

## Universitetet i Bergen

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet INF 102 - Algoritmer, datastrukturer og programmering

Torsdag 24 februar 2011, kl 09:00 - 12:00

Bokmål

Ingen hjelpemidler er tillatt bortsett fra kalkulator.

Du trenger ikke å skrive java-kode for noen av oppgavene. Det holder med pseudokode eller en beskrivelse av algoritmen. **Alle kjøretider skal gis med  $O$ -notasjon og alle svar må begrunnes.** Det er totalt 4 oppgaver.

### Oppgave 1 (25%)

I denne oppgaven skal vi se på kjøretid.

Anta at  $n$  er et gitt positivt heltall. Hva er kjøretiden i  $O$ -notasjon av følgende kodefragmenter? Du skal gi så god kjøretid som mulig. Husk å begrunne dine svar.

a)

```
i = 1;
j = n;
while(i < j) {
    i = i + 4;
    j = j - 4;
}
```

b)

```
i = 1;
while(i < n) {
    j = i;
    while(j < n) {
        j = j + 1;
    }
    i = i + 1;
}
```

c)

```
i = 1;
while(i < n) {
    j = i;
    while(j < n) {
        j = j + 2;
    }
    i = i * 4;
}
```

d)

```
i = 1;
while(i < n) {
    j = 1;
    while(j < i) {
        j = j + 1;
    }
    k = 1;
    while(k < j) {
        k = k + 1;
    }
    i = i + 1;
}
```

e)

```
i = 1;
while(i < n) {
    j = 1;
    while(j < i) {
        k = 1;
        while(k < j) {
            k = k + 1;
        }
        j = j + 1;
    }
    i = i + 1;
}
```

Skriv  $O$ -notasjonsuttrykk for funksjonene nedenfor. Dine  $O$ -notasjonsfunksjoner skal være så forenklet og så saktevoksende som mulig. Husk å begrunne dine svar.

f)  $20n^4 + 123n^2 + 1000 \log_2 n$

g)  $120n^3 + 5n^2 \log_2 n$

h)  $100n^4 + 2^n$

i)  $n + n^2 \log_2 n + \log_2 n$

j)  $2^{10} + n$

k)  $2^{10}n$

Vi har kommet frem til følgende rekursive funksjoner som beskriver kjøretiden til to rekursive algoritmer. Hva er kjøretiden i  $O$ -notasjon for hver av dem når  $T(1) = 1$  i begge tilfeller? Husk å gi utledningen.

l)  $T(n) = 2T(\frac{n}{2})$

m)  $T(n) = 2T(n-1)$

## Oppgave 2 (25%)

I denne oppgaven skal vi se på binære søketrær.

a) Tegn det binære søketreet man får (uten rotasjoner eller balansering) ved å sette inn følgende tall i den rekkefølgen de kommer: 5, 9, 7, 12, 1, 3, 4, 10.

b) Tegn det treet man får etter sletting av 12 fra treet du tegnet i a).

c) Tegn et tre man kan få etter sletting av 5 fra treet du tegnet i b).

d) Hva er den største høyden et binært søketre med  $n$  elementer kan ha? Tegn et eksempel på et tre som har denne høyden.

e) Hva er den minste høyden et binært søketre med  $n$  elementer kan ha? Tegn et eksempel på et tre som har denne høyden.

### Oppgave 3 (15%)

I denne oppgaven skal vi se på sortering. Anta at vi er gitt  $n$  stykker heltall som vi må sortere.

- a) Hva er en raskest måte vi kan sortere disse tallene på hvis vi vet at ingen av dem er større enn  $n$ ? Nevn en kjent algoritme for dette, forklar kort virkemåten, og gi kjøretiden.
- b) Hva er en raskest måte vi kan sortere disse tallene på hvis vi vet at ingen av dem har mer enn 7 sifre? Nevn en kjent algoritme for dette, forklar kort virkemåten, og gi kjøretiden.
- c) Hva er en raskest måte vi kan sortere disse tallene på hvis vi ikke har noe informasjon om tallenes størrelse? Nevn en kjent algoritme for dette, forklar kort virkemåten, og gi kjøretiden.

### Oppgave 4 (35%)

I denne oppgaven skal vi se på grafer. En urettet graf kalles *bipartitt* dersom vi kan tildele hver node i grafen en av fargene **hvit** eller **svart**, slik at følgende gjelder for alle par av noder  $\{u, v\}$ : hvis det er en kant mellom  $u$  og  $v$  så har  $u$  og  $v$  ulik farge.

- a) Tegn en graf på fire noder som er bipartitt og vis fargene på nodene. Tegn en graf på fire noder som ikke er bipartitt; forklar hvorfor.

Anta at vi er gitt en urettet og sammenhengende graf med  $n$  noder og  $m$  kanter.

- b) Anta at vi vet at grafen er bipartitt. Gi en raskest mulig algoritme for å fargelegge nodene i grafen på riktig måte. Hva er kjøretiden? Begrunn korrektheten av din algoritme.
- c) Anta at vi *ikke* vet om grafen er bipartitt eller ikke. Gi en raskest mulig algoritme for å avgjøre om grafen er bipartitt. Hva er kjøretiden? Begrunn korrektheten av din algoritme.

Lykke til!

Pinar Heggernes