# Corrections exos modélisation

## Exercice 1.

(1) On augmente une quantité (2000) de 2,5 %, soit un taux de 0,025.

$(1 + 0{,}025) \times 2000 = \boxed{2050 €}$

Dans un an, Jon aura 2050 €.

c'est le principe des intérêts composés.

(2) ⚠ Jon a maintenant 2050 € (et plus 2000 €).

Le calcul est donc : $(1 + 0{,}025) \times 2050 = \boxed{2101{,}25 €}$

Dans deux ans, Jon aura 2101,25 €.

(3a) $u(0) = 2000$ ← ce que Jon a après 0 années écoulées (c'est à dire au début)

$u(1) = 2050$ ← après une année écoulée

$u(2) = 2101{,}25$ ← après deux années écoulées

(3b) $\underbrace{u(3)}_{\text{valeur du compte après 3 ans}} = \underbrace{(1 + 0{,}025)}_{\text{taux d'augmentation}} \times \underbrace{2101{,}25}_{\text{valeur du compte après deux ans}}$

$\simeq \boxed{2153{,}78}$

Interprétation : dans trois ans, Jon aura 2153,78 euros sur son compte en banque.

(3c) $\underbrace{u(n+1)}_{\text{quantité d'argent l'année suivante}} = \underbrace{(1 + 0{,}025)}_{\text{augmentation de } 2{,}5\%} \times \underbrace{u(n)}_{\text{quantité d'argent une année.}}$

En simplifiant : $\boxed{\begin{cases} u(n+1) = 1{,}025 \times u(n) \\ u(0) = 2000 \end{cases}}$

(Augmenter une quantité de 2,5 %, c'est la multiplier par 1,025)

Exercice 2.

1 Helene commence son entrainement en parcourant 10 kilometres la premiere semaine.

Donc $d(1) = 10$ : Hélène parcourt 10 km la première semaine.

2 ... augmente cette distance de 2 kilometres chaque semaine.

Donc $d(n+1) = d(n) + 2$

distance la semaine d'après (n+1)

distance en une semaine (n)

3 On se "débrouille" à la main pour le moment.

| semaines | distance | semaines | distance | semaines | distance |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 9 | 26 | 17 | 42 |
| 2 | 12 | 10 | 28 | 18 | 44 |
| 3 | 14 | 11 | 30 | 19 | 46 |
| 4 | 16 | 12 | 32 | 20 | 48 |
| 5 | 18 | 13 | 34 | 21 | 50 |
| 6 | 20 | 14 | 36 | 22 | 52 |
| 7 | 22 | 15 | 38 | 23 | 54 |
| 8 | 24 | 16 | 40 | 24 | 56 |

Hélène court plus de 55km à partir de la 24ième semaine.

Exercice 3.

① On perd 15% chaque année : c'est une diminution de taux $-0,15$.

- Après un an : $(1-0,15) \times 8 = \boxed{6,8\text{h}}$
- Après deux ans : $(1-0,15) \times 6,8 = \boxed{5,78\text{h}}$.

on perd 15% de ce qu'il reste l'année précédente !

② une année $u(n)$ $\xrightarrow[\times 0,85]{-15\%}$ l'année d'après $u(n+1)$

Donc $\boxed{u(n+1) = 0,85 \times u(n)}$

③ On cherche $u(10)$ : il faut donc calculer $u(1), u(2), \dots, u(9)$ d'abord.

$u(2) = 5,78$ avec la question 1.

$u(3) = 0,85 \times 5,78$
$= 4,913$

$u(4) = 0,85 \times 4,913$
$\simeq 4,176$

$u(5) = 0,85 \times 4,176$
$\simeq 3,55$

$u(6) = 0,85 \times 3,55$
$\simeq 3,017$

$u(7) \simeq 0,85 \times 3,017$
$= 2,565$

$u(8) \simeq 0,85 \times 2,565$
$\simeq 2,18$

$u(9) \simeq 0,85 \times 2,18$
$= 1,853$

$u(10) \simeq 0,85 \times 1,853$
$\simeq \boxed{1,575}$

Donc au bout de 10 ans, la tablette a 1,575h d'autonomie.
↳ soit 1h et 35 minutes

Qu'est-ce qu'on a fait, en fait ?
↳ On a multiplié 8h par 0,85 dix fois : cela correspond au calcul
$8 \times 0,85^{10} \simeq 1,575$.

④ On continue à multiplier par 0,85 (jusqu'à être en dessous de 0,5)
une demi-heure.

11 ans : 1,338h
⋮
16 ans : 0,594h
17 ans : 0,505h
18 ans : $\boxed{0,429\text{h}}$
×60 ↳ soit ~26 minutes.

La batterie a moins d'une demi-heure d'autonomie au bout de 18 ans.

Exercice 4.

L'énoncé dit : * 21 600 € au début
* +4% (soit × 1,04) chaque année

① $\begin{cases} u(0) = 21\,600 \\ u(n+1) = 1{,}04 \times u(n) \end{cases}$

② On calcule les salaires d'année en année jusqu'à avoir un salaire supérieur à 25000 €.

$u(1) = 1{,}04 \times 21600 = 22\,464$ €

$u(2) = 1{,}04 \times 22\,464 = 23\,362{,}56$ €

$u(3) = 1{,}04 \times 23\,362{,}56 = 24\,297{,}06$ €

$u(4) = 1{,}04 \times 24\,297{,}06 = 25\,268{,}94$ €

Le salaire annuel de l'employé dépassera 25000 € dans quatre ans.

Exercice 5.

$u(0) = 40$

L'énoncé dit : * 2019 : 40 000 habitants
* Chaque année :
  - 8% des gens qui habitaient l'année précédente partent
  - 4000 nouveaux habitants arrivent.
* le « n » correspond au nombre d'années depuis 2019

① $u(1)$ correspond au nombre d'habitants en 2019 + 1 = 2020.

les 40 000 habitants de 2019

$u(1) = \underbrace{(1 - 0{,}08)}_{\text{diminution de 8\% (taux : -0,08)}} \times 40 + 4$

les 4000 habitants qui arrivent

$= \boxed{40{,}8}$ Donc il y a 40,8 mille habitants en 2020.

② 2021 = 2019 + 2 : on cherche $u(2)$

La population de 2021 est 40,8. Il faut lui appliquer une diminution de 8% puis lui ajouter les 4 mille nouveaux habitants.

$u(2) = (1 - 0{,}08) \times 40{,}8 + 4 = \boxed{41{,}536}$. Il y a 41 536 habitants en 2021.

③ $u(n+1) = 0{,}92 \times u(n) + 4$ car :
- on multiplie la population de l'année d'avant par 0,92 qui est le coefficient multiplicateur d'une diminution de 8%.
- il y a 4000 nouveaux habitants qui arrivent chaque année. (donc +4)

Exercice 6.

Note : c'est le même principe que l'ex. 5. Cette fois, il faut trouver la formule au lieu de la justifier.

L'énoncé dit :
* 2000kg d'algues au début
* +2% chaque jour
* −100kg chaque soir

① $u(1)$ correspond à la masse d'algues après un jour. En un jour, les algues augmentent de 2% puis le système de filtration en enlève 100kg.

Donc $u(1) = (1 + 0{,}02) \times 2000 - 100$
$= \boxed{1940}$

Après un jour, il y a 1940 kg d'algues

Le second jour, la masse d'algue (1940 kg) augmente de 2%, puis le système de filtration enlève 100 kg.

Donc $u(2) = (1 + 0{,}02) \times 1940 - 100$
$= \boxed{1878{,}8}$

Après deux jours, il y a 1878,8 kg d'algues

② Il se passe la même chose chaque jour : × 1,02 puis −100.

augmentation de 2%

système de filtration

Donc $\begin{cases} \underbrace{u(n+1)}_{\text{le jour d'après}} = 1{,}02 \times \underbrace{u(n)}_{\text{un jour}} - 100 \\ \text{et } u(0) = 2000 \end{cases}$

③ diminuer de moitié, ça veut dire atteindre 1000kg (car 2000kg au début et on prend la moitié).

$u(2) = 1878{,}8$
⋮
$u(14) = 1041{,}56$
$u(15) = 962{,}39$ kg

La masse d'algues met 15 jours à diminuer de moitié.

Exercice 7.

(1) $u_{n+1} = 1{,}5 \times u_n + 2$ et $u_3 = 17$

$$u_2 \xrightarrow{\times 1{,}5,\ +2} u_3 = 17 \xrightarrow{\times 1{,}5,\ +2} u_4$$

- $u_4 = u_{3+1} = 1{,}5 \times u_3 + 2$
  $= 1{,}5 \times 17 + 2$
  $\boxed{= 27{,}5.}$

- $u_3 = u_{2+1} = 1{,}5 \times u_2 + 2$

on a une équation dont $u_2$ est l'inconnue.

$$17 = 1{,}5 \times u_2 + 2$$

$-2$ $\quad$ $-2$

$$15 = 1{,}5 \times u_2$$

$\div 1{,}5$ $\quad$ $\div 1{,}5$

$$\boxed{10 = u_2}$$

(2) $w_{n+1} = 3 \times w_n$ : ça veut dire qu'on multiplie par 3 à chaque terme

$$w_0 \xrightarrow{\times 3} w_1 \xrightarrow{\times 3} w_2 \xrightarrow{\times 3} w_3 = 54.$$

Dans l'autre sens, on divise par 3 : $w_2 = 18 \longrightarrow w_1 = 6 \longrightarrow \boxed{w_0 = 2}$

(3) $t_n = 3n - 10.$

On cherche à résoudre $t_n > 32$

$\iff 3n - 10 > 32$

$+10$

$\iff 3n > 42$

$\div 3$

$\iff n > 14$

Les termes sont supérieurs à 32 à partir de $n = \underline{15}$.

## Exercice 8.

① Au début : 1000 donateurs

Chaque année : • −20% des donateurs d'avant.

• +300 nouveaux donateurs.

$(1-0,2)$

−20% correspond à un taux de −0,2 donc une multiplication par 0,8

$$\begin{cases} u(0) = 1000 \\ u(n+1) = 0,8 \times u(n) + 300 \end{cases}$$

② A la calculatrice :

$u(0) = 1000$

$u(1) = 0,8 \times 1000 + 300$

$= 1100$

$u(2) = 0,8 \times 1100 + 300$

$= 1180$

$u(3) = 0,8 \times 1180 + 300$

$= 1244$

$u(4) = 0,8 \times 1244 + 300$

$= 1295,2$

⋮

$u(15) = 0,8 \times u(14) + 300$

$\simeq 1482$

Il y aura plus de 1480 donateurs dans quinze ans.

## Exercice 9.

① $p_0 = 5000$.

Chaque anneé, cette surface diminue de 20%, puis augmente de $250 m^2$

la propagation des pissenlits — les pissenlits arrachés

• $(1-0,2) \times 5000 = 4000$ : après propagation des pissenlits pendant l'été, il reste $4000 m^2$ de pelouse.

• $4000 + 250 = 4250$ : après l'arrachage des pissenlits en automne, on a $4250 m^2$ de pelouse.

$p(1) = 4250$. Après une anneé, il reste $4250 m^2$ de pelouse.

② $$\begin{cases} p_0 = 5000 \\ p_{n+1} = 0,8 \times p_n + 250 \end{cases}$$

③ A la calculatrice : jamais

Exercice 10.

- Au début : 8000 €
- Chaque année :
  - augmentation de 3,8% (soit une multiplication par $1 + 0{,}038 = 1{,}038$)
  - $-76$€ de frais de gestion.

Donc : $\begin{cases} C_0 = 8000 \\ C_{n+1} = 1{,}038\, C_n - 76. \end{cases}$

⚠ Pourquoi pas $C_{n+1} = 1{,}038(C_n - 76)$?

Car les intérêts sont comptés sur le capital de l'année précédente, __puis__ les frais de gestion sont déduits.

↳ et aussi parce que les gens vivent cher chez leur banquier : faites les 2 simulations & regardez la différence !