DS 1. Fonctions polynômiales du second degré

Exercice 1 .

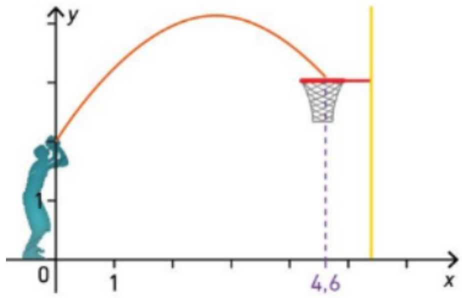
Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

1. $3x^2 - 2x + 2$
2. $-2x^2 + 5x + 3$

Résoudre l'inéquation suivante : $-2x^2 + 5x \leq 4$

Exercice 2 .

On modélise la trajectoire d'un ballon qui entre dans le panier lors d'un lancer au basket. Cette trajectoire est un arc de parabole dont l'équation est $y = -0,3x^2 + 1,6x + 2$



On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = -0,3x^2 + 1,6x + 2$, où x et $f(x)$ sont exprimées en mètres.

1. De quelle hauteur le ballon est-il lancé ?
2. Sachant que la ligne de lancer franc est à $4,6$m du panier, quelle est la hauteur du panier ?
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En déduire la hauteur maximale atteinte par le ballon, au centimètre près.
5. Déterminer à quelle(s) distance(s) du joueur le ballon atteint 4 mètres de hauteur. On donnera des valeurs approchées au cm près.

Exercice 3 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$.

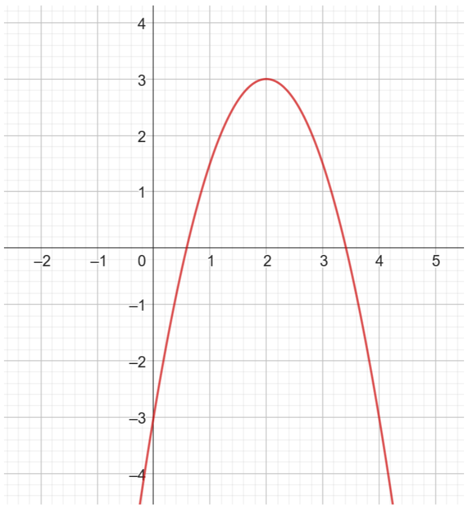
1. (a) Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
   (b) En déduire les coordonnées du sommet de la parabole représentative de f.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer les racines de f.
3. En déduire une factorisation de $f(x)$.
4. Dresser le tableau de signes de f.

Exercice 4 .

Soit E l'équation $(m-1)x^2 + mx - 3 = 0$ et m un réel.

1. Soit $m = 1$. Déterminer la/les solution(s) de l'équation (E).
2. Soit $m \neq 1$. Pour quelles valeurs de m l'équation (E) a-t-elle une unique solution ?

Exercice 5 .



Soit f une fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

1. Quel est le signe de a ? Justifier.
2. Quelle est la valeur de c ? Justifier.
3. Quel est le signe du déterminant ? Justifier.
4. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
5. En déduire la forme développée de $f(x)$.

Exercice 6 .

Un champ rectangulaire a pour surface 4 800 mètres carrés. Sachant que la longueur est le triple de sa largeur, on demande de calculer ses deux dimensions.

Exercice 1

a) $3x^2 - 2x + 2$

Calculons Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4 \times 3 \times 2$

$= -20$

Comme $\Delta < 0$, $3x^2 - 2x + 2$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

b) $-2x^2 + 5x + 3$

Calculons Δ :

$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3$

$= 25 + 24$

$= 49$

$\Delta > 0$: on calcule les deux racines

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-7}{2\times(-2)} = \dfrac{-12}{-4} = 3$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+7}{2\times(-2)} = \dfrac{2}{-4} = \dfrac{-1}{2}$

Donc :

$-2x^2 + 5x + 3 = -2(x-3)(x+\frac{1}{2})$

c) $-2x^2 + 5x \leq 4$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 5x - 4 \leq 0$

on est obligé de revenir à une expression de la forme ... < 0 ou ... > 0 pour pouvoir utiliser la méthode du Δ.

Calculons Δ :

$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-4)$

$= 25 - 32$

$= -7$

$\Delta < 0$ donc le signe de $-2x^2 + 5x - 4$ est constant.

De plus, $a = -2 < 0$, donc $-2x^2 + 5x - 4 < 0$ pour tout réel x.

Donc $S = \mathbb{R}$.

Notes :

- Justifier le nombre de racines à chaque fois en précisant $\Delta < 0$ / $\Delta = 0$ / $\Delta > 0$
- Il n'est nécessaire de marquer les formules (ex : $\Delta = b^2 - 4ac$) qu'une seule fois dans la copie.
- Utiliser le mot « donc » sans retenue ! Surtout lorsque vous écrivez une conclusion.
- question b : on peut rajouter que la factorisation est de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ dans la justification.

Exercice 2

$y = -0{,}3x^2 + 1{,}6x + 2$

toujours ré-écrire les formules de l'énoncé au début de l'exercice.

1) On calcule $f(0)$

$f(0) = 2$

Le ballon est lancé d'une hauteur de 2 mètres.

2) On calcule $f(4{,}6)$

$f(4{,}6) = -0{,}3 \times 4{,}6^2 + 1{,}6 \times 4{,}6 + 2$
$= 3{,}012$

Le panier est à 3,012 mètres de hauteur.

3) $a = -0{,}3$; $b = 1{,}6$; $c = 2$

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1{,}6}{2\times(-0{,}3)} = \dfrac{8}{3}$

on garde la fraction ! Pas de valeurs approchées [Sauf dans les conclusions si la question le précise].

$\Delta = b^2 - 4ac = 1{,}6^2 - 4\times(-0{,}3)\times 2 = 4{,}96$

$\beta = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-4{,}96}{2\times(-0{,}3)} = \dfrac{62}{15}$

La forme canonique est $a(x-\alpha)^2 + \beta$, donc :

$f(x) = -0{,}3\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{62}{15}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

4) La hauteur maximale atteinte par le ballon est $\frac{62}{15}$ mètres, soit environ 4,13 mètres

au centimètre près = deux chiffres après la virgule.

(C'est le β de la forme canonique)

5) On doit résoudre l'équation $-0{,}3x^2 + 1{,}6x + 2 = 4$

$\Leftrightarrow -0{,}3x^2 + 1{,}6x - 2 = 0$

comme l'inéquation de l'exo 1, on revient « à 0 » $(\ldots = 0)$

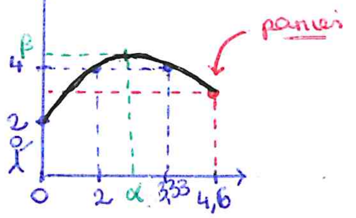
$\Delta = 1{,}6^2 - 4\times(-0{,}3)\times(-2)$
$= 0{,}16$

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-1{,}6 + \sqrt{\Delta}}{2\times(-0{,}3)} = \dfrac{-1{,}6 + 0{,}4}{-0{,}6} = \dfrac{-1{,}2}{-0{,}6} = 2$

$x_2 = \dfrac{-1{,}6 - \sqrt{\Delta}}{2\times(-0{,}3)} = \dfrac{-1{,}6 - 0{,}4}{2\times(-0{,}3)} = \dfrac{-2}{-0{,}6} = \dfrac{10}{3} \simeq 3{,}33$

Donc le ballon atteint 4m de hauteur à 2m et à 3,3m du joueur.



Correction Exercice 3.

$f(x) = -3x^2 + 12x - 5$ pour tout réel x.

Question 1.
Calculons $\alpha = \dfrac{-12}{2 \times (-3)} = \dfrac{12}{6} = 2$
Calculons $\Delta = 12^2 - 4 \times (-3) \times (-5) = 84$. Donc $\beta = \dfrac{-84}{4 \times (-3)} = 7$

Comme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on a : $\boxed{f(x) = -3(x-2)^2 + 7}$ pour tout réel x.

Question 2.
Les coordonnées du sommet de la parabole sont $(\alpha; \beta)$, soit $\boxed{(2;7)}$.

Question 3.
$a = -3 < 0$, donc la parabole est **vers le bas**. On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		∞
$f(x)$		$\nearrow$	7	$\searrow$	

Question 4.
Pour déterminer les racines, on reprend $\Delta = 84$ (calculé à la question 1).

$\Delta > 0$, donc on a deux racines : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-12+\sqrt{84}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-12}{-6} + \dfrac{\sqrt{84}}{-6} = 2 - \dfrac{2\sqrt{21}}{6} = 2 - \dfrac{\sqrt{21}}{3} \\ x_2 = \dfrac{-12-\sqrt{84}}{2 \times (-3)} = 2 + \dfrac{\sqrt{21}}{3} \end{cases}$

Donc les racines de la fonction f sont $2 - \dfrac{\sqrt{21}}{3}$ et $2 + \dfrac{\sqrt{21}}{3}$

Question 5.
f a deux racines x_1 et x_2, donc elle se factorise par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
Donc $f(x) = -3(x-(2-\dfrac{\sqrt{21}}{3}))(x-(2+\dfrac{\sqrt{21}}{3}))$.

En simplifiant, $\boxed{f(x) = -3(x-2+\dfrac{\sqrt{21}}{3})(x-2-\dfrac{\sqrt{21}}{3})}$ pour tout réel x.

Question 6.
Comme $a = -3 < 0$, le tableau de signes de $f(x)$ est :

x	$-\infty$		$2-\dfrac{\sqrt{21}}{3}$		$2+\dfrac{\sqrt{21}}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Correction Exercice 4.

(E) : $(m-1)x^2+mx-3=0$

Question 1.
Lorsque $m=1$, l'équation (E) est : $x-3=0 \Longleftrightarrow x=3$.
Dans ce cas, la solution est 3.

Question 2.
Lorsque $m\neq 1$, $(m-1)x^2+mx-3$ est de degré 2.
L'équation (E) a une unique solution si et seulement si son discriminant Δ est nul.

Calculons $\Delta = m^2-4\times(m-1)\times(-3)=m^2+12m-12$

Donc (E) a une unique solution si et seulement si $m^2+12m-12=0$.

Note.
On ne cherche pas les solutions de l'équation (E). On cherche les valeurs de m pour lesquelles (E) a une seule solution. Clairement, en résolvant l'équation $m^2+12m-12=0$, c'est des valeurs de m que l'on va trouver : cela permet de savoir que l'on est sur "la bonne piste".

$\Delta' = 12^2-4\times1\times(-12)=192$. Δ' est positif, donc l'équation a deux solutions :
$m_1=\dfrac{-12+\sqrt{192}}{2\times1}=-6+4\sqrt{3}$ et $m_2=-6-4\sqrt{3}$

Donc les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) a une unique solution sont $m=-6+4\sqrt{3}$ ou $m=-6-4\sqrt{3}$.

Note. Résumé du raisonnement :
(E) a une unique solution $\Longleftrightarrow \Delta=0 \Longleftrightarrow m^2+12m-12=0 \Longleftrightarrow m=-6+4\sqrt{3}$ ou $m=-6-4\sqrt{3}$

Correction Exercice 5.

<u>Question 1.</u>
La courbe est **vers le bas**, donc a est négatif.

<u>Question 2.</u>
$f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$: c est **l'image de** 0 **par la fonction** f, donc $c = -3$.

<u>Question 3.</u>
La courbe **coupe l'axe des abscisses en deux points** : la fonction admet **deux racines**. Donc Δ est positif.

<u>Question 4.</u>
Le sommet de la courbe a pour coordonnées $(2;3)$. Donc $\alpha = 2$ et $\beta = 3$.
Donc $f(x) = a(x-2)^2 + 3$.
De plus, $f(0) = -3$, d'où l'équation $a(0-2)^2 + 3 = -3$
$\iff a(-2)^2 = -6$
$\iff 4a = -6$
$\iff a = \dfrac{-6}{4} = \dfrac{-3}{2}$.

Donc $f(x) = -\dfrac{3}{2}(x-2)^2 + 3$ pour tout réel x.

<u>Question 5.</u>
On développe : $-\dfrac{3}{2}(x-2)^2 + 3 = -\dfrac{3}{2}(x^2 - 4x - 4) + 3 = -\dfrac{3}{2}x^2 - 6x - 6 + 3 = \boxed{-\dfrac{3}{2}x^2 - 6x - 3}$

Note.
On peut aussi écrire $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + bx - 3$ avec les informations des questions précédentes, et déterminer b à l'aide des coordonnées d'un points -par exemple $(2;3)$ le sommet.

Correction Exercice 5.

Posons x la largeur du rectangle, et y sa longueur.
On sait que *la longueur est le triple de sa largeur*, donc : $y = 3x$.
De plus, *l'aire du rectangle est 4 800 mètres carrés*, donc : $x \times y = 4800$.

On peut donc écrire : $x \times (3x) = 4800 \iff 3x^2 = 4800 \iff x^2 = \dfrac{4800}{3} = 1600 \iff x = \sqrt{1600} = 40$ ou $x = -\sqrt{1600} = -40$

Or, une longueur est toujours positive, donc la seule valeur possible pour x (la largeur) est 40 mètres.
Sachant que la longueur est le triple de la largeur, on en déduit que la longueur est $3 \times 40 = 120$ mètres.

Donc les dimensions du champ sont 120 mètres sur 40.