Исправление К/Р.

Кишукин Александр
20.12.20

① Классифицировать по сходимости.

1. $r_k = \alpha^{\sqrt{k}+2k+1}$

$\limsup_{k\to\infty}$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \alpha^{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}+2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha^2$

- $\alpha > 1$ сходимости нет
- $\alpha \in \{0,1\}$ - тривиальн. посл.
- else - линейная сходимость

2. $r_k = \alpha^{3^k}$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \alpha^{2\cdot 3^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

- $\alpha > 1$ сходимости нет.
- $\alpha \in \{0,1\}$ - тривиальная посл.
- $0 < \alpha < 1$ - сверхлинейная сходимость

$\frac{r_{k+1}}{r_k^2} = \alpha^{3^k} \to 0 < +\infty$ - квадратичная сходимость

3. $r_k = \frac{1}{k^{k!}}$

$(r_k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k^{(k-1)!}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

- сверхлинейная сходимость

$\frac{r_{k+1}}{r_k^2} = \frac{k^{2k!}}{k^{(k+1)k!}} = k^{k!(1-k)} \to 0 < \infty$

- квадратичная сходимость

4. $r_k = k^{p^p}$, $p > 0$.

Т.к. $k \to \infty$, то $r_k \not\to 0$.

5. $r_k = \frac{1}{2^k + k!}$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{2^k + k!}{2^{k+1} + (k+1)!} = \frac{A}{2^{k+1}} + \frac{B}{(k+1)!} = \left| \begin{array}{l} A(k+1)! + B2^{k+1} = 2^k + k! \\ \Rightarrow A = \frac{1}{k+1}, B = \frac{1}{2} \end{array} \right|$

$= \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} + \frac{1}{2(k+1)!} \to 0$

- сверхлинейная сходимость.

$\frac{r_{k+1}}{r_k^2} = \frac{(2^k+k!)^2}{2^{k+1}+(k+1)!} \to \infty$ квадратичной нет.

③ $\exists f(X) = \log(\det(2X+1))$
X, p.d.

$df = \frac{1}{\det(2X+1)} \cdot \det(2X+1) \cdot \langle 2(2X+1)^{-1}, dX\rangle = \langle 2(2X+1)^{-1}, dX\rangle.$

$d^2 f = d(\langle 2(2X+1)^{-1}, dX_1\rangle) = -4\langle (2X+1)^{-1} dX_2 (2X+1)^{-1}, dX_1\rangle =$

$= -4\langle (2X+1)^{-1}(2X+1)^{-T} dX_2^T, dX_1\rangle = -4\langle (2X+1)^{-1}(2X+1)^{-T} dX_1, dX_2\rangle$

$\nabla^2 f = \underset{\wedge 0}{-4}\underset{\succ 0}{(2X+1)^{-1}}\underset{\succ 0}{(2X+1)^{-T}} < 0$, not p.d

④ $f(x,y) = \lambda(y-x)^2 + (y+x)^2$

$\nabla f = \begin{bmatrix} -2\lambda y + 2\lambda x + 2y + 2x \\ 2\lambda y - 2\lambda x + 2y + 2x \end{bmatrix}$

$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ - стационарная точка

$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2\lambda + 2 & -2\lambda + 2 \\ -2\lambda + 2 & 2\lambda + 2 \end{bmatrix}$, тогда

$\Delta_2 = (2\lambda+2)^2 - (-2\lambda+2)^2 = 8\lambda > 0 \Rightarrow \lambda > 0$

при $\lambda > 0$ $\Delta_1 = 2 + 2\lambda > 0$ - минимум в $(0,0)$

$\lambda = 0$: $f(x,y) = (x+y)^2$, тогда

$\nabla f = 0 \Rightarrow x = -y$ - точки минимума т.к. выпуклая f.

Исправлено ДЗ: 1 и 2.

① Классифицировать по сходимости.

1. $r_k = \alpha^k$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \alpha$

- при $\alpha > 1$ нет сходимости
- $\alpha \in \{0,1\}$ - тривиальная сходимость
- else - линейная сходимость

2. $r_k = \alpha^{k^2}$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \alpha^{2k+1} \to 0$

- $\alpha \in \{0,1\}$ – тривиальная
- $\alpha > 1$ – нет сходимости
- $0 < \alpha < 1$ → сверхлинейная

$\frac{r_{k+1}}{r_k^2} = \alpha^{\overbrace{-k^2+2k+1}^{\to -\infty}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ при $0<\alpha<1$.

нет квадратичной

3. $r_k = \alpha^{2^k}$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \alpha^{2^k}$

- $0<\alpha<1$ - сверхлинейная
- $\alpha \in \{0,1\}$ - тривиальная
- $\alpha > 1$ нет сходимости

$\frac{r_{k+1}}{r_k^2} = 1 < \infty$

- квадратичная сходимость

4. $r_k = \frac{1}{k}$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = 1$ при $k \to \infty$

сублинейная сходимость

5. $r_k = k^p$

при $p<0$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^p \to 1$

- сублинейная сходимость

$p=0$ - тривиальная сход.

6. $r_k = \frac{1}{k!}$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

сверхлинейная сходимость

$\frac{r_{k+1}}{r_k^2} = \frac{k!}{k+1} \to \infty$

нет квадратичной

7. $r_k = \frac{1}{k^k}$

$(r_k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

сверхлинейная сходимость

$\frac{r_{k+1}}{r_k^2} = \frac{k^{2k}}{(k+1)^{k+1}} \sim \frac{k^{2k}}{k^k} \to \infty$

нет квадратичной сходим.

② $\exists\, c>0$, $T(\varepsilon) = \min\{k \geq 1 : r_k \leq \varepsilon c\}$

1. $r_k = \frac{c}{k^\lambda}$, $\lambda > 0$.

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{k^\lambda}{(k+1)^\lambda} \to 1$ - сублинейная сходимость

$T(\varepsilon) = \lceil \varepsilon^{-\frac{1}{\lambda}} \rceil$

при $\varepsilon \Rightarrow n\varepsilon$: $T(n\varepsilon) = n^{-\frac{1}{\lambda}} T(\varepsilon)$

при $\lambda \Rightarrow n\lambda$: $T(\varepsilon) = (T(\varepsilon))^{\frac{1}{n}}$

$\varepsilon \backslash \lambda$	1	2	0.5
10^{-1}	10	4	10^2
10^{-3}	10^3	32	10^6
10^{-5}	10^5	317	10^{10}
10^{-7}	10^7	3163	10^{14}
10^{-12}	10^{12}	10^6	$\sim 10^{24}$

2. $r_k = Cq^k, 0<q<1$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = q$ - линейная сходимость

$T(\varepsilon) = \lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln q} \rceil$

$\varepsilon \to n\varepsilon: T(n\varepsilon) = T(\varepsilon) + \frac{\ln n}{\ln q}$

$q \to nq: T(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln n + \ln q}$

ε \ q	0.9	0,999	0,99999
10^{-1}	22	2302	230k
10^{-3}	66	6905	690k
10^{-5}	110	11508	1kk
10^{-7}	132	13809	1,1 kk
10^{-12}	263	27618	2,7 kk

3. $r_k = C(C^{-1}R)^{2^k}, R>0, 0<C^{-1}R<1$

$\frac{r_{k+1}}{r_k} = (C^{-1}R)^{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

сверхлинейная сходимость.

$\frac{r_{k+1}}{r_k^2} = \frac{1}{C} < \infty$ - квадратичная сходимость

$T(\varepsilon) = \lceil \log_2\left(\frac{\ln \varepsilon}{\ln R - \ln C}\right) \rceil$

$\varepsilon \to \varepsilon n: T(\varepsilon) = \log_2\left(\frac{\ln n + \ln \varepsilon}{\ln R - \ln C}\right)$

$R \to nR: T(\varepsilon) = \log_2\left(\frac{\ln \varepsilon}{\ln n + \ln R - \ln C}\right)$

ε \ R	0,9C	0,999C	0,99999C
10^{-1}	5	12	18
10^{-3}	7	13	20
10^{-5}	7	14	21
10^{-7}	8	14	21
10^{-12}	9	15	22

③ Упростить выражения.

1. $\mathrm{Det}(AXB(C^{-T}X^TC)^{-T})$, $A,B,C,X \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\det(C)\neq 0, \det(C^{-T}X^TC)\neq 0$

$= \frac{\mathrm{Det}(AXB)}{\mathrm{Det}(C^{-T}X^TC)} = \frac{\mathrm{Det}A\,\cancel{\mathrm{Det}X}\,\mathrm{Det}B\,\cancel{\mathrm{Det}C}}{\cancel{\mathrm{Det}X}\,\cancel{\mathrm{Det}C}} = \mathrm{Det}A\,\mathrm{Det}B = \mathrm{Det}(AB)$

2. $\|uv^T - A\|_F^2 - \|A\|_F^2$, $u\in\mathbb{R}^m, v\in\mathbb{R}^n, A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$= \langle uv^T - A, uv^T - A\rangle - \langle A,A\rangle = \|uv^T\|_F^2 - 2\langle uv^T, A\rangle + \cancel{\langle A,A\rangle} - \cancel{\langle A,A\rangle} =$

$= \|uv^T\|_F^2 - 2\,\mathrm{Tr}(v^TA^Tu)$ ~~A^Tuv^T~~

3. По ф. Шермана - Моррисона

$(2I_n + aa^T)^{-1} = \frac{1}{2}I_n - \frac{aa^T}{4+2a^Ta}$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\left(\frac{1}{2}I_n - \frac{aa^T}{2+a^Ta}\right)(uv^T + va^T)\right) = \mathrm{Tr}(uv^T) - \frac{1}{2+a^Ta}\mathrm{Tr}(aa^Tuv^T)$

(4) Вычислить ∇f и $\nabla^2 f$.

1. $f(x) = \frac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2$, A p.d, $x \in \mathbb{R}^n$

$$df = d\left(\frac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2\right) = \langle xx^T - A, d(xx^T - A)\rangle = \langle xx^T - A, dx\,2x^T\rangle = \langle 2(xx^T - A)x, dx\rangle$$

$$\nabla f(x) = 2(xx^Tx - Ax)$$

$$d^2 f = 2\langle d(xx^Tx - Ax), dx_1\rangle = 2\langle d(xx^Tx) - A dx_2, dx_1\rangle = \langle 2x^Tx dx_2 + 4xx^T dx_2 - 2A dx_2, dx_1\rangle$$

$$= \langle (2x^Tx + 4xx^T - 2A) dx_1, dx_2\rangle.$$

$$\nabla^2 f(x) = 2x^Tx \cdot I_n + 4xx^T - 2A$$

2. $f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|_2^2}$, A p.d, $x \in \mathbb{R}^n$

$$df = \frac{d(x^TAx)|x|^2 - x^TAx\, d|x|^2}{|x|^4} = \frac{2(Ax)^T|x|^2 dx - x^TAx\, 2x^T dx}{|x|^4} = \frac{2}{|x|^4}\left(Ax|x|^2 - x(Ax)^Tx\right)^T dx$$

$$\nabla f(x) = \frac{2Ax}{|x|^2} - \frac{2xx^TAx}{|x|^4}$$

$$d^2 f = 2\, d\left(\frac{Ax}{|x|^2} - \frac{2xx^TAx}{|x|^4}\right)^T dx_1 = 2\left(\frac{|x|^2 A dx_2 - 2Axx^T dx_2}{|x|^4} - \frac{dx_2 x^TAx + 2xx^TA dx_2}{|x|^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{4xx^TAxx^T dx_2}{|x|^6}\right)^T dx_1 = \frac{2}{|x|^4}\left(|x|^2 A - 2Axx^T - x^TAx I_n - 2xx^TA + \frac{4}{|x|^2}x^TAxxx^T\right)^T dx_1^T dx_2$$

$$\nabla^2 f(x) = \frac{2}{|x|^4}\left(|x|^2 A - 2Axx^T - x^TAx I_n - 2xx^TA + \frac{4}{|x|^2}x^TAxxx^T\right)$$

3. $f(x) = \langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle} = x^Tx^{x^Tx}.$

$$df = d\left(e^{|x|^2 \ln|x|^2}\right) = e^{|x|^2\ln|x|^2} \cdot \left(2x^T dx \ln|x|^2 + \cancel{|x|^2} \cdot \frac{2x^T dx}{\cancel{|x|^2}}\right) = 2e^{|x|^2\ln|x|^2}\left(x^T \ln|x|^2 + x^T\right) dx.$$

$$\nabla f(x) = 2\,|x|^{2|x|^2}(\ln|x|^2 + 1)x$$

$$d^2 f = 2\left[2e^{|x|^2\ln|x|^2}(\ln|x|^2+1)^2 x^T dx_2 x^T dx_1 + e^{|x|^2\ln|x|^2}\frac{2x^T dx_2}{|x|_2} x^T dx_1 + e^{|x|^2\ln|x|^2}(\ln|x|^2+1) dx_2^T dx_1\right]$$

$$= dx_2^T\, 2|x|^{2|x|^2}\left[2(\ln|x|^2+1)^2 xx^T + \frac{2xx^T}{|x|^2} + (\ln|x|^2+1)I_n\right] dx_1$$

$$\nabla^2 f(x) = 2|x|^{2|x|^2}\left[\left(2(\ln|x|^2+1)^2 + \frac{1}{|x|^2}\right)xx^T + (\ln|x|^2+1)I_n\right].$$

(5) Определить знак $\nabla^2 f$.

1. $f(X) = \mathrm{Tr}(X^{-1})$, X p.d.

$df = \mathrm{Tr}(dX^{-1}) = \mathrm{Tr}(-X^{-1}dX X^{-1}) = -\mathrm{Tr}(X^{-2}dX) \Rightarrow \nabla f(x) = -X^{-2}$

$d^2f = \mathrm{Tr}(d(-X^{-2})dX_1) = \mathrm{Tr}((X^{-1}dX_2X^{-2} + X^{-2}dX_2X^{-1})dX_1)$.

$D^2f(X)[H,H] = \mathrm{Tr}((X^{-1}HX^{-2} + X^{-2}HX^{-1})H) = 2\mathrm{Tr}(\underset{\geq 0}{X^{-1}}\underbrace{HX^{-1}H}_{\geq 0}\underset{\geq 0}{X^{-1}}) =$

2. $f(x) = \langle X^{-1}v, v\rangle$, $v \in \mathbb{R}^n$

$df(x) = \langle -X^{-1}dXX^{-1}v, v\rangle = \mathrm{Tr}(-v^TX^{-1}dXX^{-1}v) = \mathrm{Tr}(-X^{-1}vv^TX^{-1}dX)$

$d^2f(x) = -\mathrm{Tr}(d(X^{-1}vv^TX^{-1})dX_1) = -\mathrm{Tr}((X^{-1}dX_2X^{-1}vv^TX^{-1} - X^{-1}vv^TX^{-1}dX_2X^{-1})dX_1) =$

$D^2f(X)[H,H] = 2\mathrm{Tr}(X^{-1}HX^{-1}vv^TX^{-1}H) + 2\mathrm{Tr}(v^T\underbrace{X^{-1}HX^{-1}HX^{-1}}_{\geq 0 \text{ по } 1.}v)$

3. $f(X) = (\mathrm{Det}\,X)^{\frac{1}{n}}$

$df = \frac{1}{n}(\mathrm{Det}\,X)^{\frac{1}{n}-1}\det X\langle X^{-T}, dX\rangle = \frac{1}{n}(\mathrm{Det}\,X)^{\frac{1}{n}}\mathrm{Tr}(X^{-1}dX)$

$d^2f = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}(\mathrm{Det}\,X)^{\frac{1}{n}}\mathrm{Tr}(X^{-1}dX_2)\mathrm{Tr}(X^{-1}dX_1) - (\mathrm{Det}\,X)^{\frac{1}{n}}\mathrm{Tr}(X^{-1}dX_2X^{-1}dX_1)\right]$

$D^2f(X)[H,H] = \frac{1}{n}(\mathrm{Det}\,X)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}(\mathrm{Tr}(X^{-1}H))^2 - \mathrm{Tr}(X^{-1}HX^{-1}H)\right)$.

Знак зависит от $\frac{1}{n}(\mathrm{Tr}\,X^{-1}H)^2 \leq \mathrm{Tr}((X^{-1}H)^2)$.

(6) Найти точки стационарности (min, max, etc).

1. $f(x,y) = 2x^2 + y^2(x^2-2)$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x + 2y^2x \\ 2x^2y - 4y \end{pmatrix}$ $\quad \nabla f = 0 \Rightarrow x = y = 0.$

$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 4 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 4 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, но $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ — седло в $(0,0)$.

② $f(x,y) = (1-x)^2 + \lambda(y-x^2)^2$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2+2x - 4\lambda yx + \lambda 4x^3 \\ 2\lambda y - 2\lambda x^2 \end{pmatrix}$$

$\lambda \neq 0$: стационарная точка в $(1,1)$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2+12\lambda x^2 - 4\lambda y & -4\lambda x \\ -4\lambda x & 2\lambda \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2+8\lambda & -4\lambda \\ -4\lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$\Delta_1: 2+8\lambda \gtrless 0$

$\Delta_2: 4\lambda + 16\lambda^2 - 16\lambda^2 = 4\lambda \neq 0$ тогда $\lambda > 0$: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ $\Rightarrow$ min

$\lambda < 0$: $\Delta_2 < 0$ - седло.

$\lambda = 0$: $f(x,y) = (1-x)^2 \geq 0$

$x = 1$ $\forall y$ min функции $\to (1,y)$.