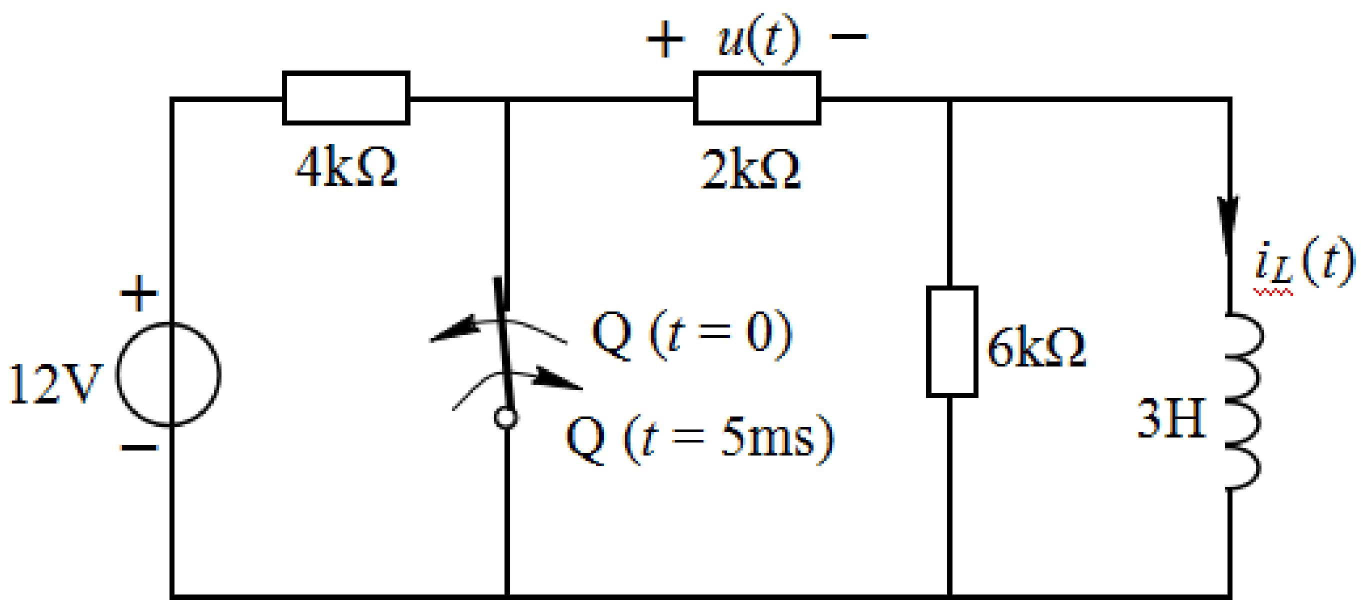
作 业

6-22

6-25

电路如图所示，$t<0$ 时原电路已稳定，$t=0$ 时打开开关 S，$t=5\text{ms}$ 时又闭合开关 S。求 $t \geq 0_+$ 时的电流 $i_L(t)$ 和电压 $u(t)$，并画出其对应的变化曲线。



$$f(t)=f(\infty)+\left[f(0_+)-f(\infty)\right]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\qquad(t\geq 0_+)$$

- **三 要 素**
  - 初始值 $f(0_+)$
  - 稳态值 $f(\infty)$
  - 时间常数 τ

初始值的计算

1. 求$u_C(0_-)$ ，$i_L(0_-)$

- 情况1：给定$u_C(0_-)$ ，$i_L(0_-)$.
- 情况2：$t = 0$-时：原电路为直流稳态：

  C — 断路，L — 短路

- 情况3：$t = 0_-$时：原电路未进入稳态：

$$u_C(0_-) = u_C(t)|_{t=0_-} , \quad i_L(0_-) = i_L(t)|_{t=0_-}$$

初 始 值 的 计 算

- 2. 画0_+时的等效电路.

$$u_C(0_+) = u_C(0_-),\ i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

- 换路前后电压（流）不变的为电压（流）源：

  C — 电压源， L — 电流源

- 若$u_C(0_-)=0$, $i_L(0_-)=0$, 则：

  C — 短路， L — 断路

- 3. 利用电阻电路的计算方法求初始值.

- $f(0_+)$: 初始值

- $u_C(0_+)$, $i_L(0_+)$: 由$t = 0_-$的等效电路中求

- 其他初始值：必须由$t = 0_+$的等效电路中求

$t=0_+$时:

C — 电压源， L — 电流源

零状态下:

C — 短路， L — 断路

- $f(\infty)$: 稳态值

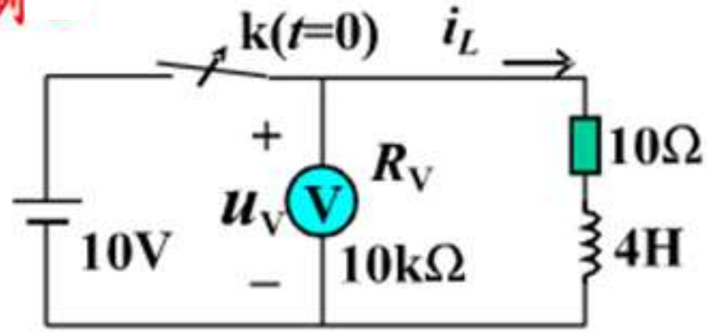
$t\rightarrow\infty$时： C — 断路， L — 短路

- τ: 时间常数

$$\boxed{\tau = RC,\ \tau = \frac{L}{R}}$$

R: 由动态元件两端看进去的戴维南等效电阻

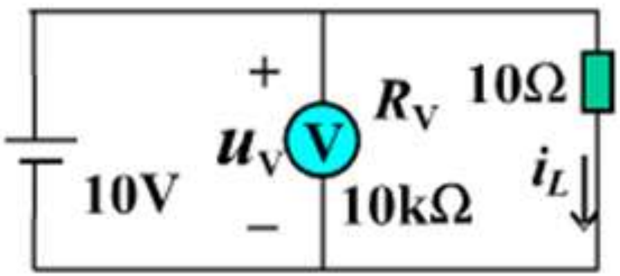
例



电压表量程为 50V。

t=0 时刻 k 打开，求电压 u_V 。

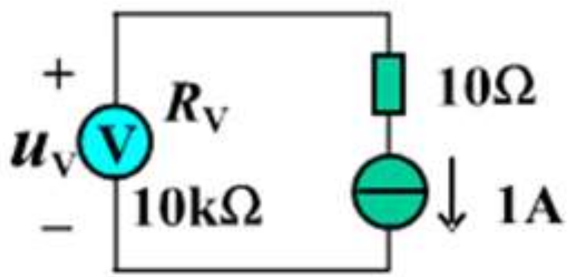
换路前稳态电路



求0^-值（电阻电路）

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\ \mathrm{A}$$

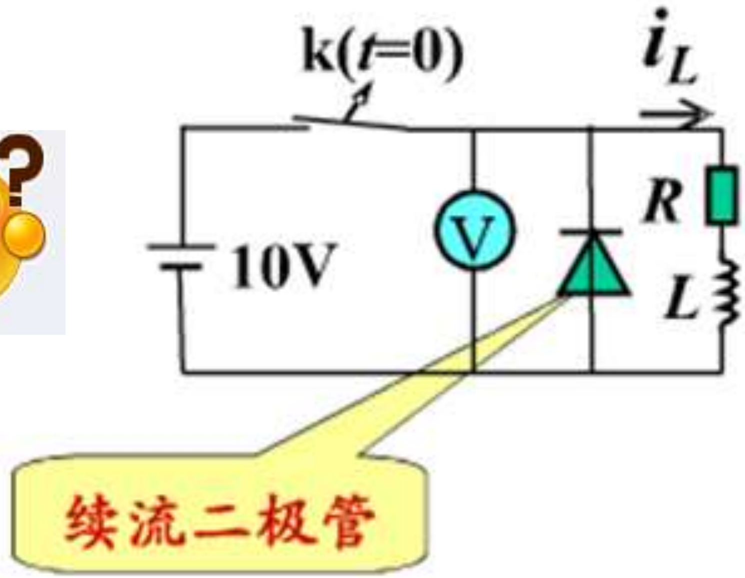
0^+时刻电路

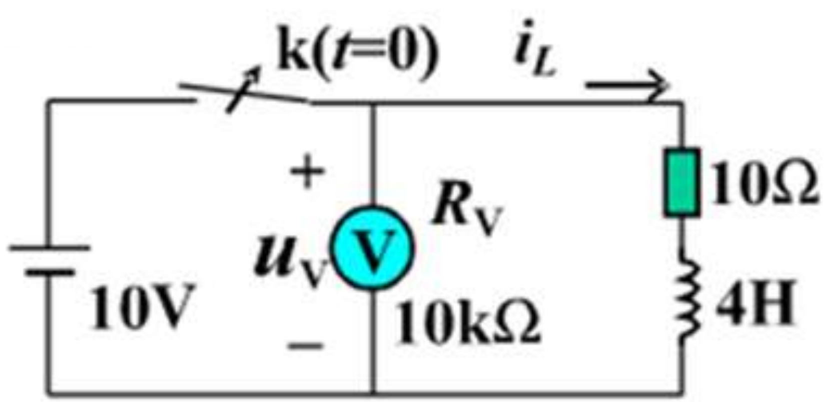


求0^+值（电阻电路）

$$u_V(0^+) = -10000\mathrm{V}$$

坏了！





电感线圈突然开路

一定是副作用吗？

汽车点火系统

目　录

6.1 换路定则与电压和电流初始值的计算

6.2 *RC*电路的放电过程

6.3 *RC*电路的充电过程

6.4 一阶直流、线性电路瞬变过程的一般求解方法——三要素法

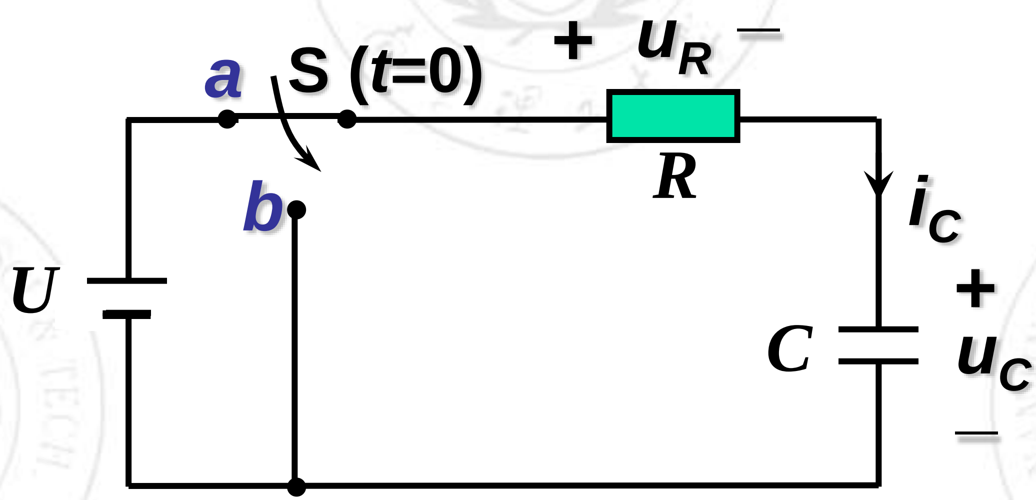
6.5 微分电路与积分电路

6.6 *RL*电路的瞬变过程

6.7 *RLC*串联电路的放电过程

零输入响应 Zero-input Response

电路中没有外施激励，仅由初始储能产生的响应，称为电路的**零输入响应**。

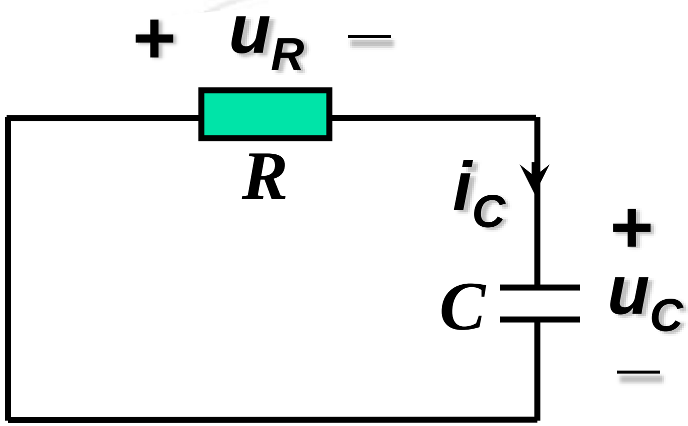


RC 放电过程

- 已知：$u_C(0_-) = U$, t=0时，S由a合向b，

  求：$t \geq 0_+$时的$u_C(t)$, $i_C(t)$

t>0：

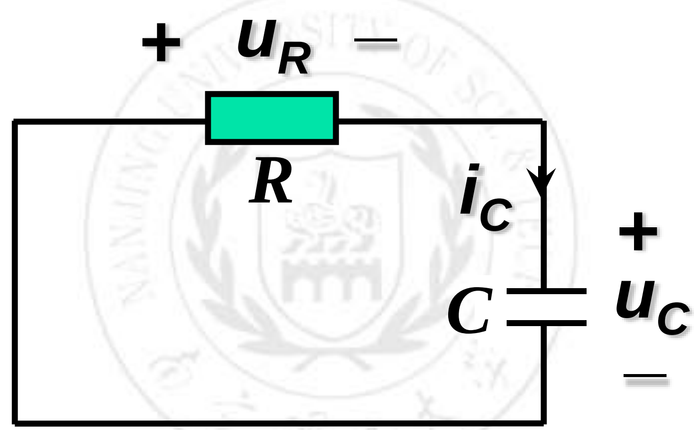


$$\begin{cases} Ri_C + u_C = 0 \\ i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

- 已知：$u_C(0_-) = U$, t=0时，S由a合向b，
  求：$t \geq 0_+$ 时的$u_C(t)$, $i_C(t)$

t>0：

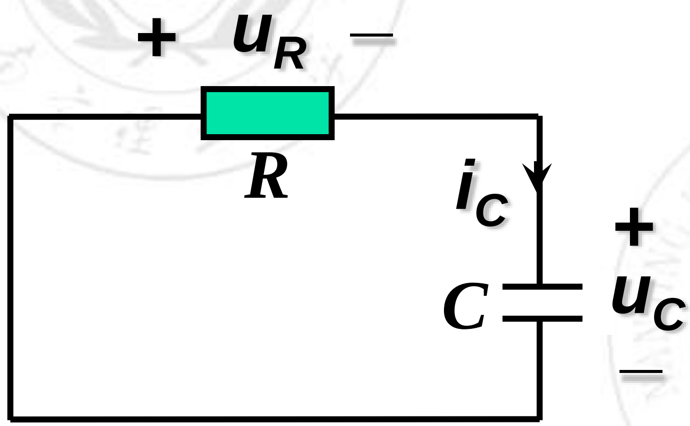


$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

$$u_C(t) = U\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad t > 0$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad t > 0$$

能量变化



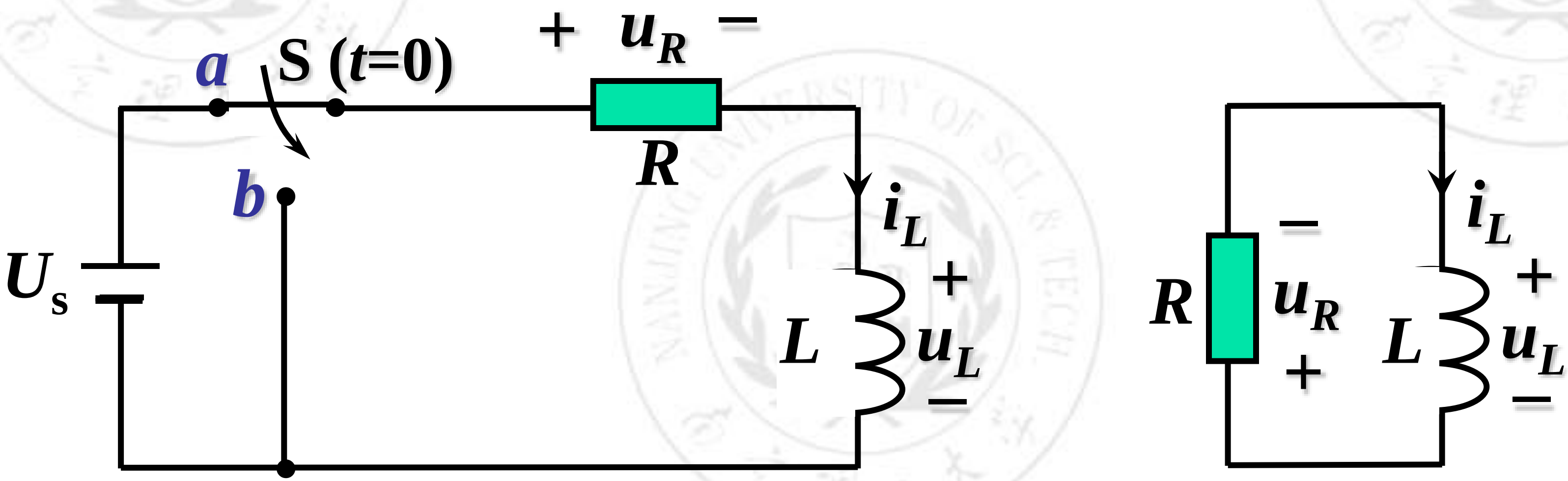
$$u_C(t)=U\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad t>0$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad t>0$$

结论：电容放电的过程，就是电阻消耗能量的过程，直至电容储能完全释放，并被电阻消耗完为止，电容放电过程才算完毕。

RL 放磁过程

- 已知： $t=0_-$ 时， $i_L(0_-)=I$, 求: $t\geq 0_+$ 时的 $i_L(t), u_L(t)$



$$\begin{cases} i_L(0_+) = i_L(0_-) = I \\ u_L + Ri_L = 0 \\ u_L = L\dfrac{di_L}{dt} \end{cases}$$

$$\boxed{L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0}$$

RC串联:

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 & (t\ge 0_+) \\ u_C(0_+)=U \end{cases}$$

RL并联:

$$\begin{cases} GL\dfrac{di_L}{dt}+i_L=0 \\ i_L(0_+)=I \end{cases} \quad (t\ge 0_+)$$

- 利用对偶关系: $L \rightleftharpoons C, i_L \rightleftharpoons u_C, u_L \rightleftharpoons i_C, G \rightleftharpoons R$

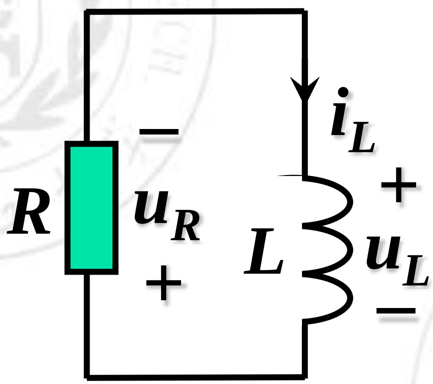
$$\Rightarrow \quad u_C(t)=U\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t\ge 0_+)$$

$$\tau = RC$$

$$\Rightarrow \quad i_L(t)=I\mathrm{e}^{-\frac{t}{GL}} \quad (t\ge 0_+)$$

$$\tau = GL=\frac{L}{R}$$

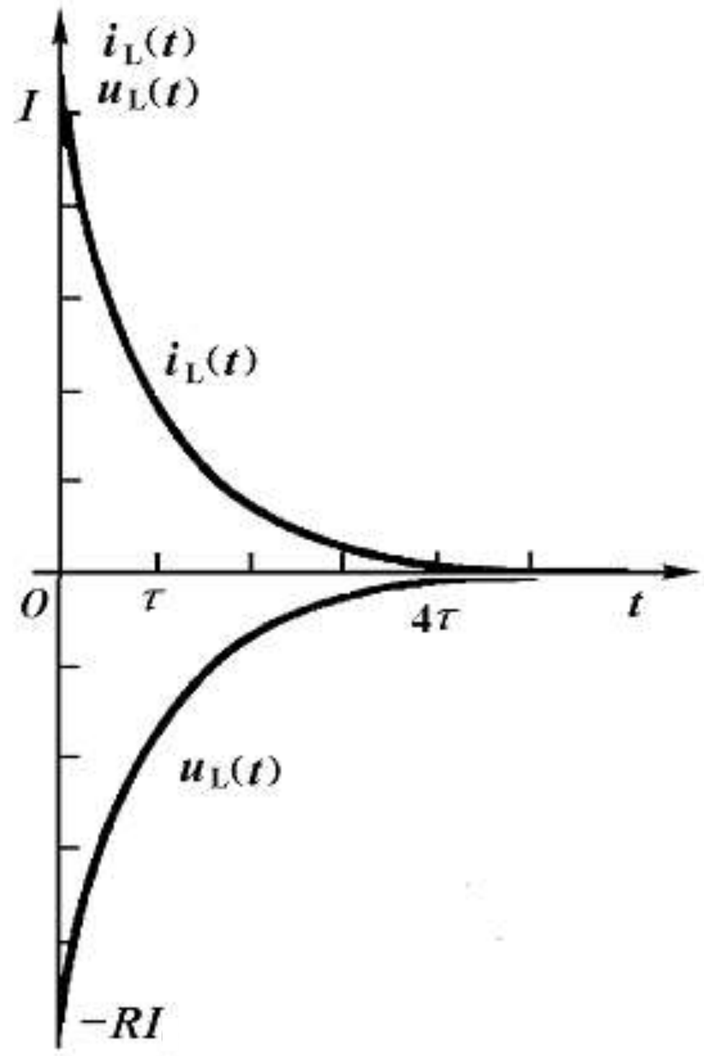
RL电路的放磁过程



$$i_L(t) = Ie^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t > 0)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -RIe^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t > 0)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$



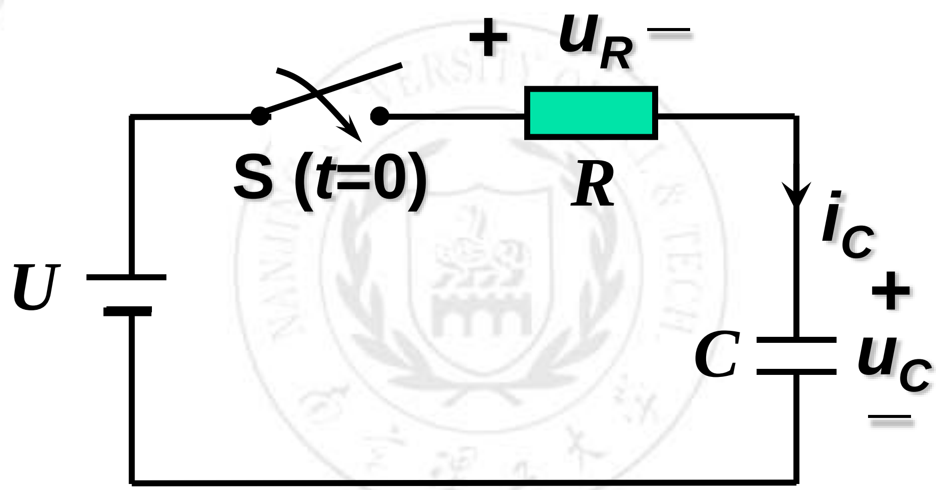
- 综上所述,一阶电路的零输入响应变化模式相同，即:

$$f(t)=f(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0_+)$$

故求一阶电路的零输入响应时，确定出$f(0_+)$和τ以后，就可以唯一地确定响应表达式

RC 充电过程-零状态

- 已知 $u_C(0)=0$，求:$t\geq 0_+$ 时的$u_C(t)$, $i_C(t)$

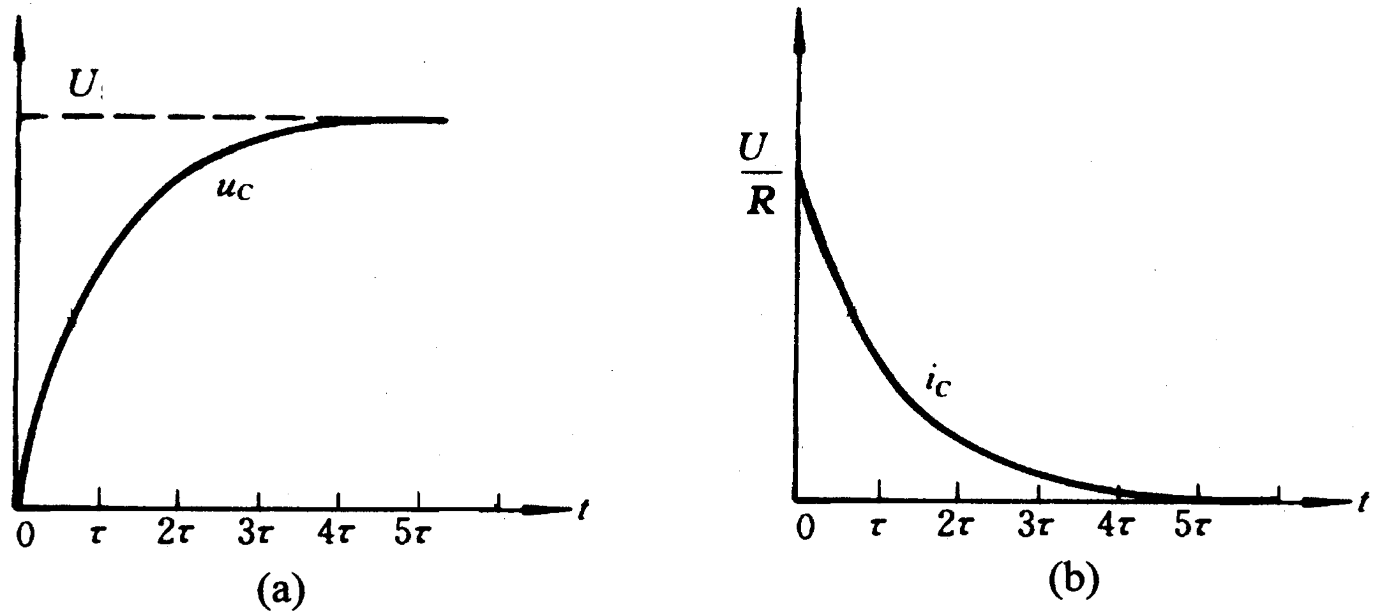


$$u_C(t)=U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})=U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (t\geq 0)$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t>0)$$

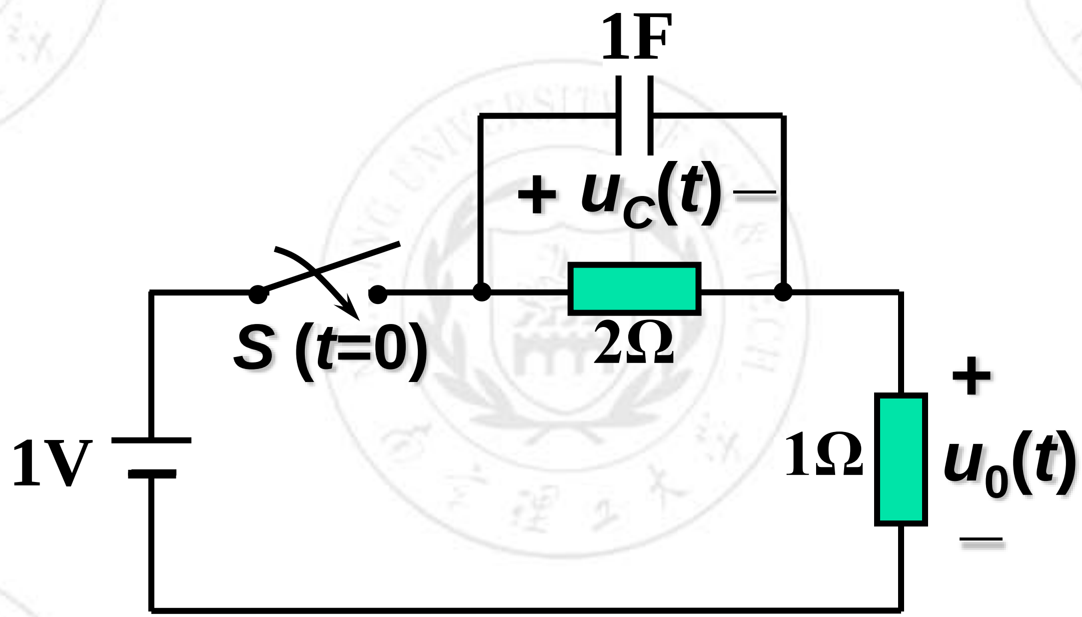
$$u_C(t)=U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})=U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\qquad (t\geq 0)$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\qquad (t>0)$$



*RC*电路的零状态响应曲线

- **例：** 已知$t<0$时，原电路已稳定，$t=0$时合上S，求：$t \geq 0_+$ 时的$u_C(t)$, $u_0(t)$

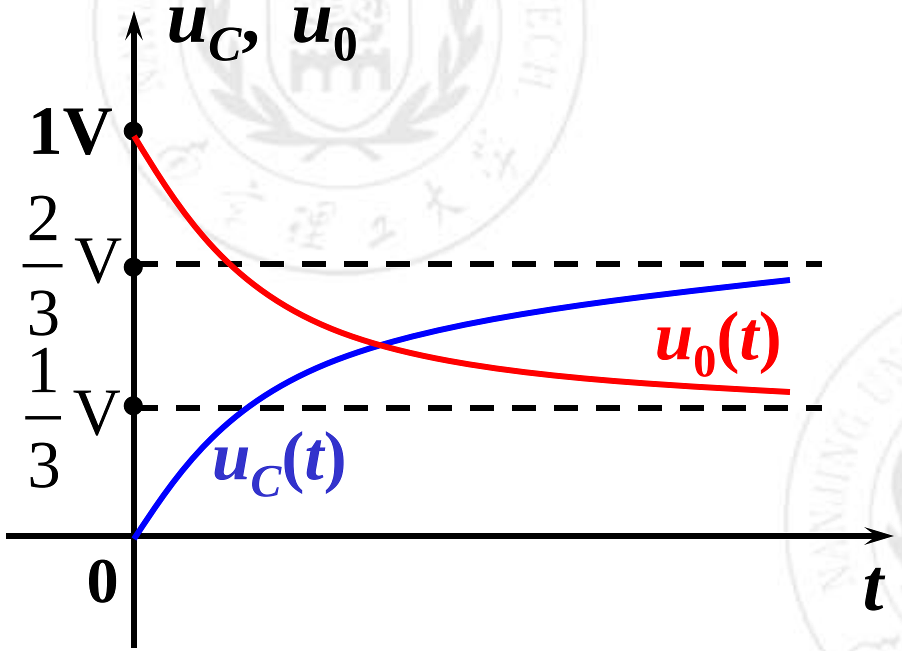


$$u_C(t)=\frac{2}{3}(1-e^{-1.5t})V \quad (t \geq 0_+)$$

$$u_0(t)=1-u_C(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-1.5t}V \quad (t \geq 0_+)$$

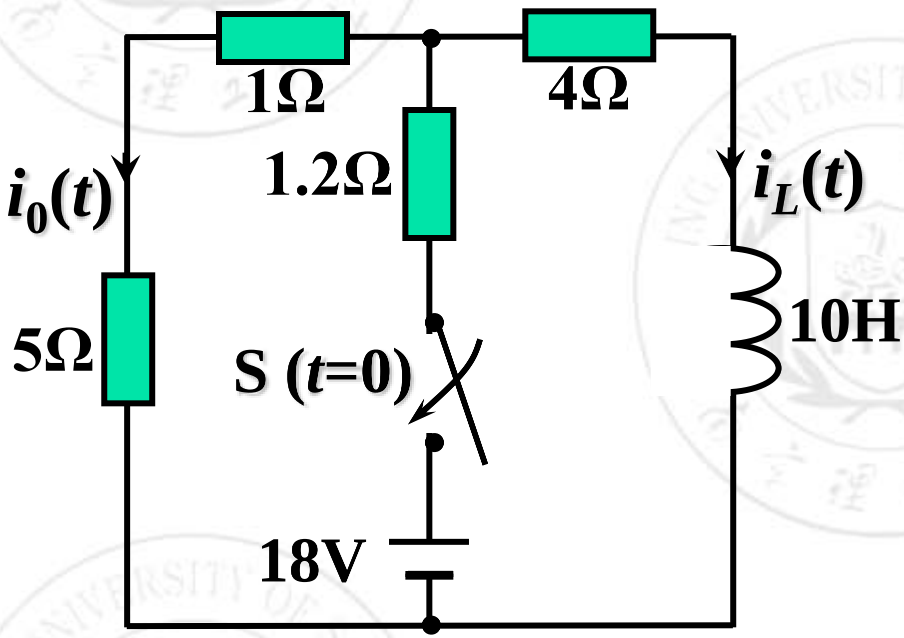
$$u_C(t)=\frac{2}{3}(1-\mathrm{e}^{-1.5t})\mathrm{V}\quad (t\geq 0_+)$$

$$u_0(t)=1-u_C(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-1.5t}\mathrm{V}\quad (t\geq 0_+)$$



- **例：** 已知$t<0$时，原电路已稳定，$t=0$时合上S，

  求：$t\geq 0_+$时的$i_L(t)$, $i_0(t)$

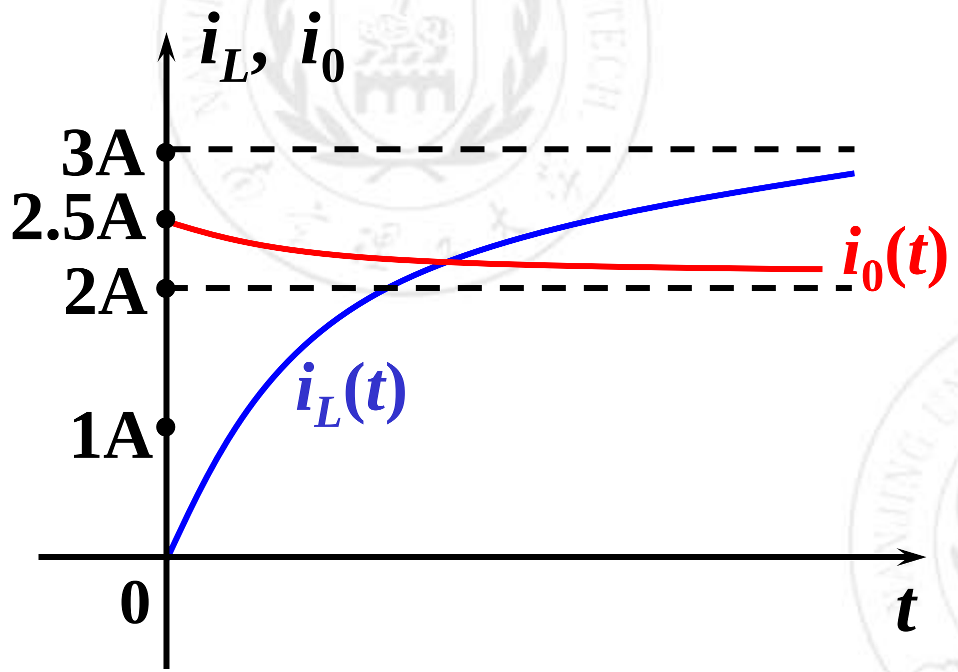


$$i_L(t)=3(1-e^{-\frac{t}{2}})\text{A} \quad (t\geq 0_+)$$

$$i_o(t)=\frac{18-1.2i_L}{7.2}=\frac{4i_L+10\dfrac{di_L}{dt}}{6}=2+0.5e^{-\frac{t}{2}}\text{A} \qquad (t\geq 0_+)$$

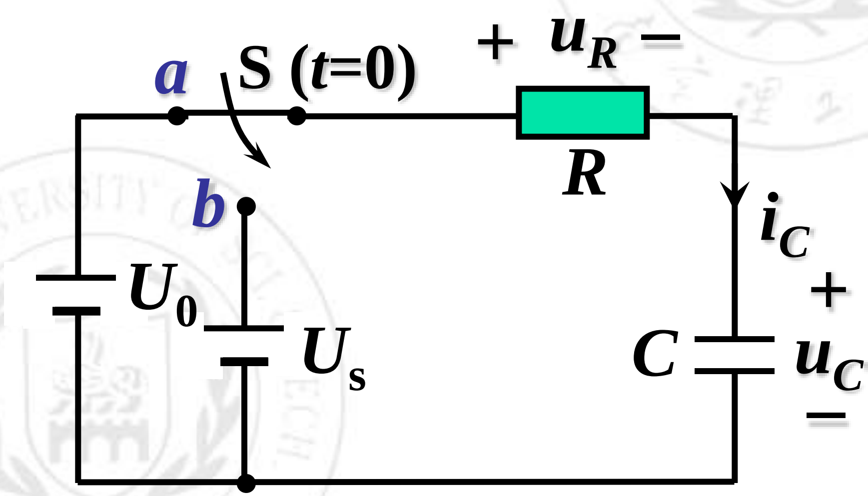
$$i_L(t)=3(1-e^{-\frac{t}{2}})\mathrm{A}\quad (t\ge 0_+)$$

$$i_o(t)=2+0.5e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{A}\quad (t\ge 0_+)$$

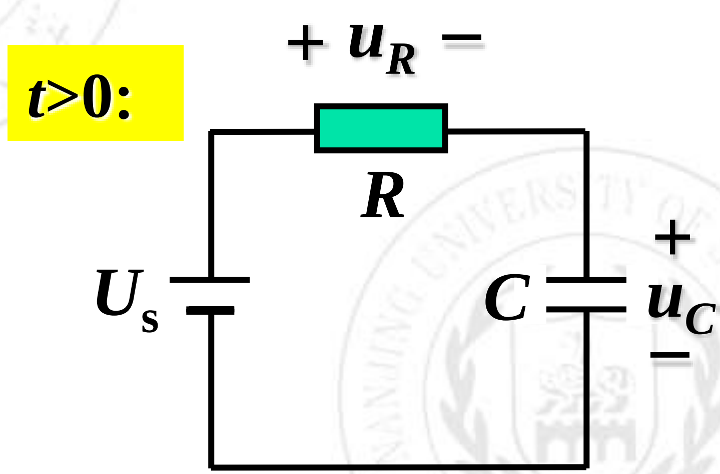


由储能元件的初始储能和独立电源共同引起的响应，称为全响应。下面讨论RC串联电路在直流电压源作用下的全响应。电路如图(a)所示，开关连接在a端为时已经很久，$u_C(0_-)=U_0$。t=0时开关倒向b端。$t>0$ 时的电路如图(b)所示。

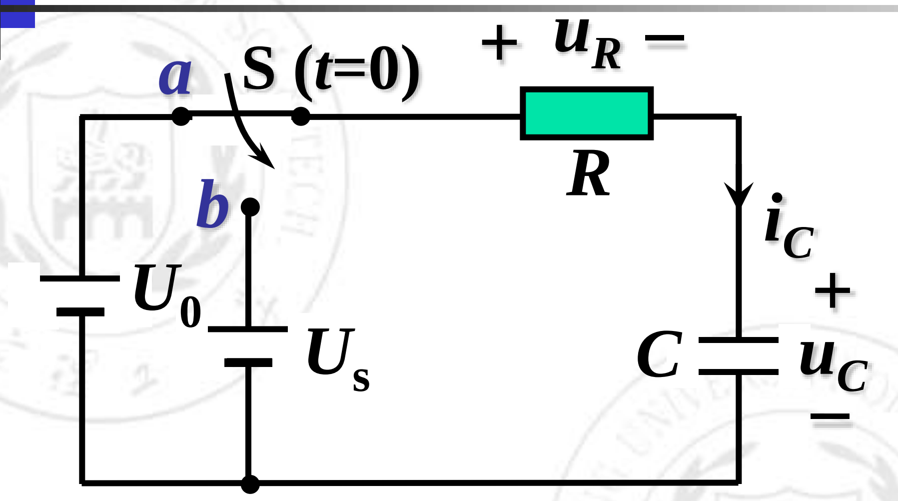
- 已知 $u_C(0)=U_0$， t=0时S由a合向b, 求: $t \geq 0_+$时的$u_C(t)$



图(a)

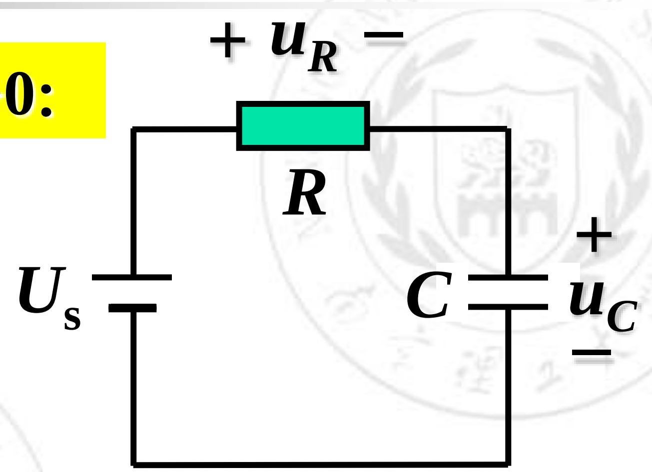


图(b)



图(a)

t>0:



图(b)

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_s$$

$$u_C(0_+)=U_0$$

其解为

$$\boxed{u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0)}$$

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0)$$

全响应＝稳态响应＋瞬态响应

全响应= 强制响应+固有响应

第一项是微分方程的特解$u_{Cp}(t)$，其变化规律一般与输入相同，称为强制响应。在直流输入时，当 $t\to\infty$时，$u_C(t)=u_{Cp}(t)$ 这个强制响应称为直流稳态响应。

第二项是对应微分方程的通解$u_{Ch}(t)$，称为电路的固有响应或自由响应，若时间常数$\tau>0$，固有响应将随时间增长而按指数规律衰减到零，在这种情况下，称它为瞬态响应。

全响应表达式还可以改写为以下形式:

$$u_C(t)=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\qquad(t\geq 0)$$

全响应＝零输入响应＋零状态响应

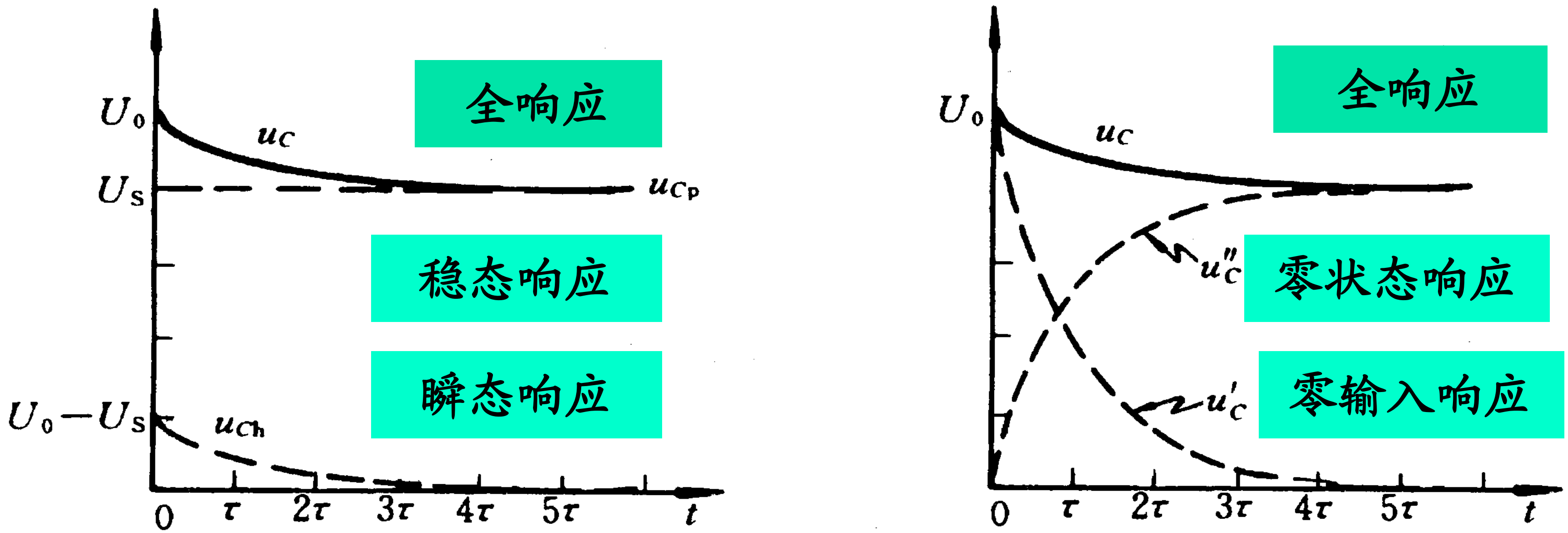
式中第一项为初始状态单独作用引起的零输入响应，第二项为输入(独立电源)单独作用引起的零状态响应。

即：完全响应等于零输入响应与零状态响应之和。

这是线性动态电路的一个基本性质，是响应可以叠加的一种体现。

非零状态

以上两种叠加的关系，可以用波形曲线来表示。



(a) (b)

(a) 全响应分解为固有响应与强制响应之和

(b) 全响应分解为零输入响应与零状态响应之和

全响应表达式:

$$u_C(t)=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\quad(t\geq 0)$$

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0)$$

$$=u_C(\infty)+\left[\left(u_C(0_+)-u_C(\infty)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right]\ (t\geq 0)$$

$$f(t)=f(\infty)+\left[\left(f(0_+)-f(\infty)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right]\ (t\geq 0)$$

三要素法仅适用于直流激励作用下的一阶电路!

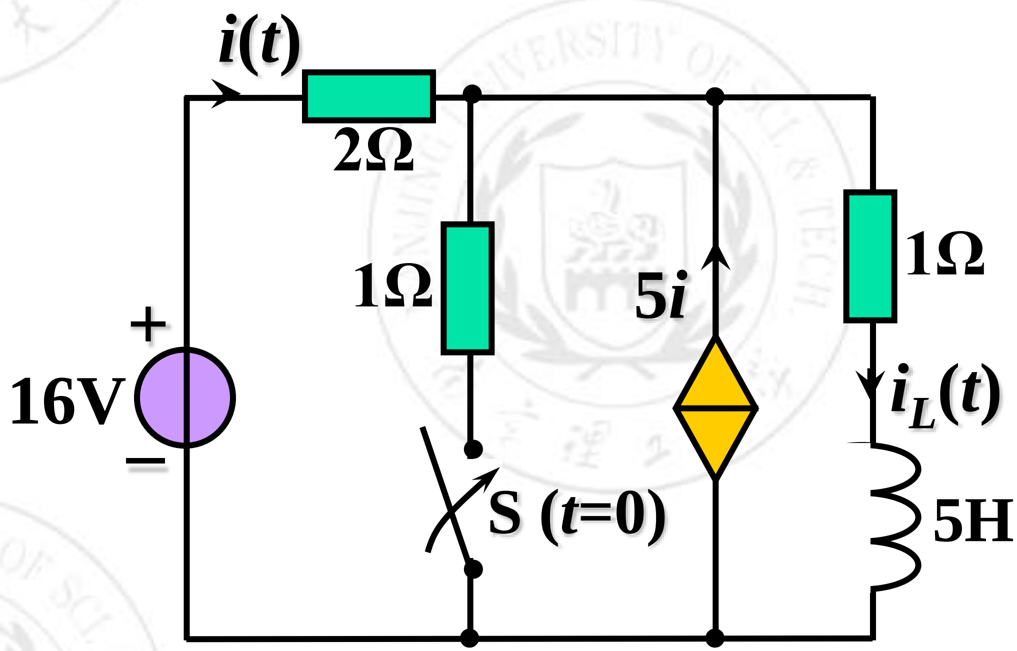
$$f(t)=f(\infty)+\left[f(0_+)-f(\infty)\right]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0_+)$$

- 零输入响应：$u_C(\infty)=0, u_C(t)=u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}\ (t\geq 0_+)$

- 零状态响应：$u_C(0_+)=0, u_C(t)=u_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\ (t\geq 0_+)$

- 注意：零输入响应、零状态响应只对$u_C(t)$和 $i_L(t)$而言！！

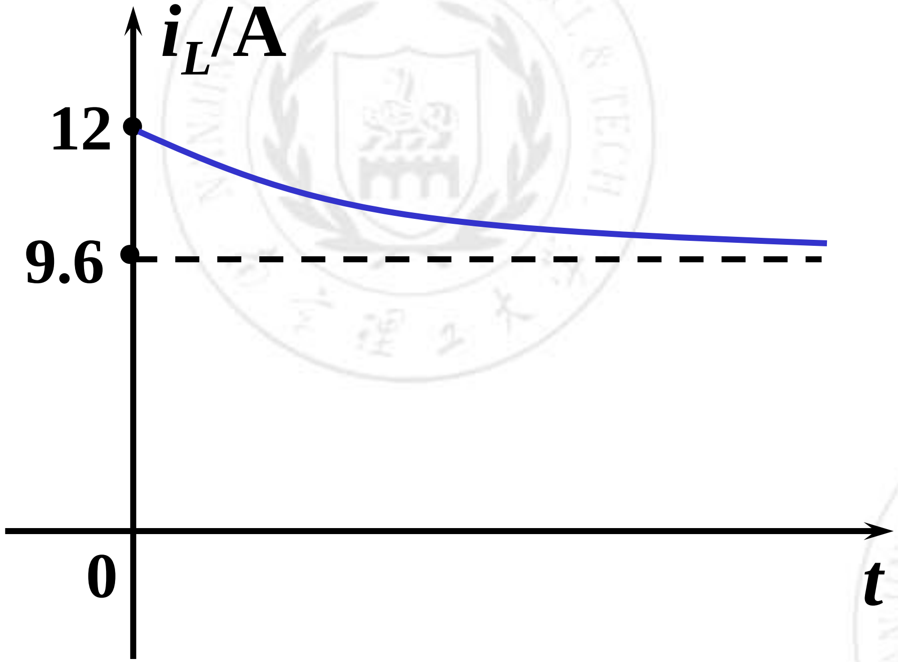
- **例：** 已知$t<0$时，原电路已稳定，$t=0$时合上S，求：$t\geq 0_+$ 时的$i_L(t)$



$$i_L(t)=9.6+(12-9.6)e^{-\frac{t}{4}}=9.6+2.4e^{-\frac{t}{4}}\text{A}\ (t\geq 0_+)$$

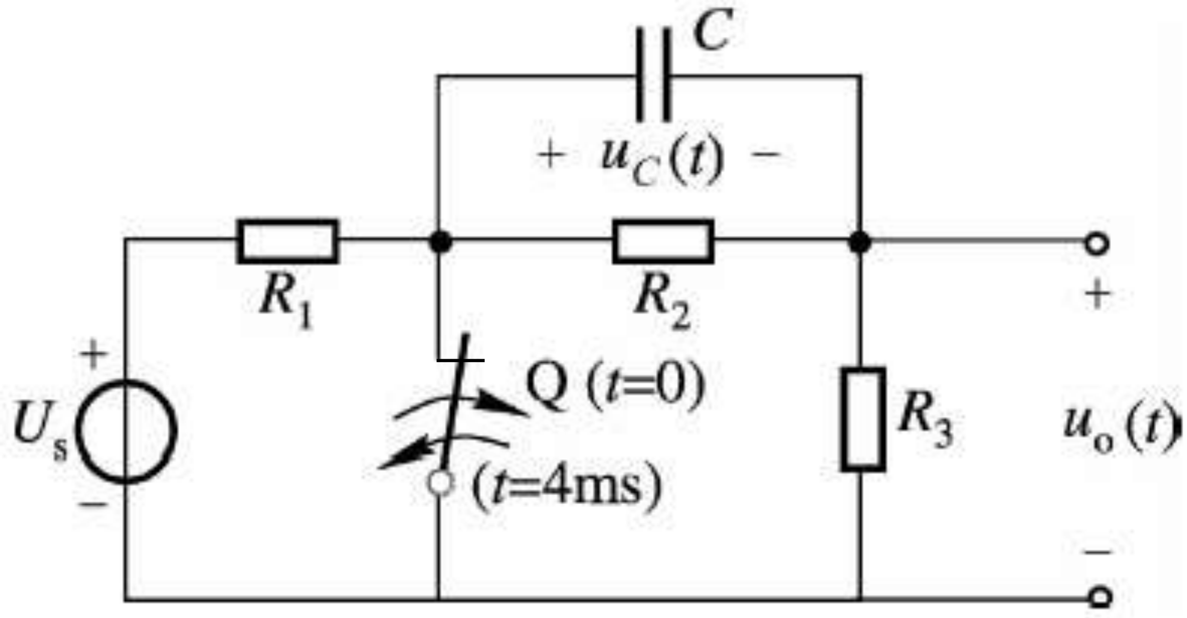
例3

$$i_L(t) = 9.6 + 2.4e^{-\frac{t}{4}}\,\mathrm{A}\ (t \geq 0_+)$$



例4

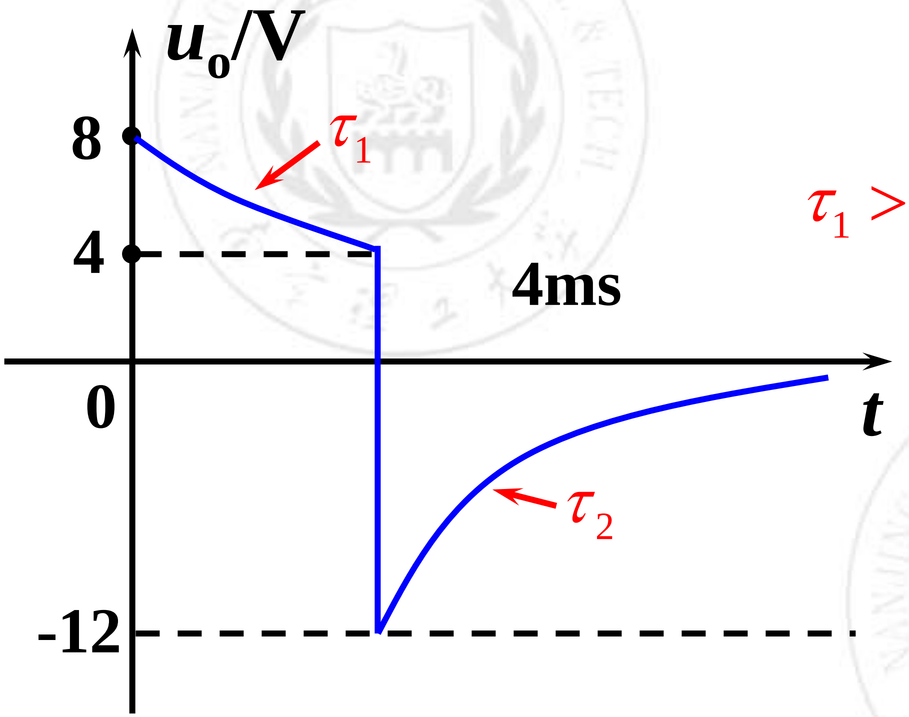
- **例：** 已知U_s=24V, R_1=4kΩ, R_2=6kΩ, R_3=2kΩ, C=1/3μF。t<0时，原电路已稳定，t=0时打开Q，t=4ms时又合上Q。试求t>0时的$u_o(t)$，并定性画出其随时间变化的曲线。



$$u_o(t)=\begin{cases}(4+4e^{-1000t})\ \text{V} & 0<t<4\text{ms}\\ -12e^{-2000(t-4\times10^{-3})}\ \text{V} & t>4\text{ms}\end{cases}$$

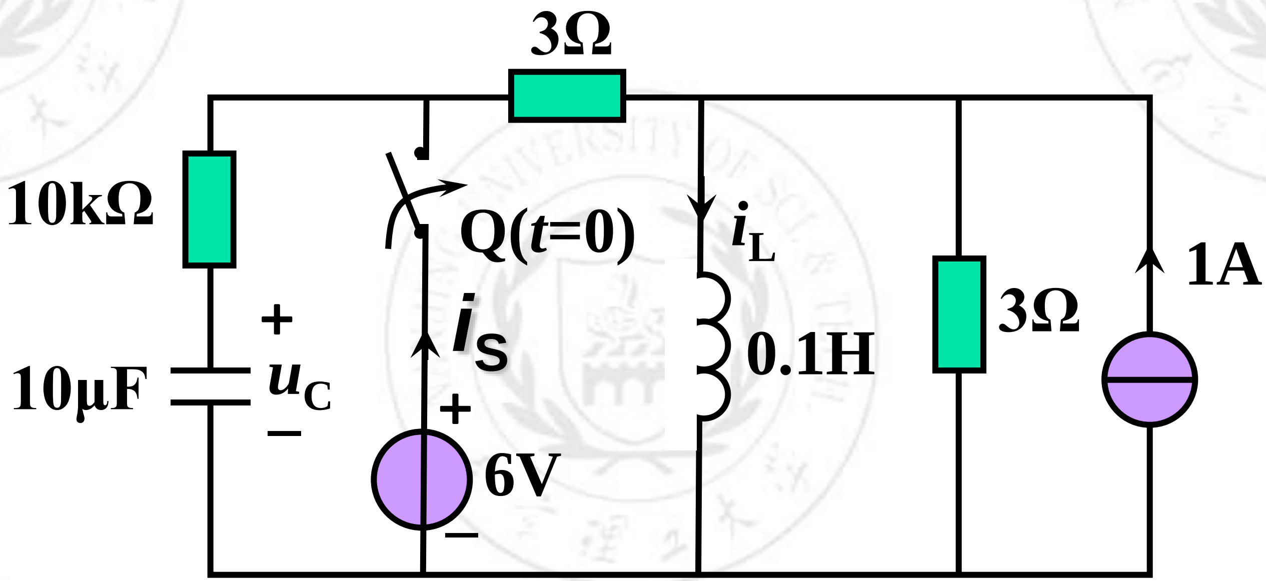
例4

$$u_o(t)=\begin{cases}(4+4e^{-1000t})\ \text{V} & 0<t<4\text{ms}\\ -12e^{-2000(t-4\times10^{-3})}\ \text{V} & t>4\text{ms}\end{cases}$$



$\tau_1 > \tau_2$

- **例：** 已知$t<0$时，原电路已稳定，$t=0$时合上Q，求：$t\geq 0_+$ 时的i_L、u_C和i_S。



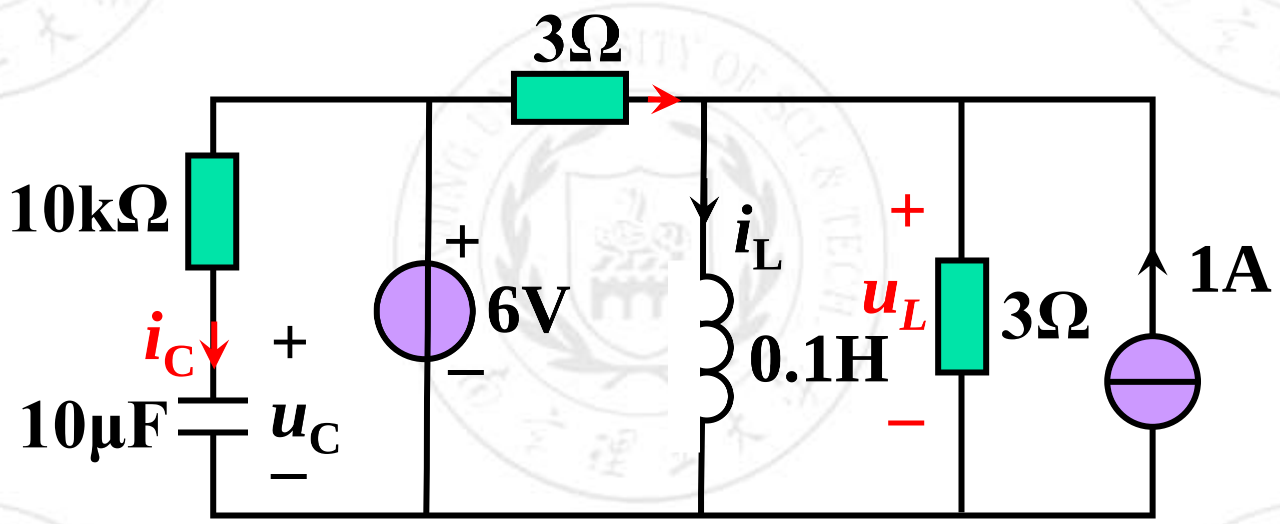
答案

$$u_C(t)=6(1-e^{-10t})\text{V}\quad(t\geq 0_+)$$

$$i_L(t)=3-2e^{-15t}\text{A}\quad(t\geq 0_+)$$

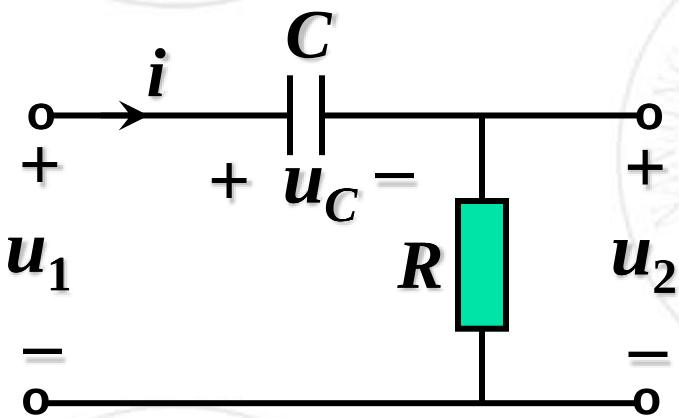
$$i_S(t)=C\frac{du_C}{dt}+i_L+\frac{L}{3}\frac{di_L}{dt}-1=6\times 10^{-5}e^{-10t}+2-e^{-15t}\text{A}\quad(t\geq 0_+)$$

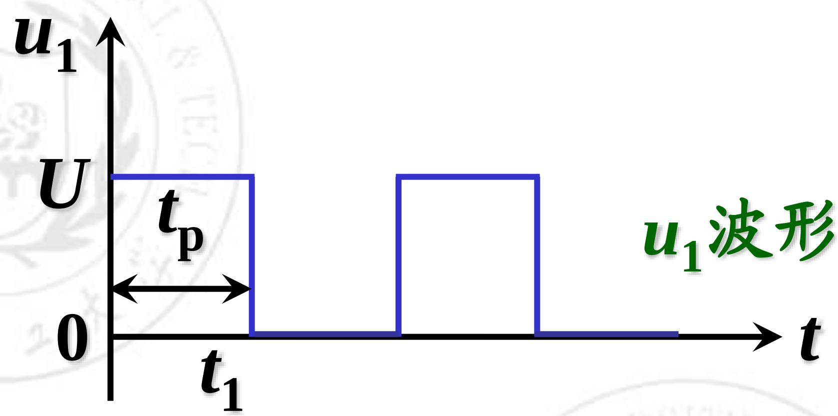
- $t>0$时:



利用电容的充放电作用使输出电压波形与输入电压波形之间形成近似微分或积分关系的电路。

1. RC微分电路



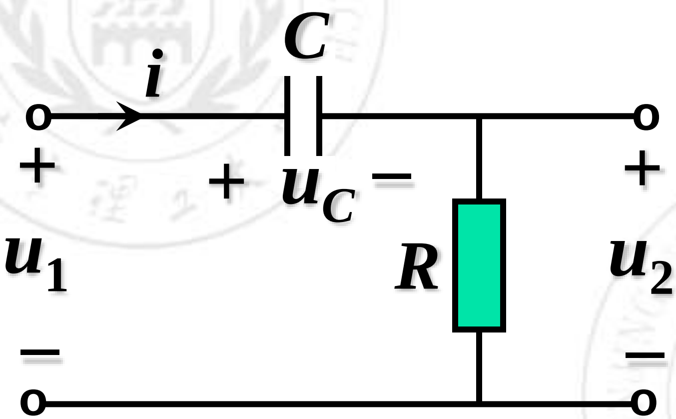


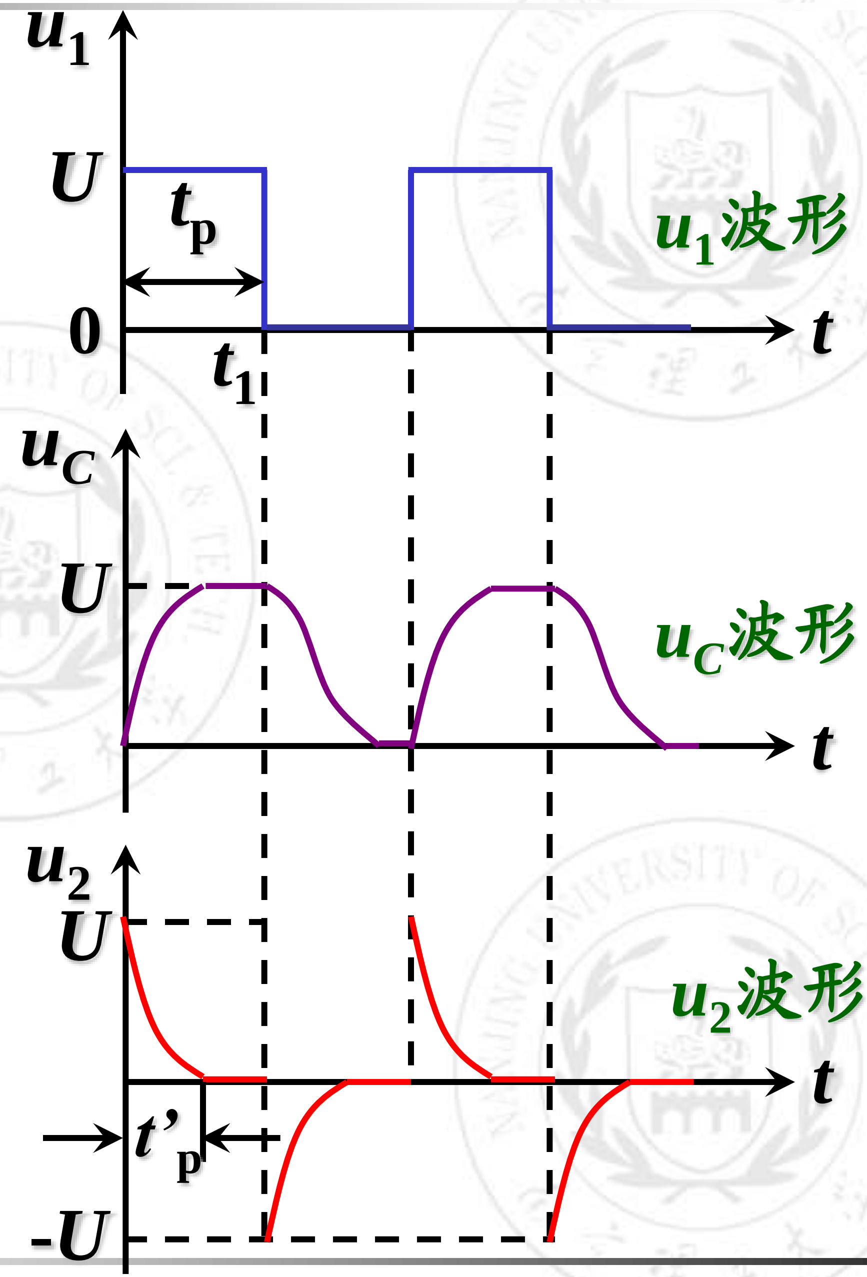
条件：

(1)时间常数$\tau \ll t_p$；

(2)输出电压从电阻两端取出。

1. RC微分电路





$\tau << t_p$， C充、放电很快，

$u_2 << u_C$

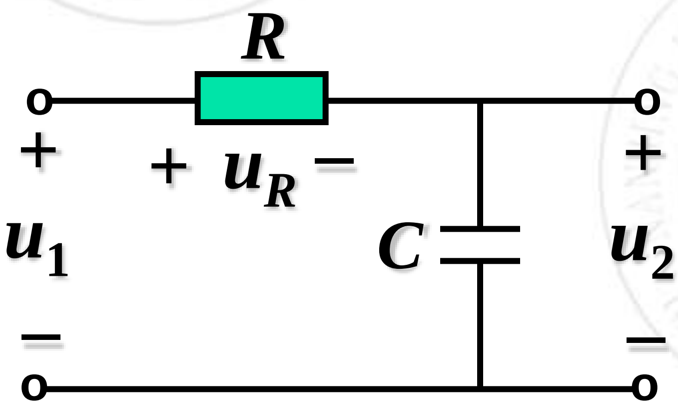
$$u_2 = Ri = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \approx RC\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$$

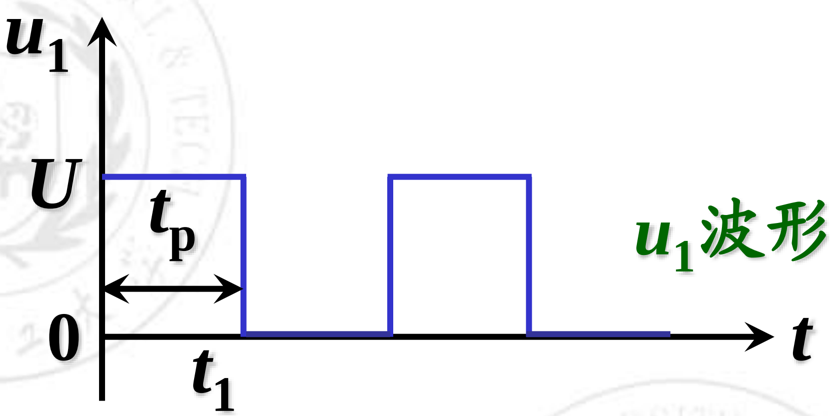
- 输出波形

正负尖脉冲

利用电容的充放电作用使输出电压波形与输入电压波形之间形成近似微分或积分关系的电路。

2. RC积分电路



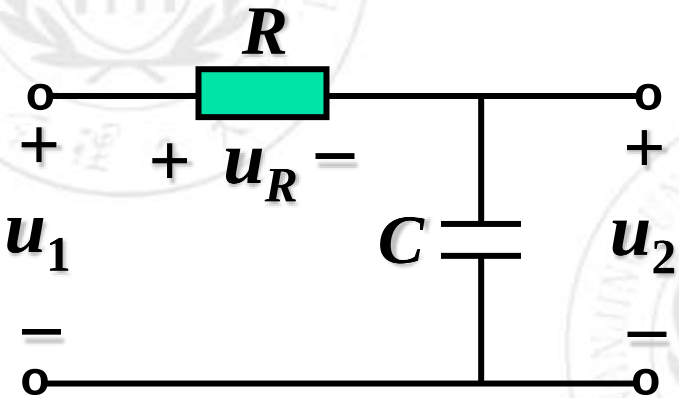


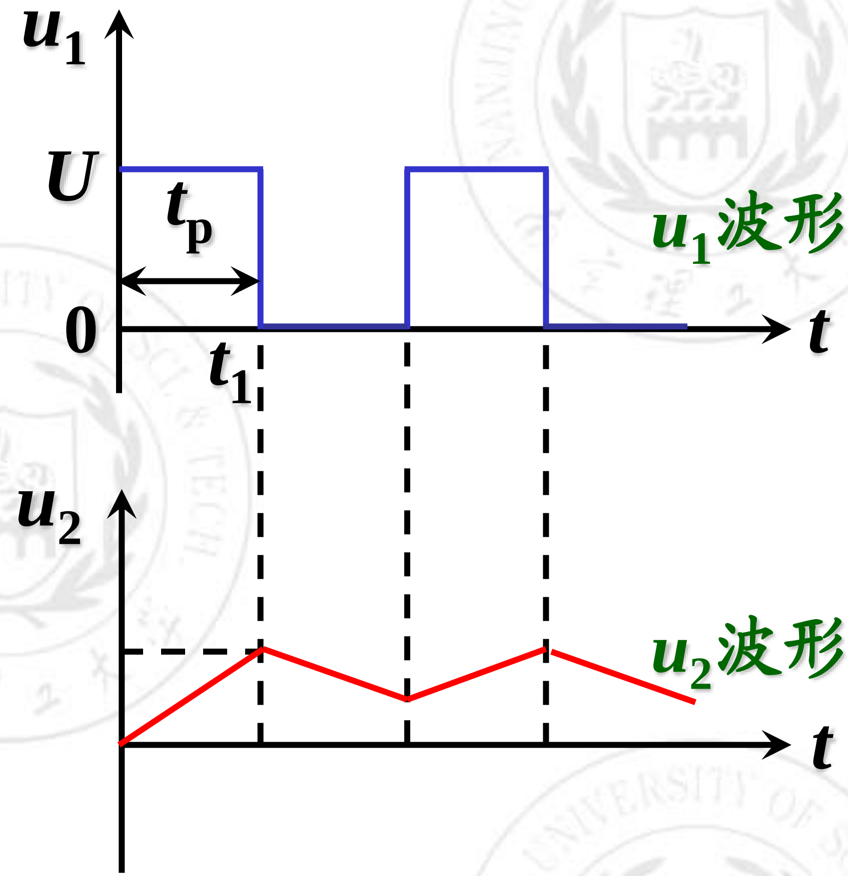
条件：

(1)时间常数τ>> t_p；

(2)输出电压从电容两端取出。

2. RC积分电路





$\tau>>t_p$， C充电缓慢，

$u_2=u_C$远小于u_R

$$u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t \approx \frac{1}{RC}\int u_1\mathrm{d}t$$

- 输出波形

  三角波

本 次 课 重 点

- 一阶电路的三要素法.