# Практика по алгоритмам, ВШЭ

Сергей Копелиович, Владислав Кораблинов

Осень, 2020

## Contents

# 1 Асимптотика и линейные алгоритмы

## 1.1 Практика

Напомним определения:

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \equiv \exists N, C > 0 : \forall n \geq N : f(n) \leq C \cdot g(n)$
- $f(n) \in \Omega(g(n)) \equiv \exists N, C > 0 : \forall n \geq N : C \cdot g(n) \leq f(n)$
- $f(n) \in \Theta(g(n)) \equiv \exists N, C_1 > 0, C_2 > 0 : \forall n \geq N : C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n)$
- $f(n) \in o(g(n)) \equiv \forall C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : f(n) < C \cdot g(n)$
- $f(n) \in \omega(g(n)) \equiv \forall C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : C \cdot g(n) < f(n)$

Все функции здесь $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ или $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ (далее будет ясно из контекста, какой класс функций используется). В дальнейшем, когда речь идет о принадлежности функций вышеопределенным множествам, мы будем использовать знак "$=$" вместо "$\in$", т.к. в литературе обычно используются именно такие обозначения.

**Асимптотики**

1. Докажите, что:
   (a) $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \mathcal{O}(f(n))$
   (b) $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = o(f(n))$
   (c) $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$
2. **Контекст имеет значение**
   Правда ли, что $f(n) = \mathcal{O}(f(n)^2)$?
3. **Классы**
   Определим отношение "$\sim$". Будем говорить, что $f \sim g$, если $f = \Theta(g)$. Покажите, что $\sim$ — отношение эквивалентности, т.е. оно
   - Рефлексивное: $\forall f : f \sim f$,
   - Симметричное: $\forall f, g : f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$,
   - Транзитивное: $\forall f, g, h : (f \sim g) \wedge (g \sim h) \Rightarrow f \sim h$.
4. **Порядки**
   Определим отношение "$\preceq$". Будем говорить, что $f \preceq g$, если $f = \mathcal{O}(g)$.
   Определим отношение $f \preceq g \equiv f = \mathcal{O}(g)$.
   (a) Докажите, что $\preceq$ — отношение предпорядка (рефлексивное и транзитивное)
   (b) Докажите, что $\preceq$ — не отношение частичного порядка, так как не удовлетворяет антисимметричности
   (c) Докажите, что $\preceq$ — отношение частичного порядка на классах эквивалентности по $\sim$?
5. Считайте, что функции здесь $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\forall n : f(n) > 1 \wedge g(n) > 1$.
   (a) $f(n) = \Omega(f(n/2))$?
   (b) $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = \mathcal{O}(\log g(n))$?
   (c) $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = \mathcal{O}(2^{g(n)})$?
   (d) $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = o(\log g(n))$?
   (e) $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = o(2^{g(n)})$?
   (f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Omega(\log n)$?
6. Определить асимптотику (считайте, что при $x \leq 100$ будет выполняться $T(x) = 100$).
   (a) $T(x) = T(a) + T(x - a) + n$ для натурального числа $a$.
   (b) $T(x) = T(\frac{x}{2}) + 1$.
   (c) $T(x) = 2 \cdot T(\sqrt{x}) + \log x$

**Линейные алгоритмы**

7. Дана скобочная последовательность, составленная из скобок `'('`, `')'`, `'['`, `']'`, `'{'`, `'}'`. Последовательность называется корректной, если каждой открывающей скобке соответствует закрывающая скобка того же типа, и соблюдается вложенность. Примеры: `([{}])` и `()()` – корректные, а `[)` и `[(])` – нет.

   Придумайте алгоритм, который проверяет корректность последовательности за линейное время.

8. Пусть элементы здесь линейно упорядочены и мы умеем сравнивать их за $\mathcal{O}(1)$.

   (a) Придумайте стек, в котором можно узнавать минимум за $\mathcal{O}(1)$. Все остальные операции стека также должны работать за $\mathcal{O}(1)$.

   (b) Придумайте очередь, в которой можно узнавать минимум за $\mathcal{O}(1)$. Все остальные операции очереди должны работать за амортизированное $\mathcal{O}(1)$.

   (c) Придумайте более эффективный по памяти вариант очереди с минимумом на основе пары из обычной очереди и дека.

9. Дан массив целых чисел $a_i$. Придумайте структуру данных, которая бы умела отвечать на запросы вида “По данным $l$ и $r$ вернуть $\sum_{i=l}^{r} a_i$” за $\mathcal{O}(1)$.

   Разрешается сделать предподсчёт за $\mathcal{O}(n)$. Значения в массиве не меняются.

10. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ и $S \in \mathbb{N}$. Найти $l, r$ $(1 \leq l \leq r \leq n)$ такие, что сумма $\sum_{i=l}^{r} a_i = S$. Задачу требуется решить за линейное от $n$ время.

11. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$. Для каждого $a_i$ найти самый правый из элементов, которые левее и не больше его. Задачу требуется решить за линейное от $n$ время.

12. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$. Найти $l, r$ $(1 \leq l \leq r \leq n)$ такие, что

    (a) значение $(r - l + 1) \min_{i \in [l,r]} a_i$ было бы максимально.

    (b) значение $\left(\sum_{i \in [l,r]} a_i\right) \min_{i \in [l,r]} a_i$ было бы максимально.

    Задачу требуется решить за линейное от $n$ время.

13. Вам дан массив натуральных чисел и число $k$. Требуется найти подотрезок массива такой, что НОК чисел на нем равен $k$ или заявить, что такого нет. Время работы: $\mathcal{O}(nT_{LCM}(k))$, где $T_{LCM}(k)$ — время подсчета НОК для чисел размера $k$.

## 1.2 Домашнее задание

1. Дайте ответ для двух случаев $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$:

   (a) Если в определении $\mathcal{O}$ опустить условие про $N$ (т.е. оставить просто $\forall n$), будет ли полученное определение эквивалентно исходному?

   (b) Тот же вопрос про $o$.

2. Считайте здесь, что $\forall n : f(n) > 1 \wedge g(n) > 1$. Правда ли, что $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = o(2^{g(n)})$?

3. Заполните табличку и поясните (особенно строчки 4 и 7):

| $A$ | $B$ | $\mathcal{O}$ | $o$ | $\Theta$ | $\omega$ | $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $n^2$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $\log^k n$ | $n^\epsilon$ | | | | | |
| $n^k$ | $c^n$ | | | | | |
| $\sqrt{n}$ | $n^{\sin n}$ | | | | | |
| $2^n$ | $2^{n/2}$ | | | | | |
| $n^{\log m}$ | $m^{\log n}$ | | | | | |
| $\log(n!)$ | $\log(n^n)$ | | | | | |

   Здесь все буквы, кроме $n$, — константы.

4. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ и $S \in \mathbb{N}$. Найти $l, r$ $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что сумма $\sum_{i=l}^{r} a_i = S$. Задачу требуется решить за линейное от $n$ время. **Подсказки:**

   - Для каждого $i$ найдите максимальное такое $r_i$, что $\sum_{j=i}^{r_i} a_j \le S$ за $\mathcal{O}(n)$ для каждого $i$.
   - Найдите за $\mathcal{O}(n)$ ответ задачи, если известны $r_1, \ldots, r_n$.
   - Докажите, что $r_i \le r_{i+1}$
   - Пользуясь предыдущим пунктом найдите все $r_i$ за $\mathcal{O}(n)$.

5. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$.

   (a) За $\mathcal{O}(n)$ для каждого $a_i$ найти самый правый из элементов, которые левее и меньше его.

   (b) За $\mathcal{O}(n)$ для каждого $a_i$ найти самый левый из элементов, которые правее и меньше его.

   (c) За $\mathcal{O}(n)$ найти $l, r$ $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что значение $(r - l + 1) \min_{i \in [l,r]} a_i$ было бы максимально.

   (d) За $\mathcal{O}(n)$ найти $l, r$ $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что значение $\left(\sum_{i \in [l,r]} a_i\right) \min_{i \in [l,r]} a_i$ было бы максимально.

6. Вам дан массив из $n$ элементов и список из $m$ запросов $add(x, l, r)$: прибавить $x$ к каждому элементу на отрезке $[l, r]$. За $\mathcal{O}(n + m)$ выведите массив, получающийся из исходного после выполнения заданных запросов.

7. *(только группа Антона)* Определить асимптотику $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \log n \rfloor) + 2^{\log^* n}$, где $\log^* n$ — итерированный логарифм.

## 1.3 Дополнительные задачи

1. Упорядочите функции по скорости роста и обозначьте неравенства между соседями. Укажите, в каких неравенствах $f = o(g)$, а в каких $f = \Theta(g)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log(\log^* n)$ | $2^{log^* n}$ | $(\sqrt{n})^{\log n}$ | $n^2$ | $n!$ | $(\log n)!$ |
| $(3/2)^n$ | $n^3$ | $\log^2 n$ | $\log n!$ | $2^{2^n}$ | $n^{1/\log n}$ |
| $\ln \ln n$ | $\log^* n$ | $n \cdot 2^n$ | $n^{\log \log n}$ | $\ln n$ | $1$ |
| $2^{\ln n}$ | $(\log n)^{\log n}$ | $e^n$ | $4^{\log n}$ | $(n+1)!$ | $\sqrt{\log n}$ |
| $\log^* \log n$ | $2^{\sqrt{2 \log n}}$ | $n$ | $2^n$ | $n \log n$ | $2^{2^{n+1}}$ |

   Примечание: $\log^*(n) = \begin{cases} 0 & \texttt{если } n \le 1; \\ 1 + \log^*(\log n) & \texttt{иначе.} \end{cases}$

2. Определить асимптотику (считайте, что при $n \le 100$ будет выполняться $T(n) = 100$).
   (a) $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 17) + n$.
   (b) $T(n) = T(\alpha \cdot n) + T((1 - \alpha) \cdot n) + n$ для произвольной константы $\alpha \in (0, 1)$.
   (c) $T(n) = 4 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n^k$ для $k \in \{1, 2, 3\}$.
3. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$. Найти $l, r$ $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что сумма $\sum_{i=l}^{r} a_i$ была бы максимальной. Задачу требуется решить за линейное от $n$ время.
4. Дано число, представленное $n$ цифрами в $d$-ичной записи без ведущих нулей. Из числа требуется вычеркнуть ровно $k$ цифр так, чтобы результат был максимальным. Задачу требуется решить за линейное от $n$ время.
5. Вам дан массив из $n$ элементов и число $k$. Все числа лежат в отрезке $[1..n]$. Найдите такие $l$ и $r$, что на отрезке $[l, r]$ встречается хотя бы $k$ различных элементов, или сообщите, что такого отрезка нет. Если таких отрезков несколько, выберите тот из них, длина которого минимальна. Время работы $\mathcal{O}(n)$.
6. Вам дан массив натуральных чисел и число $k$. Требуется найти подотрезок массива такой, что НОК чисел на нем равен $k$ или заявить, что такого нет. Время работы: $\mathcal{O}(nT_{LCM}(k))$, где $T_{LCM}(k)$ — время подсчета НОК для чисел размера $k$.
7. Дана квадратная матрица из нулей и единиц. Найти наибольший по площади подпрямоугольник, состоящий только из нулей за $\mathcal{O}(n^2)$.
8. Вам каждый день на протяжении некоторого времени поступает запрос «вырастет ли курс Apple на бирже», и у вас есть $n$ советников, с которыми вы можете консультироваться. Вы отвечаете да или нет, и в конце каждого дня вам говорят, правильно ли вы ответили. Придумайте алгоритм, который сделает не более $10(\log n + m)$ ошибок, где $m$ — число ошибок, которое сделает лучший советник (подсказка: назначьте советникам веса и изменяйте их в зависимости от правильности их ответов).
9. Придумайте расширяющийся массив с реальным (не амортизированным) временем добавления $\mathcal{O}(1)$.
10. Дан массив целых чисел от 1 до $n$ длины $n + 1$, который нельзя модифицировать. Используя $\mathcal{O}(\log n)$ битов дополнительной памяти, найдите в массиве пару одинаковых чисел за $\mathcal{O}(n)$.
11. Дана последовательность $\sigma =< a_1, a_2, \cdots, a_m >$, где каждый $a_i \in [n] = \{1, 2, \cdots, n\}$. Обозначим частоту появления элемента $x$ через $f_\sigma[x] = |\{i | a_i = x\}|$. Известно, что $\exists_x f_\sigma[x] = 1$ и для всех остальных значений $y \ne x, f_\sigma[y] \equiv 0 \mod 2$. Требуется найти $x$ за один проход по последовательности, используя $\mathcal{O}(\log n + \log m)$ бит памяти.
12. Дана последовательность $\sigma =< a_1, a_2, \cdots, a_m >$, где каждый $a_i \in [n]$. Известно, что $\exists_x f_\sigma[x] > \frac{m}{2}$. Требуется найти $x$ за один проход по последовательности, используя $\mathcal{O}(\log n + \log m)$ бит памяти.

# 2 Сортировки и кучи

## 2.1 Практика

1. Есть $n$ веревок, каждая имеет целую длинну $l_i$, которые можно резать. Нужно получить $k$ одинаковых кусков максимальной целочисленной длины (также могут остаться неиспользованные обрезки). $\mathcal{O}(n \log l_{\max})$.

2. Есть $k$ отсортированных массивов. В сумме массивы содержат $n$ элементов. Слить массивы за $\mathcal{O}(n \log k)$.

3. Придумайте детерминированную структуру данных на основе бинарной кучи, которая умеет делать `Insert(x)`, `DeleteMedian()`, все операции за $\mathcal{O}(\log n)$.

4. Модифицируйте операцию `SiftUp` для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $\mathcal{O}(\log n)$, но при этом делала лишь $\mathcal{O}(\log \log n)$ сравнений.

5. Модифицируйте операцию `SiftDown` для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $\mathcal{O}(\log n)$, но при этом делала лишь $\log_2 n + \mathcal{O}(\log \log n)$ сравнений.

6. Даны два массива $a$ и $b$ длины $n$, сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в сортированном порядке.

   (a) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.
   (b) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.
   (c) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.
   (d) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.

   Здесь считайте, что дополнительная память — количество чисел длины $\mathcal{O}(\log n)$, которые вы можете сохранить.

7. Покажите, что любая сортировка сравнениями, которая верно работает хотя бы на доле $\frac{1}{100^n}$ от всех перестановок, не может работать за $o(n \log n)$ на всех тестах.

8. Дана обычная бинарная куча (с минимумом в голове), требуется узнать $k$-й минимум.

   (a) $\mathcal{O}(k \log n)$
   (b) $\mathcal{O}(k^2)$
   (c) $\mathcal{O}(k \log k)$

9. Пусть дан массив размера $n$ из целых чисел. Требуется сделать предварительные вычисления (в будущем мы будем кратко называть их *предподсчёт*) за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы затем ответить на некоторое неизвестное число запросов про массив вида “сколько раз число $x$ встречается на отрезке $[l..r]$”, причём на каждый запрос можно потратить $\mathcal{O}(\log n)$ времени.

10. Инверсией в массиве чисел $a[\ldots]$ называется такая пара индексов $i, j$, что $i < j$, но $a_i > a_j$.

    Дан массив из $n$ различных элементов. Требуется найти число инверсий за $\mathcal{O}(n \log n)$.

## 2.2 Домашнее задание

1. Есть $m$ стойл с координатами $x_1, \ldots, x_m$ и $n$ коров. Расставить коров по стойлам (не более одной в стойло) так, чтобы минимальное расстояние между коровами было максимально. $\mathcal{O}(m(\log m + \log x_{\max}))$.

2. *(только группа Антона)* Даны два сортированных массива длины $n$, которые нельзя модифицировать. Найдите $k$-ю порядковую статистику в объединении массивов (то есть элемент, находившийся бы на $k$-ой позиции если бы массивы слили), используя $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.

   (a) За $\mathcal{O}(\log^2 n)$.

(b) За $\mathcal{O}(\log n)$.

3. *(только группа Влада)* Даны два массива $a$ и $b$ длины $n$, сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в сортированном порядке.

   (a) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

   (b) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

   (c) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

   (d) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.

   Здесь считайте, что дополнительная память — количество чисел длины $\mathcal{O}(\log n)$, которые вы можете сохранить.

4. *(только группа Влада)* Дана обычная бинарная куча (с минимумом в голове), требуется узнать $k$-й минимум.

   (a) $\mathcal{O}(k \log n)$

   (b) $\mathcal{O}(k \log k)$

5. *(только группа Влада)* Пусть дан массив размера $n$ из целых чисел. Требуется сделать предварительные вычисления (в будущем мы будем кратко называть их *предподсчёт*) за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы затем ответить на некоторое неизвестное число запросов про массив вида “сколько раз число $x$ встречается на отрезке $[l..r]$”, причём на каждый запрос можно потратить $\mathcal{O}(\log n)$ времени.

6. В свободное время Анка-пулемётчица любит сортировать патроны по серийным номерам. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке, как Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восвояси. Как оказалось, патроны перемешались не сильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на $k$. Всего патронов $n$. Помогите Анке отсортировать патроны.

   (a) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(nk)$.

   (b) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n + I)$, где $I$ — число инверсий.

   (c) Докажите нижнюю оценку на время сортировки $\Omega(n \log k)$.

   (d) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n \log k)$ (если вы решили этот пункт, автоматически засчитается и пункт a).

7. *(только группа Антона)* Дано $2n - 1$ коробок с чёрными и белыми шарами. В $i$-ой коробке находится $w_i$ белых и $b_i$ чёрных шаров. Всего в коробках находится $W$ белых и $B$ чёрных шаров. Требуется выбрать $n$ коробок таким образом, чтобы суммарное число белых шаров в них было не менее $\frac{W}{2}$, а чёрных не менее $\frac{B}{2}$. Решить за $\mathcal{O}(n \log n)$.

## 2.3 Дополнительные задачи

1. Дан массив длины $n$, в котором встречаются $m \le n$ различных элементов.

   (a) Пусть зафиксирован набор частот элементов $p_i > 0, i = 1 \ldots m$. Докажите нижнюю оценку $n\left(\sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{1}{p_i}\right) - n \log e$ на число сравнений в худшем случае при сортировке сравнениями. Полезный факт: $n \ln n \ge \ln n! = n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n)$.

   (b) Докажите нижнюю оценку $n \log \frac{m}{e}$ на число сравнений в худшем случае при сортировке сравнениями в пределе, если $m = o(n)$.

2. Куча хранится в массиве длины $n$. Родитель $p$ хранит детей в ячейках $2 \cdot p + 1$ и $2 \cdot p + 2$. Алгоритм приступает к сортировке. Сортировка устроена следующим образом.

   - Поменять первый и последний элемент кучи местами.

- Уменьшить размер кучи на единицу.
- Запустить `SiftDown` на первом элементе.

`SiftDown` меняет родителя с наибольшим ребенком (при условии, что ребенок больше родителя)и запускается рекурсивно. Требуется придумать алгоритм, который по $n$ выдаёт перестановку чисел от 1 до $n$, которая является корректной кучей и приводит к максимальному количеству вызовов `SiftDown` при сортировке. Время работы — $\mathcal{O}(n \log n)$.

3. (a) Дано множество из $n$ точек на плоскости. Найти пару ближайших точек за $\mathcal{O}(n \log n)$.

   (b) Дано множество из $n$ векторов на плоскости. Разрешается координату любого вектора умножить на -1. Найти пару векторов, чья сумма минимальна, за $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. Дано бинарное дерево: $Tree ::= Node(Tree, Tree)|Empty$ (эта запись означает, что дерево — это либо вершина с парой потомков-деревьев, либо особое значение $Empty$). Определим функцию $\mathbf{rank}(x)$ следующим образом:

   - $\mathbf{rank}(Empty) = 0$
   - $\mathbf{rank}(Node(left, right)) = min(\mathbf{rank}(left), \mathbf{rank}(right)) + 1$.

   Назовём бинарное дерево *скошенным влево (левацким)*, если для его вершин выполнено следующее свойство:
   $$\forall_{x=Node(left,right)} \mathbf{rank}(left) \geq \mathbf{rank}(right).$$

   *Скошенная влево (левацкая) куча* — это скошенное влево дерево, в вершинах которого хранятся данные, для которых выполнено свойство кучи.

   (a) Докажите, что для любого скошенного влево дерева $|T| \geq 2^{\mathbf{rank}(T)} - 1$ ($|T|$ обозначает количество вершин в дереве $T$).

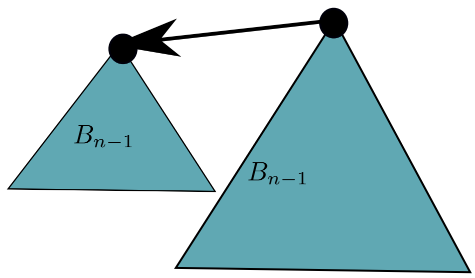
   (b) Придумайте, как слить две скошенные влево кучи $H_1$ и $H_2$ за время $\mathcal{O}(\log |H_1| + \log |H_2|)$.

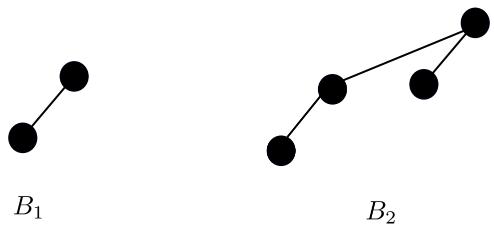
   (c) Придумайте, как используя операцию слияния, построенную на предыдущем шаге, реализовать операции:

      - `Insert(x)` — добавление элемента $x$ в кучу,
      - `ExtractMin()` — удаление минимального элемента из кучи.

5. Пусть $B_n$ (биномиальное дерево порядка $n$) определено следующим образом:

   - при $n = 0$ это дерево из одной вершины.
   - при $n > 0$ это $B_{n-1}$, корню которого первым ребенком подвешено еще одно $B_{n-1}$.




(a) Докажите, что $B_n$ имеет высоту $n$.

(b) Докажите, что в $B_n$ содержится ровно $2^n$ вершин.

(c) Определим биномиальную кучу как набор биномиальных деревьев, в котором нет двух деревьев одного порядка. Покажите, что для любого $n$ существует биномиальная куча с $n$ вершинами.

(d) Пусть на всех деревьях биномиальной кучи выполняется свойство кучи (min в голове). Придумайте `GetMin` за $\mathcal{O}(\log n)$.

(e) Придумайте `Merge` за $\mathcal{O}(\log n)$.

(f) Придумайте `Add` за $\mathcal{O}(\log n)$.

(g) Придумайте `ExtractMin` за $\mathcal{O}(\log n)$.

(h) Придумайте `DecreaseKey` по ссылке на узел. $\mathcal{O}(\log n)$.

(i) Придумайте `Delete` по ссылке на узел. $\mathcal{O}(\log n)$.

6. Покажите, что $n$ операций `Add` подряд в биномиальную кучу работают за $\mathcal{O}(n)$.

7. Рассмотрим бинарную скошенную систему исчисления. На каждой позиции в скошенной записи числа может стоять цифра 0, 1 или 2. Число $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1}$ в скошенной системе переводится в десятичную по формуле $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot (2^i - 1)$.

   В скошенной системе счисления есть два ограничения: цифра 2 может встречаться в записи не более одного раза; все цифры следующих меньших разрядов равны нулю. Пример первых чисел: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 100, 101...

   (a) Докажите, что каждое неотрицательное целое число имеет единственное возможное представление в скошенной системе счисления.

   (b) Придумайте, как увеличить число в скошенной системе на единицу за $\mathcal{O}(1)$.

8. Определим структуру данных “скошенный список”. Список длины $n$ строится так:

   - запишем число $n$ в скошенной системе счисления: $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1}$

- для каждого $i$ смотрим в соответствующую позицию скошенной записи числа $n$ и создаём $a_i$ полных двоичных деревьев высоты $i$
- размещаем $n$ элементов списка: сперва выбираем дерево в порядке возрастания высоты, а внутри конкретного дерева размещаем в порядке обхода в глубину: «корень, левый ребёнок, правый ребёнок»

Примеры скошенных списков длин $1, 2, 3, 4, 5$:

Figure 1: Лист [a] (число: 1)


Figure 2: Лист [a b] (число: 2)


Figure 3: Лист [a b c] (число: 10)

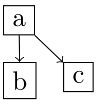



Figure 4: Лист [a b c d] (число: 11)

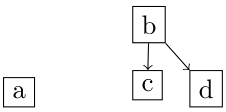
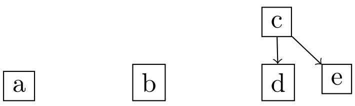



Figure 5: Лист [a b c d e] (число: 12)




Придумайте, как реализовать следующие операции со списком длины $n$:

(a) Добавление элемента в начало списка за $\mathcal{O}(1)$.

(b) Доступ к $i$-му элементу за $\mathcal{O}(\log n)$.

(c) Получить скошенный список из $k$ последних элементов данного скошенного списка за $\mathcal{O}(\log n)$.

9. Придумайте структуру данных, которая поддерживает следующие операции (в оценках времени работы $n$ — текущее количество элементов):

   - `Insert(x)` — добавление элемента $x$ за $\mathcal{O}(\log n)$,
   - `ExtractMin()` — удаление минимального элемента за $\mathcal{O}(\log n)$,
   - `Clone()` — копирование структуры за $\mathcal{O}(1)$ (после копирования с каждой из копий можно независимо проделывать любую из данных трех операций).

   Подсказка: за основу можно взять левацкую кучу.

10. Стуктура данных «файл последовательного доступа» поддерживает следующие операции за $\mathcal{O}(1)$:

- *Read()*: чтение числа из файла на текущей позиции и перевод позиции вперёд на 1 элемент.
- *Write(x)*: запись числа в файл в текущую позицию и перевод позиции вперёд на 1 элемент.
- *Rewind()*: перевод позиции на начало файла.

Требуется отсортировать файл за $\mathcal{O}(n \log n)$ используя $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти и $\mathcal{O}(1)$ дополнительных файлов.

# 3 Шустрая сортировка и порядковые статистики

## 3.1 Практика

1. (a) Приведите вероятностный алгоритм поиска медианы в массиве различных чисел со средним временем работы $\mathcal{O}(n)$

   (b) Приведите детерминированный алгоритм поиска медианы в массиве различных чисел с гарантированным временем работы $\mathcal{O}(n)$

2. Придумайте, как добиться от `QuickSort` времени $\mathcal{O}(n \log n)$ в худшем случае.

3. Робот Иван Семеныч пробует пирожки. Содержимое пирожков делится на три типа. Всего пирожков $n$. Каждый пирожок можно попробовать не более одного раза. Любые два пирожка можно поменять местами. Память у робота маленькая, $\mathcal{O}(\log n)$ бит. Помогите Ивану Семенычу отсортировать пирожки по типу: сначала первый, потом второй, потом третий. Сортировка должна работать за линейное время.

4. Дан набор из $n$ пар гаек и болтов, в разных парах размеры гаек и болтов различны. Гайки и болты перемешаны. Требуется для каждой гайки найти соответствующий болт. Сравнивать можно только болты с гайками (сравнить две гайки между собой, или два болта между собой — невозможно). $\mathcal{O}(n \log n)$ в среднем.

5. Пусть задан массив $A$ из $n = a \cdot k$ различных чисел. Требуется разбить массив на $k$ частей по $a$ элементов в каждой так, чтобы любой элемент части $i$ был бы меньше любого элемента части $i + 1$ ($\forall i \in [1, k - 1]$). $\mathcal{O}(n \log k)$ в среднем.

6. Дан массив из $2 \cdot n - 1$ числа, который нельзя модифицировать. Есть дополнительная память на $n + 1$ элемент массива и ещё $\mathcal{O}(1)$ сверху. Требуется найти медиану за $\mathcal{O}(n \log n)$.

7. Дана последовательность из $n$ чисел, нужно за один проход и $\mathcal{O}(n)$ времени в среднем найти в ней $k$ минимумов, используя $\mathcal{O}(k)$ дополнительной памяти.

8. Даны массив из $n$ чисел и $m$ чисел $p_1, p_2, \ldots p_m$, нужно за $\mathcal{O}(n \log m + m)$ для каждого $i$ найти $p_i$-ую порядковую статистику.

9. Дан массив из $2n$ чисел. Найти минимальное и максимальное за $3n - 2$ сравнения.

10. Найти второй максимум в массиве за $n + \mathcal{O}(\log n)$ сравнений.

## 3.2 Домашнее задание

1. Оцените время работы детерминированного алгоритма поиска порядковой статистики, если вместо пятерок разбивать элементы на
   (a) семерки.
   (b) тройки.

2. (*только группа Влада*) Даны массив из $n$ чисел и $m$ чисел $p_1, p_2, \dots p_m$, нужно за $\mathcal{O}(n \log m + m)$ для каждого $i$ найти $p_i$-ую порядковую статистику.

3. Дан массив `A[1..n]` из $n$ различных чисел. Массив не обязательно отсортирован. Требуется найти $k$ ближайших к медиане элементов за линейное время. Решить для двух метрик.
   (a) По позиции в отсортированном массиве.
   $$d(x, \texttt{median}) = |\texttt{pos}(x) - \texttt{pos}(\texttt{median})|,$$
   где $\texttt{pos}(x)$ — позиция элемента $x$ в отсортированном массиве.
   (b) По значению.
   $$d(x, \texttt{median}) = |x - \texttt{median}|.$$

4. Даны два массива из положительных целых чисел $a$ и $b$, размер обоих равен $n$. Выбрать массив $p$ из $k$ различных чисел от 1 до $n$ так, чтобы $\frac{\sum_{i=1}^{k} a_{p_i}}{\sum_{i=1}^{k} b_{p_i}} \to \max$. Время $\mathcal{O}(n \log M)$, где $M = \max(\max(a_i), \max(b_i), n)$.

5. Докажите, что для поиска максимума в массиве различных чисел потребуется как минимум $n - 1$ сравнение.

6. Дана последовательность из $n$ чисел, нужно за один проход и $\mathcal{O}(n)$ времени в среднем найти в ней $k$ минимумов, используя $\mathcal{O}(k)$ дополнительной памяти.

7. (*только группа Антона*) Дан массив из $2n$ различных чисел. Найдите минимальное и максимальное за $3n - 2$ сравнения и докажите, что это точная нижняя оценка, то есть меньшего количества сравнений может не хватить.

## 3.3 Дополнительные задачи

1. В матрице $Q$ из натуральных чисел размера $N \times N$ найти подматрицу размера $H \times W$ с максимальной медианой. $H, W$ — нечётные.
   (a) $\mathcal{O}(N^2 \log Q_{\max})$. Здесь $Q_{\max}$ — максимальный элемент матрицы.
   (b) $\mathcal{O}(N^2 \log N)$.

2. Пусть алгоритм $A$ находит $i$-ый по порядку элемент, используя только попарные сравнения элементов. Покажите, что, используя результаты только этих сравнений, можно найти все элементы, меньшие $i$-ого, и все элементы, большие $i$-ого.

3. Дан массив из $2n$ различных чисел. Найдите минимальное и максимальное за $3n-2$ сравнения и докажите, что это точная нижняя оценка, то есть меньшего количества сравнений может не хватить.

4. Найдите второй максимум в массиве за $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ сравнение и докажите, что это точная нижняя оценка, то есть меньшего количества сравнений может не хватить.

5. Дан массив длины $n$. Изначально выделен отрезок позиций $1 \dots d$. Далее $n - d$ раз поступает команда «выведите медиану чисел в окне и сдвиньте отрезок на 1 направо».
   (a) Обработайте каждую команду за $\mathcal{O}(\log n)$.
   (b) Докажите, что не существует такой функции $f(n) \in o(\log n)$, что каждую команду можно обработать за $f(n)$.

# 4 Демоническое программирование

## 4.1 Практика

1. Найдите максимальную возрастающую подпоследовательность за $\mathcal{O}(n \log n)$.

   a) Найти длину
   b) Восстановить ответ

2. Найти максимальное по весу паросочетание за $\mathcal{O}(n)$ на

   (a) дереве из $n$ вершин,

   (b) простом цикле из $n$ вершин,

   (c) связном неориентированном графе из $n$ вершин и $n$ рёбер.

   Веса на рёбрах.

3. Есть следующее рекуррентное соотношение:

$$a_n = a_{n-1} + 2c_{n-1} + 1$$
$$b_n = 5 - c_{n-1}$$
$$c_n = c_{n-2} - b_{n-1}$$

   Нам известны $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$. Найти $a_n, b_n, c_n$ по модулю $p$ за $\mathcal{O}(\log n)$.

4. Даны две последовательности длины $n$. Придумайте, как найти наидлиннейшую общую подпоследовательность этих последовательностей.

   (a) За $\mathcal{O}(n^2)$.

   (b) За $\mathcal{O}(n \log n)$, в случае, если в одной из последовательностей все элементы различны.

5. Дан массив из $n$ целых чисел и число $d$. Найти подпоследовательность максимальной длины с условием, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на $d$.

6. Дан массив из $n$ целых чисел, число $d$ и число $k$. Найти подпоследовательность длины $k$ с максимальной суммой элементов при условии, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на $d$.

7. Дано натуральное число $s \leqslant 300$. Найти набор натуральных чисел, сумма которых будет равна $s$, а их наименьшее общее кратное — максимально.

## 4.2 Домашнее задание

1. Дана строка $s$ длины $n$. Для каждой пары $(i, j)$ найти длину максимального общего префикса $i$-го и $j$-го суффиксов строки $s$. $\mathcal{O}(n^2)$.

2. Дан набор нечестных монеток с вероятностью выпадения орла $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Требуется посчитать вероятность выпадения ровно $k$ орлов за $\mathcal{O}(n \cdot k)$. Операции над числами считать выполнимыми за $\mathcal{O}(1)$.

3. (*только группа Влада*)
   Дан массив из $n$ целых чисел и число $d$. Найти подпоследовательность максимальной длины с условием, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на $d$ за $O(n^2)$.

4. (*только группа Влада*)
   Дан массив из $n$ целых чисел, число $d$ и число $k$. Найти подпоследовательность длины $k$ с максимальной суммой элементов при условии, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на $d$. $O(n^2 k)$.

5. (*только группа Серёжи*)
   Пусть есть $n$ подарков разной натуральной стоимости и три поросёнка. Нужно раздать подарки как можно честнее (так, чтобы минимизировать разность суммарной стоимости подарков самого везучего поросёнка и самого невезучего). Придумайте алгоритм решения данной задачи за $\mathcal{O}(nW^2)$, где $W$ — суммарная стоимость подарков.

6. Клетки поля $n \times 5$ покрашены в чёрный и белый цвета. Будем называть получившийся узор красивым, если он не содержит одноцветного квадрата $2 \times 2$. Вычислите число красивых узоров по модулю небольшого простого числа за время $\mathcal{O}(\log n)$.

## 4.3 Дополнительные задачи

1. (*1 балл за пункты a + b вместе и 1 балл за пункт c*)
   Дана строка из латинских букв длины $n$, нужно ее запаковать в максимально короткую, используя правило $(k, i)$ — повторить $k$ символов начиная с $i$-й позиции. Заметим, что длина $(k, i)$ – не константа. Например, $xyabababababz \to xyab(8, 2)z$, $xyaaaabaaaabaaaab \to xya(3, 2)b(10, 2)$ (но это не оптимально, оптимально $xyaaaab(10, 2)$).
   (a) $\mathcal{O}(n^3)$.
   (b) $\mathcal{O}(n^2)$, считая, что длина строки $(k, i)$ – константа.
   (c) $\mathcal{O}(n^2)$.

2. (*1 балл за пункты a + b вместе и 1 балл за пункт c*)
   Есть $k$ грузовиков с заданной вместимостью, задача – перевезти $n$ вещей с заданными весами минимальным числом заездов. Один заезд – погрузить и отправить все грузовики.
   (a) $k = 1$, $\mathcal{O}(3^n)$.
   (b) $k = 2$, $\mathcal{O}(4^n)$.
   (c) $\mathcal{O}(3^n k)$.

3. (*1 балл за пункты a + b вместе и 1 балл за пункт c*)
   Вычислите, сколькими способами можно замостить доминошками клетчатое поле
   (a) $n \times 3$, за время $\mathcal{O}(n)$.
   (b) $n \times m$, за время $\mathcal{O}(4^n m)$.
   (c) $n \times m$, за время $\mathcal{O}(2^n nm)$.

   Ответ посчитать по модулю небольшого простого числа.

4. Вам дана доска фанеры размера $n \times m$. В неё было вбито несколько гвоздей с целыми координатами (от них остались некрасивые дырки). Сколькими способами можно разрезать доску на прямоугольники с целыми сторонами так, чтобы ни один из гвоздей не попал внутрь прямоугольника. Время: $\mathcal{O}(n^2 4^m)$.

5. * (*Эту задачу можно сдавать только устно*)
   Приведите полиномиальный алгоритм, вычисляющий количество разбиений клетчатой доски $n \times m$ на доминошки (другими словами, на прямоугольники $1 \times 2$ и $2 \times 1$).

6. Посчитать по модулю небольшого простого числа количество способов, которыми можно расставить на доске $n \times n$ сколько-либо небьющих друг друга коней, за $\mathcal{O}(n\, 8^n)$

# 5 Жадные алгоритмы и динамика

## 5.1 Практика

1. **Подпоследовательность-палиндром**

   Дана строка длины $n \leq 100$.
   Найти максимальную по длине подпоследовательность, которая является палиндромом.

2. **Пираты**

   Судно атакуют пираты. Для каждого пирата известны его азимут $a_i$ и время $t_i$, через которое пират приплывёт и совершит непотребство. Однако, у судна есть лазерная пушка, которой оно защищается. У пушки есть начальный азимут $a$ и угловая скорость вращения $\omega$. Пушка уничтожает все объекты, на которые она сейчас направлена. Помогите судну определить порядок уничтожения пиратов за $\mathcal{O}(n^2)$, чтобы не допустить непотребства.

3. **И снова подпоследовательности**

   Дан массив из $n$ натуральных чисел: $a_1, \ldots, a_n$. Выберите подпоследовательность $i_1 \leq \ldots \leq i_k \in \{1, \ldots, n\}$, такую, что $l \leq |i_j - i_{j-1}| \leq r$ и $\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} \to \max$.

   a) За $\mathcal{O}(n^2)$.
   b) За $\mathcal{O}(n)$.

4. **Subset cover**

   Дано число $n$ и семейство из $m$ множеств, каждое из которых — подмножество $U = \{1, 2, \ldots, n\}$. Выбрать минимальное количество элементов семейства, чтобы всё $U$ было ими покрыто.

5. **Перевозка товаров**

   Есть грузовик с заданной вместимостью, задача – перевезти $n$ вещей с заданными весами со склада в магазин минимальным числом заездов.

   a) $\mathcal{O}(3^n)$. Обязательно.
   b) (*) $\mathcal{O}(2^n n)$.

6. **Мягкие дедлайны**

   В фирму поступило $n$ заказов, у каждого есть время исполнения $t_i$ и жёсткий дедлайн $d_i$. В каком порядке выполнять заказы, чтобы всё успеть?

7. **(*) Жёсткие дедлайны**

   В фирму поступило $n$ заказов, у каждого есть время исполнения $t_i$ и жёсткий дедлайн $d_i$. В каком порядке и **какие** выполнять заказы, чтобы успеть **побольше**?

8. **Заказы и время конца**

   В фирму поступило $n$ заказов, которые можно выполнять в произвольном порядке. На выполнение заказа $i$ необходимо время $t_i$. В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Пусть $e_i$ – момент окончания выполнения заказа номер $i$. Распределите работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Время $\mathcal{O}(n \log n)$.

9. **Атлеты**

   $n$ атлетов хотят выстроить из своих тел башню максимальной высоты. Башня это цепочка атлетов, первый стоит на земле, второй стоит у него на плечах, третий стоит на плечах у второго и т.д. Каждый атлет характеризуется силой $s_i$ и массой $m_i$. Сила это максимальная масса, которую атлет способен держать у себя на плечах. Известно, что если атлет тяжелее, то он и сильнее, но атлеты равной массы могут иметь различную силу.

   a) В каком порядке выстроиться спортсменам, чтобы получилась башня высоты $n$?
   Если это возможно, конечно. $\mathcal{O}(n \log n)$.
   b) Какова максимальная высота башни? За $\mathcal{O}(n^2)$ динамикой.
   c) (*) Какова максимальная высота башни? За $\mathcal{O}(n \log n)$ жадностью.

10. **Выбор заявок в маршрутке**

    Маршрутка совершает рейс от первой до $n$-й остановки. В маршрутке $m$ мест для пассажиров. Есть $k$ человек, про каждого заранее известно, что он хочет доехать от остановки $s_i$ до $f_i$. Проезд для пассажира стоит 1 вне зависимости от расстояния между остановками. Максимизируйте прибыль, при условии, что можно выбирать, кого сажать в маршрутку на каждой остановке.
    $n, m, k \leq 10^6$.

11. (*) **Идейная**

    Машина тратит единицу топлива на километр, имеет бак объёма $k$ и находится в начале прямой дороги в точке 0. Для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на $i$-м километре дороги есть заправочная станция со своей положительной ценой $c_i$. Определите за время $\mathcal{O}(n)$, как проехать $n$ километров за минимальную стоимость.

12. (*) **Подпоследовательности и сортировки**

    Даны скобочные последовательности из круглых скобок. в каком порядке их склеить, чтобы получилась правильная?

13. (*) **Станки и сортировки**

    Имеется $n$ деталей и два станка. Каждая деталь должна сначала пройти обработку на первом станке, затем — на втором. При этом $i$-ая деталь обрабатывается на первом станке за $a_i$ времени, а на втором — за $b_i$ времени. Каждый станок в каждый момент времени может работать только с одной деталью. Требуется составить такой порядок подачи деталей на станки, чтобы итоговое время обработки всех деталей было бы минимальным. $\mathcal{O}(n \log n)$.

## 5.2 Домашнее задание

1. **(2) Паросочетания**

   Дан взвешенный неориентированный граф из $n \le 20$ вершин. Найдите максимальное по весу паросочетание.

2. **(2) Белоснежка и гномы, которые не хотят спать**

   Даны $n$ гномов. Если $i$-го гнома укладывать спать $a_i$ минут, он потом спит $b_i$ минут. Можно ли сделать так, чтобы в какой-то момент все гномы спали? $\mathcal{O}(n \log n)$.

3. **(2) Интерактивная обработка заказов**

   В фирму поступают заказы, которые можно выполнять в произвольном порядке. В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Изначально заказов нет, $i$-й заказ поступает в момент времени $r_i$, работать над ним нужно $t_i$. Пусть $e_i$ – момент окончания выполнения заказа номер $i$. Распределите работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Переходить от одного заказа к другому можно в любой момент времени (даже если заказ не доделан до конца, незаконченный заказ можно будет возобновить с того же места). Свойства заказа $(r_i, t_i)$ не известны до момента его поступления. Всего поступит $n$ заказов.

   a) За время $\mathcal{O}(n^2)$.
   b) *(доп.)* (+1) За время $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. **(1+1) Степени и антиклики**

   Будем называть *независимым множеством* или *антикликой* попарно несвязное подмножество вершин графа. Пусть в графе $G$ есть $n$ вершин, а максимальная степень равна $d$. Найдите в нём независимое множество размера хотя бы

   a) $\frac{n}{d+1}$ за время $\mathcal{O}(n)$
   b) $\sum\limits_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v)+1}$ за время $\mathcal{O}(n \log n)$

   Считайте, что граф уже дан в памяти в виде массива, где для каждой вершины хранится список её соседей.

5. **(2) Авторитеты**

   Есть $n$ человек. Человек $i$ готов примкнуть к нашей банде, если наш авторитет хотя бы $a_i$, при этом он к нашему авторитету прибавит $b_i$. Наш изначальный авторитет равен $A$. $a_i, b_i, A \in \mathbb{Z}$

   a) Можем ли завербовать всех людей? $\mathcal{O}(n \log n)$.
   b) *(доп.)* (+2) Какое максимальное число людей мы можем завербовать? $\mathcal{O}(n \log n)$. Половина балла даётся за доказательство.

6. **(3) Орлы и равноправие** *(только группа Серёжи)*

   Даны $n$ монеток, у каждой есть своя вероятность выпадения орла $p_i$. Нужно выбрать подмножество размера $k$ (чётное число) из них, для которого вероятность выпадения ровно $\frac{k}{2}$ орлов при одновременном подбрасывании максимальна.

   a) $\mathcal{O}(n \log n + k^3)$.
   b) *(доп.)* (+1) $\mathcal{O}(n + k^2)$.

   *Не забывайте включить жадный настрой.*
   *Не забывайте, что любую гипотезу можно проверить, вы же программисты.*
   *Разрешается пользоваться знаниями из динамического программирования и математики.*

## 5.3 Дополнительные задачи

7. **(2+2) Окружности и отрезки**

   Даны $n$ непересекающихся кругов на плоскости. Мы стоим в точке $(0, 0)$ и можем стрелять по прямой. Минимальным числом выстрелов проткнуть все круги.

   a) Все круги целиком лежат в первой четверти плоскости.
   b) Круги произвольны

8. **(1+1) Школьники и ямы**

   $n$ школьников упали в яму глубины $S$. Каждый школьник имеет рост (от ног до плеч) $h_i$ и длину рук $l_i$. Школьники могут вставать друг другу на плечи, верхний школьник может вытянуть руки.

   a) Могут ли выбраться все школьники? $\mathcal{O}(n \log n)$.
   b) Какое максимальное число школьников может выбраться? $\mathcal{O}(n \log n)$.

9. *Раскраской вершин* графа $G = (V, E)$ называется функция $c : V \to [m]$, сопоставляющая каждой вершине $G$ цвет от 1 до $m$. Раскраска называется *правильной*, если каждая пара соседних вершин имеет разные цвета.

   Для неориентированного графа $G = (V, E)$ его *хроматическим числом* $\chi(G)$ называется наименьшее возможное число цветов в правильной раскраске $G$.

   Для графа $G$ обозначим размер его максимального полного подграфа через $\omega(G)$.

   Рассмотрим на вещественной прямой замкнутые отрезки $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Сопоставим каждому отрезку $I_i$ вершину $v_i$ и каждой паре пересекающихся отрезков $(I_i, I_j)$ ребро $(v_i, v_j)$. Такой граф будем называть *интервальным графом*.

   Будем называть граф $G$ *совершенным*, если для любого его индуцированного подграфа $H$ верно $\omega(H) = \chi(H)$.

   Докажите, что каждый интервальный граф совершенен. Приведите алгоритм, красящий интервальный граф $G = (V, E)$ с $|V| = n$ в $\omega(H)$ цветов за время $O(n \log(n))$.

10. В фирму поступают заказы, которые можно выполнять в произвольном порядке. В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Изначально заказов нет, $i$-й заказ поступает в момент времени $r_i$, работать над ним нужно $t_i$.

    Все заказы объединены в проекты (один заказ относится к одному проекту, заказы из одного проекта могут поступать не подряд).

    Пусть $e_i$ – момент окончания выполнения последнего (в порядке выполнения) из заказов в проекте с номером $i$.

    Нужно распределить работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Свойства заказа ($r_i, t_i$, его проект) не известны до момента его поступления. Переходить от одного заказа к другому можно в любой момент времени (даже если заказ не доделан до конца).

    Придумайте решение, которое не более чем в два раза хуже оптимального. Время $\mathcal{O}(n \log n)$, при условии, что всего поступит $n$ заказов.