Студент: Александр Никулин
Дата: 16 ноября 2020 г.

---

**Задача 1.** *Разбейте вершины ориентированного графа на циклы. Т.е. каждая вершина должна быть покрыта ровно одним циклом. Либо скажите, что это невозможно. $\mathcal{O}(EV)$.*

*Решение.* Пусть у нас существует цикл из ориентированного графа, тогда для каждой вершины входящая и исходящая степень должны равняться единице. Разобьем каждую вершину на две, у каждой из которых будет равна 1 либо исходящая либо входящая степень. Для того чтобы получить цикл обратно достаточно склеить вершины с одинаковыми номерами. Разобьем по такому же принципу наш исходный граф, у нас получится два множества $V_{in}$ и $V_{out}$ и $|V_{in}| = |V_{out}|$. Сделаем его двудольным, соединив вершины ребрами из изначального графа. Мы знаем, что если превратить этот граф в сеть, добавив в одну долю исток, а в другую сток, а также пропускную способность равную 1, то с помощью алгоритма поиска наибольшего потока, мы также найдем и наибольшее паросочетание (тогда и только тогда).

Тогда можно предложить такой алгоритм:

- построим новый двудольный граф на основе изначального
- добавим в него исток и сток, а также пропускные способности равные 1
- с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найдем наибольший поток
- если $|f| = |V|$, то мы можем разбить граф на циклы (по насыщенным ребрам), в обратном случае - не можем.

Чтобы доказать его корректность достаточно доказать, что разбиение на циклы существует тогда и только тогда, когда в этом графе существует наибольшее паросочетание мощности $|V|$. Пусть такое разбиение существует, тогда после раздвоения вершин в новом графе это будет паросочетание (т.к каждой вершине инценденто только одно ребро), а также наибольшее, т.к. содержит $|V|$ ребер. Обратно, пусть существует наибольшее паросочетание мощности $|V|$, тогда после обьединения вершин, для каждой вершины будет ровно одно входящее и исходящее ребро (по определению паросочетания). Пусть это не является разбитием не циклы, тогда найдется вершина, у которой какая-то из степеней (входящая или исходящая) будет отлична от 1. Получили противоречие.

Время работы можно оценить как $\mathcal{O}(|f|E) = \mathcal{O}(|V|E) = \mathcal{O}(EV)$

**Задача 2.** *Дан граф и выделенные вершины $s, t$. Нужно проверить, правда ли существует единственный минимальный $s$ - $t$ разрез.*

(a) $\mathcal{O}(poly(V, E))$
(b) $\mathcal{O}(E)$ *при условии, что нам уже известен максимальный поток (сам поток, не только его величина).*

*Решение.*

(a) Из теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе мы знаем, что $maxf(S, T) = minc(S, T)$. Из ее доказательства мы также знаем, что максимальный поток ограничен сверху любым разрезом, а минимальный является наименьшей оценкой. Тогда если у нас есть единственный минимальный разрез, увеличение его пропускной способности $c(S, T)$ обязательно приведет к увеличению $max|f|$, т.к. увеличилась единственная минимальная оценка сверху. Обозначим за $E^{'}$ множество ребер составляющих минимальный разрез. Попробуем для каждого ребра $e \in E^{'}$ увеличить его пропускную способность на 1, после чего посчитаем максимальный поток на новом графе. Случай, когда $|f^{'}| \nearrow$ нам не интересен т.к. он ничего не нарушает. Пусть $|f^{'}| = |f|$, тогда в новом графе $e$ не принадлежит минимальному разрезу, иначе максимальный поток увеличился бы. Также, минимальный разрез в новом графе останется минимальным и в старом т.к. его пропускная способность равна максимальному потоку, но при этом он как минимум на одно ребро отличается от изначального. Получили противоречие.

Оценим асимптотику. Будем находить максимальный поток с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона за $\mathcal{O}(|f|E)$, а запускать алгоритм придется для каждого ребра в разрезе, то есть

$k+1 = \mathcal{O}(E)$, итого $\mathcal{O}(E^2|f|)$. Точнее оценить сложнее т.к. пропускные способности могут быть любыми. Либо использовать что-то работающее, например, за $\mathcal{O}(E^2V)$ (алгоритм Эдмондса — Карпа).

(b) Пусть дан максимальный поток $p$ со значением $|f|$. Если у нас есть несколько максимальных потоков, тогда в остаточной сети будет существовать путь из истока в сток (т.к. дополняющих путей быть не может, только равные), а также максимальный поток равный $|f|$, ему будет соответствовать другой минимальный разрез (следует из док-ва теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе, чтобы найти этот разрез достаточно запустить $dfs$ и сделать разрез по всем посещенным вершинам). Запустим $dfs$ из истока в остаточной сети. Если он нашел путь до стока по ненасыщенным ребрам, то минимальный разрез не единственный. Один $dfs$ отработает за $\mathcal{O}(E)$.

**Задача 3.** *В неориентированном графе без кратных рёбер необходимо удалить минимальное число рёбер так, чтобы увеличилось количество компонент связности.*

(a) $\mathcal{O}(V \cdot Flow)$*, где Flow – время работы какого-нибудь алгоритма поиска максимального потока.*

(b) $\mathcal{O}\left(E^2\right)$.

*Решение.*

(a) В найденном решении у нас будет две компоненты графа, связанные минимальным количеством ребер. Если мы присвоим всем ребрам пропускную способность 1, то задача сведется к поиску максимального потока. Чтобы найти минимальное число, нам надо найти максимальный поток с этом графе. Чтобы сделать его сетью, выберем какой-то сток $s$ и будем перебирать исток $t$. Так мы получим все возможные разрезы относительно $s$. Посчитаем максимальные потоки и возьмем минимальный из них (т.к. он равен минимальному из всех разрезу, пропускная способность которого равна количеству ребер). Т.к. компонент связности может быть несколько, нужно сделать это для каждой компоненты т.к. где-то могут найтись лучшие варианты.

Оценим время работы: в одной компоненте это $\mathcal{O}(V_i \cdot Flow)$. Просуммировав это по всем компонентам и вынеся $Flow$ получим $\mathcal{O}(V \cdot Flow)$.

(b) Каждый поток $i$ можно ограничить $deg(s_i)$, что в сумме даст $\mathcal{O}(2E)$. Для плотного графа $V = \mathcal{O}(E)$. Получаем, $\mathcal{O}(E \cdot 2E) = (O)(E^2)$.