Exercices : Les classiques

Dérivation et suites

Exercice 1.

Le 1er Janvier 2024, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que, dans les années à venir, 10% des employés partiront à la retraite chaque année. Pour ajuster les effectifs à ses besoins, l'entreprise prévoit d'embaucher 100 personnes par an.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'employés au début de l'année $2024+n$.

1. Déterminer les 3 premiers termes de la suite u. Est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On définit la suite v par $v_n = u_n - 1000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que v est géométrique.
4. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0{,}9^n$. En déduire le sens de variation de u.
6. Au 1er janvier 2024, l'entreprise compte un sureffectif de 300 personnes. Dans combien de temps l'entreprise ne sera-t-elle plus en sureffectif ?

Exercice 2.

Méthode similaire

: Antilles Guyane Septembre 2011 :

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.

Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5% des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.

Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.

La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation.

On note U_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $U_0 = 80$.

Pour tout entier naturel n, on note n u le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de n semaines.

1. Montrer que $U_1 = 86$.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = U_n - 200$.
   a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n = 200 - 120 \times 0{,}95^n$.

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a: $U_{n+1} - U_n = 6 \times 0{,}95^n$.
   b. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit u la suite définie par $u_n = a^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite u est géométrique.
2. Déterminer pour quelle(s) valeurs de a la suite u est croissante.
3. Sans justifier, donner une valeur de a pour laquelle u est constante.

Exercice 4.

Calculer les sommes :

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$
2. $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{27}$
3. $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 83$
4. $71 + 65 + 59 + \dots - 43$
5. $121 + 122 + 123 + \dots + 201$
6. $1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 531441$
7. $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \dots + 2^6$
8. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \dots + \frac{20}{3}$

Exercice 5.

Calculer les six premiers termes de la suite u définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exercice 6.

Soit u géométrique de 1er terme u_0 et de raison q.

A l'aide de la formule $1 + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, démontrer que la somme des $n+1$ premiers termes de u est égale à $\frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}$

Exercice 1.

① $u_0 = 1500$ (nb d'employés au début 2024)

$u_1 = 0{,}9 \times 1500 + 100$ ← 100 employés embauchés.

10% des employés partent ⇒ diminution de 10% ⇒ coeff $= 1 - \frac{10}{100} = 0{,}9$

$= 1450$ et $u_2 = 0{,}9 \times 1450 + 100 = 1405$

$1500 \xrightarrow{-50} 1450 \xrightarrow{-45} 1405$: u n'est pas arithmétique

$1500 \xrightarrow{\sim 0{,}967} 1450 \xrightarrow{\sim 0{,}968} 1405$: u n'est pas géométrique.

$\left(= \frac{1450}{1500}\right)$ $\left(= \frac{1405}{1450}\right)$

② $\boxed{u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100}$

③ $v_n = u_n - 1000$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 = 0{,}9u_n + 100 - 1000$ ← pour la question 2.

$= 0{,}9u_n - 900$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{0{,}9u_n - 900}{u_n - 1000} = \frac{0{,}9\left(u_n - \frac{900}{0{,}9}\right)}{u_n - 1000} = \frac{0{,}9 \times (u_n - 1000)}{u_n - 1000} = 0{,}9$ ← classique !

Donc v est géométrique de raison 0,9.

④ v est géométrique avec $q = 0{,}9$ et $v_0 = u_0 - 1000 = 1500 - 1000 = 500$.

Donc $\boxed{v_n = 500 \times 0{,}9^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

De plus, $v_n = u_n - 1000 \Leftrightarrow u_n = v_n + 1000$

Donc $\boxed{u_n = 500 \times 0{,}9^n + 1000}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

⑤ $u_{n+1} - u_n$

$= 500 \times 0{,}9^{n+1} + 1000 - (500 \times 0{,}9^n + 1000)$

$= 500 \times 0{,}9^{n+1} - 500 \times 0{,}9^n$

$= 500 \times 0{,}9^n (0{,}9 - 1)$

$= 500 \times 0{,}9^n \times (-0{,}1)$

$= -50 \times 0{,}9^n$

Signe de $-50 \times 0{,}9^n$:
$-50 < 0$
$0{,}9 > 0$ donc $0{,}9^n > 0$
⊖ × ⊕ donne ⊖

Donc $-50 \times 0{,}9^n < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc la suite u est décroissante.

⑥ $1500 - 300 = 1200$

La question devient : dans combien d'années atteint-on 1200 personnes ? ← À la calculatrice.

Exercice 2 (incomplète).

① $-5\% \Leftrightarrow \times 0{,}95$

$u_1 = 0{,}95 \times 80 + 10 = 86$.

② $\boxed{u_{n+1} = 0{,}95 \times u_n + 10}$

③ $v_n = u_n - 200$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{0{,}95u_n + 10 - 200}{u_n - 200} = \frac{0{,}95u_n - 190}{u_n - 200} = \frac{0{,}95(u_n - 200)}{u_n - 200} = 0{,}95$ ✓

car $\frac{200}{95} = 190$

$\Rightarrow \boxed{v_n = -120 \times 0{,}95^n}$

$\Rightarrow \boxed{u_n = -120 \times 0{,}95^n + 200}$

④ $u_{n+1} - u_n$

$= -120 \times 0{,}95^{n+1} + 120 \times 0{,}95^n$

$= -120 \times 0{,}95^n (0{,}95 - 1)$

$= -120 \times 0{,}95^n \times (-0{,}05)$

$= 6 \times 0{,}95^n > 0$ → $120 \times 0{,}05 = 6$

(u_n) croissante

Exercice 3.

$u_n = a^{n+1} = a \times a^n$. ① $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+2}}{a^{n+1}} = a$ ⇒ (u_n) géométrique de raison a. $(u_0 = a^1 = a)$

② suite géométrique croissante $\Leftrightarrow$ 2 cas :
- $u_0 > 0$ et $q > 1$
- $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$

Ici, $u_0 = a$ et $q = a$, donc les cas sont :
- $a > 0$ et $a > 1 \Leftrightarrow \boxed{a > 1}$
- $a < 0$ et $0 < a < 1$ impossible

Donc u est croissante ssi $a > 1$.

③ $a = 1$ ou $a = 0$ ← ne pas oublier ces deux cas particuliers !

Exercice 4.

① $q = \frac{1}{2}$.

$1 + q + \dots + q^{10} = \frac{1-q^{11}}{1-q}$

$\Rightarrow q + \dots + q^{10} = \frac{1-q^{11}}{1-q} - 1$

Donc $\boxed{\frac{1-0{,}5^{11}}{1-0{,}5} - 1}$

② $q = 5$ donc : $\boxed{\frac{1-5^{28}}{1-5}}$

③ $r = +4$

nb termes × $\frac{1^{er} + dernier}{2}$

$83 = 3 + 4 \times 20$ donc 21 termes ← $u_0 = 3$, $u_{20} = 83$ } 21 termes

$\Rightarrow 21 \times \frac{3+83}{2} = \boxed{21 \times 43}$

④ $r = -6$

$-43 = 71 + (-6) \times 19$ donc 20 termes

$\Rightarrow \boxed{20 \times \frac{71-43}{2}}$

⑤ $\boxed{81 \times \frac{121+201}{2}}$

⑥ $531441 = 3^{12}$

$\boxed{\frac{1-3^{13}}{1-3}}$

⑦ $q = 2$: $1 + \dots + 2^6 = \frac{1-2^7}{1-2}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$ $\Rightarrow \boxed{\frac{1-2^7}{-1} + \frac{7}{8}}$

⑧ $u_0 = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{3}$, $u_{19} = \frac{20}{3}$ $\Rightarrow \frac{20(1/3 + 20/3)}{2} = \boxed{\frac{210}{3}}$

Exercice 5.

$u_0 = 0$

$u_1 = 1$

$u_2 = u_0 + 2 \times u_1 = 0 + 2 \times 1 = 2$

$u_3 = u_1 + 2 \times u_2 = 1 + 2 \times 2 = 5$

$u_4 = u_2 + 2 \times u_3 = 2 + 2 \times 5 = 12$

$u_5 = u_3 + 2 \times u_4 = 5 + 2 \times 12 = 29$

Exercice 6.

$\underbrace{u_0 + \dots + u_n}_{n+1 \text{ premiers termes}} = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^n$

$= u_0 \times (1 + q + \dots + q^n)$

$= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$= \frac{u_0 \times (1 - q^{n+1})}{1-q}$

$= \frac{u_0 - u_0 \times q^{n+1}}{1-q}$

$= \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}$ ✓

Exercice 1. f est une fonction polynômiale du second degré telle que $f'(0)=-3$ et la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 soit $y=x-1$. Déterminer l'expression de f.

Exercice 2. Même question avec $f(0)=3$, $f'(6)=7$ et $f'(2)=-1$.

Exercice 3. Même question avec $f(5)=f(2)=0$ et $f'(1)=-15$

Exercice 4. Même question avec $f'(2)=0$, $f(2)=5$ et $f(0)=1$

Exercice 5. Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{4x^2+4x+5}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 6. Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne entre 0 et 45 kg de truffes par semaine pendant sa période de production. On désigne par x le nombre de truffes traitées chaque semaine et par $C(x)$ le coût de production total en euros. Chaque kilogramme de truffe conditionné est vendu 450 €.

On admet que f est définie sur $]0;45]$ par $f(x)=x^3-60x^2+975x$

① Exprimer $B(x)$ le bénéfice réalisé en fonction de x.

② Montrer que $\forall x\in]0;45]$, $B'(x)=-3(x-15)(x-35)$.

③ Pour quelle quantité de truffes le bénéfice est-il maximal

④ Pour quelle quantité de truffes le producteur fait-il un bénéfice ?

Exercice 7. ① Soit n un entier positif. Soit $\varphi : x\longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Montrer que $\varphi'(x)=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$

② Dériver $x\longmapsto \dfrac{1}{x^2}$

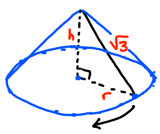
Exercice 8. Ecrire la négation des propositions suivantes :

① Pour tout réel x, $f(x)\leqslant 2$

② Il existe un réel x tel que $f'(x)<0$.

Exercice 9. On obtient un cône de révolution en faisant tourner un triangle rectangle d'hypothénuse $\sqrt{3}$ mètres autour d'un des côtés de l'angle droit.

① Parmi tous les triangles rectangles d'hypothénuse $\sqrt{3}$ m, déterminer les longueurs des deux autres côtés pour lesquels le volume du cône est maximal.



$V_{cône}=\dfrac{\pi r^2\times h}{3}$

② Calculer ce volume maximal.

Exercice 10. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

Pour tout réel a, l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est : $y=(-2a+1)x+a^2+6$

Montrer que f admet un maximum en un nombre réel que l'on précisera.

Exercice 10.

<u>Rappel</u> : extremum en $a \Leftrightarrow f'(a)=0$ ⊕ la dérivée change de signe

maximum en $a \Leftrightarrow f'(a)=0$, positive avant, négative après

	a	
+	0	−
↗		↘

⊕ $f'(a)=$ coeff. dir de la tangente en a
$=-2a+1$

$-2a+1=0$
$\Leftrightarrow -2a=-1$
$\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$

a	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(a)$	+	0	−
$f(a)$	↗		↘

Donc f admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$.

La tangente au pt d'abscisse $1/2$ a pour équation : $y=6{,}25$ (horizontale, logique)

On en déduit aussi que ce maximum est 6,25.

Exercice 1.

on cherche donc a, b, et c.

- f 2nd degré $\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c$
- $f'(0)=-3$ il faut dériver : $f'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(0)=-3 \Leftrightarrow 2a\times 0+b=-3 \Leftrightarrow b=-3$
- $y=x-1$ équation tangente : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$
$=\underbrace{f'(1)x}_{=1}\underbrace{-f'(1).1+f(1)}_{=-1}$ Donc $f'(1)=1$, $f(1)=0$

* $f'(1)=1$
$\Leftrightarrow 2a\times 1+b=1$
$\Leftrightarrow 2a-3=1$
$\Leftrightarrow 2a=4$
$\Leftrightarrow a=2$

* $f(1)=0$
Avec les 2 infos, $f(x)=2x^2-3x+c$. Donc $f(1)=2-3+c=-1+c$.
Or, $f(1)=0$. Donc $-1+c=0$
$\Leftrightarrow c=1$

Donc $f(x)=2x^2-3x+1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Exercice 2.

résolution d'un système.

- $f(0)=3 \Rightarrow c=3$
- $f'(x)=2ax+b$

$f'(6)=7 \Leftrightarrow 2a\times 6+b=7 \Leftrightarrow 12a+b=7$
$f'(2)=-1 \Leftrightarrow 2a\times 2+b=-1 \Leftrightarrow 4a+b=-1$
$8a=8 \Leftrightarrow a=1$
$4\times 1+b=-1$
$\Leftrightarrow b=-5$

Donc $f : x\longmapsto x^2-5x+3$

Exercice 3.

PENSER À LA FORME FACTORISÉE ! ← Quand les racines sont données par l'énoncé.

$f(2)=f(5)=0 \Leftrightarrow f : x\longmapsto a(x-5)(x-2)=ax^2-7ax+10a$ et $f'(x)=2ax-7a$

⊕ $f'(1)=-15 \Leftrightarrow 2a-7a=-15$
$\Leftrightarrow a=3$

Donc $f(x)=3(x-5)(x-2)$

Exercice 4

Quand le max ou min est donné par l'énoncé.

PENSER A LA FORME CANONIQUE

- $f'(2)=0 \Leftrightarrow$ tangente en $x=2$ horizontale $\Leftrightarrow \alpha=2$
- $f(2)=5 \Leftrightarrow f(\alpha)=5 \Leftrightarrow \beta=5$

Donc $f : x\longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$
$=a(x-2)^2+5$

De plus, $f(0)=1$
soit $a(-2)^2+5=1 \Leftrightarrow 4a+5=1 \Leftrightarrow a=-1$

Exercice 5.

$f(x)=\dfrac{2x+1}{4x^2+4x+5}$

$4x^2-4x+5=0$
$\Delta=16-80<0$
Pas de solutions
$\Rightarrow \boxed{\mathcal{D}_f=\mathbb{R}}$

$u : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto 2x+1$ donc $u' : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto 2$

$v : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto 4x^2+4x+5$ et $v' : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto 8x+4$

Calculons $f'(x)$

$f'(x)=\dfrac{2(4x^2+4x+5)-(8x+4)(2x+1)}{(4x^2+4x+5)^2}$

$=\dfrac{8x^2+8x+10-16x^2-16x-4}{(4x^2+4x+5)^2}$

$=\dfrac{-8x^2-8x+6}{(4x^2+4x+5)^2}$

Pourquoi ne pas développer le dénominateur ? Car on va devoir faire une étude de signe, et c'est plus simple lorsqu'on a une forme factorisée.

et $\mathcal{D}_{f'}=\mathbb{R}$

$-8x^2-8x+6$
$\Delta=64+8\times 4\times 6$
$=256$
$x_1=\dfrac{8-16}{-16}=\dfrac{1}{2}$
$x_2=\dfrac{8+16}{-16}=\dfrac{-3}{2}$

comme $a=-8$

x	$-\infty$	$-3/2$	$1/2$	$+\infty$
$-8x^2-8x+6$	−	0 +	0	−

Comme vu ci-contre, $4x^2+4x+5\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, donc $(4x^2+4x+5)^2>0$

x	$-\infty$	$-3/2$	$1/2$	$+\infty$
$-8x^2-8x+6$	−	0 +	0	−
$(4x^2+4x+5)^2$		+		
$f'(x)$	−	0 +	0	−

Donc :

x	$-\infty$	$-3/2$	$1/2$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-1/4$ ↗	$1/4$	↘

$f(-3/2)=\dfrac{-2}{9-6+5}=-1/4$

$f(1/2)=\dfrac{2}{1+2+5}=1/4$

Exercice 6.

① Bénéfice = Profits − Coûts
$B(x)=450x-(x^3-60x^2+975x)$
$=-x^3+60x^2-525x$

② $B'(x)=-3x^2+120x-525$

Comment montrer l'égalité ?

* Avec Δ et la forme factorisée :
$\Delta=120^2-4\times 3\times 525=8100$
$x_{1,2}=\dfrac{-120\pm 90}{-6}=20\pm 15$
Donc $x_1=5$ et $x_2=35$. De plus, $a=-3$
Donc $B'(x)=-3(x-5)(x-35)$ ✓

* En développant :
$-3(x-5)(x-35)$
$=-3(x^2-40x+175)$
$=-3x^2+120x-525$
$=B'(x)$ ✓

③ On passe par une étude de signe :

car $a=-3$

x	0	5	35	45
$B'(x)$	−	0 +	0	−
$B(x)$	↘	-1250 ↗	49000	↘

$B(5)=-5^3+60\times 25-525\times 5$
$=-1250$ €
$B(35)=49000$ €

Le bénéfice maximal possible est 49 000 €.

④ « faire un bénéfice » $\Leftrightarrow \boxed{B(x)>0}$

$B(x)=x\underbrace{(-x^2+60x-525)}$
$\Delta=1500$, $\sqrt{\Delta}=10\sqrt{15}$
$x_1=\dfrac{-60-10\sqrt{15}}{-2}$ $=30+5\sqrt{15}>45$
$x_2=30-5\sqrt{15}$ $\approx 10{,}6$

x	0	$30-\sqrt{15}$	45	$30-\sqrt{15}$
x		+		
$-x^2+60x-525$	−	0	+	0 −
$B(x)$	−	0	+	

← car $a=-1$

Donc
Donc entreprise fait un bénéfice si elle vend entre 10,6 et 45 kg de truffes.

Exercice 7. $\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$!

①
Or, la formule de dérivation dit $x^n \longrightarrow nx^{n-1}$ (pour tout $n\in\mathbb{Z}$)
Donc $x^{-n}\longrightarrow -n.x^{-n-1}=-nx^{-(n+1)}$
Donc $\varphi'(x)=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

② $x\longmapsto\dfrac{1}{x^2}$ devient :
$x\longmapsto\dfrac{-2}{x^3}$

Exercice 8.

① Il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)>2$

② Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\geqslant 0$

Exercice 9

① Triangle rectangle $\Rightarrow \boxed{r^2+h^2=3}$

Volume $=\dfrac{\pi r^2\times h}{3}=\dfrac{\pi(3-h^2)\times h}{3}$
$=\dfrac{-\pi h^3}{3}+\pi h$

on dérive par rapport à h.

$\Rightarrow$ Volume' $=-\pi h^2+\pi$

$-\pi h^2+\pi=0$
$\Leftrightarrow \pi(-h^2+1)=0$
$\Leftrightarrow -h^2+1=0$
$\Leftrightarrow h^2=1 \Leftrightarrow h=1$ ou $h=-1$

h		-1		1	
V'	−	0	+	0	−
V	↘		↗		↘

h doit être positif (longueur)

h	0	1	$+\infty$
V	↗	$\dfrac{2\pi}{3}$	↘

Le volume est maximal lorsque $h=\sqrt{\pi}$.
$r^2=3-h^2=3-1^2$
$=2$
$\Rightarrow r^2=\sqrt{2}$ (et pas $-\sqrt{2}$ car longueur)

② $V=\dfrac{2\pi}{3}$

Les dimensions du triangle sont $\boxed{r=\sqrt{2} \text{ et } h=1}$