Second Degré

1 Mettre une fonction polynomiale du second degré sous la forme canonique

On part d'une fonction sous la forme développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$
On utilise les deux formules suivantes : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. La forme canonique de f est $\boxed{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$

Remarques :

- β peut aussi s'écrire : $\frac{-\Delta}{4a}$
- Toute FP2 admet une forme canonique et une forme développée (certaines, par contre, ne peuvent pas se factoriser).
- Attention aux signes (les deux formules ont un "moins" devant !)

Exercice 1. Mettre les FP2 suivantes sous forme canonique :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 12$
2. $g(x) = 2x^2 - 8x - 6$
3. $h(x) = -x^2 + 5x - 6$

Rappel : une racine d'une fonction f est un antécédent de 0, c'est à dire une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2. A l'aide de la forme canonique, déterminer les racines de la fonction g.

Toute fonction polynome du second degré est représentée par une parabole; Si $a > 0$, elle est "vers le haut", et si $a < 0$, elle est vers le bas.
Le sommet de la parabole est β, atteint en α : ses coordonnées sont donc $(\alpha;\beta)$.

Exercice 3. Pour les trois fonctions f, g, et h, déterminer les coordonnées du sommet de leurs paraboles.

<u>Correction.</u>

Exercice 1.

1. $\alpha = -\frac{-3}{2\times 1} = \frac{3}{2}$ et $\beta = -\frac{(-3)^3 - 4\times 1\times 12}{4\times 1} = -\frac{-39}{4} = \frac{39}{4}$. Donc $f(x) = 1(x-\frac{3}{2})^2 + \frac{39}{4}$, ou en simplifiant : $\boxed{f(x) = (x-\frac{3}{2})^2 + \frac{39}{4}}$.
2. $\alpha = -\frac{-8}{2\times 2} = 2$ et $\beta = -\frac{(-8)^2 - 4\times 2\times(-6)}{4\times 2} = -14$. Donc $\boxed{g(x) = 2(x-2)^2 - 14}$
3. $\alpha = -\frac{5}{2\times(-1)} = \frac{5}{2}$ et $\beta = -\frac{5^2 - 4\times(-1)\times(-6)}{4\times(-1)} = \frac{1}{4}$. Donc $h(x) = -1(x-\frac{5}{2})^2 + \frac{1}{4}$, ou $\boxed{h(x) = -(x-\frac{5}{2})^2 + \frac{1}{4}}$

Exercice 2.
On utilise le principe de résolution d'une équation de la forme $x^2 = a$.
$g(x) = 2(x-2)^2 - 14$, donc l'équation qu'on cherche à résoudre est $2(x-2)^2 - 14 = 0$
$\iff 2(x-2)^2 = 14 \iff (x-2)^2 = 7 \iff x-2 = \sqrt{7}$ ou $x-2 = -\sqrt{7}$ car 7 est positif (d'où les deux possibilités).
$x = 2+\sqrt{7}$ ou $x = 2-\sqrt{7}$ sont les deux solutions de l'équation, et donc les deux racines de la fonction g.

Exercice 3. f : sommet $(\frac{3}{2};\frac{39}{4})$ g : sommet $(2;-14)$ h : sommet $(\frac{5}{2};\frac{1}{4})$

2 Le discriminant et ses conséquences

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

- $\Delta < 0$: la fonction n'a pas de racines et ne se factorise pas.
- $\Delta = 0$: la fonction a une racine $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et se factorise en $a(x - x_0)^2$
- $\Delta > 0$: la fonction a deux racines $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et se factorise en $a(x - x_1)(x - x_2)$

Exercice 1. Déterminer, si elles existent, les racines réelles de $f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 2$
Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 5x = -12$
Exercice 3. Factoriser l'expression $6x^2 + 18x - 20$
Exercice 4. Dresser le tableau de signes de la fonction $f : x \mapsto -2x^2 + 5x - 10$

Solutions.
Exercice 1. $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 49 - 24 = 25$
$\Delta > 0$, donc la fonction a deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-7) + \sqrt{25}}{2 \times 3} = \dfrac{7+5}{6} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-(-7) - \sqrt{25}}{2 \times 3} = \dfrac{7-5}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2. Résoudre $x^2 + 5x = 12$ est équivalent à résoudre $x^2 + 5x + 12 = 0$.
$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 12 = 25 - 48 < 0$, donc l'équation n'a pas de solutions réelles.

Exercice 3. De même, on calcule $\Delta = 18^2 - 4 \times 6 \times (-20) = 804$. $804 > 0$, donc on trouve deux racines :
$x_1 = \dfrac{-18 + \sqrt{804}}{2 \times 6} = \dfrac{-18 + 2\sqrt{201}}{12} = \dfrac{-9 + \sqrt{201}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{-9 - \sqrt{201}}{6}$. Donc $6x^2 + 18x - 20 = 6(x - \dfrac{-9 + \sqrt{201}}{6})(x - \dfrac{-9 - \sqrt{201}}{6})$.

Exercice 4. $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-10) = 35 - 80 = -45$. Δ est négatif, donc la fonction n'a pas de racines.
On étudie maintenant le signe de a : $a = -2$, donc la parabole est "vers le bas" ; comme elle n'a pas de racine, elle "reste" toujours dans le négatif.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-$