# 第一讲　函数部分

**【考试要求】**

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

## 考点：函数及其表达式的求解

### 1. 函数的概念

**定义1**　设$x$和$y$是两个变量,$D$是一个给定的数集,如果对于每个数$x\in D$,变量$y$在对应法则$f$作用下总有唯一确定的一个数值$y$和它对应,则称$y$是$x$的函数,记为$y=f(x)$,常称$x$为自变量,$y$为因变量,$D$为函数的定义域.

[例1]（绝对值函数）$y=|x|=\begin{cases}-x, x<0\\ x,\quad x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}-x, x<0\\ 0, x=0\\ x, x>0\end{cases}$.

[例2]（最值函数）$U=\max\{f(x),g(x)\}$，$V=\min\{f(x),g(x)\}$.

$\left[\text{例3}\right]$（符号函数）$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$.

$\left[\text{例4}\right]$（取整函数）$y=[x]$；表示不超过$x$的最大整数,

如$\left[\dfrac{5}{7}\right]=$\_\_\_\_;$\left[\sqrt{2}\right]=$\_\_\_\_;$[-1]=$\_\_\_\_;$[-3.5]=$____.

$\left[\text{例5}\right]$（分段函数）$y=\begin{cases}f(x), x\le x_0\\ g(x), x>x_0\end{cases}$ 或 $y=\begin{cases}f(x), x<x_0\\ a, x=x_0\\ g(x), x>x_0\end{cases}$.

$\left[\text{例6}\right]$（狄利克雷函数）$D(x)=\begin{cases}1,\ \ x\in Q\\ 0, x\in Q^C\end{cases}$.

$\left[\text{例7}\right]$（幂指函数）$y=u\left(x\right)^{v\left(x\right)},u\left(x\right)>0,$且$u\left(x\right)\neq 1.$

$\left[\text{例8}\right]$设$f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=1-x,$求$f\left(x\right).$

$\left[\text{例9}\right]$设$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2},$求$f\left(x\right).$

$\left[\text{例10}\right]$设$xoy$平面上有正方形$D:0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1$及直线$l:x+y=t(t\geq 0),$若$S\left(t\right)$表示正方形$D$位于直线$l$左下方部分的面积,求$S\left(t\right)$与$t$之间的函数关系.

## 考点：复合函数与反函数

### 1. 复合函数

**定义1** 设$y=f(u)$的定义域为$D_f$,函数$u=g(x)$定义域为$D_g$, 且其值域$R_g \subset D_f$, 则称$y=f[g(x)]$为$y=f(u)$和$u=g(x)$的复合函数.

[例1] 设$f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且$\varphi(x)\geq 0$, 求$\varphi(x)$及其定义域.

[例2] 设$f(x)=\begin{cases}1,|x|\leq 1\\ 0,|x|>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2-x^2,|x|\leq 2\\ 2, \quad |x|>2\end{cases}$, 求$f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

### 2. 反函数

**定义2** 设$y=f(x)$的定义域为$D$, 值域为$R_g$, 如果对于任一$y\in R_g$, 有唯一确定的$x\in D$, 使得$y=f(x)$, 则称$x=f^{-1}(y)$为$y=f(x)$的反函数.

**注：**(1) 有时将$y=f(x)$的反函数也写成$y=f^{-1}(x)$;

(2) 单调函数必有反函数, 且有相同的单调性;

(3) $y=f(x)$和$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$对称,

而$y=f(x)$和$x=f^{-1}(y)$的图形是重合的;

(4) $f\left[f^{-1}(x)\right]=x$, $f^{-1}\left[f(x)\right]=x$.

[例3]求$y=\sin x$在$[0,2\pi]$上的反函数.

[例4]求$y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, x>0\\ 0, x=0\\ -1-x^2, x<0\end{cases}$的反函数并作图.

## 考点：函数的几种特性

### 1. 有界性

**定义1**　设$y=f(x)$在数集$X$上有定义,如果存在正数$M$,使得对任意的$x\in X$,都有$|f(x)|\le M$,则称$f(x)$在$X$上有界;

反之,如果对于任何正数$M$,总存在$x_1\in X$,使$|f(x_1)|>M$,

则称$f(x)$在$X$上无界.

**注:**(1)常见的有界函数有,$|\sin x|\le 1,|\cos x|\le 1,$

$|\arcsin x|\le \dfrac{\pi}{2},|\arctan x|\le \dfrac{\pi}{2};$

(2)函数的有界（无界）是针对具体区间而言的.

### 2. 单调性

**定义2**　设$y=f(x)$在区间$I$上有定义,如果对于区间$I$上任意两点$x_1$及$x_2$,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$),则称$f(x)$在区间$I$上是单调增加（或单调减少）.

**注:**以后经常使用导数来判定函数在区间上的单调性.

### 3. 奇偶性

**定义3**　设$y=f(x)$的定义域$D$关于原点对称.如果对于任一$x\in D$,

恒有$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$在$D$上是偶函数,

如果恒有$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$在$D$上是奇函数.

**注:**(1)常见的偶函数有,$x^2$、$|x|$、$\cos x$,

常见的奇函数有,$\sin x$、$\arcsin x$、$\tan x$、$\arctan x$、$\operatorname{sgn} x$、$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

(2)偶函数的图形关于$y$轴对称,奇函数的图形关于原点对称,

且奇函数在$x=0$处若有定义,则$f(0)=0$;

(3)奇$\pm$奇$=$奇,偶$\pm$偶$=$偶,奇$\cdot$奇$=$偶,偶$\cdot$偶$=$偶,奇$\cdot$偶$=$奇.

[例1] 设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,即 $x\in(-l,l)$, 证明:
$g(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$h(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

[例2] 设对任意的 $x,y$ 都有, $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 证明: $f(x)$ 是奇函数.

## 4. 周期性

**定义4** 如果存在一个正数 $T$, 使得对于任一 $x$, 有 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 是周期函数, $T$ 称为 $f(x)$ 的周期.

**注:** 常见的周期函数有, $\sin x, \cos x$ 以 $2\pi$ 为周期,
$\tan x, |\sin x|, \sin 2x$ 以 $\pi$ 为周期.

[例3] 设函数 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）上满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$,
证明: $f(x)$ 是以 $T=2\pi$ 为周期的周期函数.

[例4] 设 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数, 则 $y=x-[x]$ 是____.
(A) 无界函数　　(B) 单调函数　　(C) 偶函数　　(D) 周期函数