

主要问题：

1. 由于 PID 控制参数需要调整的量太多，且相关状态之间的耦合较为严重，控制器系数不好调整；
2. 目前只能实现单体常值高度、 x, y ，航向跟踪控制，无法实现单体轨迹跟踪；
3. 如何改进控制器，实现单体轨迹跟踪？

已有结果说明：

1. 四旋翼模型基础

采用欧拉角建模的方法，依据牛顿第二运动定律可以得到四旋翼无人机的力矩平衡表达式为：

$$\begin{cases} L = I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr \\ M = I_y \dot{q} - (I_z - I_x)rp \\ N = I_z \dot{r} - (I_x - I_y)pq \end{cases}$$

式中， L, M, N 指的是在机体坐标系下的合外力矩， p, q, r 指的是机体坐标系下的角速度， I_x, I_y, I_z 指的是绕机体坐标系的转动惯量。

进一步可得四旋翼的力平衡方程为：

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{(\cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\phi \sin\psi) \sum_{i=1}^4 F_i - K_x \dot{x}}{m} \\ \ddot{y} = \frac{(\sin\psi \sin\theta \cos\phi - \sin\phi \cos\psi) \sum_{i=1}^4 F_i - K_y \dot{y}}{m} \\ \ddot{z} = \frac{(\cos\theta \cos\phi) \sum_{i=1}^4 F_i - K_z \dot{z}}{m} - g \end{cases}$$

式中， m 为四旋翼无人机的机体重量； F_i ， $i=1,2,3,4$ 指的是四个旋翼分别的升力；

K_x, K_y, K_z 指的是空气的阻力系数； x, y, z 分别为地面坐标系中四旋翼沿着三个方

向的位移； ϕ, θ, ψ 为欧拉角，其分别为滚转角、俯仰角、偏航角。依据已有的地面坐标系与机体坐标系的转换关系，可得欧拉角速度与机体坐标系下的角速度之间的关系为：

$$\begin{cases} \phi = \frac{p \cos \theta + q \sin \phi \sin \theta + r \cos \phi \sin \theta}{\cos \theta} \\ \theta = q \cos \phi + r \sin \phi \\ \psi = \frac{q \sin \phi + r \cos \phi}{\cos \theta} \end{cases}$$

由于四旋翼无人机的欠驱动性质，其在飞行过程中的控制量只有 4 个，小于其自身的自由度 6，四组控制输入可以表示为：

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{i=1}^4 F_i = C_L (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ u_2 = l(F_4 - F_2) = lC_L (\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ u_3 = l(F_3 - F_1) = lC_L (\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ u_4 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{cases}$$

式中， u_1 为四旋翼无人机受到的升力总和，可实现对机体位置的控制；

u_2, u_3, u_4 分别是四旋翼无人机受到的转动力矩，其中， u_2 控制滚转角、 u_3 控制俯仰角、 u_4 控制偏航角； $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 分别是四个旋翼上的电机转速； l 为无人机机体质心到几个旋翼之间的距离； d 代表反扭力距系数，为四旋翼的升力系数。

在四个控制量的基础上，忽略空气中的阻力，可得简化后四旋翼无人机的系统模型为：

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_1 (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \phi \sin \psi)}{m} \\ \ddot{y} = \frac{u_1 (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \phi \cos \psi)}{m} \\ \ddot{z} = \frac{u_1 (\cos \theta \cos \phi)}{m} - g \\ \ddot{\phi} = \frac{(I_y - I_z) \dot{\theta} \dot{\psi} + u_2}{I_x} \\ \ddot{\theta} = \frac{(I_z - I_x) \dot{\phi} \dot{\psi} + u_3}{I_y} \\ \ddot{\psi} = \frac{(I_x - I_y) \dot{\phi} \dot{\theta} + u_4}{I_z} \end{cases}$$

2. 反馈线性化

以高度模态为例，令 $U_z = \frac{u_1 (\cos \theta \cos \phi)}{m} - g$ ，则将其动力学方程简化为

$$\begin{cases} \dot{z} = \dot{v}_z \\ \dot{v}_z = U_z \end{cases}$$

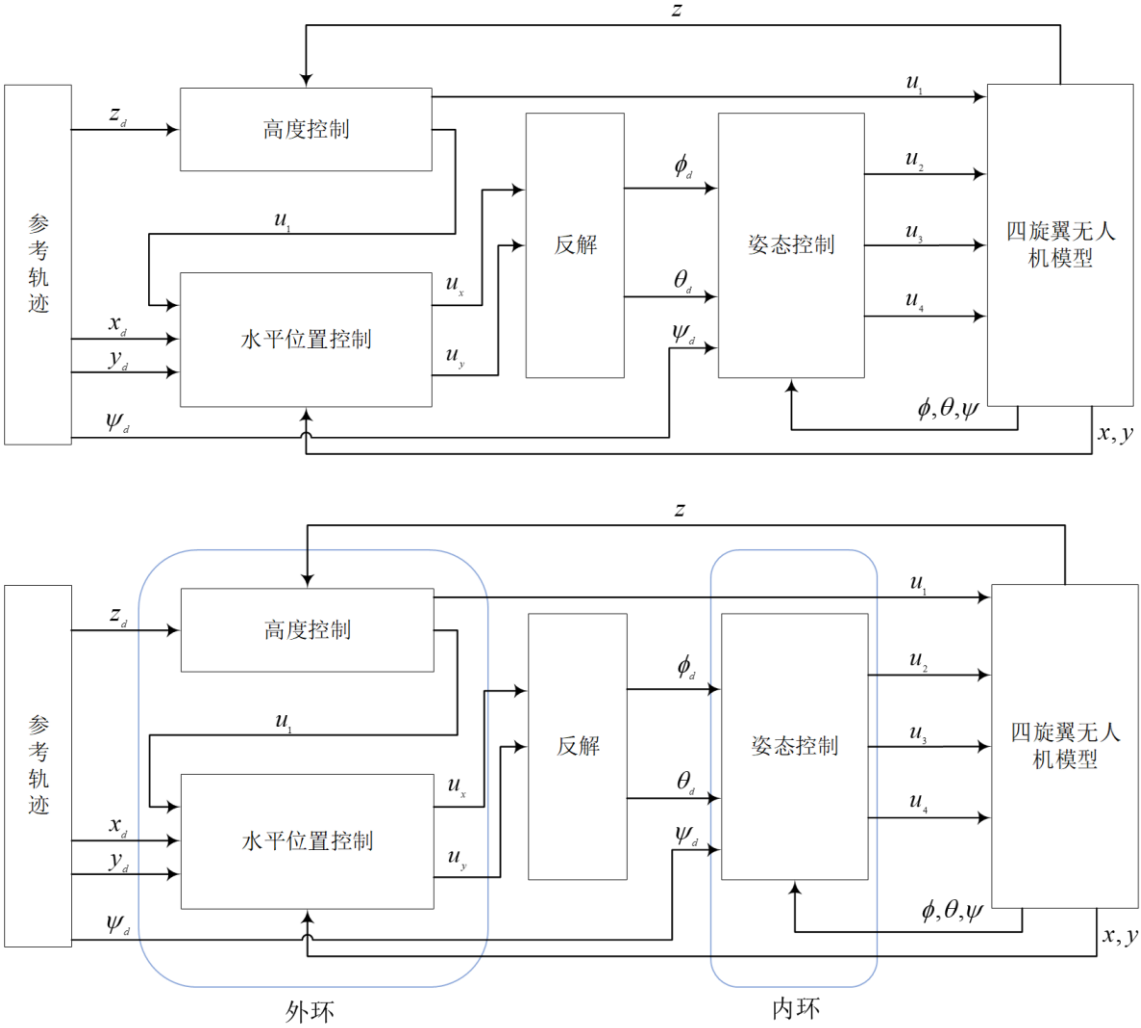
这种形式为双积分模型，如要实现相应模态的控制，设计虚拟控制输入 U_z ，而后反解出 u_1 即可，

$$u_1 = \frac{(U_z + g)m}{(\cos \theta \cos \phi)}$$

此过程称为反馈线性化，其余模态也可采用此种方法，实现对相应模态更为简便的控制。

3. 单体控制方案设计

四旋翼控制是内外环结合的，需要同时考虑外环的位置和内环的角度。



由于四旋翼无人机具有欠驱动的性质，若只用控制量 u_1 对 x, y, z 三个方向进行控制，不太容易，因此，在 x, y 两个方向引入虚拟控制量

$$\ddot{x} = \frac{u_1(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \phi \sin \psi)}{m} \Rightarrow u_x = (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \phi \sin \psi)$$

$$\ddot{y} = \frac{u_1(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \phi \cos \psi)}{m} \Rightarrow u_y = (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \phi \cos \psi)$$

此时， x, y 两个方向也可简化为双积分模型，在 u_1 由 z 确定的基础上，设计 u_x, u_y 使得 x, y 实现控制目标。

一般而言，四旋翼实现轨迹跟踪，需要给定参考轨迹 (x_d, y_d, z_d, ψ_d) ，此时，反解模块用于解出要实现相应轨迹跟踪的期望滚转角、俯仰角 ϕ_d, θ_d ，即

$$\phi_d = \arcsin\left(\frac{u_x \sin \psi - u_y \cos \psi}{\sin \psi + \cos \psi}\right)$$

$$\theta_d = \arcsin\left(\frac{u_x - \sin \phi_d \sin \psi}{\cos \psi \cos \phi_d}\right)$$

问题即转换为：给定参考轨迹 (x_d, y_d, z_d, ψ_d) 设计控制器，实现轨迹跟踪。

采用 PD 控制

x, y, z 三个方向：

$$\ddot{z} = \frac{u_1(\cos \theta \cos \phi)}{m} - g \Rightarrow u_1 = \frac{((k_{pz}(z_d - z) + k_{dz}(v_{z_d} - v_z)) + g)m}{(\cos \theta \cos \phi)}$$

$$\ddot{x} = \frac{u_1(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \phi \sin \psi)}{m} \Rightarrow u_x = \frac{m(k_{px}(x_d - x) + k_{dx}(v_{x_d} - v_x))}{u_1}$$

$$\ddot{y} = \frac{u_1(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \phi \cos \psi)}{m} \Rightarrow u_y = \frac{m(k_{py}(y_d - y) + k_{dy}(v_{y_d} - v_y))}{u_1}$$

由 u_x, u_y 解出要实现相应轨迹跟踪的期望滚转角、俯仰角 ϕ_d, θ_d

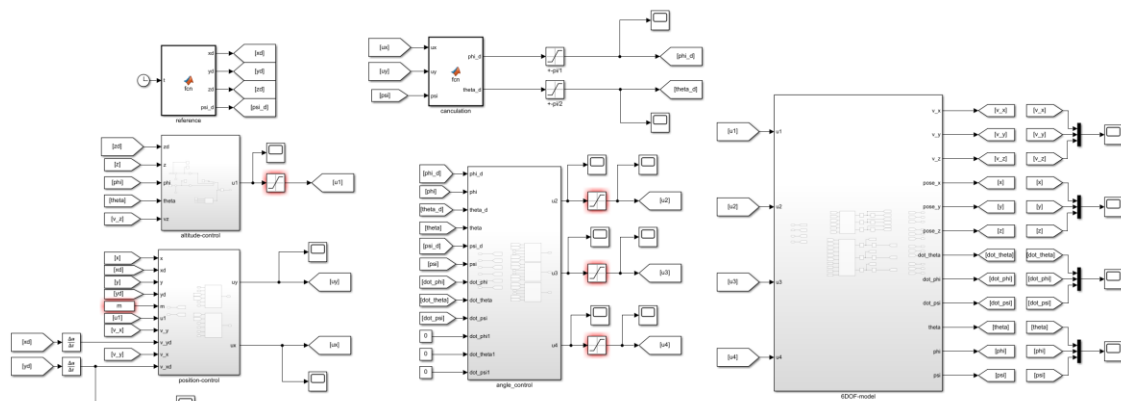
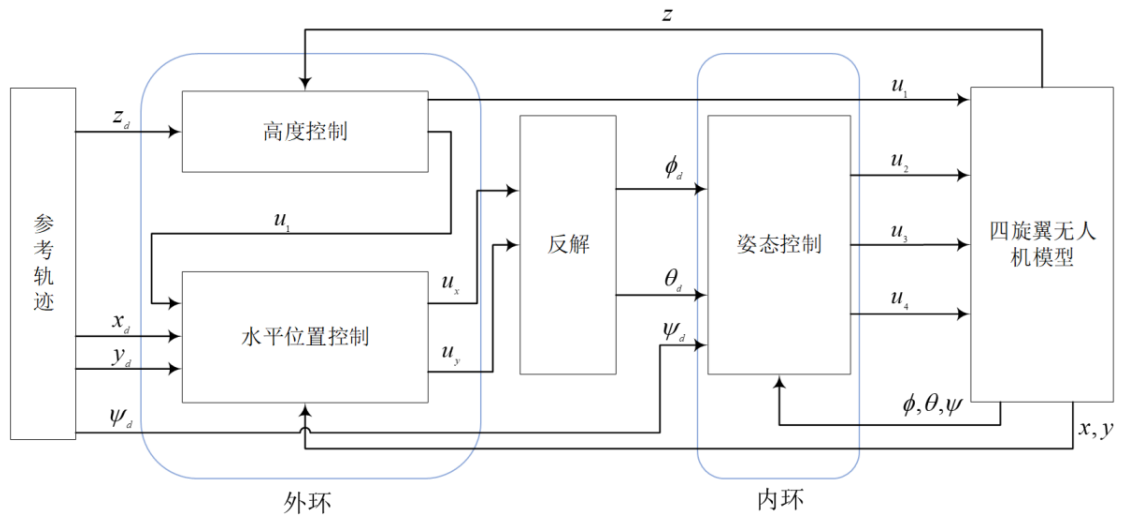
三个欧拉角：

$$\ddot{\phi} = \frac{(I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi} + u_2}{I_x} \Rightarrow u_2 = (k_{p\phi}(\phi_d - \phi) + k_{d\phi}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}))I_x - (I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(I_z - I_x)\dot{\phi}\dot{\psi} + u_3}{I_y} \Rightarrow u_3 = (k_{p\theta}(\theta_d - \theta) + k_{d\theta}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}))I_y - (I_z - I_x)\dot{\phi}\dot{\psi}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{(I_x - I_y)\dot{\phi}\dot{\theta} + u_4}{I_z} \Rightarrow u_4 = (k_{p\psi}(\psi_d - \psi) + k_{d\psi}(\dot{\psi}_d - \dot{\psi}))I_z - (I_x - I_y)\dot{\phi}\dot{\theta}$$

4. 仿真设计



搭建模型后，设计实验，设定期望值为($x_d=1, y_d=1, z_d=5, \psi_d=0.01rad$)

内外环 PID 参数：

%% 外环

kp_x = 0.005;

kd_x = 0.0999;

kp_y = 0.005;

kd_y = 0.0999;

kp_z = 0.5;

kd_z = 1.5;

%% 内环

kp_phi = 0.3;

kd_phi = 1;

kp_theta = 0.3;

kd_theta = 1;

kp_psi = 0.3;

kd_psi = 1;

限幅（对控制输入进行限制）参数：

%% 限制幅度

u1_max = 30;

u2_max = 1;

u3_max = 1;

u4_max = 1;

初值:

%% 状态变量初始参数

initial_x = 0;

initial_dot_x = 0;

initial_y = 0;

initial_dot_y = 0;

initial_z = 0;

initial_dot_z = 0;

initial_phi = 0;

initial_dot_phi = 0;

initial_theta = 0;

initial_dot_theta = 0;

initial_psi = 0;

initial_dot_psi = 0;

%% 四旋翼参数(北航可靠飞行官网获得)

m = 1.5; %质量 单位: kg

g = 9.81; %重力加速度 单位:N/kg

Ixx = 1.745e-2; %滚转通道转动惯量 单位: kg*m²

Iyy = 1.745e-2; %俯仰通道转动惯量 单位: kg*m²

Izz = 3.175e-2 ; %偏航通道转动惯量 单位: kg*m²

l = 0.225 ; %机架中机臂长度 单位: m

k = 1.105e-5; %电机升力系数 单位: N/rad²

kd = 9.012e-3 ; %反扭阻力系数 单位: N/rad²

仿真结果:

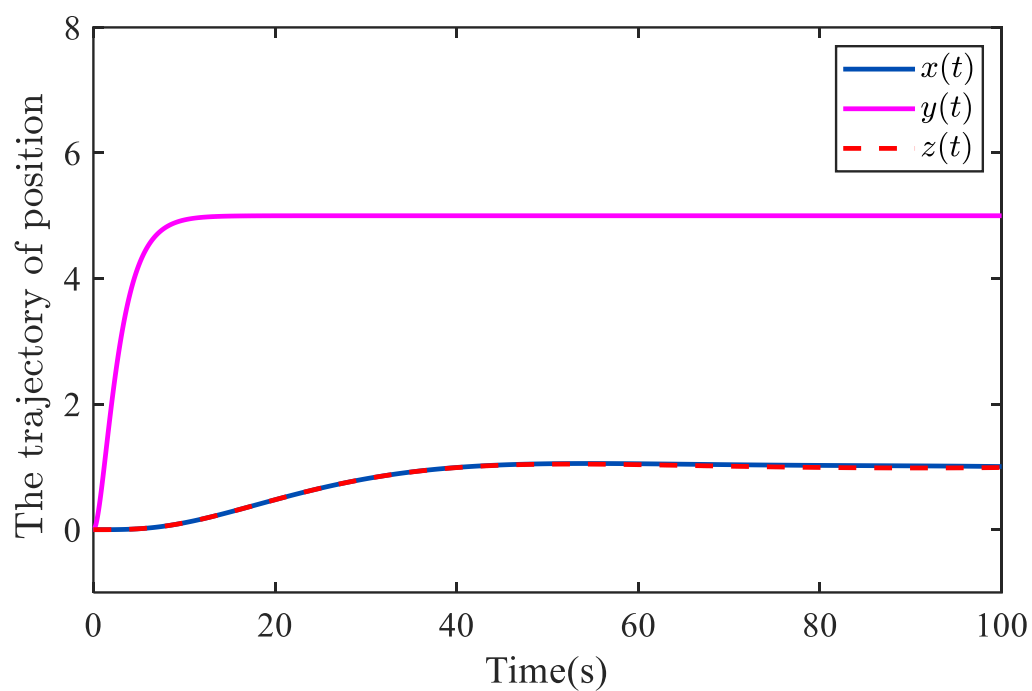


图 1. 位置示意图

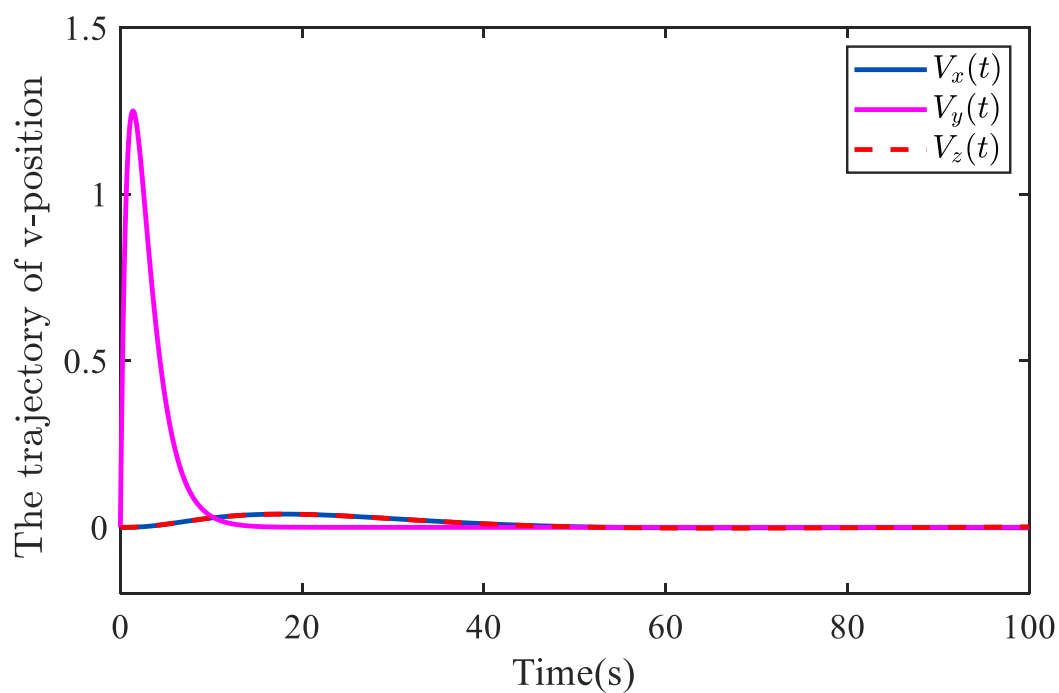


图 2. 位置方向速度示意图

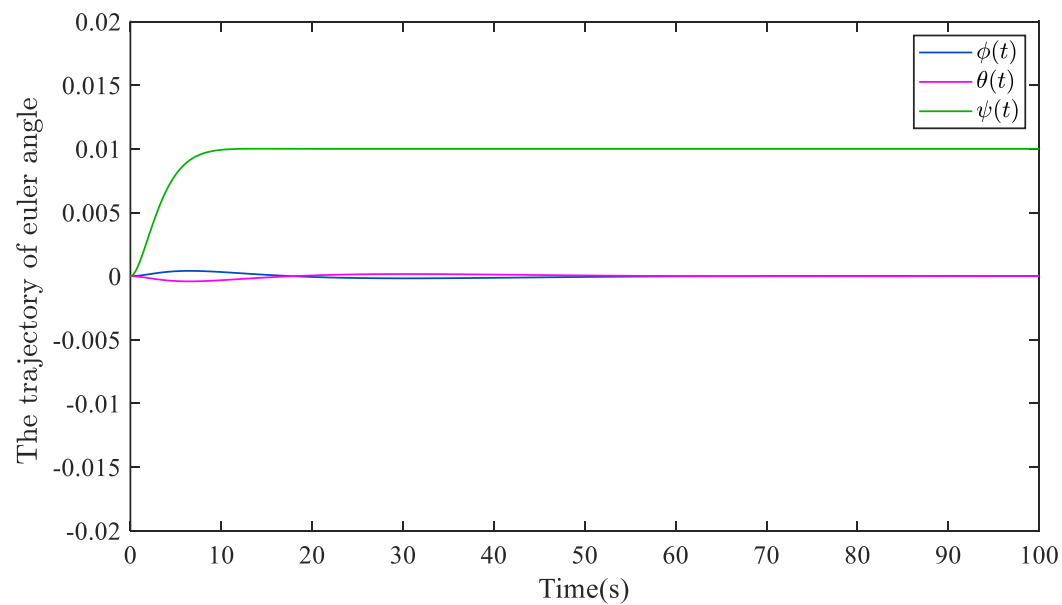


图 3. 欧拉角示意图

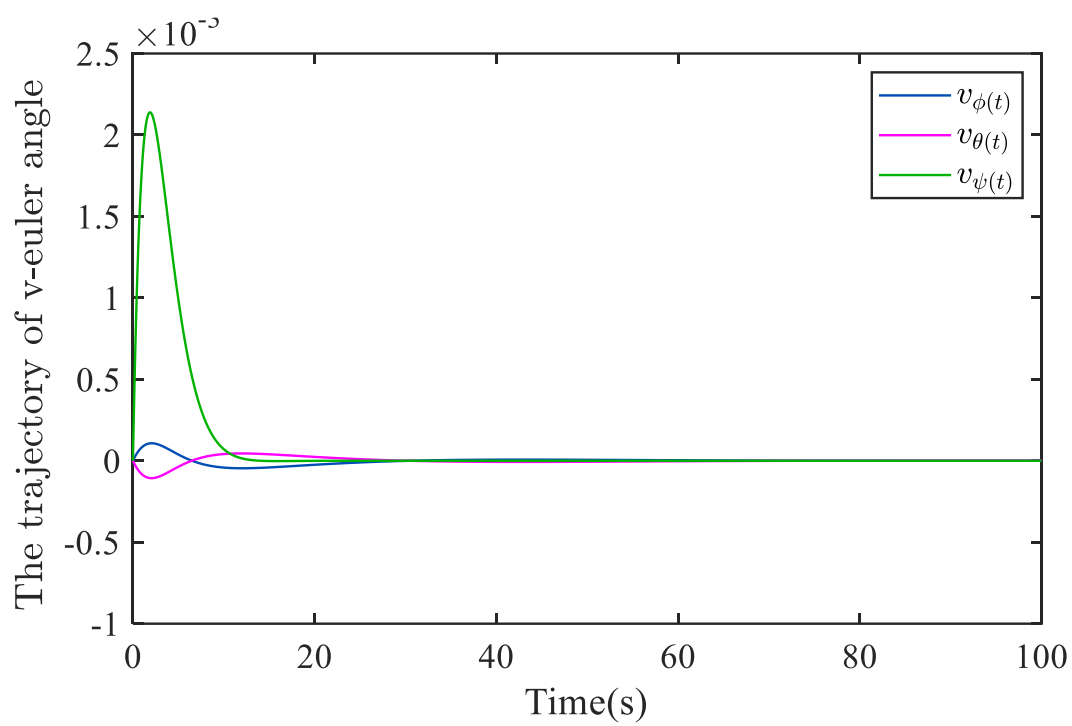


图 4. 欧拉角速度示意图

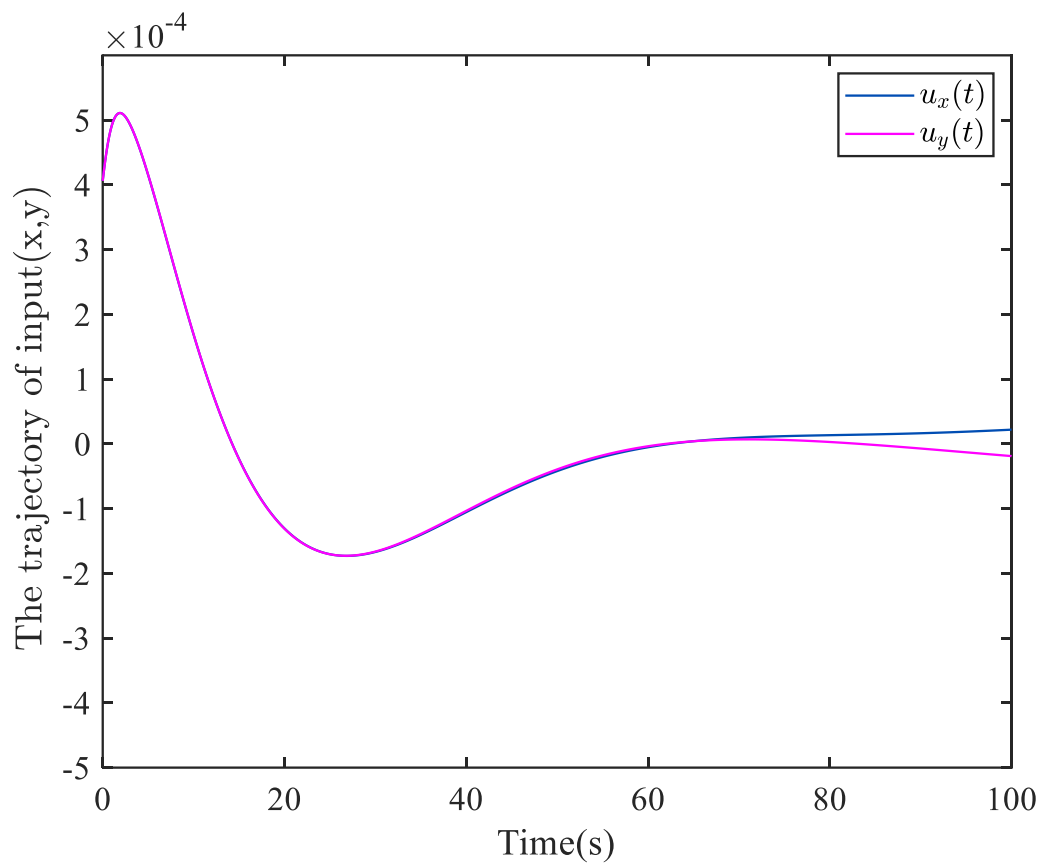


图 5. x,y 方向虚拟控制输入示意图

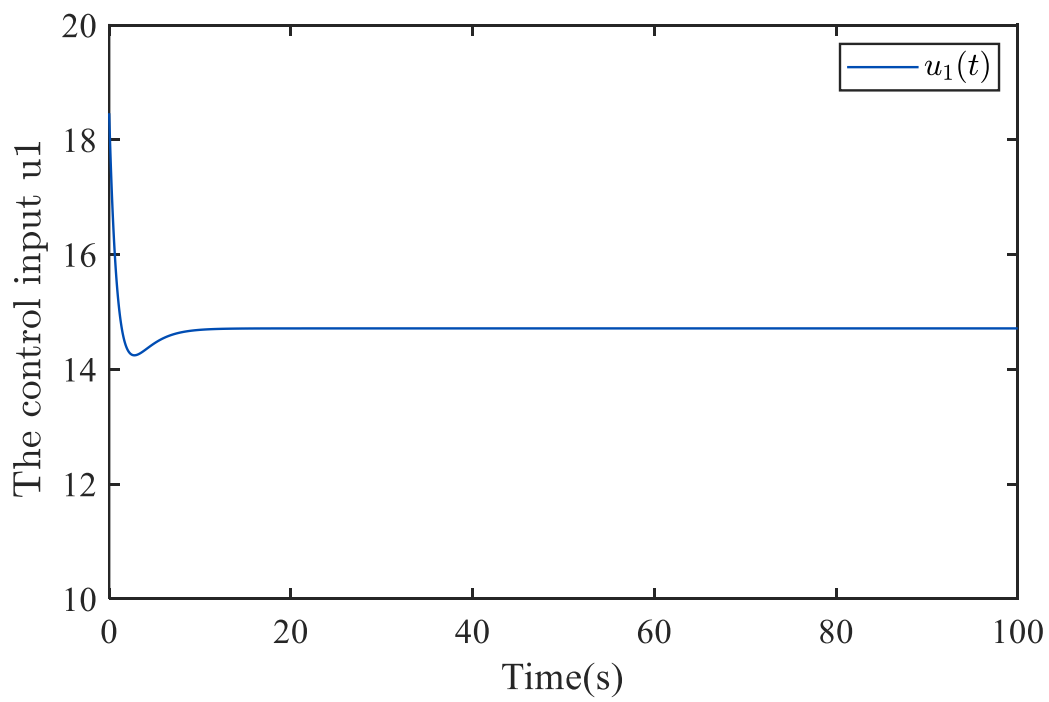


图 6. 控制输入 u_1 示意图

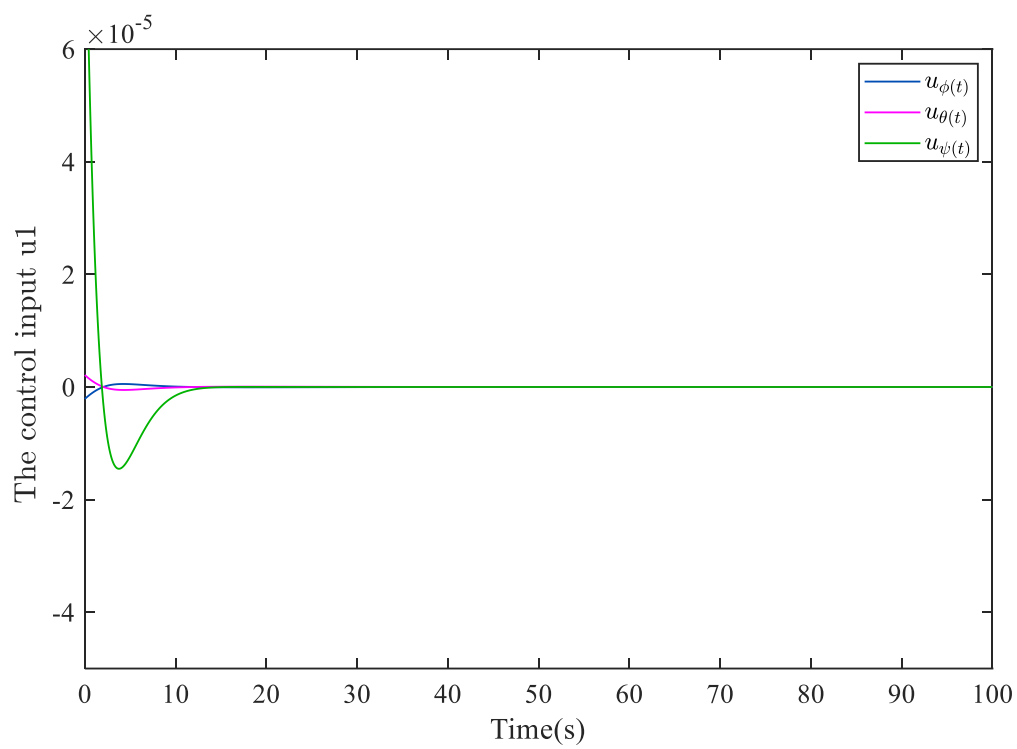


图 7. 欧拉角控制输入示意图