二次规划.

1°. 基本形式.

$$\min \ \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx$$
$$\text{s.t.} \quad a_i^Tx \le b_i, \quad i=1\cdots m.$$
$$\qquad a_i^Tx = b_i, \quad i=m+1,\cdots m+l.$$

例：均值方差；最小二乘；点到多面体的距离.

2°. 带等式约束的二次规划. （Q半正定）

$$(\overline{QP}) \begin{cases} \min \ \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ \text{s.t.} \ Ax=b. \end{cases} \qquad A_{m\times n}. \quad r(A)=m.$$

1). 消去法. $\quad A$分块为$A=(B.N)$. B可逆.

$$(B.N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b. \quad \text{可知} \quad Bx_B + Nx_N = b.$$

$$x_B = B^{-1}b + B^{-1}Nx_N.$$

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ E_{n-m} \end{pmatrix} x_N.$$

记 $Z=\begin{pmatrix} B^{-1}N \\ E \end{pmatrix}$，可知 Z的列为$Ax=0$的基础解系，即A的零空间的一组基.

定理 1. 若 Z^TQZ正定，则$(\overline{QP})$有唯一解.

（两种方法的比较）.

2). KKT法：

因(QP)为线性约束的凸二次规划. 则 KKT ⟺ 全局最优解.

$$\begin{cases} Qx + c + A^T\lambda = 0 \\ Ax = b \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} Qx + A^T\lambda = -c \\ Ax = b. \end{cases}$$

$$即 \quad \begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}.$$

解方程组即可!

3°. 带不等式约束的二次规划. (Q 半正定, 凸).

$$(QP)\begin{cases} \min \ \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ s.t. \ a_i^Tx \le b_i, \ i=1\cdots m. \ \text{“}I\text{”} \\ \quad\ a_i^Tx = b_i, \ i=m+1,\cdots m+l. \ \text{“}E\text{”} \end{cases}$$

1). 分析: 全局解 ⟺ KKT点.

2). 设 x^* 为(QP)的最优解, 记 $I(x^*)$ 为 x^* 的有效指标集,

则 x^* 为
$$(QP^*)\begin{cases} \min \ \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ s.t. \ a_i^Tx = b_i, \ i \in I(x^*) \\ \quad\ a_i^Tx = b_i. \ i=m+1\cdots m+l. \end{cases}$$
的解.

证明: x^* 是 QP 的最优解, ⇒ x^* 满足 KKT 条件.

即存在 λ 使得

$$\begin{cases} Qx^* + c + \sum_{i=1}^{m+l}\lambda_i a_i = 0 \\ \lambda_i \ge 0, \ i=1\cdots m, \\ \lambda_i(a_i^Tx^* - b_i) = 0, \ i=1\cdots m, \\ a_i^Tx^* \le b_i, \ i=1\cdots m. \quad a_i^Tx^* = b_i, \ i=m+1,\cdots,m+l \end{cases}$$

因此. $Qx^*+c+\sum_{i\in I(x^*)\cup E}\lambda_i a_i+\sum_{i\in I\setminus I(x^*)}\lambda_i a_i=0$ 成立.

$a_i^T x^*=b_i,\ i\in I(x^*)\cup E,$

故, x^*是 ... 的KKT点, 即全局解. □

3) x^*是(QP)的可行点. 若x^*是(QP*)的最优解, λ为相应乘子,

若$\lambda_i\geq 0,\ i\in I(x^*)$, 则$x^*$是(QP)的最优解!

$\boxed{\text{证明:}}$ x^*是QP(x*)的最优解, 则 x^*满足KKT条件:

$$\begin{cases} Qx^*+c+\sum_{i\in E\cup I(x^*)}\lambda_i a_i=0 \\ a_i^T x=b_i,\ i\in I(x^*) \\ a_i^T x=b_i,\ i\in E, \end{cases}$$

又知. $\lambda_i\geq 0,\ i\in I(x^*)$ x^*是(QP)的可行点.

则 $Qx^*+c+\sum_{i\in I\cup E}\lambda_i a_i$

$\lambda_i\geq 0,\ i\in I(x^*)$.

$\lambda_i(a_i^T x-b_i)=0,\ i\in I(x^*)$.

$\lambda_i(a_i^T x-b_i)=0,\ i\in I\setminus I(x^*)$

4). 有效集法: (通过一系列等式约束QP求解一般QP).

设x'是(QP)的可行点, 记$I(x')$,

求解, $\min \frac{1}{2}x^TQx+c^Tx$ (KKT法).

s.t. $a_i^T x=b_i,\ i\in I(x')\cup E$.

得. $\hat{x}'$

判断：若 $x' = \hat{x}'$，则判断乘子 $\lambda_i, i\in I(x')$ 的符号：

1) 若 $\lambda_i \geq 0, i\in I(x')$，则 x' 是(QP)的最优解；终止；

2) 若某个 $q\in I(x')$，$\lambda_q<0$，则 $x^2 = x'$，$I(x^2) = I(x')\setminus\{q\}$.

若 $x' \neq \hat{x}'$，

1) 若 $\hat{x}'$ 是(QP)的可行解，则 $x^2 = \hat{x}'$，更新 $I(x^2)$；

2) 若 $\hat{x}'$ 不是(QP)的可行解，记 $d = \hat{x}' - x'$.

令 $a_i^T(x'+\alpha d) \leq b_i,\quad i\in I\setminus I(x')$

即 $a_i^T x' + \alpha a_i^T d \leq b_i,\quad i\in I\setminus I(x')$

取
$$\alpha^* = \min\left\{ \frac{b_i - a_i^T x'}{a_i^T d} \;\middle|\; a_i^T d>0,\ i\in I\setminus I(x') \right\} = \frac{b_q - a_q^T x'}{a_q^T d}.$$

令 $x^2 = x' + \alpha d$，$I(x^2) = I(x') \cup \{q\}$.

重新求解
$$\begin{aligned} \min\ & \tfrac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ \text{s.t. } & a_i^T x = b_i,\quad i\in I(x^2)\cup E. \end{aligned}$$

有效集方法framework.

Step 0: 选取(QP)可行点 x^0. 记其有效指标集为 $I(x^0)$. $k:=0$.

Step 1: 求解其约束问题

$$\min \ \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx$$
$$\text{s.t.} \ a_i^Tx = b_i, \ i \in I(x^k) \cup E.$$

得 $\hat{x}^k$,

Step 2: 若 $x^k = \hat{x}^k$; 考虑Lagrange乘子 λ_i, $i \in I(x^k)$:

若 $\lambda_i \geq 0, \forall i \in I(x^k)$, 终止, x^k 即(QP)的最优解;

否则, $\lambda_p = \min\{\lambda_i \mid i \in I(x^k)\}$,

令 $x^{k+1} = x^k$, $I(x^{k+1}) = I(x^k) \setminus \{p\}$. $k=k+1$, 转Step 1;

Step 3: 若 $x^k \neq \hat{x}^k$, $\hat{x}^k$ 可行, 则 $x^{k+1} = \hat{x}^k$, 更新 $I(x^{k+1})$.

$k=k+1$. 转Step 1.

否则, $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$, 其中 $d^k = \hat{x}^k - x^k$,

$$\alpha_k = \frac{b_q - a_q^T x^k}{a_q^T d^k} = \min\left\{\frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T d^k} \,\middle|\, a_i^T d^k > 0, \ i \notin I(x^k)\right\}.$$

令 $k:=k+1$, 转 step 1.

例) $\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2$

s.t. $x_1 + x_2 - 1 \le 0$.

$-x_1 \le 0$

$-x_2 \le 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

解: Step 0: $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $I(x^0) = \{2,3\}$.

第一次迭代: 求解 $\min f(x)$ s.t. $-x_1 = 0$, $-x_2 = 0$. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ 得 $\hat{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -4$.

令 $x^1 = \hat{x}^0$, $I(x^1) = \{2,3\} \setminus \{3\} = \{2\}$.

第二次迭代: 求解 $\min f(x)$ s.t. $-x_1 = 0$. $A = (-1, 0)$, $b = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ 得 $\hat{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = -2$,

由于 $\hat{x}^1$ 不是可行点, $d = \hat{x}^1 - x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

计算 $\alpha = \min \left\{ \frac{b_i - a_i^T x^1}{a_i^T d} \,\middle|\, a_i^T d > 0 \;\; i \in \{1,3\} \right\}$

$= \frac{1}{2}$.

故 $x^2 = x^1 + \frac{1}{2} d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $I(x^2) = \{2\} \cup \{1\}$.

第3次. 求解 $\min f(x)$ s.t. $x_1 + x_2 = 1$, $-x_1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & +1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ $\hat{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

完毕.

4. 目标函数非凸时（Q不定矩阵）.（补充内容仅供参考）.

$$(QP)\begin{cases} \min \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx =: f(x) \\ s.t.\ a_i^Tx - b_i \le 0,\ i\in I \\ \quad\ \ a_i^Tx - b_i = 0,\ i \in \mathcal{E}. \end{cases} \Big\} S.$$

Q不定矩阵，非凸问题.

常用方法：1）"分支定界" 求全局最优解

2）近似算法，求平稳点（KKT条件）.

序列凸逼近方法.（Sequential convex approximation, SCA）.

基本思想：用一系列凸问题逼近（QP）问题，

如何构造凸近似问题？

由于Q不定，则可分解为 $Q = P - N$，P.N为半正定

（比如特征值分解，对角扰动等）.

则 $f(x) = \frac{1}{2}x^TPx + c^Tx - \frac{1}{2}x^TNx.$

（两个凸函数之差，亦称为D.C.函数，difference of convex…）.

取 $\bar{x}\in S$，在$\bar{x}$处用线性函数代替非凸部分 $g(x) = -\frac{1}{2}x^TNx$

$$L(x) = g(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})^T(x-\bar{x}).$$

$$= -\frac{1}{2}\bar{x}^TN\bar{x} - (N\bar{x})^T(x-\bar{x})$$

$$= -\bar{x}^TNx + \frac{1}{2}\bar{x}^TN\bar{x}.$$

得$\bar{x}$处的近似子问题（凸二次规划）.

$$(QP(\bar{x}))\begin{cases} \min & \frac{1}{2}x^TPx + c^Tx - \bar{x}^TNx + \frac{1}{2}\bar{x}^TN\bar{x}. \\ s.t. & a_i^Tx - b_i \le 0,\ i\in\mathcal{I} \\ & a_i^Tx - b_i = 0,\ i\in\mathcal{E}. \end{cases}$$

可用有效集法求解.

lemma: 若$\bar{x}$是$(QP(\bar{x}))$最优解，则$\bar{x}$是(QP)的KKT点.

证明：由于$\bar{x}$是$(QP(\bar{x}))$最优解，

则KKT条件成立：

$$\begin{cases} P\bar{x} + c - N\bar{x} + \sum_{i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{E}} \lambda_i a_i) = 0 \\ \lambda_i \ge 0,\ i\in\mathcal{I} \\ \lambda_i(a_i^T\bar{x} - b_i) = 0,\ i\in\mathcal{I}. \\ a_i^T\bar{x} - b_i \le 0,\ i\in\mathcal{I} \\ a_i^T\bar{x} - b_i = 0,\ i\in\mathcal{E} \end{cases}$$

上述也是(QP)的KKT条件，故$\bar{x}$是(QP)的最优解.

SCA framework:

Step0: 取可行点x^0. $\varepsilon>0$. $k:=0$.

Step1: 求解凸二次规划问题$(QP(x^k))$.

得最优解x^{k+1};

Step2: 若$\|x^k - x^{k+1}\| \le \varepsilon$, 终止;

Step3: $k:=k+1$, 转Step1.

SCA方法的收敛性：设 $\varepsilon=0$，

1). 若SCA有限步终止，则 x^k 为(QP)的KKT点；

2). 设 $\{\lambda^k\}$ 有界，λ^k 为 $(QP(x^k))$ 的KKT乘子；任意 $\{x^k\}$ 的聚点 x^*，均为(QP)的KKT点.

证：1) 由 lemma 可知.

2) x^{k+1} 是 $(QP(x^k))$ 的最优解，λ^k 为乘子，则

$$(\#)\quad \begin{cases} Px^{k+1}+c-Nx^k+\sum\lambda_i^k a_i=0 \\ \lambda_i^k\geq 0 \\ \lambda_i^k(a_i^Tx^{k+1}-b_i)=0,\ i\in I. \\ a_i^Tx^{k+1}-b_i\leq 0,\ i\in I \\ a_i^Tx^{k+1}-b_i=0,\ i\in E. \end{cases}$$

任取聚点 x^*，$\{x^k\}$ 的子列收敛到 x^*，仍记为 $\{x^k\}$.

由于 $\{\lambda^k\}$ 有界，存在收敛子列，记 $\lambda^k\to\lambda^*$.

当 $k\to\infty$，

$$(\#)\longrightarrow \begin{cases} Qx^*+c+\sum\lambda_i^* a_i=0 \\ \lambda_i^*\geq 0,\ i\in I \\ \lambda_i^*(a_i^Tx^*-b_i)=0,\ i\in I \\ a_i^Tx^*-b_i\leq 0,\ i\in I \\ a_i^Tx^*-b_i=0,\ i\in E, \end{cases}$$

即 x^* 为(QP)的KKT点. 完毕.