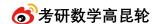
考点:分段函数、绝对值函数及幂指函数求导

$$[例1]求f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$
的导数 $f'(x)$,并证明 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

[例2]设
$$f(x) = |x-1|\ln(1+x^2)$$
,则 $f'(x) = ____.$

「例3]设f(x)在 x_0 处可导,讨论|f(x)|在 x_0 处的可导性.

[例4]设
$$y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$
,则 $y' = \underline{\qquad}$.



考点:导数的几何意义

y = f(x)在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线y = f(x)在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率k,切线方程是 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).(f'(x_0) \neq 0)$

法线方程是
$$y-f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).(f'(x_0) \neq 0)$$

[例1]设f(x)是以4为周期的可导函数,且 $\lim_{x\to 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = -1$,

则曲线y = f(x)在点(5, f(5))处的切线的斜率为____.

$$(A)\frac{1}{2}$$

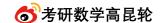
$$(C)-1$$

$$(D)-2$$

[例2]曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}a}{4}, \frac{\sqrt{2}a}{4}\right)$ 处的切线方程是_____

[例3]曲线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 相应点的切线方程是____.

[例4]曲线 $r = e^{\theta}$ 在点 $(r,\theta) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是____



考点:函数的微分

1. 微分的定义及计算

定义1 若增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 其中A是不依赖于 Δx 的常数,则称y = f(x)在 $x = x_0$ 处可微, $A\Delta x$ 称为f(x)在 $x = x_0$ 处的微分,记为dy,即 $dy = A\Delta x$.

定理1
$$y = f(x)$$
在 $x = x_0$ 处可微 \Leftrightarrow $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导,且 $dy \big|_{x=x_0} = f'(x_0) \Delta x = f'(x_0) dx$.

2. 微分的几何意义

y = f(x)在 x_0 处的微分 $dy = f'(x_0)dx$ 表示曲线y = f(x)的在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的增量,它近似等于曲线y = f(x)在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的实际增量 Δy .

[例1]设
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
,则 $\frac{df(x)}{d(x^2)} = \underline{\qquad}$

「例2]设
$$y = e^{1-3x} \cos x$$
,则 $dy =$ ____.

「例3] 设
$$y = y(x)$$
由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定,则 $dy|_{x=0} =$ _____

[例4]在下列等式左端括号中填入适当的函数,使等式成立.

(1)
$$d()=xdx;$$
 (2) $d()=\cos\omega tdt.$