Теория 2. Матричные вычисления

Курс: Байесовские методы в машинном обучении, осень 2020

1. Доказать тождество Вудбери:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

   Здесь $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $U \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

2. Пусть $p(\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{y}|A\boldsymbol{x}, \Gamma)$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Найти распределение $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$.

3. Пусть $p(\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{y}|A\boldsymbol{x}, \Gamma)$. Доказать, что $p(\boldsymbol{y}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{y}|A\boldsymbol{\mu}, \Gamma + A\Sigma A^T)$.

4. Вычислить $\frac{\partial}{\partial X}\det(X^{-1} + A)$ (все матрицы не являются симметричными);

5. Вычислить $\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{tr}(AX^{-T}BXC)$ (все матрицы не являются симметричными, матрицы A, C не являются квадратными).