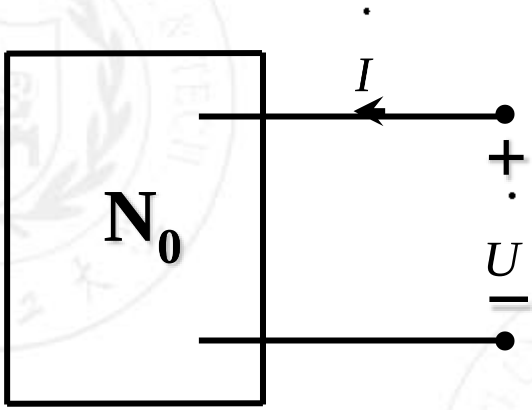
# 作 业

**3-25**

**3-37**

**3-40**

## 阻 抗




$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

（复数）阻抗（Ω）

**注意：** 此时电压相量 $\dot{U}$ 与电流相量 $\dot{I}$ 的参考方向向内部关联

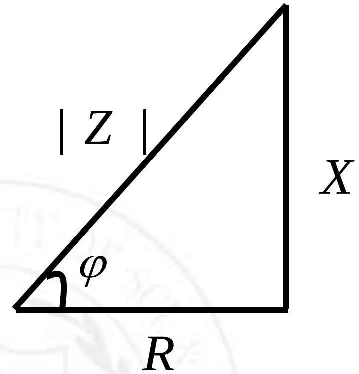
$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U\angle\psi_u}{I\angle\psi_i}=|Z|\angle\varphi=\frac{U}{I}\angle(\psi_u-\psi_i)$$

$$|Z|=\frac{U}{I}$$

$$\varphi=\psi_u-\psi_i$$

## 阻抗Z的标准形式

$$Z = R + jX = |Z| \angle \varphi$$




— 阻抗三角形

其中：$|Z| = \dfrac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} \ (\Omega)$ — 阻抗Z的模

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctan \frac{X}{R}$$ — 阻抗Z的阻抗角

$$R = |Z| \cos \varphi \ (\Omega)$$ — 阻抗Z的电阻分量

$$X = |Z| \sin \varphi \ (\Omega)$$ — 阻抗Z的电抗分量

## 阻抗Z和电路性质的关系

$$Z = R + jX = |Z| \angle \varphi$$

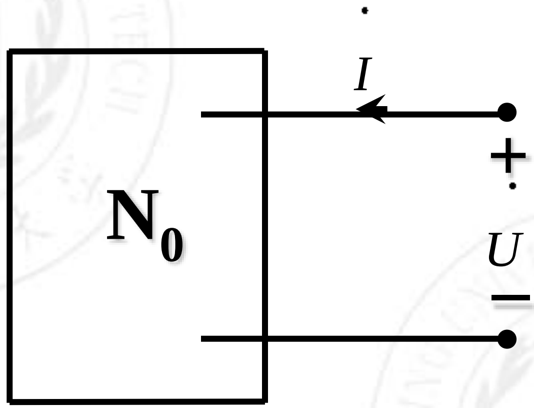
$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctan\frac{X}{R}$$

$\varphi > 0$ 表示 $u$ 领先 $i$ ——电路呈感性

$\varphi < 0$ 表示 $u$ 落后 $i$ ——电路呈容性

$\varphi = 0$ 表示 $u$、$i$同相 ——电路呈电阻性

## 导 纳




—复导纳$Y$

单位：S (西门子)

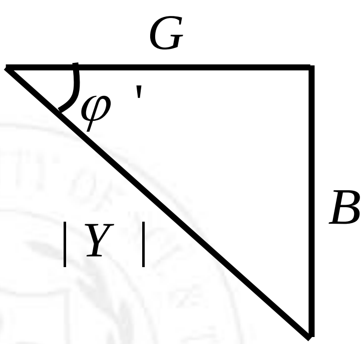
$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I\angle\psi_i}{U\angle\psi_u} = |Y|\angle\varphi' = \frac{I}{U}\angle(\psi_i - \psi_u)$$

$$\boxed{|Y| = \frac{I}{U}}$$

$$\boxed{\varphi' = \psi_i - \psi_u = -\varphi}$$

## 导纳Y的标准形式

$$Y = G + \mathrm{j}B = |Y| \angle \varphi'$$




—导纳三角形

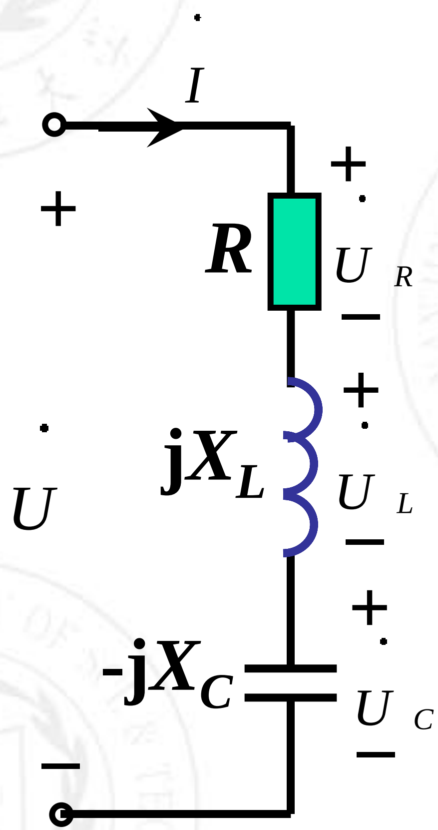
其中: $|Y| = \dfrac{I}{U} = \sqrt{G^2 + B^2}\ (\mathrm{S})$ —导纳Y的模

$\varphi' = \psi_i - \psi_u = \arctan\dfrac{B}{G}$ —导纳Y的导纳角

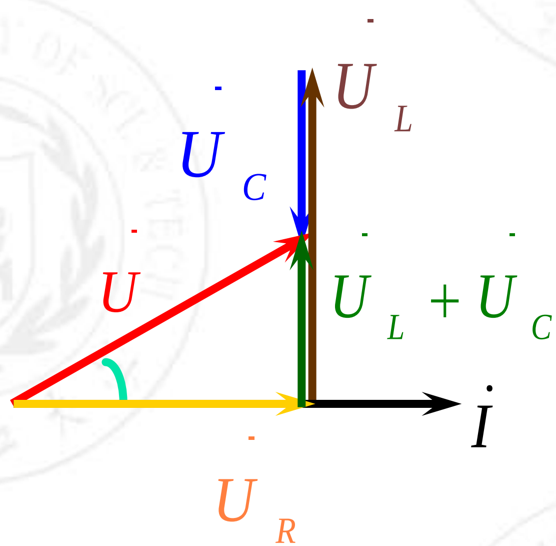
$G = |Y|\cos\varphi'\ (\mathrm{S})$ —导纳Y的电导分量

$B = |Y|\sin\varphi'\ (\mathrm{S})$ —导纳Y的电纳分量

设 $X_L > X_C$

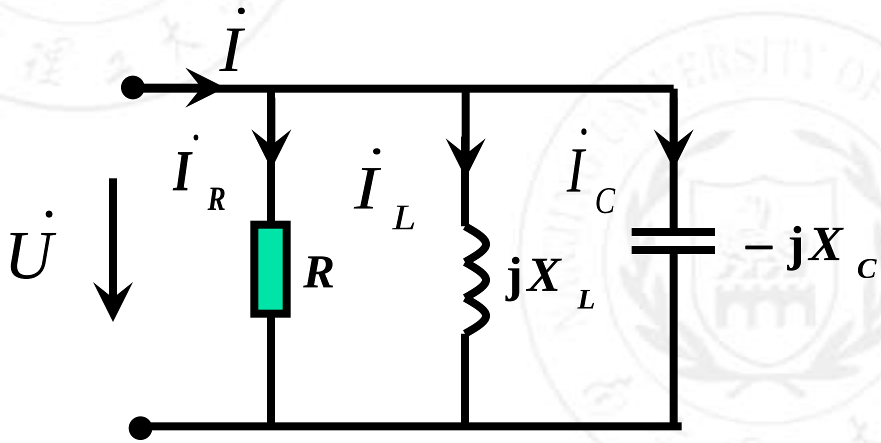


$\dot{I}$
+
$R$
+
$\dot{U}_R$
−
$\dot{U}$
$jX_L$
+
$\dot{U}_L$
−
$-jX_C$
+
$\dot{U}_C$
−
−

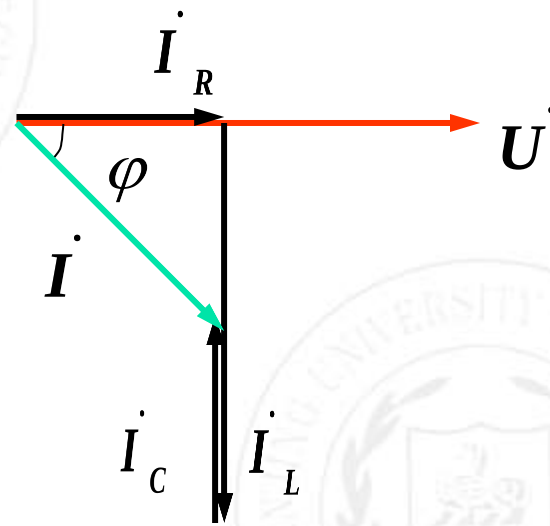



$\dot{U}_L$
$\dot{U}_C$
$\dot{U}$
$\dot{U}_L + \dot{U}_C$
$\dot{I}$
$\dot{U}_R$

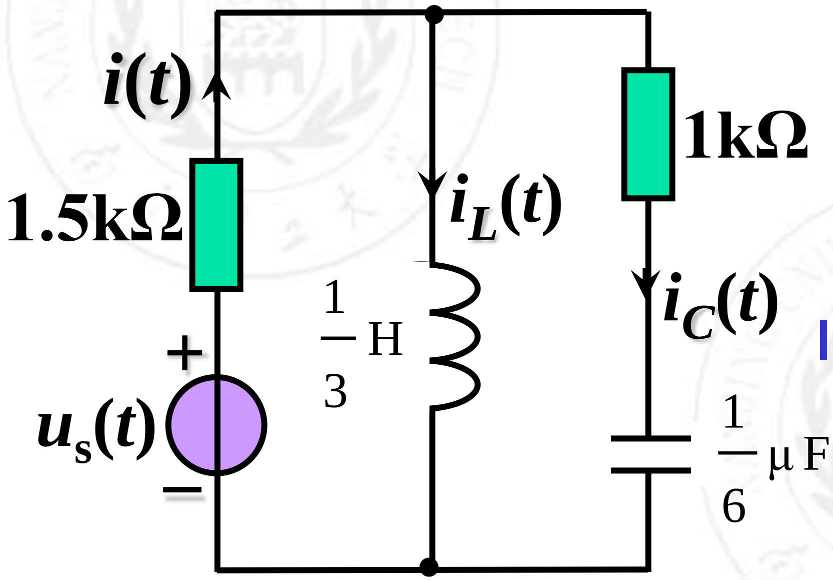
设 $X_L < X_C$

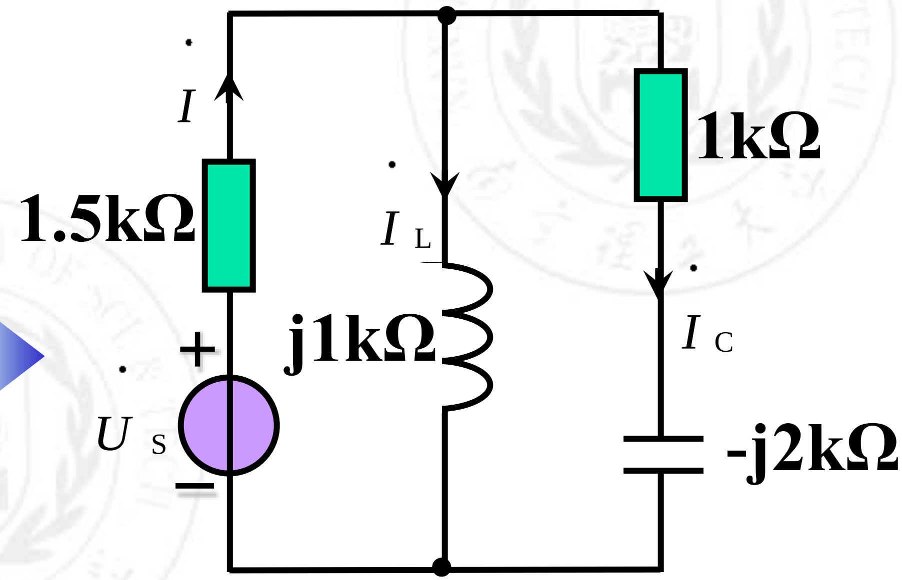



$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$



例： 已知 $u_s(t)=40\sqrt{2}\sin 3000t\ \text{V}$ ，求$i(t), i_L(t), i_C(t)$




注意： 当激励取有效值相量时，响应也应取有效值相量

$$Z_{eq}=2+j1.5\text{k}\Omega=2.5\angle 36.9^\circ\ \text{k}\Omega$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_s}{Z_{eq}}=16\angle -36.9^\circ\ \text{mA}$$

$$\dot{I}_C=8\sqrt{2}\angle 98.1^\circ\ \text{mA}$$

$$\dot{I}_L=25.3\angle -55.3^\circ\ \text{mA}$$

# 习题2

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z_{eq}} = 16\angle -36.9^\circ \text{ mA}$$

$$\therefore \quad i(t) = 16\sqrt{2}\sin(3000t - 36.9^\circ) \text{ mA}$$

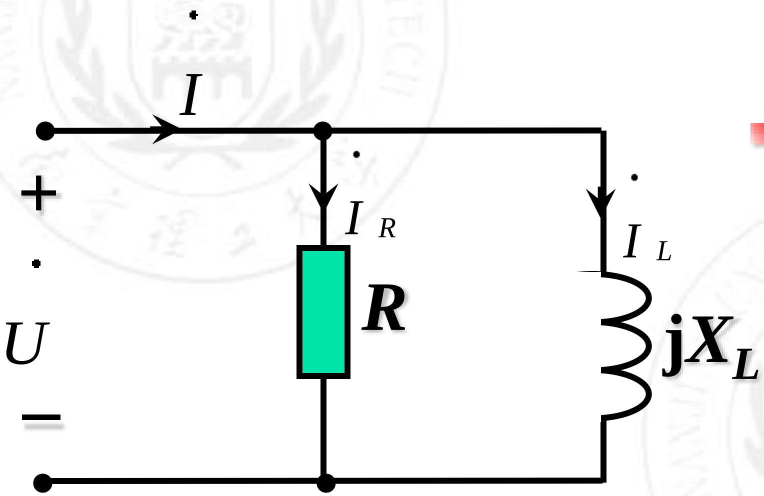
$$\dot{I}_C = 8\sqrt{2}\angle 98.1^\circ \text{ mA}$$

$$i_C(t) = 16\sin(3000t + 98.1^\circ) \text{ mA}$$

$$\dot{I}_L = \frac{1-\text{j}2}{(1-\text{j}2)+\text{j}1}\dot{I} = \dot{I} - \dot{I}_C = 25.3\angle -55.3^\circ \text{ mA}$$

$$i_L(t) = 25.3\sqrt{2}\sin(3000t - 55.3^\circ) \text{ mA}$$

**例：** 已知$U$=100V, $I$=5A, 且 $\dot{U}$ 超前 $\dot{I}$ $53.1^\circ$，求$R$, $X_L$




**解法1：** 令 $\dot{I} = 5\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$，

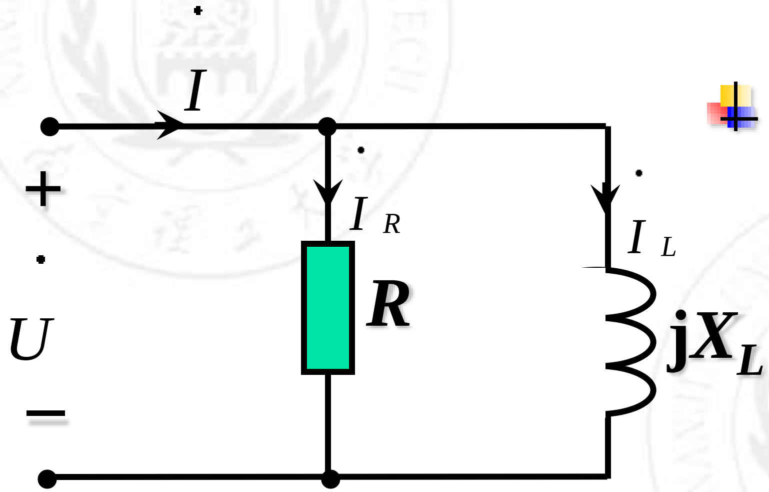
则 $\dot{U} = 100\angle 53.1^\circ\ \mathrm{V}$

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 20\angle 53.1^\circ = 12 + \mathrm{j}16\Omega$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{R\cdot X_L^2}{R^2+X_L^2} = 12 \\ \dfrac{R^2\cdot X_L}{R^2+X_L^2} = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R = \dfrac{100}{3}\Omega \\ X_L = 25\Omega \end{array}\right.$$

$$\therefore\quad R = \frac{100}{3}\Omega,\quad X_L = 16\Omega$$

例：已知$U$=100V, $I$=5A, 且$\dot{U}$超前$\dot{I}$ $53.1^\circ$，求$R$, $X_L$




解法2：令$\dot{U}=100\angle 0^\circ\ \text{V}$，

$$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L$$

$$\dot{I}=5\angle -53.1^\circ\ \text{A}=3-\text{j}4\ \text{A}$$

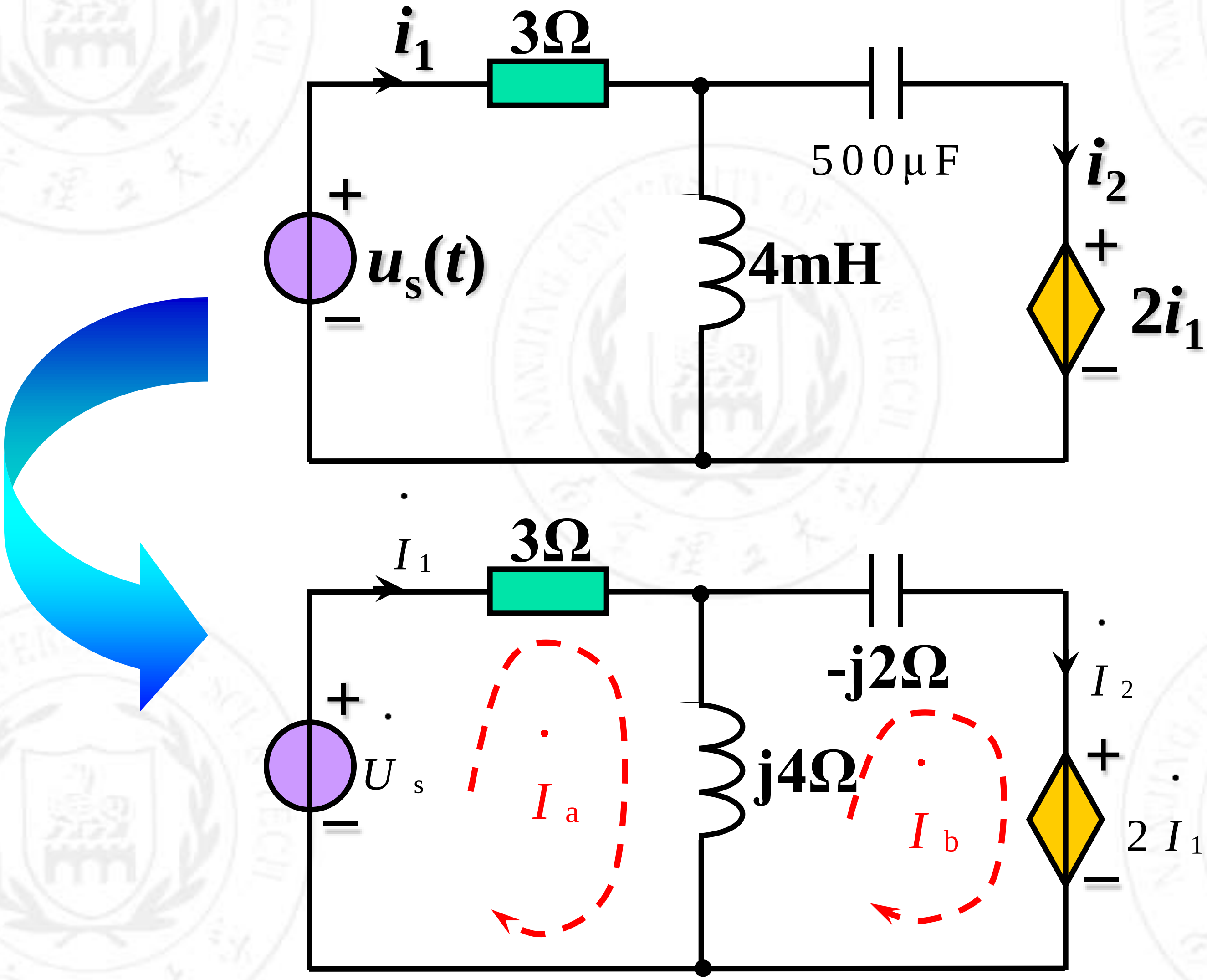
则$\dot{I}_R$为纯实数，$\dot{I}_L$为纯虚数

$$R=\frac{\dot{U}}{\dot{I}_R}=\frac{100\angle 0^\circ}{3}=\frac{100}{3}\Omega$$

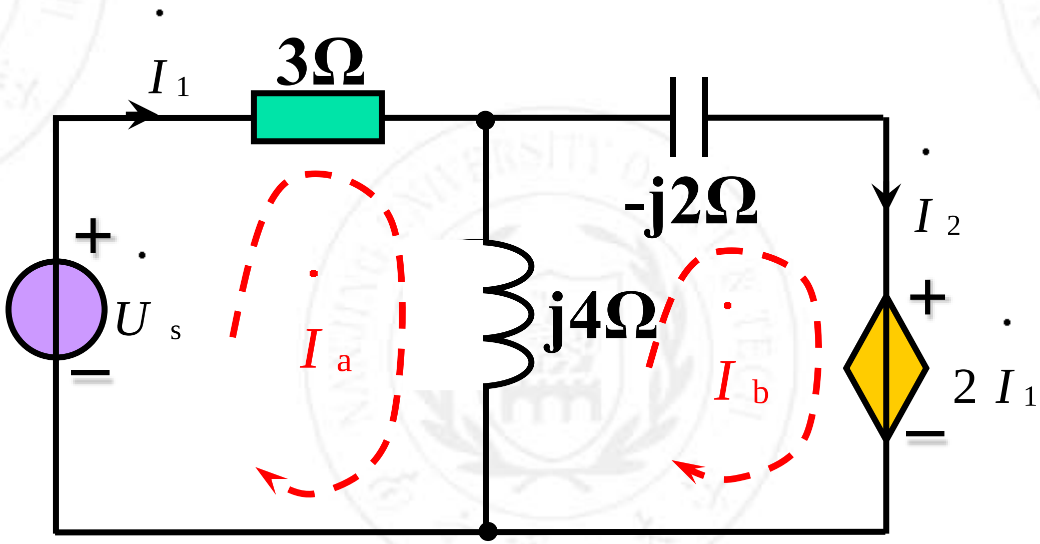
$$Z_L=\frac{\dot{U}}{\dot{I}_L}=\frac{100\angle 0^\circ}{-\text{j}4}=\text{j}25\Omega$$

$$X_L=25\Omega$$

例： 已知 $u_s(t)=10\sqrt{2}\sin 10^3 t\,\text{V}$，求 $i_1(t)$，$i_2(t)$



- **解：** 首先画出时域电路对应的相量电路，并采用网孔法：




$$\dot{I}_1=\dot{I}_a,\ \dot{I}_2=\dot{I}_b$$

$$\begin{cases}(3+\mathrm{j}4)\dot{I}_a-(\mathrm{j}4)\dot{I}_b=\dot{U}_S=10\angle 0^\circ \\ -\mathrm{j}4\dot{I}_a+(\mathrm{j}4-\mathrm{j}2)\dot{I}_b=-2\dot{I}_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3+\mathrm{j}4)\dot{I}_a-\mathrm{j}4\dot{I}_b=10 \\ (2-\mathrm{j}4)\dot{I}_a+\mathrm{j}2\dot{I}_b=0\end{cases}$$

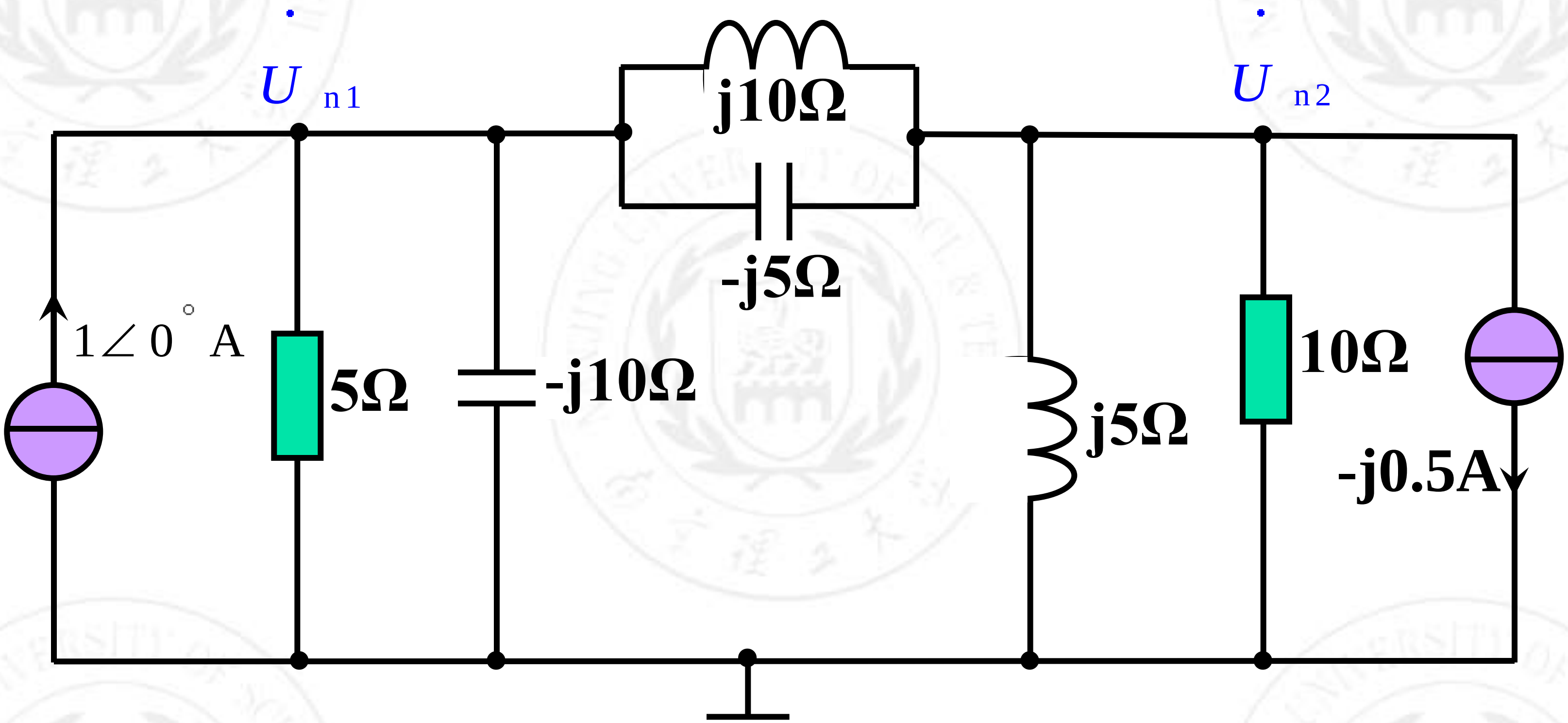
$$\dot{I}_a = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -j4 \\ 0 & j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j4 & -j4 \\ 2-j4 & j2 \end{vmatrix}} = \frac{j20}{-8+j14+16} = \frac{20\angle 90^\circ}{16.12\angle 60.26^\circ} = 1.24\angle 29.7^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_b = \frac{\begin{vmatrix} 3+j4 & 10 \\ 2-j4 & 0 \end{vmatrix}}{8+j14} = \frac{-20+j40}{8+j14} = \frac{44.72\angle 116.57^\circ}{16.12\angle 60.26^\circ} = 2.77\angle 56.3^\circ \text{ A}$$

$\therefore \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_a = 1.24\angle 29.7^\circ \text{ A}$，即 $i_1(t) = 1.24\sqrt{2}\sin(10^3 t + 29.7^\circ)\text{A}$

$\dot{I}_2 = \dot{I}_b = 2.77\angle 56.3^\circ \text{ A}$，即 $i_2(t) = 2.77\sqrt{2}\sin(10^3 t + 56.3^\circ)\text{A}$

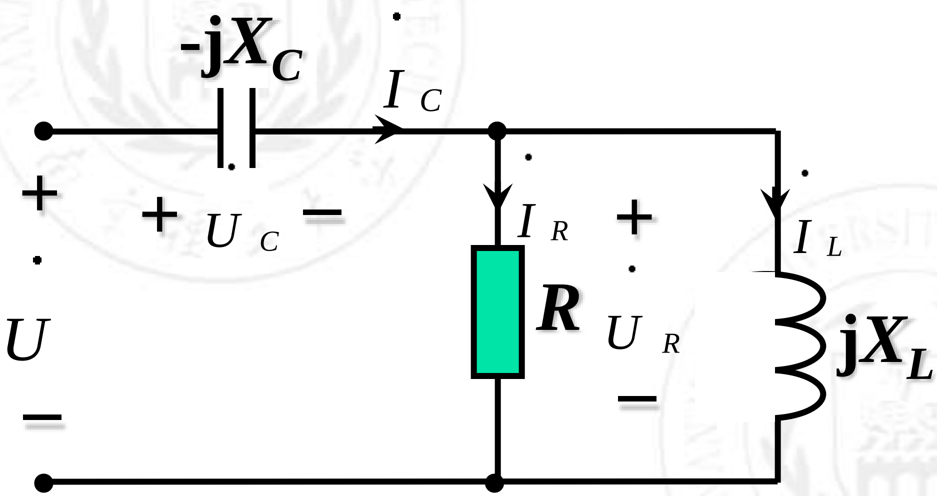
例：试列出节点电压相量方程




$$(0.2 + j0.2)\dot{U}_{n1} - j0.1\dot{U}_{n2} = 1$$

$$-j0.1\dot{U}_{n1} + (0.1 - j0.1)\dot{U}_{n2} = j0.5$$

例：已知$I_C=2\text{A}$, $I_R=\sqrt{2}\text{A}$, $X_L=100\Omega$, 且$\dot{U}$与$\dot{I}_C$同相，求$U$




**解1：相量法：**

令 $\dot{I}_R=\sqrt{2}\angle 0^\circ\ \text{A}$

则 $\dot{U}_R=R\sqrt{2}\angle 0^\circ\ \text{V}$

$$\dot{I}_L=\frac{\dot{U}_R}{\mathrm{j}X_L}=-\mathrm{j}\frac{R\sqrt{2}}{100}\text{A},\quad \dot{I}_C=\dot{I}_R+\dot{I}_L=\sqrt{2}-\mathrm{j}\frac{R\sqrt{2}}{100}$$

$$2=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\frac{R\sqrt{2}}{100})^2}\ \Rightarrow\ R=100\Omega$$

$$\therefore\ \dot{U}_R=100\sqrt{2}\angle 0^\circ\ \text{V},\ \dot{I}_L=-\mathrm{j}\sqrt{2}\text{A},\ \dot{I}_C=\dot{I}_R+\dot{I}_L=2\angle -45^\circ\ \text{A}$$

$$Z_{eq} = -jX_C + \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_C}$$

$$-jX_C + 50 + j50 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_C}$$

因 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}_C$ 同相:

$$\therefore \quad \mathrm{Im}\left[Z_{eq}\right] = 0 \ \Rightarrow \ -X_C + 50 = 0 \ \Rightarrow \ X_C = 50\Omega$$

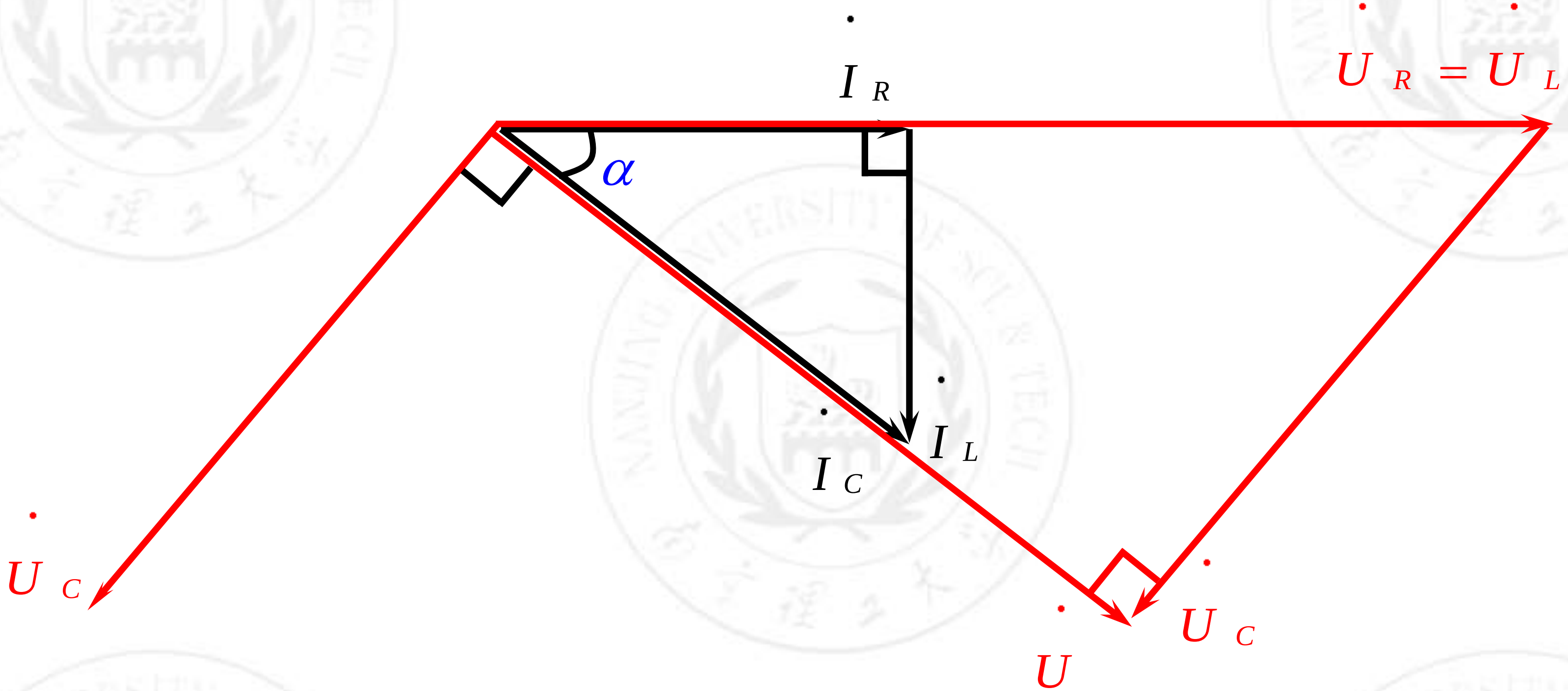
$$\dot{U} = -jX_C \dot{I}_C + \dot{U}_R = -j50 \times 2\angle -45^\circ + 100\sqrt{2}$$

$$= 50\sqrt{2} - j50\sqrt{2} = 100\angle -45^\circ \mathrm{V}$$

$$U = 100\mathrm{V}$$

- **注意：** 当一个纯电阻与一个纯电抗并联，且阻抗值相等，即$R=|X|$，则其并联等效阻抗为实部、虚部各取一半，阻抗性质不变

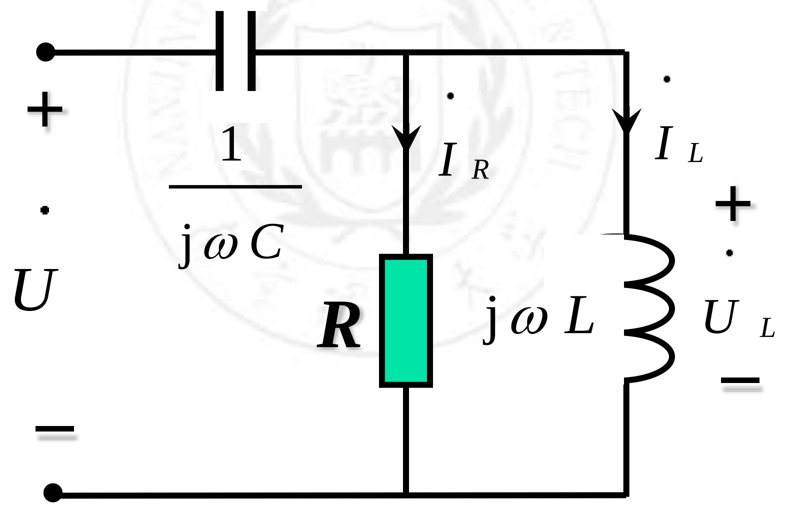
## 解2：相量图法




由电流三角形：$I_L = \sqrt{I_C^2 - I_R^2} = \sqrt{2}\,\mathrm{A}$，$U_R = U_L = X_L I_L = 100\sqrt{2}\,\mathrm{V}$

$\alpha = tg^{-1}\dfrac{I_L}{I_R} = 45^\circ$，由电压三角形：$U = U_R \cos\alpha = 100\,\mathrm{V}$

**3.24:** 已知$U = 100\text{V}$，$I_R = 3\text{A}$, $I_L = 1\text{A}$, $\omega = 1000\text{rad/s}$, 且$\dot{U}_L$超前$\dot{U}$ $60^\circ$。试求电路参数$R$、$L$、$C$的值。




$R = 26.3\Omega,\ L = 78.9\text{mH},\ C = 34.6\mu\text{F}$

# 目　录

一、瞬时功率 $p$ ----W

二、平均功率 $P$ ----W

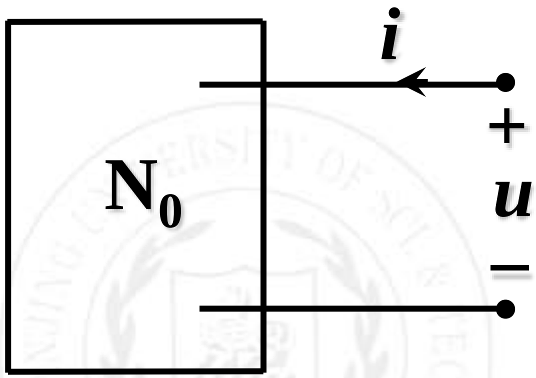
三、无功功率 $Q$ ----Var

四、视在功率 $S$ ----VA

五、功率因数λ的提高

六、习题

## 瞬时功率




$$i = I_m \sin \omega t, u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p = u \cdot i = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = UI[\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]$$

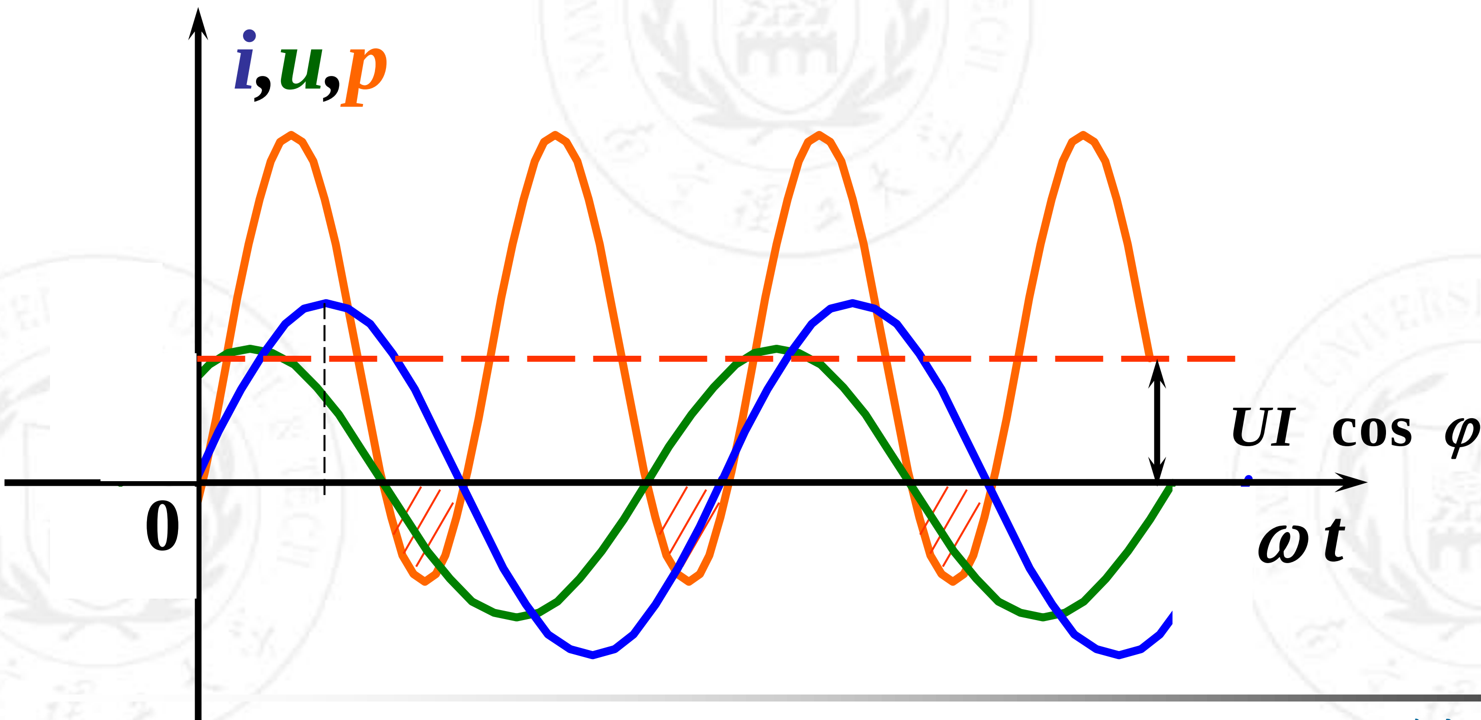
$$= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{常数}} - \underbrace{UI \cos(2\omega t + \varphi)}_{\text{余弦函数}}$$

# 正弦稳态电路的瞬时功率

$$p = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \varphi)$$

$$= UI(\cos\varphi - \cos 2\omega t\cos\varphi + \sin 2\omega t\sin\varphi)$$

$$= \underbrace{UI\cos\varphi(1-\cos 2\omega t)}_{\text{不可逆部分}\,p_R(t)} + \underbrace{UI\sin\varphi\sin 2\omega t}_{\text{可逆部分}\,p_X(t)}$$



## 平均功率

$$P \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T UI[\cos\varphi - \cos(2\omega t+\varphi)]\,\mathrm{d}t = UI\cos\varphi$$

- 可见: 1. *P*是一个常量，由有效值*U*、*I*及$\cos\varphi$，($\varphi = \psi_u - \psi_i$)三者乘积确定，量纲：**W**

  2. 当$P>0$时，表示该一端口电路吸收平均功率*P*;

  当$P<0$时，表示该一端口电路发出平均功率|*P*|

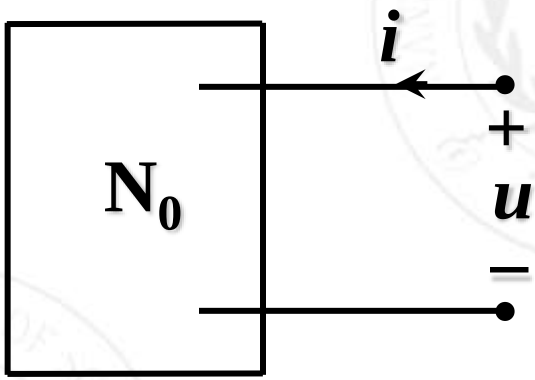
  3. 单一无源元件的平均功率: $P_R = UI,\ P_L = 0,\ P_C = 0$

  - $0<\varphi<90^\circ$：感性，$-90^\circ<\varphi<0^\circ$：容性

- 对容性电路或感性电路:$P>0$，始终消耗功率

## 平均功率的两种计算方法

若正弦稳态二端网络$N_0$中不含独立源




$$1: \ P = \sum P_{Rk}$$

$$2: P = UI\cos\varphi$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i$$

$$p = UI\cos\varphi(1-\cos 2\omega t) + UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

不可逆部分$p_R(t)$　　可逆部分$p_X(t)$

- 正弦稳态二端电路内部与外部能量交换的规模(即瞬时功率可逆部分的振幅)定义为无功功率$Q$，即：

$$Q \triangleq UI\sin\varphi$$

- 可见: 1. $Q$是一个常量，由有效值$U$、$I$及$\sin\varphi$，($\varphi=\psi_u-\psi_i$)三者乘积确定，量纲：Var (乏)

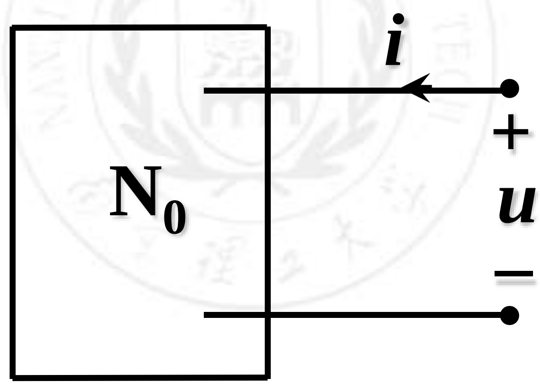
2. $Q_R=0$，$Q_L=UI=I^2X_L$，$Q_C=-UI=-I^2X_C$

   - $0<\varphi<90^\circ$：$Q>0$，吸收无功功率
   - $-90^\circ<\varphi<0^\circ$：$Q<0$，发出无功功率

## 无功功率的两种计算方法

若正弦稳态二端网络$N_0$中不含独立源

$$\varphi = \psi_u - \psi_i$$




$$1:\ Q = \sum Q_{Xk} = \sum I_k^2 (X_{Lk} - X_{Ck})$$

$$2:\ Q = UI\sin\varphi$$

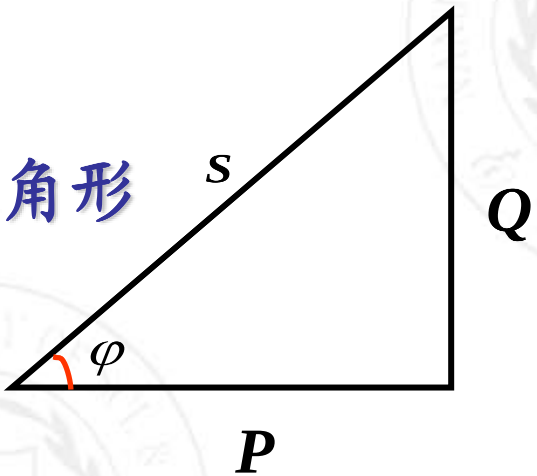
## 视在功率(表观功率)

- 反映电源设备的容量（可能输出的最大平均功率）

量纲： VA (伏安)： $S \triangleq UI$

- 即有：$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, tg\varphi = \dfrac{Q}{P}$

功率三角形




$P = UI\cos\varphi = S\cos\varphi$

$Q = S\sin\varphi$

注： 在工程上视在功率用来表示电源设备（变压器、发电机等）的容量，也可用来衡量发电机可能提供的最大平均功率（额定电压×额定电流）

## 功率因数及其提高

- 当正弦稳态一端口电路内部不含独立源时，$\cos\varphi$用λ表示，称为该一端口电路的**功率因数**

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{UI}$$

$$-90^{\circ} < \varphi < 90^{\circ},\ \cos\varphi > 0$$

- 工业生产中很多设备都是感性负载，感性负载的$P$、$U$一定时，λ越小，由电网输送给此负载的电流就越大。这样一方面要占用较多的电网容量，又会在发电机和输电线上引起较大的功率损耗和电压降。所以需要提高λ的值

# 常见电路的功率因数

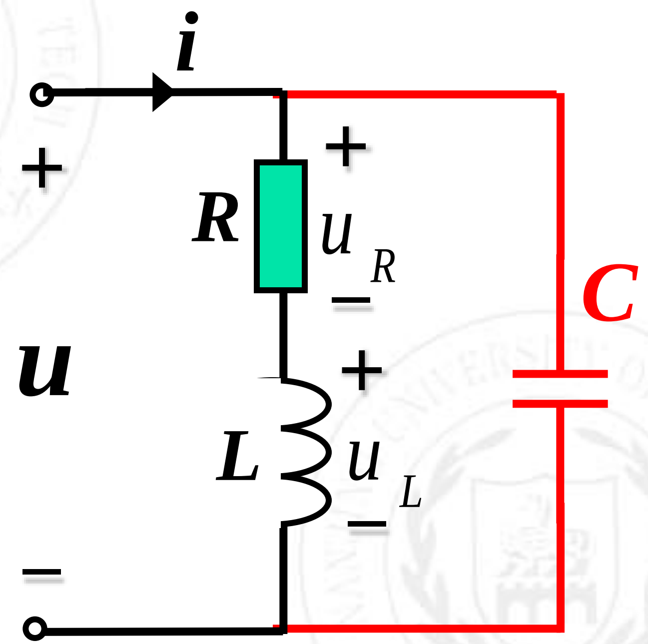
| | |
|---|---|
| 纯电阻电路 | $\cos\varphi = 1 \quad (\varphi = 0)$ |
| 纯电感电路或<br>纯电容电路 | $\cos\varphi = 0 \quad (\varphi = \pm 90°)$ |
| ***R*-*L*-*C*串联电路** | $0 < \cos\varphi < 1$<br>$(-90° < \varphi < +90°)$ |
| 日光灯<br>（***R*-*L*-*C*串联电路**） | $\cos\varphi = 0.5 \sim 0.6$ |

## 提高功率因数的原则:

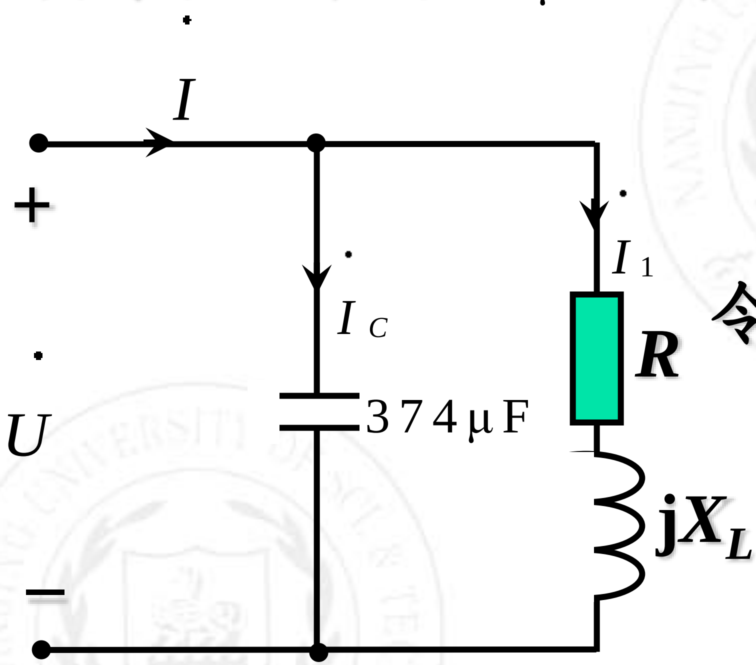
必须保证原负载的工作状态不变。即：加至负载上的电压和负载的平均功率不变

## 提高功率因数的措施:

并联电容



例：在$f$=50Hz, $U$=380V的交流电源上，接有一感性负载，其消耗的平均功率$P_1$=20kW, 其功率因数$\cos\varphi_1 = 0.6$。求：线路电流$I_1$; 若在感性负载两端并联一组电容器，其等值电容为374μF，求线路电流$I$及总功率因数$\cos\varphi$



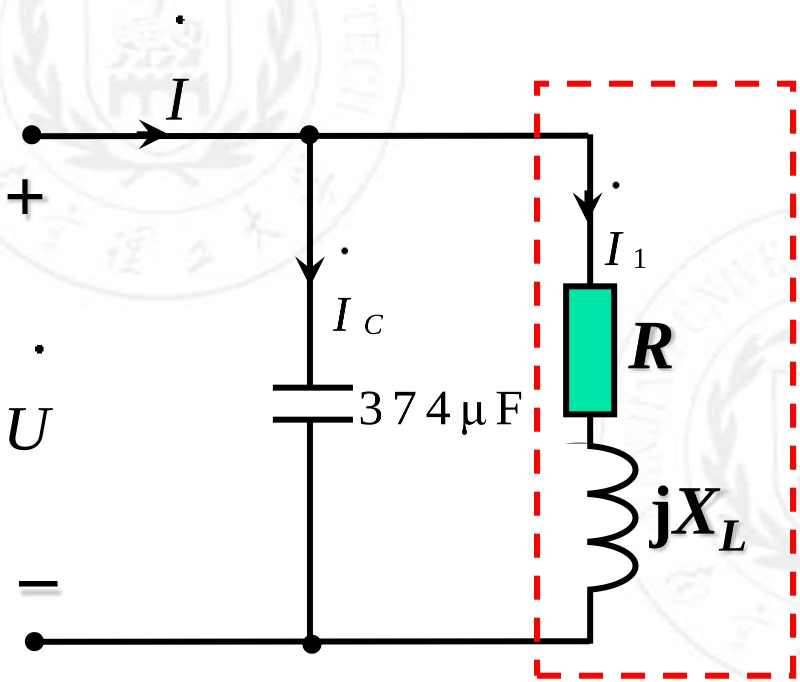

$$I_1 = \frac{P_1}{U\cos\varphi_1} = \frac{20000}{380\times 0.6} = 87.72\text{A}$$

令$\dot{U} = 380\angle 0^\circ\ \text{V}$，则$\dot{I}_1 = 87.72\angle -53.1^\circ\ \text{A}$

$$\dot{I}_C = j\omega C\dot{U} = \text{j}44.6\text{A}$$

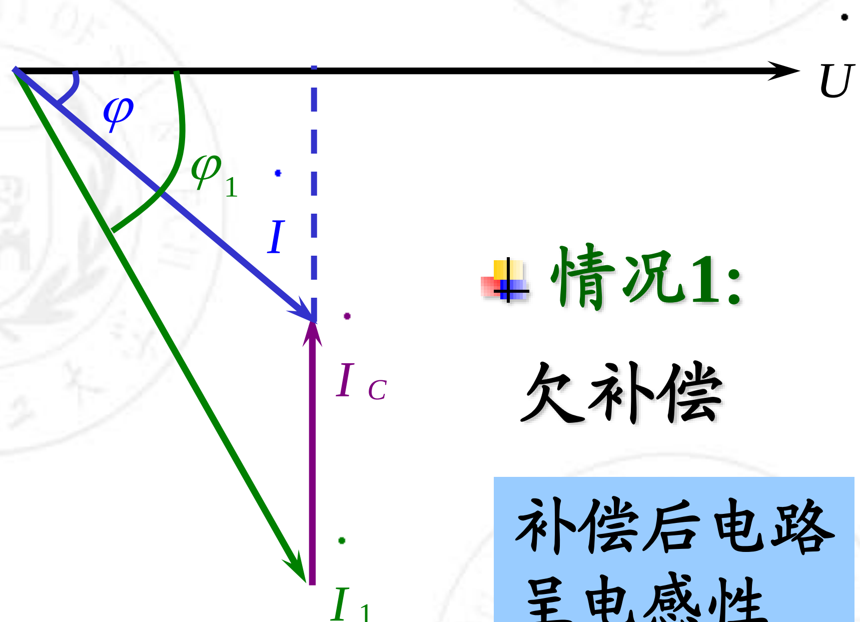
$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_C = 58.5\angle -25.8^\circ\ \text{A}$$

$$\therefore\ I = 58.5\text{A},\ \cos\varphi = \cos 25.8^\circ = 0.9$$




感性负载

工程上一般将功率因数提高到0.85~0.95



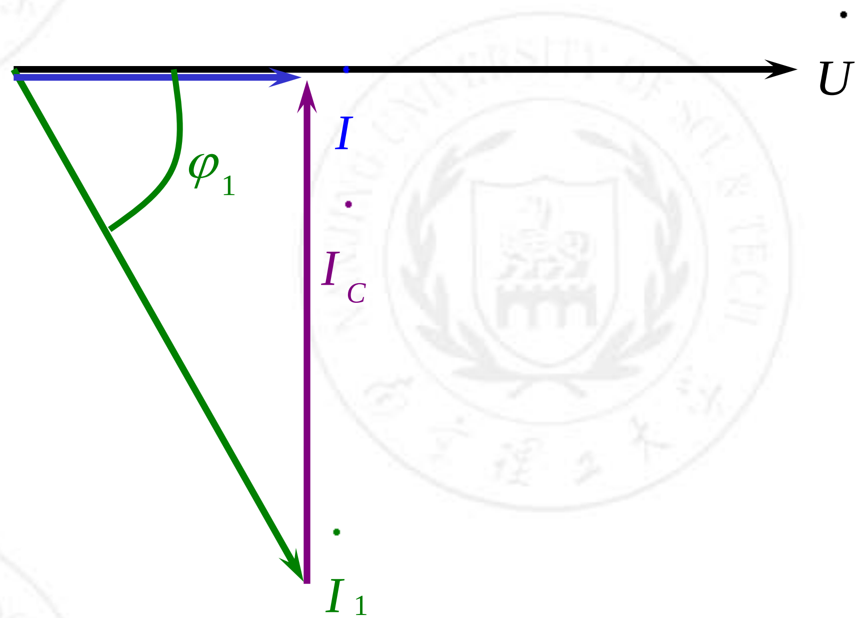

- 情况1:

欠补偿

补偿后电路呈电感性

- 并联电容的作用：减小端口电流，提高功率因数

## 情况2

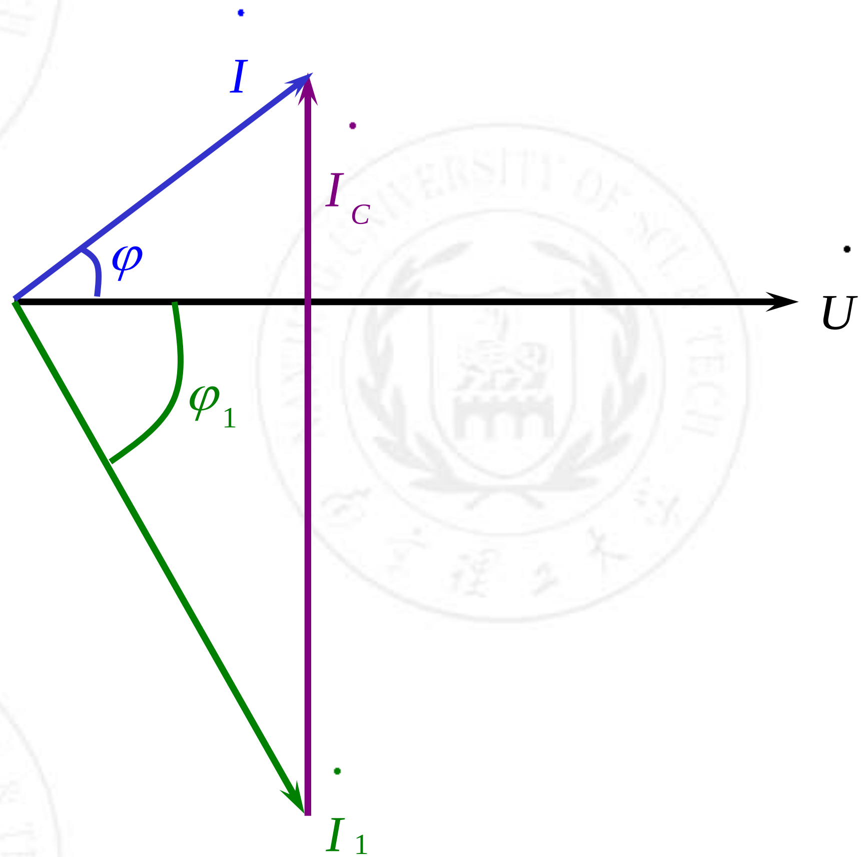



呈电阻性

$$\cos \varphi = 1$$

**从经济方面考虑，工程上一般不要求补偿到1。**

## 情况3：过补偿

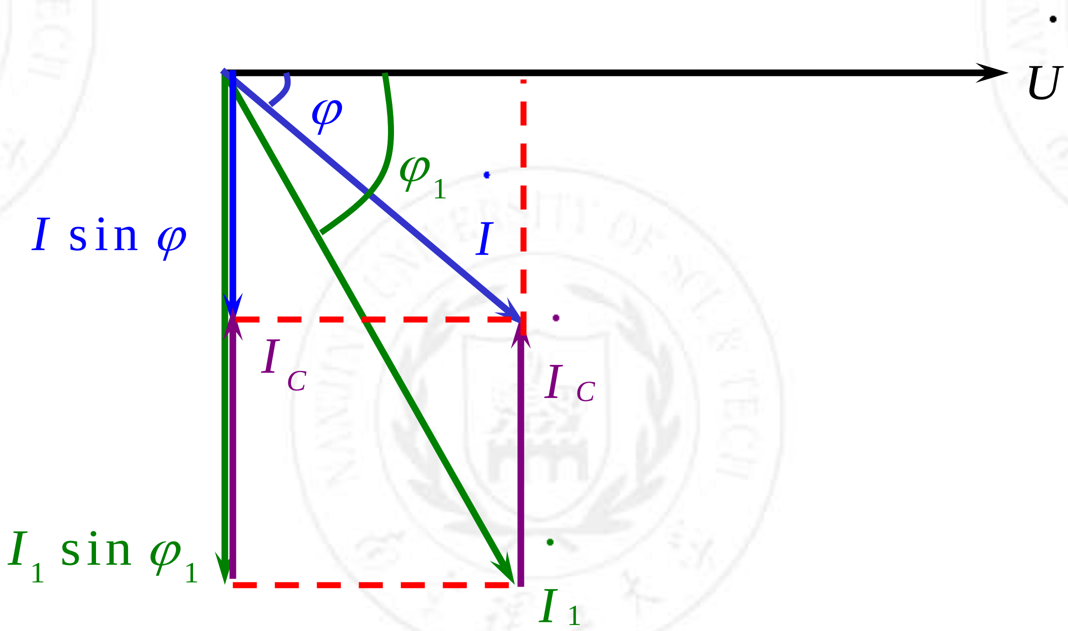



呈电容性

$$\cos\varphi < 1$$

**补偿成容性要求使用的电容容量更大，经济上不合算**

- 给定$P$、$\cos\varphi_1$，要求将$\cos\varphi_1$提高到$\cos\varphi$，求$C=?$




$$I_C = I_1\sin\varphi_1 - I\sin\varphi = \frac{P\sin\varphi_1}{U\cos\varphi_1} - \frac{P\sin\varphi}{U\cos\varphi} = \frac{P}{U}(tg\varphi_1 - tg\varphi) = \omega CU$$

$$\therefore\quad C = \frac{P}{\omega U^2}(tg\varphi_1 - tg\varphi)$$

## 功率守恒情况

- 瞬时功率守恒：$p(t)=\sum p_k(t)$
- 平均功率守恒：$P=\sum P_k=\sum R_k I_k^2$
- 无功功率守恒：$Q=\sum Q_k=\sum X_k I_k^2=\sum (X_{Lk}-X_{Ck}) I_k^2$
- 视在功率不守恒：$S\neq\sum S_k$

对正弦二端网络，下列关系是正确的是:

# 正误判断

$$1.\ S = P + Q$$

$$2.\ S = ui$$

$$3.\ S = P\cos\varphi$$

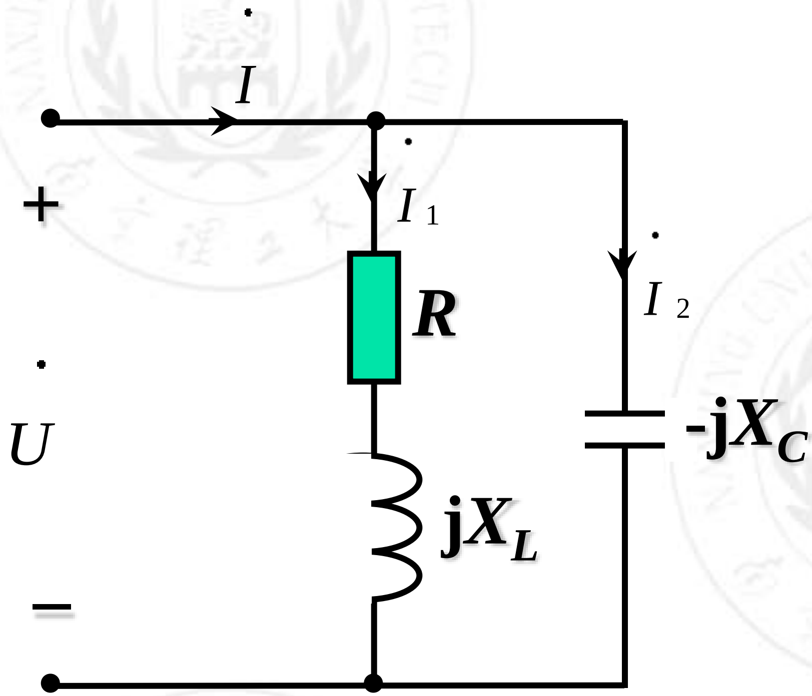
$$4.\ S = |Z|I^2$$

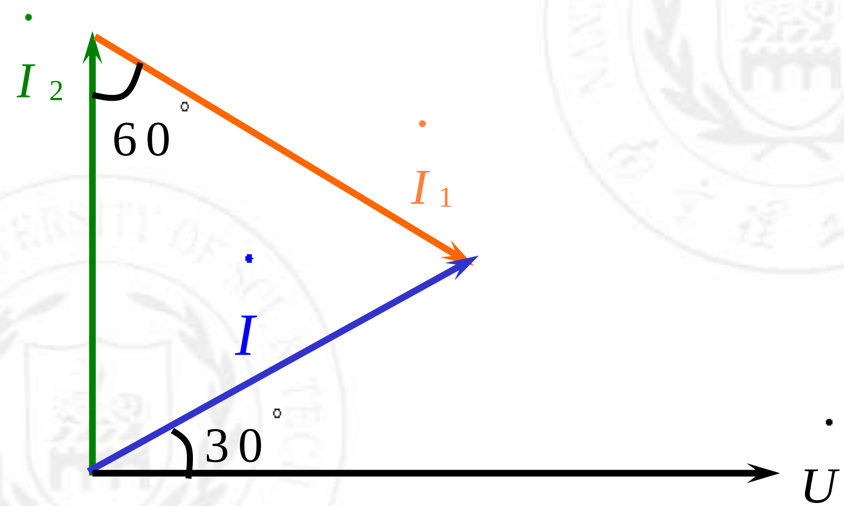
$$5.\ \tan\varphi = \frac{L - C}{R}$$

$$6.\ P = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi$$

答案：4，6

**例：** 已知$U$=100V, $P$=86.6W, $I=I_1=I_2$, 求$R$, $X_L$, $X_C$




作出电路的相量图，

可见电流相量图为等边三角形

$$I=\frac{P}{U\cos\varphi}=\frac{P}{U\cos(-30^\circ)}=1\text{A}$$

则：$I=I_1=I_2=1\text{A}$

$$R=\frac{P}{I_1^2}=86.6\Omega$$

$$X_C=\frac{U}{I_2}=100\Omega$$

$$X_L=50\Omega$$

## 本 次 课 重 点

- 正弦稳态电路的平均功率、无功功率.
- 功率因数的提高.