Студент: Александр Никулин
Дата: 2 ноября 2020 г.

Задача 1. *Дан взвешенный неориентированный граф $G = \langle V, E\rangle$. В графе есть подмножество вершин T, которые мы назовем терминалами. Минимальное дерево Штайнера - это связный подграф графа G минимального веса, содержащий все терминалы. Требуется найти такое дерево.*

(a) *Пусть $|T| = 3$, решить за $\mathcal{O}(E \log V)$*
(b) *Пусть $|T| = 4$, решить за $\mathcal{O}\left(V^3\right)$*

Решение.

Докажем одно общее утверждение, которое понадобится далее для обоснования алгоритма. Пусть у нас есть дерево $T = \langle V, E\rangle$. Обозначим также через A_i количество вершин со степенью равной i. Тогда, по лемме о рукопожатиях верно соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = \sum_{i=1}^{n} iA_i = 2(n-1)$$

С другой стороны, $\sum_{i=1}^{n} A_i = n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2A_i = 2n$. Вычитая, получим соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-2)A_i = -A_1 + A_3 + 2A_4 + \cdots = -2$$

Откуда можно получить, что $A_1 = 2 + A_3 + \cdots = A_3 + C$. Таким образом, $A_1 > A_3$. Это значит, что количество вершин со степенью 3 строго меньше, чем листьев.

(a) Рассмотрим наибольшее общий случай, когда никакая из терминальных вершин не лежит на кратчайшем пути между двумя другими (т.к. в таком случае решение тривиально и сводится к поиску одного кратчайшего пути). Представим, что мы уже нашли требуемое минимальное дерево. Подвесим его за одну из терминальных вершин, тогда оставшиеся терминальные вершины обязаны быть листьями т.к. их степень не может быть больше 1 (т.к. они не лежат ни на каком другом пути, а из них только один простой в каждую терминальную). Для простоты, все промежуточные простые пути можно заменить на сумму весов, чтобы осталось только одно ребро (на док-во это не влияет). Т.к. у нас 2 листа, количество вершин со степенью $3 \leq 1$. Если оно равно 0, то мы получаем случай, когда какая-то из вершин лежит на кратчайшем пути между двумя другими (просто цепь). Если она одна, то мы получаем дерево с одной вершиной ветвления.

Осталось понять как найти такую вершину (вершину Штайнера), чтобы простые пути проходящие через нее до терминальных вершин были минимальны. Это понятно из самого требования – пути от данной вершины до каждой терминальной должны быть кратчайшими (если не кратчайшие, можем найти путь меньшего веса и заменить, получив более оптимальное решение). Можно придумать такой алгоритм:

Найдем с помощью алгоритма Дейкстры кратчайшие пути от терминальных вершин до всех остальных (так можно сделать т.к. у нас неорграф). Осталось найти такую вершину, что сумма кратчайших путей от терминальных до нее будет минимальной:

$$res = min_{v \in V}(dt_1[v] + dt_2[v] + dt_3[v])$$

Ответом будет обьединение кратчайших путей. Асимптотику можно оценить как $T(n) = 3 \cdot E \log V + V = \mathcal{O}(E \log V)$.

(b) Опять рассмотрим наиболее общий случай, когда никакие терминальные вершины не лежат на кратчайших путях между оставшимися. Подвесим дерево за какую-то терминальную вершину, тогда оставшиеся обязательно будут листьями. Т.к. их количество равно 3, то количество вершин со степенью $3 \leq 2$, а со степенью $4 \leq 1$. Таким образом, нам надо найти в худшем случае две вершины такие, что кратчайшие пути от них до остальнымх терминальных вершин будут минимальными, а также путь между этими двумя вершинами. Все остальные случаи получаются из такого, например, если у нас одна вершина со степенью 3, то какая-то одна терминальная вершина лежит на кратчайшем пути между двумя другими. Если одна вершина со степенью 4 или две двершины со степенью 3, то никакие терминальные вершины не лежат на кратчайших путях между остальными, и т.д.

Алгоримт аналогичен прошлому пункту, однако теперь будет рассматривать уже две вершины. В общем виде решение будет выглядеть так:

$$res = min_{u,v \in V}(d[u][v] + \sum_{k \in T} min(d[k][u], d[k][v]))$$

Здесь уже не подойдет алгоритм Дейкстры, т.к. нам надо для каждой u, v пересчитывать кратчайший путь, что слишком долго. Поэтому можно посчитать кратчайшие пути для всех вершин с помощью Флойда-Уоршелла. Асимптотику можно оценить как $T(n) = V^3 + V^2 = \mathcal{O}(V^3)$

P.S. Признаюсь, чуть не отправил жадное решение, соблазнительно и как всегда обманчиво, благо успел найти контр-пример.

Задача 2. *Нужно научиться на запрос «уменьшился вес ребра» за $\mathcal{O}\left(V^2\right)$ пересчитывать матрицу расстояний. Считайте, что в графе не было и не появилось отрицательных циклов.*

Решение. По условию задачи у нас уже предподсчитана матрица расстояний для всех вершин (например с помощью Флойда-Уоршелла). Граф может быть как ориентированный так и нет, это в целом не очень важно для решения.

Пусть нам приходит запрос на изменение веса ребра (u, v). Для произвольных вершин a и b у нас уже есть значение для кратчайшего пути (туда и обратно, если они различны). После запроса нам нужно проверить – остался ли он все еще кратчайшим или $a \to b$ через путь с измененным ребром стал короче. Может быть два случая (т.к. может существовать путь $a \to u$ и $a \to v$):

$$d[a][b] = \min(d[a][b], d[a][u] + w_{u \to v} + d[v][b], d[a][v] + w_{v \to u} + d[u][b])$$

Если граф ориентированный, то ребро в какую-то сторону может не существовать, тем не менее, все будет работать т.к. в матрице расстояний в таком случае записано значение ∞. Таким образом нам нужно проверить все пары вершин, вычисления все происходят за константу, поэтому асимптотика $\mathcal{O}(V^2)$.