

Практика по алгоритмам, ВШЭ

Сергей Копелиович, Владислав Кораблинов

Осень, 2020

Contents

1	Асимптотика и линейные алгоритмы	2
1.1	Практика	2
1.2	Домашнее задание	4
1.3	Дополнительные задачи	4
2	Сортировки и кучи	6
2.1	Практика	6
2.2	Домашнее задание	6
2.3	Дополнительные задачи	7
3	Шустрая сортировка и порядковые статистики	12
3.1	Практика	12
3.2	Домашнее задание	13
3.3	Дополнительные задачи	13
4	Демоническое программирование	14
4.1	Практика	14
4.2	Домашнее задание	15
4.3	Дополнительные задачи	15
5	Жадные алгоритмы и динамика	17
5.1	Практика	17
5.2	Домашнее задание	19
5.3	Дополнительные задачи	20
6	Поиск в глубину	21
6.1	Практика	21
6.2	Домашнее задание	21
7	Кратчайшие пути	23
7.1	Практика	23
7.2	Домашнее задание	25

1 Асимптотика и линейные алгоритмы

1.1 Практика

Напомним определения:

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \equiv \exists N, C > 0 : \forall n \geq N : f(n) \leq C \cdot g(n)$
- $f(n) \in \Omega(g(n)) \equiv \exists N, C > 0 : \forall n \geq N : C \cdot g(n) \leq f(n)$
- $f(n) \in \Theta(g(n)) \equiv \exists N, C_1 > 0, C_2 > 0 : \forall n \geq N : C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n)$
- $f(n) \in o(g(n)) \equiv \forall C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : f(n) < C \cdot g(n)$
- $f(n) \in \omega(g(n)) \equiv \forall C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : C \cdot g(n) < f(n)$

Все функции здесь $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ или $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (далее будет ясно из контекста, какой класс функций используется). В дальнейшем, когда речь идет о принадлежности функций вышеопределенным множествам, мы будем использовать знак “ $=$ ” вместо “ \in ”, т.к. в литературе обычно используются именно такие обозначения.

Асимптотики

1. Докажите, что:

- (a) $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \mathcal{O}(f(n))$
- (b) $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = o(f(n))$
- (c) $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$

2. Контекст имеет значение

Правда ли, что $f(n) = \mathcal{O}(f(n)^2)$?

3. Классы

Определим отношение “ \sim ”. Будем говорить, что $f \sim g$, если $f = \Theta(g)$. Покажите, что \sim — отношение эквивалентности, т.е. оно

- Рефлексивное: $\forall f : f \sim f$,
- Симметричное: $\forall f, g : f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$,
- Транзитивное: $\forall f, g, h : (f \sim g) \wedge (g \sim h) \Rightarrow f \sim h$.

4. Порядки

Определим отношение “ \preceq ”. Будем говорить, что $f \preceq g$, если $f = \mathcal{O}(g)$.

Определим отношение $f \preceq g \equiv f = \mathcal{O}(g)$.

- (a) Докажите, что \preceq — отношение предпорядка (рефлексивное и транзитивное)
- (b) Докажите, что \preceq — не отношение частичного порядка, так как не удовлетворяет антисимметричности
- (c) Докажите, что \preceq — отношение частичного порядка на классах эквивалентности по \sim ?

5. Считайте, что функции здесь $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и $\forall n : f(n) > 1 \wedge g(n) > 1$.

- (a) $f(n) = \Omega(f(n/2))$?
- (b) $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = \mathcal{O}(\log g(n))$?
- (c) $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = \mathcal{O}(2^{g(n)})$?
- (d) $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = o(\log g(n))$?
- (e) $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = o(2^{g(n)})$?
- (f) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \Omega(\log n)$?

6. Определить асимптотику (считайте, что при $x \leq 100$ будет выполняться $T(x) = 100$).

- (a) $T(x) = T(a) + T(x - a) + n$ для натурального числа a .
- (b) $T(x) = T(\frac{x}{2}) + 1$.
- (c) $T(x) = 2 \cdot T(\sqrt{x}) + \log x$

Линейные алгоритмы

7. Дана скобочная последовательность, составленная из скобок '(', ')', '[', ']', '{', '}'. Последовательность называется корректной, если каждой открывающей скобке соответствует закрывающая скобка того же типа, и соблюдается вложенность. Примеры: $(\{\})$ и $()()$ – корректные, а $()$ и $[(])$ – нет.

Придумайте алгоритм, который проверяет корректность последовательности за линейное время.

8. Пусть элементы здесь линейно упорядочены и мы умеем сравнивать их за $\mathcal{O}(1)$.
- (a) Придумайте стек, в котором можно узнавать минимум за $\mathcal{O}(1)$. Все остальные операции стека также должны работать за $\mathcal{O}(1)$.
 - (b) Придумайте очередь, в которой можно узнавать минимум за $\mathcal{O}(1)$. Все остальные операции очереди должны работать за амортизированное $\mathcal{O}(1)$.
 - (c) Придумайте более эффективный по памяти вариант очереди с минимумом на основе пары из обычной очереди и дека.

9. Дан массив целых чисел a_i . Придумайте структуру данных, которая бы умела отвечать на запросы вида “По данным l и r вернуть $\sum_{i=l}^r a_i$ ” за $\mathcal{O}(1)$.

Разрешается сделать предподсчёт за $\mathcal{O}(n)$. Значения в массиве не меняются.

10. Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ и $S \in \mathbb{N}$. Найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что сумма $\sum_{i=l}^r a_i = S$. Задачу требуется решить за линейное от n время.
11. Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Для каждого a_i найти самый правый из элементов, которые левее и не больше его. Задачу требуется решить за линейное от n время.
12. Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что
- (a) значение $(r - l + 1) \min_{i \in [l, r]} a_i$ было бы максимально.
 - (b) значение $\left(\sum_{i \in [l, r]} a_i \right) \min_{i \in [l, r]} a_i$ было бы максимально.

Задачу требуется решить за линейное от n время.

13. Вам дан массив натуральных чисел и число k . Требуется найти подотрезок массива такой, что НОК чисел на нем равен k или заявить, что такого нет. Время работы: $\mathcal{O}(nT_{LCM}(k))$, где $T_{LCM}(k)$ — время подсчета НОК для чисел размера k .

1.2 Домашнее задание

- Дайте ответ для двух случаев $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$:
 - Если в определении \mathcal{O} опустить условие про N (т.е. оставить просто $\forall n$), будет ли полученное определение эквивалентно исходному?
 - Тот же вопрос про o .
- Считайте здесь, что $\forall n : f(n) > 1 \wedge g(n) > 1$. Правда ли, что $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = o(2^{g(n)})$?
- Заполните табличку и поясните (особенно строчки 4 и 7):

A	B	\mathcal{O}	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	+	+	—	—	—
$\log^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
\sqrt{n}	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\log m}$	$m^{\log n}$					
$\log(n!)$	$\log(n^n)$					

Здесь все буквы, кроме n , — константы.

- Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ и $S \in \mathbb{N}$. Найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что сумма $\sum_{i=l}^r a_i = S$. Задачу требуется решить за линейное от n время. **Подсказки:**
 - Для каждого i найдите максимальное такое r_i , что $\sum_{j=i}^{r_i} a_j \leq S$ за $\mathcal{O}(n)$ для каждого i .
 - Найдите за $\mathcal{O}(n)$ ответ задачи, если известны r_1, \dots, r_n .
 - Докажите, что $r_i \leq r_{i+1}$.
 - Пользуясь предыдущим пунктом найдите все r_i за $\mathcal{O}(n)$.
- Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$.
 - За $\mathcal{O}(n)$ для каждого a_i найти самый правый из элементов, которые левее и меньше его.
 - За $\mathcal{O}(n)$ для каждого a_i найти самый левый из элементов, которые правее и меньше его.
 - За $\mathcal{O}(n)$ найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что значение $(r - l + 1) \min_{i \in [l, r]} a_i$ было бы максимально.
 - За $\mathcal{O}(n)$ найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что значение $\left(\sum_{i \in [l, r]} a_i\right) \min_{i \in [l, r]} a_i$ было бы максимально.
- Вам дан массив из n элементов и список из m запросов $add(x, l, r)$: прибавить x к каждому элементу на отрезке $[l, r]$. За $\mathcal{O}(n + m)$ выведите массив, получающийся из исходного после выполнения заданных запросов.
- (только группа Антона) Определить асимптотику $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \log n \rfloor) + 2^{\log^* n}$, где $\log^* n$ — **итерированный логарифм**.

1.3 Дополнительные задачи

- Упорядочите функции по скорости роста и обозначьте неравенства между соседями. Укажите, в каких неравенствах $f = o(g)$, а в каких $f = \Theta(g)$

$\log(\log^* n)$	$2^{\log^* n}$	$(\sqrt{n})^{\log n}$	n^2	$n!$	$(\log n)!$
$(3/2)^n$	n^3	$\log^2 n$	$\log n!$	2^{2^n}	$n^{1/\log n}$
$\ln \ln n$	$\log^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\log \log n}$	$\ln n$	1
$2^{\ln n}$	$(\log n)^{\log n}$	e^n	$4^{\log n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\log n}$
$\log^* \log n$	$2^{\sqrt{2 \log n}}$	n	2^n	$n \log n$	$2^{2^{n+1}}$

Примечание: $\log^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{если } n \leq 1; \\ 1 + \log^*(\log n) & \text{иначе.} \end{cases}$

2. Определить асимптотику (считайте, что при $n \leq 100$ будет выполняться $T(n) = 100$).
 - (a) $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 17 + n$.
 - (b) $T(n) = T(\alpha \cdot n) + T((1 - \alpha) \cdot n) + n$ для произвольной константы $\alpha \in (0, 1)$.
 - (c) $T(n) = 4 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n^k$ для $k \in \{1, 2, 3\}$.
3. Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что сумма $\sum_{i=l}^r a_i$ была бы максимальной. Задачу требуется решить за линейное от n время.
4. Дано число, представленное n цифрами в d -ичной записи без ведущих нулей. Из числа требуется вычеркнуть ровно k цифр так, чтобы результат был максимальным. Задачу требуется решить за линейное от n время.
5. Вам дан массив из n элементов и число k . Все числа лежат в отрезке $[1..n]$. Найдите такие l и r , что на отрезке $[l, r]$ встречается хотя бы k различных элементов, или сообщите, что такого отрезка нет. Если таких отрезков несколько, выберите тот из них, длина которого минимальна. Время работы $\mathcal{O}(n)$.
6. Вам дан массив натуральных чисел и число k . Требуется найти подотрезок массива такой, что НОК чисел на нем равен k или заявить, что такого нет. Время работы: $\mathcal{O}(nT_{LCM}(k))$, где $T_{LCM}(k)$ — время подсчета НОК для чисел размера k .
7. Дана квадратная матрица из нулей и единиц. Найти наибольший по площади подпрямоугольник, состоящий только из нулей за $\mathcal{O}(n^2)$.
8. Вам каждый день на протяжении некоторого времени поступает запрос «вырастет ли курс Apple на бирже», и у вас есть n советников, с которыми вы можете консультироваться. Вы отвечаете да или нет, и в конце каждого дня вам говорят, правильно ли вы ответили. Придумайте алгоритм, который сделает не более $10(\log n + m)$ ошибок, где m — число ошибок, которое сделает лучший советник (подсказка: назначьте советникам веса и изменяйте их в зависимости от правильности их ответов).
9. Придумайте расширяющийся массив с реальным (не амортизированным) временем добавления $\mathcal{O}(1)$.
10. Дан массив целых чисел от 1 до n длины $n + 1$, который нельзя модифицировать. Используя $\mathcal{O}(\log n)$ битов дополнительной памяти, найдите в массиве пару одинаковых чисел за $\mathcal{O}(n)$.
11. Дана последовательность $\sigma = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, где каждый $a_i \in [n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим частоту появления элемента x через $f_\sigma[x] = |\{i | a_i = x\}|$. Известно, что $\exists_x f_\sigma[x] = 1$ и для всех остальных значений $y \neq x, f_\sigma[y] \equiv 0 \pmod 2$. Требуется найти x за один проход по последовательности, используя $\mathcal{O}(\log n + \log m)$ бит памяти.
12. Дана последовательность $\sigma = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, где каждый $a_i \in [n]$. Известно, что $\exists_x f_\sigma[x] > \frac{m}{2}$. Требуется найти x за один проход по последовательности, используя $\mathcal{O}(\log n + \log m)$ бит памяти.

2 Сортировки и кучи

2.1 Практика

1. Есть n веревок, каждая имеет целую длину l_i , которые можно резать. Нужно получить k одинаковых кусков максимальной целочисленной длины (также могут остаться неиспользованные обрезки). $\mathcal{O}(n \log l_{\max})$.
2. Есть k отсортированных массивов. В сумме массивы содержат n элементов. Слить массивы за $\mathcal{O}(n \log k)$.
3. Придумайте детерминированную структуру данных на основе бинарной кучи, которая умеет делать `Insert(x)`, `DeleteMedian()`, все операции за $\mathcal{O}(\log n)$.
4. Модифицируйте операцию `SiftUp` для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $\mathcal{O}(\log n)$, но при этом делала лишь $\mathcal{O}(\log \log n)$ сравнений.
5. Модифицируйте операцию `SiftDown` для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $\mathcal{O}(\log n)$, но при этом делала лишь $\log_2 n + \mathcal{O}(\log \log n)$ сравнений.
6. Даны два массива a и b длины n , сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в отсортированном порядке.

(a) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

(b) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

(c) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

(d) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.

Здесь считайте, что дополнительная память — количество чисел длины $\mathcal{O}(\log n)$, которые вы можете сохранить.

7. Покажите, что любая сортировка сравнениями, которая верно работает хотя бы на доле $\frac{1}{100^n}$ от всех перестановок, не может работать за $\mathcal{O}(n \log n)$ на всех тестах.
8. Дана обычная бинарная куча (с минимумом в голове), требуется узнать k -й минимум.
 - (a) $\mathcal{O}(k \log n)$
 - (b) $\mathcal{O}(k^2)$
 - (c) $\mathcal{O}(k \log k)$
9. Пусть дан массив размера n из целых чисел. Требуется сделать предварительные вычисления (в будущем мы будем кратко называть их *предподсчёт*) за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы затем ответить на некоторое неизвестное число запросов про массив вида “сколько раз число x встречается на отрезке $[l..r]$ ”, причём на каждый запрос можно потратить $\mathcal{O}(\log n)$ времени.
10. Инверсией в массиве чисел $a[\dots]$ называется такая пара индексов i, j , что $i < j$, но $a_i > a_j$.

Дан массив из n различных элементов. Требуется найти число инверсий за $\mathcal{O}(n \log n)$.

2.2 Домашнее задание

1. Есть m стойл с координатами x_1, \dots, x_m и n коров. Расставить коров по стойлам (не более одной в стойло) так, чтобы минимальное расстояние между коровами было максимально. $\mathcal{O}(m(\log m + \log x_{\max}))$.
2. (только группа Антона) Даны два отсортированных массива длины n , которые нельзя модифицировать. Найдите k -ю порядковую статистику в объединении массивов (то есть элемент, находившийся бы на k -ой позиции если бы массивы слили), используя $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.
 - (a) За $\mathcal{O}(\log^2 n)$.

- (b) За $\mathcal{O}(\log n)$.
3. (только группа Влада) Даны два массива a и b длины n , сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в отсортированном порядке.

- (a) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.
 (b) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.
 (c) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.
 (d) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.

Здесь считайте, что дополнительная память — количество чисел длины $\mathcal{O}(\log n)$, которые вы можете сохранить.

4. (только группа Влада) Дана обычная бинарная куча (с минимумом в голове), требуется узнать k -й минимум.

- (a) $\mathcal{O}(k \log n)$
 (b) $\mathcal{O}(k \log k)$

5. (только группа Влада) Пусть дан массив размера n из целых чисел. Требуется сделать предварительные вычисления (в будущем мы будем кратко называть их *предподсчёт*) за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы затем ответить на некоторое неизвестное число запросов про массив вида “сколько раз число x встречается на отрезке $[l..r]$ ”, причём на каждый запрос можно потратить $\mathcal{O}(\log n)$ времени.

6. В свободное время Анка-пулемётчица любит сортировать патроны по серийным номерам. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке, как Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восвояси. Как оказалось, патроны перемешались не сильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на k . Всего патронов n . Помогите Анке отсортировать патроны.

- (a) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(nk)$.
 (b) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n + I)$, где I — число инверсий.
 (c) Докажите нижнюю оценку на время сортировки $\Omega(n \log k)$.
 (d) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n \log k)$ (если вы решили этот пункт, автоматически засчитывается и пункт а).

7. (только группа Антона) Дано $2n - 1$ коробок с чёрными и белыми шарами. В i -ой коробке находится w_i белых и b_i чёрных шаров. Всего в коробках находится W белых и B чёрных шаров. Требуется выбрать n коробок таким образом, чтобы суммарное число белых шаров в них было не менее $\frac{W}{2}$, а чёрных не менее $\frac{B}{2}$. Решить за $\mathcal{O}(n \log n)$.

2.3 Дополнительные задачи

1. Дан массив длины n , в котором встречаются $m \leq n$ различных элементов.
- (a) Пусть зафиксирован набор частот элементов $p_i > 0, i = 1 \dots m$. Докажите нижнюю оценку $n \left(\sum_{i=1}^m p_i \log \frac{1}{p_i} \right) - n \log e$ на число сравнений в худшем случае при сортировке сравнениями. Полезный факт: $n \ln n \geq \ln n! = n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n)$.
- (b) Докажите нижнюю оценку $n \log \frac{m}{e}$ на число сравнений в худшем случае при сортировке сравнениями в пределе, если $m = o(n)$.
2. Куча хранится в массиве длины n . Родитель p хранит детей в ячейках $2 \cdot p + 1$ и $2 \cdot p + 2$. Алгоритм приступает к сортировке. Сортировка устроена следующим образом.
- Поменять первый и последний элемент кучи местами.

- Уменьшить размер кучи на единицу.
- Запустить **SiftDown** на первом элементе.

SiftDown меняет родителя с наибольшим ребенком (при условии, что ребенок больше родителя) и запускается рекурсивно. Требуется придумать алгоритм, который по n выдаёт перестановку чисел от 1 до n , которая является корректной кучей и приводит к максимальному количеству вызовов **SiftDown** при сортировке. Время работы — $\mathcal{O}(n \log n)$.

- Дано множество из n точек на плоскости. Найти пару ближайших точек за $\mathcal{O}(n \log n)$.
 - Дано множество из n векторов на плоскости. Разрешается координату любого вектора умножить на -1. Найти пару векторов, чья сумма минимальна, за $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Дано бинарное дерево: $Tree ::= Node(Tree, Tree) | Empty$ (эта запись означает, что дерево — это либо вершина с парой потомков-деревьев, либо особое значение *Empty*). Определим функцию **rank**(x) следующим образом:

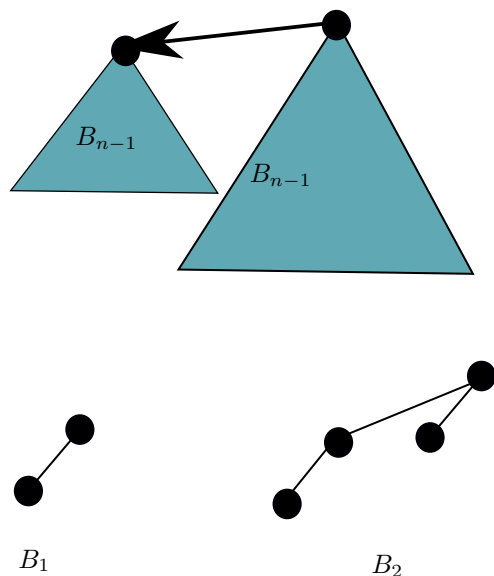
- **rank**(*Empty*) = 0
- **rank**($Node(left, right)$) = $\min(\mathbf{rank}(left), \mathbf{rank}(right)) + 1$.

Назовём бинарное дерево *скошенным влево (левацким)*, если для его вершин выполнено следующее свойство:

$$\forall x = Node(left, right) \mathbf{rank}(left) \geq \mathbf{rank}(right).$$

Скошенная влево (левацкая) куча — это скошенное влево дерево, в вершинах которого хранятся данные, для которых выполнено свойство кучи.

- Докажите, что для любого скошенного влево дерева $|T| \geq 2^{\mathbf{rank}(T)} - 1$ ($|T|$ обозначает количество вершин в дереве T).
 - Придумайте, как слить две скошенные влево кучи H_1 и H_2 за время $\mathcal{O}(\log |H_1| + \log |H_2|)$.
 - Придумайте, как используя операцию слияния, построенную на предыдущем шаге, реализовать операции:
 - **Insert**(x) — добавление элемента x в кучу,
 - **ExtractMin**() — удаление минимального элемента из кучи.
- Пусть B_n (биномиальное дерево порядка n) определено следующим образом:
 - при $n = 0$ это дерево из одной вершины.
 - при $n > 0$ это B_{n-1} , корню которого первым ребенком подвешено еще одно B_{n-1} .



- (a) Докажите, что B_n имеет высоту n .
 - (b) Докажите, что в B_n содержится ровно 2^n вершин.
 - (c) Определим биномиальную кучу как набор биномиальных деревьев, в котором нет двух деревьев одного порядка. Покажите, что для любого n существует биномиальная куча с n вершинами.
 - (d) Пусть на всех деревьях биномиальной кучи выполняется свойство кучи (min в голове). Придумайте **GetMin** за $\mathcal{O}(\log n)$.
 - (e) Придумайте **Merge** за $\mathcal{O}(\log n)$.
 - (f) Придумайте **Add** за $\mathcal{O}(\log n)$.
 - (g) Придумайте **ExtractMin** за $\mathcal{O}(\log n)$.
 - (h) Придумайте **DecreaseKey** по ссылке на узел. $\mathcal{O}(\log n)$.
 - (i) Придумайте **Delete** по ссылке на узел. $\mathcal{O}(\log n)$.
6. Покажите, что n операций **Add** подряд в биномиальную кучу работают за $\mathcal{O}(n)$.
7. Рассмотрим бинарную скошенную систему исчисления. На каждой позиции в скошенной записи числа может стоять цифра 0, 1 или 2. Число $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$ в скошенной системе переводится в десятичную по формуле $\sum_{i=1}^k a_i \cdot (2^i - 1)$.
В скошенной системе счисления есть два ограничения: цифра 2 может встречаться в записи не более одного раза; все цифры следующих меньших разрядов равны нулю. Пример первых чисел: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 100, 101...
- (a) Докажите, что каждое неотрицательное целое число имеет единственное возможное представление в скошенной системе счисления.
 - (b) Придумайте, как увеличить число в скошенной системе на единицу за $\mathcal{O}(1)$.
8. Определим структуру данных “скошенный список”. Список длины n строится так:
- запишем число n в скошенной системе счисления: $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$

- для каждого i смотрим в соответствующую позицию скошенной записи числа n и создаём a_i полных двоичных деревьев высоты i
- размещаем n элементов списка: сперва выбираем дерево в порядке возрастания высоты, а внутри конкретного дерева размещаем в порядке обхода в глубину: «корень, левый ребёнок, правый ребёнок»

Примеры скошенных списков длин 1, 2, 3, 4, 5:

Figure 1: Лист [a] (число: 1)



Figure 2: Лист [a b] (число: 2)



Figure 3: Лист [a b c] (число: 10)



Figure 4: Лист [a b c d] (число: 11)

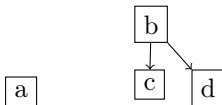
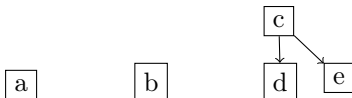


Figure 5: Лист [a b c d e] (число: 12)



Придумайте, как реализовать следующие операции со списком длины n :

- Добавление элемента в начало списка за $\mathcal{O}(1)$.
 - Доступ к i -му элементу за $\mathcal{O}(\log n)$.
 - Получить скошенный список из k последних элементов данного скошенного списка за $\mathcal{O}(\log n)$.
9. Придумайте структуру данных, которая поддерживает следующие операции (в оценках времени работы n — текущее количество элементов):
- **Insert(x)** — добавление элемента x за $\mathcal{O}(\log n)$,
 - **ExtractMin()** — удаление минимального элемента за $\mathcal{O}(\log n)$,
 - **Clone()** — копирование структуры за $\mathcal{O}(1)$ (после копирования с каждой из копий можно независимо проделывать любую из данных трех операций).

Подсказка: за основу можно взять левацкую кучу.

10. Структура данных «файл последовательного доступа» поддерживает следующие операции за $\mathcal{O}(1)$:

- *Read()*: чтение числа из файла на текущей позиции и перевод позиции вперёд на 1 элемент.
- *Write(x)*: запись числа в файл в текущую позицию и перевод позиции вперёд на 1 элемент.
- *Rewind()*: перевод позиции на начало файла.

Требуется отсортировать файл за $\mathcal{O}(n \log n)$ используя $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти и $\mathcal{O}(1)$ дополнительных файлов.

3 Шустрая сортировка и порядковые статистики

3.1 Практика

1. (a) Приведите вероятностный алгоритм поиска медианы в массиве различных чисел со средним временем работы $\mathcal{O}(n)$
(b) Приведите детерминированный алгоритм поиска медианы в массиве различных чисел с гарантированным временем работы $\mathcal{O}(n)$
2. Придумайте, как добиться от QuickSort времени $\mathcal{O}(n \log n)$ в худшем случае.
3. Робот Иван Семеныч пробует пирожки. Содержимое пирожков делится на три типа. Всего пирожков n . Каждый пирожок можно попробовать не более одного раза. Любые два пирожка можно поменять местами. Память у робота маленькая, $\mathcal{O}(\log n)$ бит. Помогите Ивану Семенычу отсортировать пирожки по типу: сначала первый, потом второй, потом третий. Сортировка должна работать за линейное время.
4. Дан набор из n пар гаек и болтов, в разных парах размеры гаек и болтов различны. Гайки и болты перемешаны. Требуется для каждой гайки найти соответствующий болт. Сравнивать можно только болты с гайками (сравнить две гайки между собой, или два болта между собой — невозможно). $\mathcal{O}(n \log n)$ в среднем.
5. Пусть задан массив A из $n = a \cdot k$ различных чисел. Требуется разбить массив на k частей по a элементов в каждой так, чтобы любой элемент части i был бы меньше любого элемента части $i + 1$ ($\forall i \in [1, k - 1]$). $\mathcal{O}(n \log k)$ в среднем.
6. Дан массив из $2 \cdot n - 1$ числа, который нельзя модифицировать. Есть дополнительная память на $n + 1$ элемент массива и ещё $\mathcal{O}(1)$ сверху. Требуется найти медиану за $\mathcal{O}(n \log n)$.
7. Дана последовательность из n чисел, нужно за один проход и $\mathcal{O}(n)$ времени в среднем найти в ней k минимумов, используя $\mathcal{O}(k)$ дополнительной памяти.
8. Даны массив из n чисел и m чисел p_1, p_2, \dots, p_m , нужно за $\mathcal{O}(n \log m + m)$ для каждого i найти p_i -ую порядковую статистику.
9. Дан массив из $2n$ чисел. Найти минимальное и максимальное за $3n - 2$ сравнения.
10. Найти второй максимум в массиве за $n + \mathcal{O}(\log n)$ сравнений.

3.2 Домашнее задание

1. Оцените время работы детерминированного алгоритма поиска порядковой статистики, если вместо пятерок разбивать элементы на
 - (a) семерки.
 - (b) тройки.
2. (*только группа Влада*) Даны массив из n чисел и m чисел p_1, p_2, \dots, p_m , нужно за $\mathcal{O}(n \log m + m)$ для каждого i найти p_i -ую порядковую статистику.
3. Дан массив $A[1..n]$ из n различных чисел. Массив не обязательно отсортирован. Требуется найти k ближайших к медиане элементов за линейное время. Решить для двух метрик.
 - (a) По позиции в отсортированном массиве.

$$d(x, \text{median}) = |\text{pos}(x) - \text{pos}(\text{median})|,$$

где $\text{pos}(x)$ — позиция элемента x в отсортированном массиве.

- (b) По значению.

$$d(x, \text{median}) = |x - \text{median}|.$$

4. Даны два массива из положительных целых чисел a и b , размер обоих равен n . Выбрать массив p из k различных чисел от 1 до n так, чтобы $\frac{\sum_{i=1}^k a_{p_i}}{\sum_{i=1}^k b_{p_i}} \rightarrow \max$. Время $\mathcal{O}(n \log M)$, где $M = \max(\max(a_i), \max(b_i), n)$.
5. Докажите, что для поиска максимума в массиве различных чисел потребуется как минимум $n - 1$ сравнение.
6. Дана последовательность из n чисел, нужно за один проход и $\mathcal{O}(n)$ времени в среднем найти в ней k минимумов, используя $\mathcal{O}(k)$ дополнительной памяти.
7. (*только группа Антона*) Дан массив из $2n$ различных чисел. Найдите минимальное и максимальное за $3n - 2$ сравнения и докажите, что это точная нижняя оценка, то есть меньшего количества сравнений может не хватить.

3.3 Дополнительные задачи

1. В матрице Q из натуральных чисел размера $N \times N$ найти подматрицу размера $H \times W$ с максимальной медианой. H, W — нечётные.
 - (a) $\mathcal{O}(N^2 \log Q_{\max})$. Здесь Q_{\max} — максимальный элемент матрицы.
 - (b) $\mathcal{O}(N^2 \log N)$.
2. Пусть алгоритм A находит i -ый по порядку элемент, используя только попарные сравнения элементов. Покажите, что, используя результаты только этих сравнений, можно найти все элементы, меньшие i -ого, и все элементы, большие i -ого.
3. Дан массив из $2n$ различных чисел. Найдите минимальное и максимальное за $3n - 2$ сравнения и докажите, что это точная нижняя оценка, то есть меньшего количества сравнений может не хватить.
4. Найдите второй максимум в массиве за $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ сравнение и докажите, что это точная нижняя оценка, то есть меньшего количества сравнений может не хватить.
5. Дан массив длины n . Изначально выделен отрезок позиций $1 \dots d$. Далее $n - d$ раз поступает команда «выведите медиану чисел в окне и сдвиньте отрезок на 1 направо».
 - (a) Обработайте каждую команду за $\mathcal{O}(\log n)$.
 - (b) Докажите, что не существует такой функции $f(n) \in o(\log n)$, что каждую команду можно обработать за $f(n)$.

4 Демоническое программирование

4.1 Практика

1. Найдите максимальную возрастающую подпоследовательность за $\mathcal{O}(n \log n)$.

- a) Найти длину
- b) Восстановить ответ

2. Найти максимальное по весу паросочетание за $\mathcal{O}(n)$ на

- (a) дереве из n вершин,
- (b) простом цикле из n вершин,
- (c) связном неориентированном графе из n вершин и n рёбер.

Веса на рёбрах.

3. Есть следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}a_n &= a_{n-1} + 2c_{n-1} + 1 \\b_n &= 5 - c_{n-1} \\c_n &= c_{n-2} - b_{n-1}\end{aligned}$$

Нам известны $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$. Найти a_n, b_n, c_n по модулю p за $\mathcal{O}(\log n)$.

4. Даны две последовательности длины n . Придумайте, как найти наидлиннейшую общую подпоследовательность этих последовательностей.

- (a) За $\mathcal{O}(n^2)$.
- (b) За $\mathcal{O}(n \log n)$, в случае, если в одной из последовательностей все элементы различны.

5. Дан массив из n целых чисел и число d . Найти подпоследовательность максимальной длины с условием, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на d .
6. Дан массив из n целых чисел, число d и число k . Найти подпоследовательность длины k с максимальной суммой элементов при условии, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на d .
7. Дано натуральное число $s \leq 300$. Найти набор натуральных чисел, сумма которых будет равна s , а их наименьшее общее кратное — максимально.

4.2 Домашнее задание

1. Дана строка s длины n . Для каждой пары (i, j) найти длину максимального общего префикса i -го и j -го суффиксов строки s . $\mathcal{O}(n^2)$.
2. Дан набор нечестных монеток с вероятностью выпадения орла p_1, p_2, \dots, p_n . Требуется посчитать вероятность выпадения ровно k орлов за $\mathcal{O}(n \cdot k)$. Операции над числами считать выполнимыми за $\mathcal{O}(1)$.
3. (только группа Влада)
Дан массив из n целых чисел и число d . Найти подпоследовательность максимальной длины с условием, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на d за $\mathcal{O}(n^2)$.
4. (только группа Влада)
Дан массив из n целых чисел, число d и число k . Найти подпоследовательность длины k с максимальной суммой элементов при условии, что соседние элементы в ней должны отличаться не более чем на d . $\mathcal{O}(n^2 k)$.
5. (только группа Серёжи)
Пусть есть n подарков разной натуральной стоимости и три поросёнка. Нужно раздать подарки как можно честнее (так, чтобы минимизировать разность суммарной стоимости подарков самого везучего поросёнка и самого невезучего). Придумайте алгоритм решения данной задачи за $\mathcal{O}(nW^2)$, где W — суммарная стоимость подарков.
6. Клетки поля $n \times 5$ покрашены в чёрный и белый цвета. Будем называть получившийся узор красивым, если он не содержит одноцветного квадрата 2×2 . Вычислите число красивых узоров по модулю небольшого простого числа за время $\mathcal{O}(\log n)$.

4.3 Дополнительные задачи

1. (1 балл за пункты $a + b$ вместе и 1 балл за пункт c)
Дана строка из латинских букв длины n , нужно ее запаковать в максимально короткую, используя правило (k, i) — повторить k символов начиная с i -й позиции. Заметим, что длина (k, i) — не константа. Например, $xyababababz \rightarrow xyab(8, 2)z$, $xyaaaaabaaaaab \rightarrow xyab(3, 2)b(10, 2)$ (но это не оптимально, оптимально $xyaaaaab(10, 2)$).
 - (a) $\mathcal{O}(n^3)$.
 - (b) $\mathcal{O}(n^2)$, считая, что длина строки (k, i) — константа.
 - (c) $\mathcal{O}(n^2)$.
2. (1 балл за пункты $a + b$ вместе и 1 балл за пункт c)
Есть k грузовиков с заданной вместимостью, задача — перевезти n вещей с заданными весами минимальным числом заездов. Один заезд — погрузить и отправить все грузовики.
 - (a) $k = 1$, $\mathcal{O}(3^n)$.
 - (b) $k = 2$, $\mathcal{O}(4^n)$.
 - (c) $\mathcal{O}(3^k n)$.
3. (1 балл за пункты $a + b$ вместе и 1 балл за пункт c)
Вычислите, сколькими способами можно замостить доминошками клетчатое поле
 - (a) $n \times 3$, за время $\mathcal{O}(n)$.
 - (b) $n \times t$, за время $\mathcal{O}(4^n t)$.
 - (c) $n \times t$, за время $\mathcal{O}(2^n nt)$.

Ответ посчитать по модулю небольшого простого числа.

4. Вам дана доска фанеры размера $n \times t$. В неё было вбито несколько гвоздей с целыми координатами (от них остались некрасивые дырки). Сколькими способами можно разрезать доску на прямоугольники с целыми сторонами так, чтобы ни один из гвоздей не попал внутрь прямоугольника. Время: $\mathcal{O}(n^2 4^m)$.
5. * (Эту задачу можно сдавать только устно)
Приведите полиномиальный алгоритм, вычисляющий количество разбиений клетчатой доски $n \times t$ на доминошки (другими словами, на прямоугольники 1×2 и 2×1).
6. Посчитать по модулю небольшого простого числа количество способов, которыми можно расставить на доске $n \times n$ сколько-либо небьющих друг друга коней, за $\mathcal{O}(n 8^n)$

5 Жадные алгоритмы и динамика

5.1 Практика

1. Подпоследовательность-палиндром

Дана строка длины $n \leq 100$.

Найти максимальную по длине подпоследовательность, которая является палиндромом.

2. Пираты

Судно атакуют пираты. Для каждого пирата известны его азимут a_i и время t_i , через которое пират приплывёт и совершит непотребство. Однако, у судна есть лазерная пушка, которой оно защищается. У пушки есть начальный азимут a и угловая скорость вращения ω . Пушка уничтожает все объекты, на которые она сейчас направлена. Помогите судну определить порядок уничтожения пиратов за $\mathcal{O}(n^2)$, чтобы не допустить непотребства.

3. И снова подпоследовательности

Дан массив из n натуральных чисел: a_1, \dots, a_n . Выберите подпоследовательность $i_1 \leq \dots \leq i_k \in \{1, \dots, n\}$, такую, что $l \leq |i_j - i_{j-1}| \leq r$ и $\sum_{j=1}^k a_{i_j} \rightarrow \max$.

a) За $\mathcal{O}(n^2)$.

b) За $\mathcal{O}(n)$.

4. Subset cover

Дано число n и семейство из m множеств, каждое из которых — подмножество $U = \{1, 2, \dots, n\}$.

Выбрать минимальное количество элементов семейства, чтобы всё U было ими покрыто.

5. Перевозка товаров

Есть грузовик с заданной вместимостью, задача — перевезти n вещей с заданными весами со склада в магазин минимальным числом заездов.

a) $\mathcal{O}(3^n)$. Обязательно.

b) (*) $\mathcal{O}(2^n n)$.

6. Мягкие дедлайны

В фирму поступило n заказов, у каждого есть время исполнения t_i и жёсткий дедлайн d_i . В каком порядке выполнять заказы, чтобы всё успеть?

7. (*) Жёсткие дедлайны

В фирму поступило n заказов, у каждого есть время исполнения t_i и жёсткий дедлайн d_i . В каком порядке и **какие** выполнять заказы, чтобы успеть **побольше**?

8. Заказы и время конца

В фирму поступило n заказов, которые можно выполнять в произвольном порядке. На выполнение заказа i необходимо время t_i . В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Пусть e_i — момент окончания выполнения заказа номер i . Распределите работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Время $\mathcal{O}(n \log n)$.

9. Атлеты

n атлетов хотят выстроить из своих тел башню максимальной высоты. Башня это цепочка атлетов, первый стоит на земле, второй стоит у него на плечах, третий стоит на плечах у второго и т.д. Каждый атлет характеризуется силой s_i и массой m_i . Сила это максимальная масса, которую атлет способен держать у себя на плечах. Известно, что если атлет тяжелее, то он и сильнее, но атлеты равной массы могут иметь различную силу.

a) В каком порядке выстроиться спортсменам, чтобы получилась башня высоты n ?

Если это возможно, конечно. $\mathcal{O}(n \log n)$.

b) Какова максимальная высота башни? За $\mathcal{O}(n^2)$ динамикой.

c) (*) Какова максимальная высота башни? За $\mathcal{O}(n \log n)$ жадностью.

10. **Выбор заявок в маршрутке**

Маршрутка совершает рейс от первой до n -й остановки. В маршрутке m мест для пассажиров. Есть k человек, про каждого заранее известно, что он хочет доехать от остановки s_i до f_i . Проезд для пассажира стоит 1 вне зависимости от расстояния между остановками. Максимизируйте прибыль, при условии, что можно выбирать, кого сажать в маршрутку на каждой остановке. $n, m, k \leq 10^6$.

11. (*) **Идейная**

Машина тратит единицу топлива на километр, имеет бак объёма k и находится в начале прямой дороги в точке 0. Для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на i -м километре дороги есть заправочная станция со своей положительной ценой c_i . Определите за время $\mathcal{O}(n)$, как проехать n километров за минимальную стоимость.

12. (*) **Подпоследовательности и сортировки**

Даны скобочные последовательности из круглых скобок. в каком порядке их склеить, чтобы получилась правильная?

13. (*) **Станки и сортировки**

Имеется n деталей и два станка. Каждая деталь должна сначала пройти обработку на первом станке, затем — на втором. При этом i -ая деталь обрабатывается на первом станке за a_i времени, а на втором — за b_i времени. Каждый станок в каждый момент времени может работать только с одной деталью. Требуется составить такой порядок подачи деталей на станки, чтобы итоговое время обработки всех деталей было бы минимальным. $\mathcal{O}(n \log n)$.

5.2 Домашнее задание

1. (2) Паросочетания

Дан взвешенный неориентированный граф из $n \leq 20$ вершин. Найдите максимальное по весу паросочетание.

2. (2) Белоснежка и гномы, которые не хотят спать

Даны n гномов. Если i -го гнома укладывать спать a_i минут, он потом спит b_i минут. Можно ли сделать так, чтобы в какой-то момент все гномы спали? $\mathcal{O}(n \log n)$.

3. (2) Интерактивная обработка заказов

В фирму поступают заказы, которые можно выполнять в произвольном порядке. В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Изначально заказов нет, i -й заказ поступает в момент времени r_i , работать над ним нужно t_i . Пусть e_i – момент окончания выполнения заказа номер i . Распределите работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Переходить от одного заказа к другому можно в любой момент времени (даже если заказ не доделан до конца, незаконченный заказ можно будет возобновить с того же места). Свойства заказа (r_i, t_i) не известны до момента его поступления. Всего поступит n заказов.

a) За время $\mathcal{O}(n^2)$.

b) (доп.) (+1) За время $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. (1+1) Степени и антиклики

Будем называть *независимым множеством* или *антикликой* попарно несвязное подмножество вершин графа. Пусть в графе G есть n вершин, а максимальная степень равна d . Найдите в нём независимое множество размера хотя бы

a) $\frac{n}{d+1}$ за время $\mathcal{O}(n)$

b) $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v)+1}$ за время $\mathcal{O}(n \log n)$

Считайте, что граф уже дан в памяти в виде массива, где для каждой вершины хранится список её соседей.

5. (2) Авторитеты

Есть n человек. Человек i готов примкнуть к нашей банде, если наш авторитет хотя бы a_i , при этом он к нашему авторитету прибавит b_i . Наш изначальный авторитет равен A . $a_i, b_i, A \in \mathbb{Z}$

a) Можем ли завербовать всех людей? $\mathcal{O}(n \log n)$.

b) (доп.) (+2) Какое максимальное число людей мы можем завербовать?
 $\mathcal{O}(n \log n)$. Половина балла даётся за доказательство.

6. (3) Орлы и равноправие (только группа Серёжи)

Даны n монеток, у каждой есть своя вероятность выпадения орла p_i . Нужно выбрать подмножество размера k (чётное число) из них, для которого вероятность выпадения ровно $\frac{k}{2}$ орлов при одновременном подбрасывании максимальна.

a) $\mathcal{O}(n \log n + k^3)$.

b) (доп.) (+1) $\mathcal{O}(n + k^2)$.

Не забывайте включить жадный настрой.

Не забывайте, что любую гипотезу можно проверить, вы же программисты.

Разрешается пользоваться знаниями из динамического программирования и математики.

5.3 Дополнительные задачи

7. (2+2) Окружности и отрезки

Даны n непересекающихся кругов на плоскости. Мы стоим в точке $(0, 0)$ и можем стрелять по прямой. Минимальным числом выстрелов проткнуть все круги.

- a) Все круги целиком лежат в первой четверти плоскости.
- b) Круги произвольны

8. (1+1) Школьники и ямы

n школьников упали в яму глубины S . Каждый школьник имеет рост (от ног до плеч) h_i и длину рук l_i . Школьники могут вставать друг другу на плечи, верхний школьник может вытянуть руки.

- a) Могут ли выбраться все школьники? $\mathcal{O}(n \log n)$.
- b) Какое максимальное число школьников может выбраться? $\mathcal{O}(n \log n)$.

9. Раскраской вершин графа $G = (V, E)$ называется функция $c : V \rightarrow [m]$, сопоставляющая каждой вершине G цвет от 1 до m . Раскраска называется *правильной*, если каждая пара соседних вершин имеет разные цвета.

Для неориентированного графа $G = (V, E)$ его *хроматическим числом* $\chi(G)$ называется наименьшее возможное число цветов в правильной раскраске G .

Для графа G обозначим размер его максимального полного подграфа через $\omega(G)$.

Рассмотрим на вещественной прямой замкнутые отрезки I_1, I_2, \dots, I_n . Сопоставим каждому отрезку I_i вершину v_i и каждой паре пересекающихся отрезков (I_i, I_j) ребро (v_i, v_j) . Такой граф будем называть *интервальным графом*.

Будем называть граф G *совершенным*, если для любого его индуцированного подграфа H верно $\omega(H) = \chi(H)$.

Докажите, что каждый интервальный граф совершенен. Приведите алгоритм, красящий интервальный граф $G = (V, E)$ с $|V| = n$ в $\omega(H)$ цветов за время $\mathcal{O}(n \log(n))$.

10. В фирму поступают заказы, которые можно выполнять в произвольном порядке. В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Изначально заказов нет, i -й заказ поступает в момент времени r_i , работать над ним нужно t_i .

Все заказы объединены в проекты (один заказ относится к одному проекту, заказы из одного проекта могут поступать не подряд).

Пусть e_i – момент окончания выполнения последнего (в порядке выполнения) из заказов в проекте с номером i .

Нужно распределить работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Свойства заказа $(r_i, t_i, \text{его проект})$ не известны до момента его поступления. Переходить от одного заказа к другому можно в любой момент времени (даже если заказ не доделан до конца).

Придумайте решение, которое не более чем в два раза хуже оптимального. Время $\mathcal{O}(n \log n)$, при условии, что всего поступит n заказов.

6 Поиск в глубину

6.1 Практика

1. **Просто ориентируй**

Ориентировать неорграф так, чтобы он стал ациклическим за $\mathcal{O}(V + E)$.

2. **Берегите деревья**

Ориентировать неорграф так, чтобы он стал сильно связным за $\mathcal{O}(V + E)$.

3. **Разве это не NP-трудно?**

Дан DAG, найти в нем гамильтонов путь за $\mathcal{O}(V + E)$.

4. **Единственный топсорт**

Дан DAG, проверить единственность топологической сортировки за $\mathcal{O}(V + E)$.

5. **dfs всемогущий**

Даны два множества вершин: A и B , за $\mathcal{O}(V + E)$ проверить, есть ли путь из какой-нибудь вершины $a \in A$ в какую-нибудь вершину $b \in B$.

6. **Чётность циклов**

За $\mathcal{O}(V + E)$ найти в неорграфе какой-нибудь цикл нечётной длины.

7. **В поисках простого цикла**

а) Найти цикл в орграфе через данное ребро за $\mathcal{O}(E)$.

б) Найти цикл в орграфе через данную вершину за $\mathcal{O}(E)$

с) Найти в неорграфе какой-нибудь цикл за $\mathcal{O}(V)$.

8. **Ценность времени**

Дано подвешенное дерево, нужно с линейным предподсчётом научиться отвечать на запрос «правда ли вершина u лежит в поддереве вершины v » online за $\mathcal{O}(1)$.

9. **Телепортация в дереве**

Дано корневое дерево и m телепортов. Для каждой вершины v дерева насчитайте самую высокую вершину, куда можно телепортироваться из поддерева v .

10. **Мосты**

Дан связный неорграф, нужно найти в нем за $\mathcal{O}(V + E)$ все мосты.

11. **dfs и веса**

В стране n аэропортов. Самолёт может сделать перелёт из аэропорта i в аэропорт j , израсходовав $w_{ij} > 0$ горючего. При этом w_{ij} может отличаться от w_{ji} , и $w_{ii} = 0$. Найдите минимальный размер бака, позволяющий добраться самолёту из любого города в любой, возможно с дозаправками.

12. **3-связность**

Проверить граф на рёберную 3-связность за $\mathcal{O}(VE)$.

13. **(*) Нельзя не пройти**

Найти в орграфе все вершины, через которые проходит любой путь $a \rightsquigarrow b$. $\mathcal{O}(V + E)$.

6.2 Домашнее задание

1. **(2) Поиск цикла**

Найти в неорграфе простой цикл через данную вершину за $\mathcal{O}(E)$.

2. **(3) Пути в дереве**

Дано дерево $T = \langle V, E \rangle$.

За $\mathcal{O}(V+E)$ вычислить для каждого ребра, сколько простых путей проходит через него.

3. **(3) Лексмин топсорт**

Найдите лексикографически минимальный из всех топологических порядков. $V, E \leq 10^6$.

4. **(3) Обмен местами**

Есть ориентированный граф. Для каждой пары вершин a, b определена функция $f(a, b)$. Вася и Петя стоят в вершинах v и p , соответственно, и хотят поменяться местами, не оказываясь ни в какой момент времени в паре вершин с $f(a, b) < d$. За какое минимальное число ходов они могут это сделать? Ход — один из них переходит в смежную вершину. $\mathcal{O}(VE)$.

Дополнительные задачи

1. **(3) Враги и двухпартийная система**

У каждой вершины не более 3 врагов. Вражда — симметричное отношение. Разбить вершины на 2 доли так, чтобы с вершиной в долю попало не более 1 врага. $\mathcal{O}(V + E)$.

2. **(4) Дополнение до сильносвязного**

Для заданного ориентированного графа G посчитать минимальное число рёбер, которые нужно добавить в граф, чтобы он стал сильно связным. Время $\mathcal{O}(V^3)$.

3. **(4) Центры дерева**

Дано дерево $T = \langle V, E \rangle$. Обозначим через $d(u, v)$ длину пути между вершинами u и v .

а) **(1)** Найдите за $\mathcal{O}(|V|)$ центр дерева — вершину c , для которой минимальна

$$\sum_{v \in V} d(v, c)$$

б) **(1)** Найдите за $\mathcal{O}(|V|^2)$ 2-центр дерева — пару вершин (a, b) , для которой минимальна

$$\sum_{v \in V} \min(d(v, a), d(v, b))$$

с) **(2)** Найдите 2-центр за $\mathcal{O}(|V|)$.

7 Кратчайшие пути

7.1 Практика

1. Кратчайший путь через достопримечательности

Дан орграф. Найти кратчайший путь, проходящий по всем k выделенным вершинам. $k \leq 10$.

2. k-bfs

Пусть в графе все ребра имеют целый вес из $[1, k]$. Придумайте, как найти кратчайшее расстояние от вершины s до остальных за $\mathcal{O}(k(V+E))$. А за $\mathcal{O}(kV + E)$?

3. Число кратчайших путей

Дан орграф и выделенная вершина s , нужно для каждой вершины v найти число кратчайших путей из v в s . $\mathcal{O}(E \log V)$.

4. Запросы к Роберту

Предподсчет за $\mathcal{O}(V^3)$ и запрос $\langle a, b, e \rangle$ за $\mathcal{O}(1)$ — существует ли кратчайший путь из a в b , проходящий через ребро e ?

5. Флойд против Беллмана

Для каждой вершины графа узнать, есть ли отрицательный цикл через эту вершину. $\mathcal{O}(V^3)$.

6. Потенциалы

Пусть дан взвешенный граф G с циклами отрицательного веса. На вершинах этого графа определим функцию $\phi(v)$ — потенциал. Заменим вес каждого ребра $w(u, v)$ на $w'(u, v) = w(u, v) + \phi(u) - \phi(v)$. Докажите, что кратчайшим путям между двумя вершинами в графе с весами w' будут однозначно соответствовать кратчайшие пути в графе с весами w .

7. Кратчайшие пути между всеми парами вершин

Пусть во взвешенном графе G нет циклов отрицательной стоимости. Докажите, что если в качестве потенциала взять кратчайшее расстояние от некоторой вершины s , то все веса w' получатся неотрицательными (если соответствующие расстояния конечны).

Покажите, как найти матрицу расстояний в графе с отрицательными весами за $\mathcal{O}(VE + V^2 \log V)$.

8. Откуда берутся графы?

Дана система из m неравенств на n переменных x_i .

Каждое неравенство имеет вид $x_i - x_j \leq \delta_{ij}$.

(а) Найти решение системы или сказать, что его не существует, за $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

(б) Пусть все $\delta_{ij} \geq 0$, решить задачу за $\mathcal{O}(n \cdot m)$. Слишком просто? Тогда $\sum_i x_i \rightarrow \max$.

9. Расстояние — это не только сумма

Для каждой пары вершин в графе найти $w[a, b]$ — такой минимальный вес, что из a в b есть путь по рёбрам, вес которых не больше $w[a, b]$. $\mathcal{O}(V^3)$.

10. Речной граф

Даны две параллельных прямых (река). В реке есть n островов (точек). Мы хотим провести по реке корабль, представляющий собой открытый круг радиуса R , так, чтобы он не задел ни одного острова. Найти максимальный R , при котором это еще возможно, за $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

11. Обмен валют

Есть n валют и m обменников. i -й обменник предлагает менять валюту a_i на валюту b_i по курсу c_i/d_i . Можно ли, используя сколь угодно большие начальные сбережения и данные m обменников, сломать финансовую систему и бесконечно обогащаться? Считается, что у обменников есть бесконечное количество денег целевой валюты.

(*) А теперь тоже самое с комиссией: x_i единиц валюты a_i перейдут в $(x_i - s_i) \frac{c_i}{d_i}$ единиц валюты b_i .

12. Количество путей

Найти количество путей (необязательно простых) в графе за $\mathcal{O}(V^3 \log k)$

- а) между всеми парами вершин длины ровно k .
- б) между парой вершин длины $\leq k$.

7.2 Домашнее задание

1. Дерево Штайнера

Дан взвешенный неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. В графе есть подмножество вершин T , которые мы назовем терминалами. Минимальное дерево Штайнера – это связный подграф графа G минимального веса, содержащий все терминалы. Требуется найти такое дерево.

(а) Пусть $|T| = 3$, решить за $\mathcal{O}(E \log V)$.

(б) Пусть $|T| = 4$, решить за $\mathcal{O}(V^3)$.

2. Расстояния в меняющемся графе

Нужно научиться на запрос «уменьшился вес ребра» за $\mathcal{O}(V^2)$ пересчитывать матрицу расстояний. Считайте, что в графе не было и не появилось отрицательных циклов.

Дополнительные задачи

3. bfs и длинная очередь

Постройте матрицу $n \times n$, состоящую из клеток-стенок и пустых клеток, на которой при запуске BFS из какой-то клетки максимальный размер очереди будет $\omega(n)$. Ходить можно между клетками, смежными по стороне.

4. Форд-Беллман и число итераций

Пусть на вершинах графа задан порядок: v_1, v_2, \dots, v_n . Пусть алгоритм Беллмана-Форда на каждой стадии рассматривает ребра в таком порядке: сначала ребра, ведущие из меньшей вершины в большую (в порядке возрастания номера исходящей вершины), а потом ребра, ведущие из большей вершины в меньшую (в порядке убывания номера исходящей вершины). Докажите, что если в графе нет циклов отрицательного веса, то алгоритм найдет все кратчайшие пути из v_1 за $\frac{n}{2}$ итераций.

5. Форд-Беллман и число итераций 2

Продолжение задачи про улучшения Беллмана-Форда. Пронумеруем вершины в порядке случайной перестановки. Покажите, что матожидание числа итераций Беллмана-Форда есть $\frac{n}{3}$.

6. Форд-Беллман и число итераций 3

Покажите, что на случайном графе ($a_i \in [1, n]$, $b_i \in [1, n]$, $w_i \in [1, C]$, все числа целые, генерируются равномерным распределением, C любая фиксирована один раз заранее) Форд-Беллману хватит $\mathcal{O}(\log V)$ итераций.

7. Почему 5?

Дан неориентированный граф G . Посчитайте количество простых циклов длины 5. $\mathcal{O}(V^3)$.

8. Почему без лог?

Дан орграф, посчитайте от начальной вершины до всех остальных кратчайшие расстояния относительно метрики «вес самого легкого ребра на пути». $\mathcal{O}(V + E)$.

9. Максимально отрицательный цикл

Дан взвешенный орграф с положительными целыми весами, не превосходящими C . Найдите в нем цикл минимального среднего веса за $\mathcal{O}(VE \log C)$.

10. Сумма двух

Есть взвешенный неограф. Найти путь из s в t такой, что сумма двух максимальных ребер на пути минимальна. $\mathcal{O}((V + E) \cdot \text{poly}(\log))$.

11. Модульный граф

Пусть длина пути определяется как сумма весов всех ребер по модулю n . Найти кратчайший путь за $\mathcal{O}((V + E) \cdot n)$.

12. Рассмотрим граф, на каждом ребре которого написан нолик или единица. Каждому пути в этом графе соответствует некоторая бинарная строка. Строки сравниваются как двоичные числа (старшие разряды слева), среди одинаковых чисел меньше то, у которого меньше ведущих нулей. Для задачи нахождения кратчайших путей относительно такой метрики докажите корректность или приведите контрпример для алгоритма
- a) Флойда
 - b) Дейкстры
 - c) Беллмана-Форда
13. Для обычной функции расстояния алгоритм Беллмана-Форда при работе делает несколько стадий обновления всех ребер и находит расстояния от вершины A до всех остальных за $V - 1$ итерацию. Предположим, что на каждой стадии алгоритм обновляет рёбра согласно некоторому фиксированному порядку на множестве E , общему для всех стадий. Зададим новую «длину пути»: определим её равной минимальному весу ребра на этом пути. При инициализации положим расстояние от A до A равным бесконечности, а до остальных вершин неопределённым, релаксация из вершин с неопределённым расстоянием не проводится. Будет ли работать алгоритм Беллмана-Форда с так определенной длиной? Сколько итераций он сделает в худшем случае для направленного графа?