Correction Exercices 9 et 13

Exercice 9 .

En utilisant les méthodes de votre choix, résoudre dans $\mathbb{R}$ les solutions des équations suivantes :

a. $x^2-3=0$
b. $2x^2+5=0$
c. $x^2=3x+1$
d. $x-3x^2=0$
e. $12x^2+12x+3=0$
f. $3(x+5)^2=48$
g. $x^2-5x+4=0$
h. $x^3-5x^2+4x=0$
i. $2x^2+9x=5$
j. $x^2=2x+3$
k. $x-\frac{1}{x}=3$
l. $\frac{2x^2+3x-5}{x-1}=0$
m. $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x+2}=-\frac{5}{3}$

Correction

h. $x^3-5x^2+4x=0$

On a du x^3, qu'on ne sait pas gérer ; par contre, on peut factoriser par x.

$x^3-5x^2+4x=0$
$\iff x(x^2-5x+4)=0$
$\iff x=0$ ou $x^2-5x+4=0$

$\Delta=9$

$x_1=\frac{5-9}{2}=-2$, $x_2=\frac{5+9}{2}=7$

Donc $S=\{-2;0;7\}$

i. $2x^2+9x=5$

Il faut mettre l'équation sous la forme ... = 0 pour pouvoir utiliser la formule du discriminant.

$2x^2+9x=5$
$\iff 2x^2+9x-5=0$

$\Delta=81+40=121$

$x_1=\frac{-9-11}{2\times2}=-5$, $x_2=\frac{-9+11}{2\times2}=\frac{1}{2}$

Donc $S=\left\{-5;\frac{1}{2}\right\}$

j. $x^2=2x+3$

$\iff x^2-2x-3=0$ (ou $-x^2+2x+3=0$)

$\Delta=16$

$x_1=\frac{2+4}{2}=3$, et $x_2=\frac{2-4}{2}=-1$

Donc $S=\{-1;2\}$

k. $x-\frac{1}{x}=3$

Lorsqu'on a $\frac{1}{x}$, il faut commencer par le neutraliser (souvent en multipliant par x).

$x-\frac{1}{x}=3$
$\iff x^2-1=3x$ *(multiplication par x)*
$\iff x^2-1-3x=0$
$\iff x^2-3x-1=0$

$\Delta=13$

$x_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Donc $S=\{\frac{3-\sqrt{13}}{2}\ ;\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\}$

l. $\frac{2x^2+3x-5}{x-1}=0$

Rappel : $\frac{a}{b}=0\iff a=0$.
On ne s'intéresse qu'au numérateur.

$\frac{2x^2+3x-5}{x-1}=0$
$\iff 2x^2+3x-5=0$

$\Delta=3^2-4\times2\times(-5)=49$

$x_1=\frac{-3-7}{2\times2}=-\frac{5}{2}$, $x_2=\frac{-3+7}{2\times2}=1$

Mais attention : $x-1$ (le dénominateur) est aussi égal à 0 lorsqu'on calcule pour $x=1$.
Cela donne une forme "indéterminée" : $\frac{0}{0}$. Il faut enlever 1 de la liste des solutions.

Donc $S=\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

m. $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x+2}=-\frac{5}{3}$

On note que 1 et -2 ne peuvent pas faire partie des solutions (divison par zéro). Il faut ensuite "arranger" la forme de l'équation.

$\iff \frac{1(x+2)}{(x-1)(x+2)}-\frac{4(x-1)}{(x+2)(x-1)}=-\frac{5}{3}$
$\iff \frac{1(x+2)-4(x-1)}{(x+2)(x-1)}=-\frac{5}{3}$
$\iff \frac{x+2-4x+4}{(x+2)(x-1)}=-\frac{5}{3}$
$\iff \frac{-3x+6}{(x+2)(x-1)}=\frac{-5}{3}$

$\iff (-3x+6)\times3=-5(x-1)(x+2)$

$\iff -9x+18=-5(x^2+x-2)$
$\iff -9x+18=-5x^2-5x+10$
$\iff 5x^2-4x+8=0$

$\Delta=16-4\times5\times8<0$

L'équation n'a pas de solutions.

Donc $S=\emptyset$

Exercice 13 . Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $x^2-3x+1<0$

b. $2x^2+5x-7\geq 0$

c. $9x^2+12x+4>0$

d. $3x^2-x\leq -1$

e. $-x^2+5x-7\leq 0$

f. $-4x^2+20x\geq 25$

Bonus. $(5x^2+3x-2)(x+1)>0$

Correction

d. $3x^2-x\leq -1$

Il faut toujours revenir à 0, ce qui permet d'étudier le signe.

$3x^2-x\leq -1 \Longleftrightarrow 3x^2-x+1\leq 0$

Résolvons : $3x^2-x+1=0$
$\Delta=-11<0$
L'équation n'a pas de solutions.

De plus, $a>0$: $3x^2-x+1$ est strictement positif pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Donc l'inéquation n'a pas de solutions :
$S=\emptyset$.

e. $-x^2+5x-7\leq 0$

Résolvons $-x^2+5x-7=0$
$\Delta=25-28<0$
L'équation n'a pas de solutions.

De plus, $a=-1<0$, donc $-x^2+5x-7<0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $S=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

f. $-4x^2+20x\geq 25$

$-4x^2+20x\geq 25 \Longleftrightarrow -4x^2+20x-25\geq 0$

Résolvons $-4x^2+20x-25=0$
$\Delta=0$.
L'équation a une solution : $\dfrac{-20}{2\times(-4)}=\dfrac{5}{2}$

De plus, $a<0$. Donc $-4x^2+20x-25$ est négatif, sauf en $\dfrac{5}{2}$.

Donc $S=\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.

$(5x^2+3x-2)(x+1)>0$
On fait un tableau de signes. Pour remplir la ligne $5x^2+3x-2$*, on passe par une factorisation, ou par* Δ *:*

$\Delta=3^2-4\times5\times(-2)=9+40=49$
Donc les racines de $5x^2+3x-2$ sont $\dfrac{-3-7}{2\times5}=-1$ et $\dfrac{-3+7}{2\times5}=\dfrac{4}{10}$
De plus, $a=5>0$, donc $5x^2+3x-2$ est positif, sauf entre ses racines (-1 et $\dfrac{4}{10}$).

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{10}$		$+\infty$
$5x^2+3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0		$+$		
$(5x^2+3x-2)(x+1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de $(5x^2+3x-2)(x+1)>0$ est $\left]\dfrac{4}{10};+\infty\right[$