

Digitaltechnik

Andrej Scheuer
ascheuer@student.ethz.ch
26. Dezember 2020

Gates

AND

$$Y = A \wedge B \quad Y = A \cdot B$$



A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NAND AND aus NOR



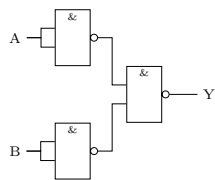
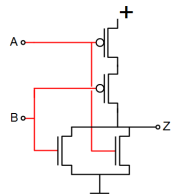
OR

$$Y = A \vee B \quad Y = A + B$$



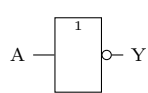
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOR OR aus NAND

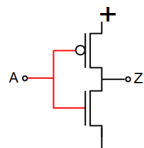


NOT

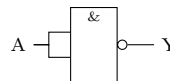
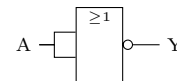
$$Y = \bar{A}$$



A	Y
0	1
1	0



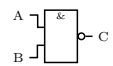
NOT aus NOR NOT aus NAND



Weitere Gates

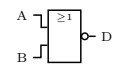
NAND

$$C = \overline{A \wedge B}$$



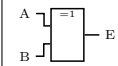
NOR

$$D = \overline{A \vee B}$$



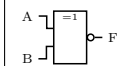
XOR

$$E = A \oplus B$$



XNOR

$$F = \overline{A \oplus B}$$

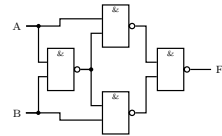


A	B	C	D	E	F
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1

$$XOR = (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)$$

$$XNOR = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$$

XOR aus NAND



XOR aus NOR: Gleiches Schema wie NAND + 1 Inverter

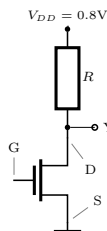
XNOR aus NAND: Gleiches Schema wie XOR aus NOR

XNOR aus NOR: Gleiches Schema wie XOR aus NAND

Es versteht sich natürlich, dass wenn von „Gleichem Schema wie...“ gesprochen wird, die Gates trotzdem getauscht werden müssen.

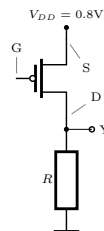
CMOS

NMOS



G	Schalter	Y
0	offen	1
1	zu	0

PMOS



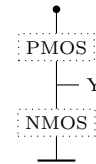
G	Schalter	Y
0	zu	1
1	offen	0

Konstruktion von CMOS-Gates

Regeln für CMOS-Schaltungen

1. CMOS-Gates bestehen aus gleich vielen NMOS und PMOS.
2. m Eingänge: m NMOS und m PMOS.
3. NMOS in Serie \rightarrow PMOS Parallel
4. NMOS parallel \rightarrow PMOS Serie

Allg. Aufbau CMOS

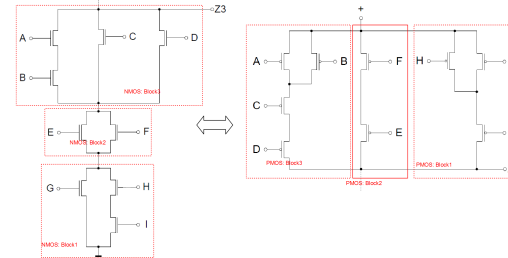


Pull-up: PMOS
Pull-down: NMOS

Pfade sind komplementär
(Serie \Leftrightarrow Parallel)

Umwandlung Pull-up zu Pull-down

1. Teilbereiche (Blöcke) identifizieren.
2. Schritt 1 wiederholen, bis nur noch einzelne Transistoren vorkommen.
3. Falls Pull-down:
 - Von GND aus mit äusserstem Block beginnen.
 - PMOS \rightarrow NMOS
4. Falls Pull-up:
 - Von V_{DD} aus mit äusserstem Block beginnen.
 - NMOS \rightarrow PMOS.



Funktionsgleichung

parallel: \vee | Pull-Up: $y = 1$ | alle I : 0 \rightarrow I invert.
Serie: \wedge | Pull-Down: $y = 0$ | alle I : 1 \rightarrow Gl. invert.

Boolesche Algebra

Grundregeln

Kommutativität

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

Assoziativität

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

Distributivität

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) = A \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \vee (B \wedge C)$$

$$\text{Nicht} \quad \bar{\bar{A}} = A$$

$$\text{Null-Th.} \quad A \vee 0 = A \quad A \wedge 0 = 0$$

$$\text{Eins-Th.} \quad A \vee 1 = 1 \quad A \wedge 1 = A$$

$$\text{Idempotenz} \quad A \vee A = A \quad A \wedge A = A$$

$$\text{V. Komp.} \quad A \vee \bar{A} = 1 \quad A \wedge \bar{A} = 0$$

$$\text{Adsorp.} \quad A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$$

$$A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$$

$$\text{Adsorp.} \quad A \vee (A \wedge B) = A$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

$$\text{Nachbar.G.} \quad (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge B) = B$$

$$(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B) = B$$

De Morgan

$$1. \text{ Regel} \quad \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$2. \text{ Regel} \quad \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

Regeln gelten auch für n verknüpfte Terme.

Normalformen

Minterm	Maxterm
AND-Ausdruck	OR-Ausdruck
Output: 1	Output: 0
n Schaltvar. $\rightarrow 2^n$ mögl. Minterme.	n Schaltvar. $\rightarrow 2^n$ mögl. Maxterme.
nicht-invertierte Var: 1	nicht-invertierte Var: 0
invertierte Var: 0	invertierte Var: 0

Disjunktive Normalform

1. Identifiziere WT-Zeilen mit Output 1
2. **Minterme** für diese Zeilen aufstellen
3. Minterme mit **OR** verknüpfen

Konjunktive Normalform

1. Identifiziere WT-Zeilen mit Output 0
2. **Maxterme** für diese Zeilen aufstellen
3. Maxterme mit **AND** verknüpfen

A	B	Y	Minterme	Maxterme
0	0	1	$A \wedge \bar{B}$	
0	1	0		$A \vee \bar{B}$
1	0	0		$\bar{A} \vee B$
1	1	1	$A \wedge B$	

$$\text{DNF} \quad Y = (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (A \wedge B) \quad 1 \text{ Mint. erf.} \rightarrow 1$$

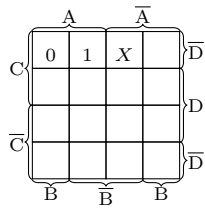
$$\text{KNF} \quad Y = (A \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee B) \quad 1 \text{ Maxt. erf.} \rightarrow 0$$

NAND/NOR Schaltungen

Schaltung nur aus:

- NAND: DNF $\rightarrow 2 \times$ Negieren $\rightarrow 1 \times$ De Morgan
 - NOR: KNF $\rightarrow 2 \times$ Negieren $\rightarrow 1 \times$ De Morgan
- oder: auf jeden Term der DNF De Morgan anwenden.

Karnaugh Diagramme (KVD)



CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	X	
01				
11				
10				

Hat das Karnaugh Diagramm 5 Dimensionen, wird die 5te Dimension auf zwei Tabellen aufgeteilt.

Don't-Care-Zustände $X \in \{0, 1\}$ Redundante, überflüssige oder unmögliche Kombinationen der Eingangsvariablen werden mit einem X markiert.

Schema zum Ausfüllen

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Päckchen

- Päckchen immer rechteckig (Ausnahme: über Ecken).
- Umfassen möglichst grosse Zweierpotenz.
- Dürfen über Ecken und Grenzen hinausgehen und sich überlappen.

DNF

- KVD ausfüllen.
- Päckchen mit **1** uo X .
- Vereinfachte Minterme aufstellen.
- Minterme mit OR verbinden.

KNF

- KVD ausfüllen.
- Päckchen mit **0** uo X .
- Vereinfachte Maxterme aufstellen.
- Maxterme mit AND verbinden.

Hazard

Kurzzeitige, unerwünschte Änderung der Signalwerte, die durch Zeitverzögerung der Gatter entstehen.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

Statische Hazards Stellen im KVD, an denen sich Päckchen orthogonal berühren, aber nicht überlappen.
Lösung Berührende **Päckchen** mit zusätzlichen (möglichst grossen) **Päckchen** verbinden.

Zahlensysteme

D zu berechnende positive Zahl
 R Basis/Radix von D
 b_i Koeffizient

$$D = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot R^i$$

Darstellung D in Basis R : $\dots b_2 b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \dots_R$

Dezimal	10	$b_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$
Dual/Binär	2	$b_i \in \{0, 1\}$
Oktal	8	$b_i \in \{0, 1, \dots, 7\}$
Hexa	16	$b_i \in \{0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Umwandlung Zahlensysteme

- Ganzzahlige Division mit R : $D/R = Q_0 + r_0$.
- $Q_i/R = Q_{i+1} + r_{i+1}$
bis $Q_i = 0$.
- Erste Operation gibt MSB, letzte Operation gibt LSB (aka. unten nach oben lesen.)

Für $1 > D \geq 0$

$$D \cdot R = P_0 \quad K_{-1} = \text{floor}(P_0) \quad a_{-1} = P_0 - K_{-1}$$

$$a_{-1} \cdot R = P_{-1} \dots$$

K_i : Koeffizienten für Zahlensystem. Erste Operation gibt **MSB**, letzte Operation gibt **LSB** (aka von oben nach unten lesen).

Dezimal zu Binär

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
0.5	0.25	0.125	0.0625

Binär zu Hex

0000	0	0100	4	1000	8	1100	C
0001	1	0101	5	1001	9	1101	D
0010	2	0110	6	1010	A	1110	E
0011	3	0111	7	1011	B	1111	F

Zweierkomplement

Sign Bit
0: positiv 1: negativ

Konstruktion

- Zahl $|Z|$ in Binär B umwandeln.
 - B bitweise invertieren
 - 1 zu LSB addieren (! Übertrag)
 - Sign Bit hinzufügen (zuvorderst).
- Ist die Blocklänge länger als Zahl, vorangehende 0(-en) miteinbeziehen.

2^{er} Komplement zu Dezimal

$$D_{(10)} = -b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i \cdot 2^i$$

Wertebereich 2^{er}-Komp. $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$

mQn

$$D_{(10)} = -b_m \cdot 2^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i \cdot 2^i + \sum_{i=1}^n b_i \cdot 2^{-i}$$

m : Vorkommabits, n : Nachkommabits
Sign-Bit muss nur einmal vor dem m codiert werden.

Binäre Rechenoperationen

Addition

Bitweise Addition der Binärzahlen. Leere Slots werden mit 0 aufgefüllt.

Subtraktion

Addition via 2^{er} Komp. Übertrag von MSB ignorieren.

Multiplikation

- Bitweise Multiplikation des Multiplikanden a mit b_i des Multiplikators.
- Sukzessive Multiplikationen werden um ein Bit (0) nach links verschoben.
- Anzahl Nachkommabits ergibt sich aus der Summe der Anzahl Nachk.bits der Operatoren.

$$\begin{array}{r} b_0 \cdot a \\ + b_1 \cdot a \cdot 0 \\ + b_2 \cdot a \cdot 00 \\ + b_3 \cdot a \cdot 000 \\ \hline = \text{Sum} \end{array}$$

Division

- Identifiziere Teil des Divident $>$ Divisor (Unterblock). Für jede Stelle, sodass Divident $<$ Divisor, 0 in Quotient.
- Unterblock – Divisor, 1 an Quotient anhängen, Rest behalten.
- An das Resultat der Subtraktion Bits des Dividenten anhängen. Wiederholen bis Subtraktion 0 ergibt.

Parity-Bits

Hilft Bit-Fehler zu finden.
Bitsequenz wird in 4 Bits unterteilt. Pro Nibble wird ein **Parity-Bit** angefügt. Nach 4 Blöcken folgt ein **Prüfwort**.

Parity-Bit	Anz. 1	PB	Nibble + PB
Even P_E	ungerade	1	gerade
	gerade	0	
Odd P_O	ungerade	0	ungerade
	gerade	1	

01010 11011 10111 00101 00011

Korrekt P_E

0	1	0	1	0
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1

Fehler P_E

0	1	0	1	0
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1

Latches und FlipFlops

Kombinatorische Schaltung
Output hängt von Inputs und Verknüpfungen ab.

Sequentielle Schaltung
Enthält Rückkopplungen, Outputs hängen von vorherigen Werten ab.

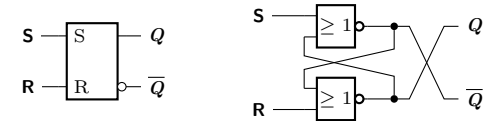
Latch (Takt)zustandgesteuerte
Schaltung \rightarrow Änderungen am Eingang können während der **ganzen aktiven Taktphase** den Output beeinflussen.

FlipFlops Taktflankengesteuerte
Schaltung \rightarrow Input zum Zeitpunkt der Taktwechsels wird wirksam.

Latches

Alle taktzustandgesteuerte Schaltungen sind gegenüber **Störimpulsen** empfindlich, da bei $T = 1$ jede Änderung übernommen wird.

SR-Latch

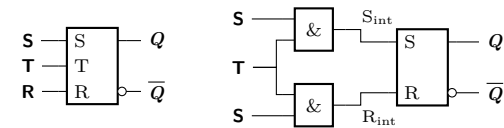


S Set \rightarrow setzt Q auf 1
R Reset \rightarrow setzt Q auf 0

$$Q_{n+1} = S \vee (Q_n \wedge \overline{R})$$

Fall	S	R	Q_{n+1}	
1	0	0	Q_n	speichern
2	0	1	0	zurücksetzen
3	1	0	1	setzen
4	1	1	-	unzulässig

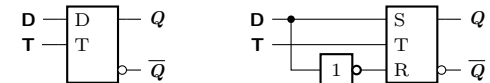
SRT-Latch



T \rightarrow S_{int} R_{int} \rightarrow Datenspeicherung
0 \rightarrow 0 0 \rightarrow Normales SR-Latch
1 \rightarrow S R \rightarrow

Änderungen werden nur übernommen, wenn T/CLK aktiv ist.

D-Latch



Bauelement, das Daten für die Periodendauer eines Taktes speichern kann.

$$Q_{n+1} = (Q_n \wedge \overline{T}) \vee (D \wedge T)$$

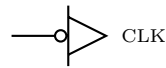
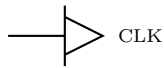
T Q_{n+1}
0 Q_n \rightarrow alter Ausgang gespeichert
1 D \rightarrow Input übernommen

D-Latch transparent

letzter Zustand gespeichert



FlipFlops



Input beim Übergang von 0 → 1 von CLK wirksam.

Input beim Übergang von 1 → 0 von CLK wirksam.

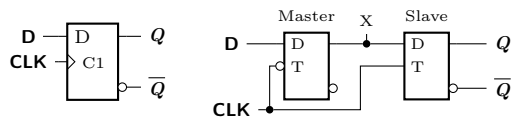


Positive/steigende Taktflanke



Negative/fallende Taktflanke

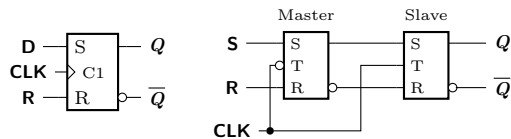
D-FlipFlop



$$Q_{n+1} = D \quad \text{wenn CLK } 0 \rightarrow 1$$

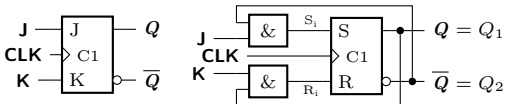
Master low-active CLK = 0
Slave high-active CLK = 1

SR-FlipFlop



$$Q_{n+1} = S \vee (\bar{R} \wedge Q_n) \quad \text{wenn CLK } 0 \rightarrow 1$$

JK-FlipFlop



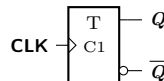
$$Q_{n+1} = (J \wedge \bar{Q}_n) \vee (\bar{K} \wedge Q_n) \quad \text{wenn CLK } 0 \rightarrow 1$$

Fall	J	K	Q_{1n+1}	Q_{2n+1}	
1	0	0	Q_{1n}	Q_{2n}	speichern zurücksetzen setzen wechseln
2	0	1	0	1	
3	1	0	1	0	
4	1	1	\bar{Q}_{1n}	\bar{Q}_{2n}	

Bei J = K = 1 wechselt Output. (toggle)

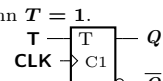
T-FlipFlop

V1 Ausgang wechselt bei jeder aktiven Taktflanke.



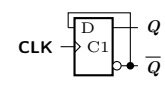
$$Q_{n+1} = \bar{Q}_n \quad \text{wenn CLK } 0 \rightarrow 1$$

V2 Ausgang wechselt bei aktiver Taktflanke nur wenn T = 1.

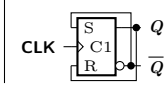


$$Q_{n+1} = \bar{Q}_n \quad \text{wenn CLK } 0 \rightarrow 1 \wedge T = 1$$

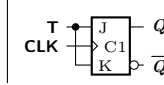
BS V1



BS V1

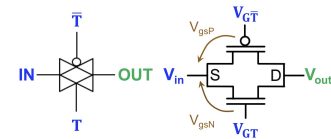


BS V2



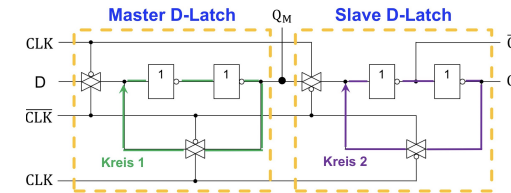
D-FlipFlop in CMOS-Technik

Transmission Gates

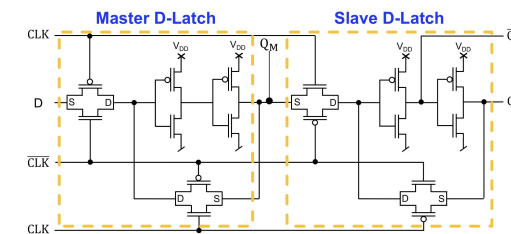


IN	T	Widerstand	OUT
0	0	hochohm.	-
0	1	niederohm.	0
1	0	hochohm.	-
1	1	niederohm.	1

TG sperrt wenn Widerstand hochohmig ist. (T = 0)



CLK 0 Input ins erste Latch übertragen
CLK 1 Latch verriegelt, Wert im Kreis gefangen



D-FlipFlop ↔ JK-FlipFlop

1. JK-FF kann immer durch D-FF ersetzt werden.

$$D\text{-FF: } D_n = (J \wedge \bar{Q}_n) \vee (\bar{K} \wedge Q_n) \quad \text{JK-FF}$$

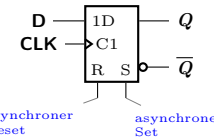
2. Ein D-FF kann nur durch JK-FF ersetzt werden wenn:
a) Schaltung eine Rückkopplung enthält.
b) Input D als $(F_1 \wedge \bar{Q}_n) \vee (F_2 \wedge Q_n)$ geschrieben werden kann.

Gleichung für D-FF → JK-FF

- Wahrheitstabelle mit Einängen und Rückkopplung.
- Wahrheitstabelle in Q_n und \bar{Q}_n .
- Separat Päckchen in Q_n und \bar{Q}_n machen.
- Päckchen mit OR verbinden. Ggf. Q_n und \bar{Q}_n ausklammern.

Q _n , A	BC	00	01	11	10
00					
01					
11					
01					

Asynchroner Set/Reset Input



Können gespeicherte Zustände asynchron zu CLK überschreiben.

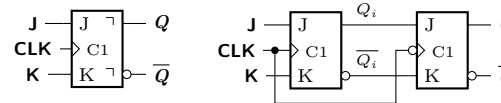
Verzögerungszeiten

t_s Setup-Zeit Solange muss Signal vor aktiver Taktflanke stabil anliegen.
 t_h Hold-Zeit Solange muss Signal nach aktiver Taktflanke stabil anliegen.
 t_{pd} Verzögerungszeit Durchlaufzeit

$$T_{\min} \geq t_{pd1} + t_{pd,ks} + t_{s2} \quad f_{\max} = \frac{1}{T_{\min}}$$

t_h kann bei der Berechnung von f_{\max} vernachlässigt werden.
Es wird der längste P-Path zwischen zwei FlipFlops betrachtet.

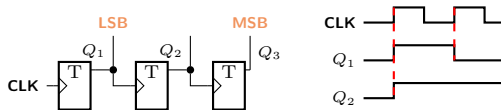
Zwischenspeicher-FF



FlipFlop, dass Input bei steigender Taktflanke übernimmt und bei der nächsten fallenden Taktflanke ausgibt. (oder umgekehrte Flanken)

- ⌋ Ausgabe bei fallender Flanke
- ⌋ Ausgabe bei steigender Flanke

Frequenzteiler und Zähler



Kaskadieren von T-Flipflops führt zu einer Frequenzreduktion von CLK um Faktor 2.
Kann als Bitzähler verwendet werden (ohne CLK). MSB ist längste Frequenz. $n_{T,ff} \rightarrow 0 \dots (2^n - 1)$

Automaten

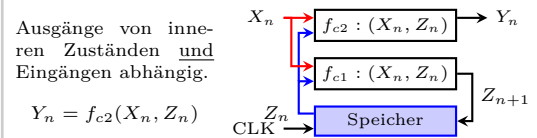
Ein System, das auf seine Eingänge reagiert und einen Ausgang produziert, der vom Eingangssignal und momentanen Zustand abhängt.
Bei synchronen Automaten besitzen alle Speicherelemente (FlipFlops) den gleichen Takteingang.

Formale Beschreibung

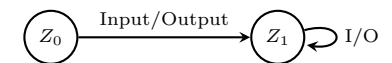
$X = (x_1, \dots, x_e)$ Eingangsalphabet mit e Eingängen
 $Y = (y_1, \dots, y_b)$ Ausgangsalphabet mit b Ausgängen
 $Z = (z_1, \dots, z_m)$ Zustandsmenge mit m internen Zuständen
 $Z_0 \in Z$ Anfangszustand
 $f_{e1} : (X_n, Z_n) \rightarrow Z_{n+1}$ Übergangsfunktion
 $f_{e2} : (X_n, Z_n) \rightarrow Y_n$ Ausgangsfunktion

Automatentypen

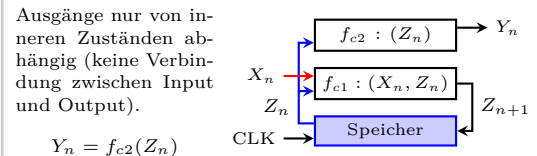
Mealy-Automat



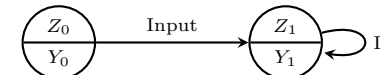
Zustandsdiagramm



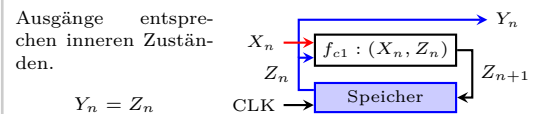
Moore-Automat



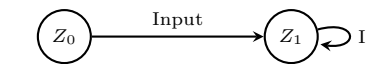
Zustandsdiagramm



Medwedjew-Automat



Zustandsdiagramm



Nachtrag Zustandsdiagramm

Knoten interne Zustände
Kanten Übergänge zwischen Zuständen

Wichtig Von jedem Knoten aus muss es für jeden Eingang eine Kante geben, diese können aber zusammengefasst werden.

