

Digitaltechnik

Andrej Scheuer
ascheuer@student.ethz.ch
2. Dezember 2020

Gates

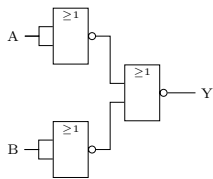
AND

$$Y = A \wedge B \quad Y = A \cdot B$$



A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NAND AND aus NOR



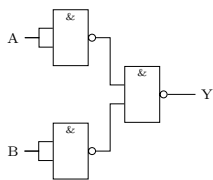
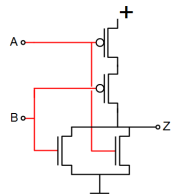
OR

$$Y = A \vee B \quad Y = A + B$$



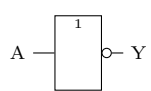
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOR OR aus NAND

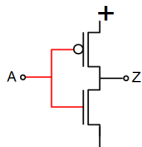


NOT

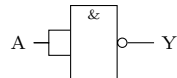
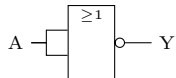
$$Y = \overline{A}$$



A	Y
0	1
1	0



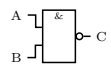
NOT aus NOR NOT aus NAND



Weitere Gates

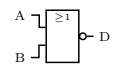
NAND

$$C = \overline{A \wedge B}$$



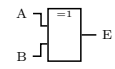
NOR

$$D = \overline{A \vee B}$$



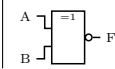
XOR

$$E = A \oplus B$$



XNOR

$$F = \overline{A \oplus B}$$

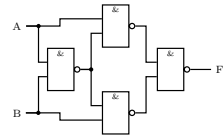


A	B	C	D	E	F
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1

$$XOR = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$$

$$XNOR = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

XOR aus NAND



XOR aus NOR: Gleiches Schema wie NAND + 1 Inverter

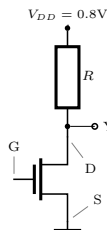
XNOR aus NAND: Gleiches Schema wie XOR aus NOR

XNOR aus NOR: Gleiches Schema wie XOR aus NAND

Es versteht sich natürlich, dass wenn von „Gleichem Schema wie...“ gesprochen wird, die Gates trotzdem getauscht werden müssen.

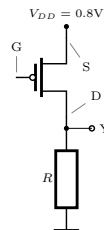
CMOS

NMOS



G	Schalter	Y
0	offen	1
1	zu	0

PMOS



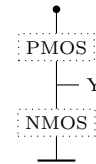
G	Schalter	Y
0	zu	1
1	offen	0

Konstruktion von CMOS-Gates

Regeln für CMOS-Schaltungen

1. CMOS-Gates bestehen aus gleich vielen NMOS und PMOS.
2. m Eingänge: m NMOS und m PMOS.
3. NMOS in Serie \rightarrow PMOS parallel
4. NMOS parallel \rightarrow PMOS Serie

Allg. Aufbau CMOS

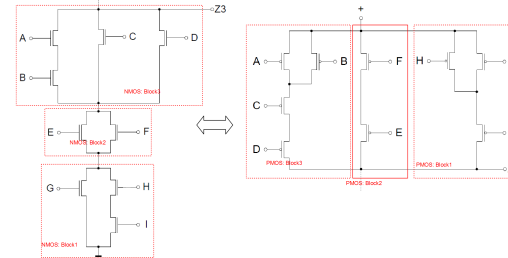


Pull-up: PMOS
Pull-down: NMOS

Pfade sind komplementär
(Serie \Leftrightarrow Parallel)

Umwandlung Pull-up zu Pull-down

1. Teilbereiche (Blöcke) identifizieren.
2. Schritt 1 wiederholen, bis nur noch einzelne Transistoren vorkommen.
3. Falls Pull-down:
 - Von GND aus mit äusserstem Block beginnen.
 - PMOS \rightarrow NMOS
4. Falls Pull-up:
 - Von V_{DD} aus mit äusserstem Block beginnen.
 - NMOS \rightarrow PMOS.



Funktionsgleichung

parallel: \vee | Pull-Up: $y = 1$ | alle I : 0 \rightarrow I invert.
Serie: \wedge | Pull-Down: $y = 0$ | alle I : 1 \rightarrow Gl. invert.

Boolesche Algebra

Grundregeln

Kommutativität

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

Assoziativität

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

Distributivität

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) = A \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \vee (B \wedge C)$$

$$\text{Nicht} \quad \overline{\overline{A}} = A$$

$$\text{Null-Th.} \quad A \vee 0 = A \quad A \wedge 0 = 0$$

$$\text{Eins-Th.} \quad A \vee 1 = 1 \quad A \wedge 1 = A$$

$$\text{Idempotenz} \quad A \vee A = A \quad A \wedge A = A$$

$$\text{V. Komp.} \quad A \vee \overline{A} = 1 \quad A \wedge \overline{A} = 0$$

$$\text{Adsorp.} \quad A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$$

$$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$$

$$\text{Adsorp.} \quad A \vee (A \wedge B) = A$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

$$\text{Nachbar.G.} \quad (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) = B$$

$$(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) = B$$

De Morgan

$$1. \text{ Regel} \quad \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$2. \text{ Regel} \quad \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Regeln gelten auch für n verknüpfte Terme.

Normalformen

Minterm	Maxterm
AND-Ausdruck	OR-Ausdruck
Output: 1	Output: 0
n Schaltvar. $\rightarrow 2^n$ mögl. Minterme.	n Schaltvar. $\rightarrow 2^n$ mögl. Maxterme.
nicht-invertierte Var: 1	nicht-invertierte Var: 0
invertierte Var: 0	invertierte Var: 0

Disjunktive Normalform

1. Identifiziere WT-Zeilen mit Output 1
2. **Minterme** für diese Zeilen aufstellen
3. Minterme mit **OR** verknüpfen

Konjunktive Normalform

1. Identifiziere WT-Zeilen mit Output 0
2. **Maxterme** für diese Zeilen aufstellen
3. Maxterme mit **AND** verknüpfen

A	B	Y	Minterme	Maxterme
0	0	1	$A \wedge \overline{B}$	
0	1	0		$A \vee \overline{B}$
1	0	0		$\overline{A} \vee B$
1	1	1	$A \wedge B$	

$$\text{DNF} \quad Y = (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B) \quad 1 \text{ Mint. erf.} \rightarrow 1$$

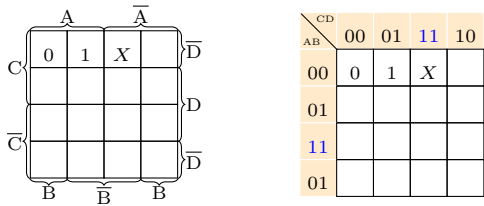
$$\text{KNF} \quad Y = (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B) \quad 1 \text{ Maxt. erf.} \rightarrow 0$$

NAND/NOR Schaltungen

Schaltung nur aus:

- NOR: KNF $\rightarrow 2 \times$ Negieren $\rightarrow 1 \times$ De Morgan
- NAND: DNF $\rightarrow 2 \times$ Negieren $\rightarrow 1 \times$ De Morgan

Karnaugh Diagramme (KVD)



Hat das Karnaugh Diagramm 5 Dimensionen, wird die 5te Dimension auf zwei Tabellen aufgeteilt.

Don't-Care-Zustände $X \in \{0, 1\}$ Redundante, überflüssige oder unmögliche Kombinationen der Eingangsvariablen werden mit einem X markiert.

Päckchen

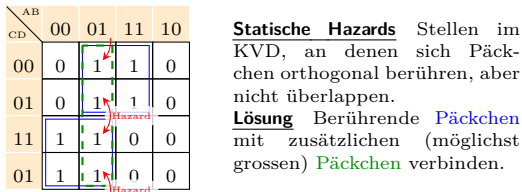
- Päckchen immer rechteckig (Ausnahme: über Ecken).
- Umfassen möglichst grosse Zweierpotenz.
- Dürfen über Ecken und Grenzen hinausgehen und sich überlappen.

DNF KNF

1. KVD ausfüllen.
 2. Päckchen mit **1** uo X .
 3. Vereinfachte Minterme aufstellen.
 4. Minterme mit OR verbinden.
1. KVD ausfüllen.
 2. Päckchen mit **0** uo X .
 3. Vereinfachte Maxterme aufstellen.
 4. Maxterme mit AND verbinden.

Hazard

Kurzzeitige, unerwünschte Änderung der Signalwerte, die durch Zeitverzögerung der Gatter entstehen.



Statische Hazards Stellen im KVD, an denen sich Päckchen orthogonal berühren, aber nicht überlappen.
Lösung Berührende **Päckchen** mit zusätzlichen (möglichst grossen) **Päckchen** verbinden.

Zahlensysteme

D zu berechnende positive Zahl
 R Basis/Radix von D
 b_i Koeffizient
$$D = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot R^i$$

Darstellung D in Basis R : $\dots b_2 b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \dots_R$

Dezimal	10	$b_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$
Dual/Binär	2	$b_i \in \{0, 1\}$
Oktal	8	$b_i \in \{0, 1, \dots, 7\}$
Hexa	16	$b_i \in \{0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Umwandlung Zahlensysteme

1. Ganzzahlige Division mit R : $D/R = Q_0 + r_0$.
2.
$$Q_i/R = Q_{i+1} + r_{i+1}$$

bis $Q_i = 0$.
3. Erste Operation gibt MSB, letzte Operation gibt LSB (aka. unten nach oben lesen.)

Für $1 > D \geq 0$

$$D \cdot R = P_0 \quad K_{-1} = \text{floor}(P_0) \quad a_{-1} = P_0 - K_{-1}$$
$$a_{-1} \cdot R = P_{-1} \dots$$

K_i : Koeffizienten für Zahlensystem. Erste Operation gibt **MSB**, letzte Operation gibt **LSB** (aka von oben nach unten lesen).

Byte

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
0.5	0.25	0.125	0.0625

Binär zu Hex

0000	0	0100	4	1000	8	1100	C
0001	1	0101	5	1001	9	1101	D
0010	2	0110	6	1010	A	1110	E
0011	3	0111	7	1011	B	1111	F

Zweierkomplement

Sign Bit
0: positiv 1: negativ

Konstruktion

1. Zahl $|Z|$ in Binär B umwandeln.
 2. B bitweise invertieren
 3. 1 zu LSB addieren (! Übertrag)
 4. Sign Bit hinzufügen (zuvorderst).
- Ist die Blocklänge länger als Zahl, vorangehende 0(-en) miteinbeziehen.

2^{er} Komplement zu Dezimal

$$D_{(10)} = -b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i \cdot 2^i$$

Wertebereich 2^{er}-Komp. $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$

mQn

$$D_{(10)} = -b_m \cdot 2^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i \cdot 2^i + \sum_{i=1}^n b_i \cdot 2^{-i}$$

m : Vorkommabits, n : Nachkommabits
Sign-Bit muss nur einmal vor dem m codiert werden.

Binäre Rechenoperationen

- Addition** Bitweise Addition der Binärzahlen. Leere Slots werden mit 0 aufgefüllt.
- Subtraktion** Addition via 2^{er} Komp. Übertrag von MSB ignorieren.

Multiplikation

- Bitweise Multiplikation des Multiplikanden a mit b_i des Multiplikator.
 - Sukzessive Multiplikationen werden um ein Bit (0) nach links verschoben.
 - Anzahl Nachkommabits ergibt sich aus der Summe der Nachk.bits der Operatoren.
- $$\begin{array}{r} b_0 \cdot a \\ + b_1 \cdot a \ 0 \\ + b_2 \cdot a \ 0 \ 0 \\ + b_3 \cdot a \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline = \text{Sum} \end{array}$$

Division

1. Identifiziere Teil des Divident $>$ Divisor (Unterblock). Für jede Stelle, sodass Divident $<$ Divisor, 0 in Quotient.
2. Unterblock – Divisor, 1 an Quotient anhängen, Rest behalten.
3. An das Resultat der Subtraktion Bits des Dividenten anhängen. Wiederholen bis Subtraktion 0 ergibt.

Parity-Bits

Hilft Bit-Fehler zu finden. Bitsequenz wird in 4 Bits unterteilt. Pro Nibble wird ein **Parity-Bit** angefügt. Nach 4 Blöcken folgt ein **Prüfwort**.

Parity-Bit	Anz. 1	PB	Nibble + PB
Even P_E	ungerade	1	gerade
	gerade	0	
Odd P_O	ungerade	0	ungerade
	gerade	1	

01010 11011 10111 00101 00011

Korrekt P_E Fehler P_E

0 1 0 1 0	0
1 1 0 1 1	1
1 0 1 1 1	1
0 0 1 0 1	1
0 0 0 1 1	1

0 1 0 1 0	0
1 1 1 1 1	1
1 0 1 1 1	1
0 0 1 0 1	1
0 0 0 1 1	1

Latches und FlipFlops

Kombinatorische Schaltung Output hängt von Inputs und Verknüpfungen ab.

Sequentielle Schaltung Enthält Rückkopplungen, Outputs hängen von vorherigen Werten ab.

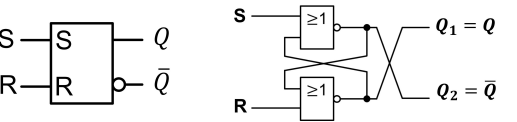
Latch (Takt)zustandgesteuerte Schaltung → Änderungen am Eingang können während der **ganzen aktiven Taktphase** den Output beeinflussen.

FlipFlops Taktflankengesteuerte Schaltung → Input zum Zeitpunkt der Taktwechsels wird wirksam.

Latches

Alle taktzustandgesteuerte Schaltungen sind gegenüber **Störimpulsen** empfindlich, da bei $T = 1$ jede Änderung übernommen wird.

SR-Latch

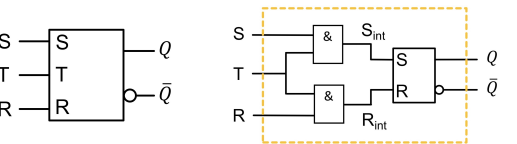


S Set → setzt Q auf 1
R Reset → setzt Q auf 0

$$Q_{n+1} = S \vee (Q_n \wedge \bar{R})$$

Fall	S	R	Q_{n+1}	
1	0	0	Q_n	speichern
2	0	1	0	zurücksetzen
3	1	0	1	setzen
4	1	1	-	unzulässig

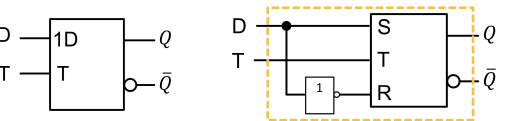
SRT-Latch



T \rightarrow S_{int} R_{int} \rightarrow Datenspeicherung
0 \rightarrow 0 0 \rightarrow Normales SR-Latch
1 \rightarrow S R \rightarrow

Änderungen werden nur übernommen, wenn T/CLK aktiv ist.

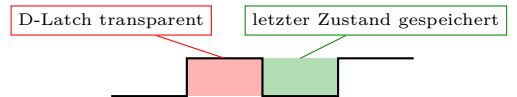
D-Latch



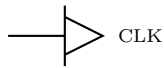
Bauelement, das Daten für die Periodendauer eines Taktes speichern kann.

$$Q_{n+1} = (Q_n \wedge \bar{T}) \vee (D \wedge T)$$

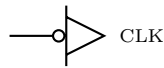
T Q_{n+1}
0 Q_n \rightarrow alter Ausgang gespeichert
1 D \rightarrow Input übernommen



FlipFlops



Input beim Übergang von 0 → 1 von CLK wirksam.



Input beim Übergang von 1 → 0 von CLK wirksam.

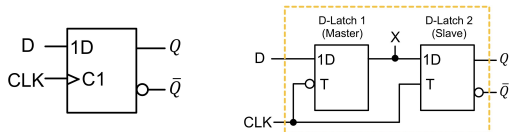


Positive/steigende Taktflanke



Negative/fallende Taktflanke

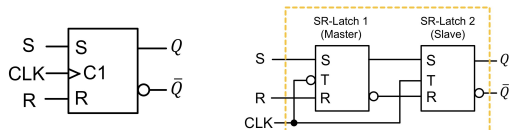
D-FlipFlop



$Q_{n+1} = D$ wenn CLK 0 → 1

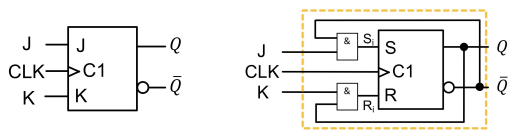
Master low-active CLK = 0
Slave high-active CLK = 1

SR-FlipFlop



$Q_{n+1} = S \vee (\bar{R} \wedge Q_n)$ wenn CLK 0 → 1

JK-FlipFlop

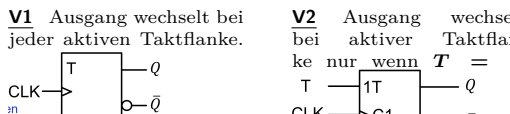


$Q_{n+1} = (J \wedge \bar{Q}_n) \vee (\bar{K} \wedge Q_n)$ wenn CLK 0 → 1

Fall	J	K	Q_{1n+1}	Q_{2n+1}	
1	0	0	Q_{1n}	Q_{2n}	speichern
2	0	1	0	1	zurücksetzen
3	1	0	1	0	setzen
4	1	1	\bar{Q}_{1n}	\bar{Q}_{2n}	wechseln

Bei J = K = 1 wechselt Output. (toggle)

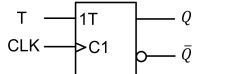
T-FlipFlop



$Q_{n+1} = \bar{Q}_n$

wenn CLK 0 → 1

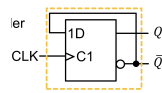
V1 Ausgang wechselt bei jeder aktiven Taktflanke.



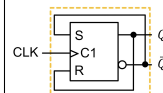
$Q_{n+1} = \bar{Q}_n$

wenn CLK 0 → 1 ∧ T = 1

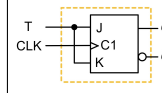
BS V1



BS V1

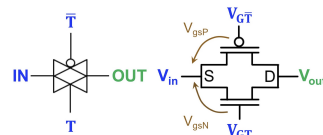


BS V2



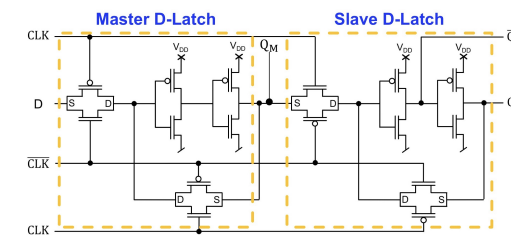
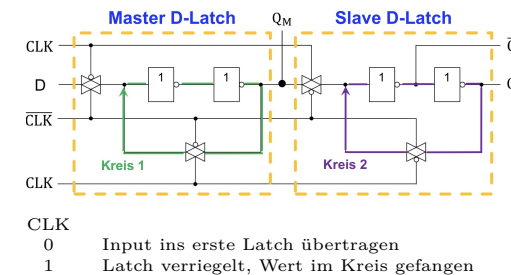
D-FlipFlop in CMOS-Technik

Transmission Gates



IN	T	Widerstand	OUT
0	0	hochohm.	-
0	1	niederohm.	0
1	0	hochohm.	-
1	1	niederohm.	1

TG sperrt wenn Widerstand hochohmig ist. (T = 0)



D-FlipFlop ⇔ JK-FlipFlop

1. JK-FF kann immer durch D-FF ersetzt werden.

D-FF: $D_n = (J \wedge \bar{Q}_n) \vee (\bar{K} \wedge Q_n)$:JK-FF

2. Ein D-FF kann nur durch JK-FF ersetzt werden wenn:
a) Schaltung eine Rückkopplung enthält.
b) Input D als $(F_1 \wedge \bar{Q}_n) \vee (F_2 \wedge Q_n)$ geschrieben werden kann.

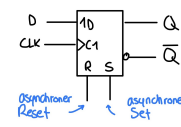
Gleichung für D-FF → JK-FF

- Wahrheitstabelle mit Einängen und Rückkopplung.
- Wahrheitstabelle in Q_n und \bar{Q}_n .
- Separat Päckchen in Q_n und \bar{Q}_n machen.
- Päckchen mit OR verbinden. Ggf. Q_n und \bar{Q}_n ausklammern.

BC	00	01	11	10
00				
01				
11				
01				

Asynchroner Set/Reset Input

Können gespeicherte Zustände asynchron zu CLK überschreiben.



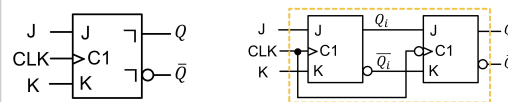
Verzögerungszeiten

t_s	Setup-Zeit	Solange muss Signal <u>vor</u> aktiver Taktflanke stabil anliegen.
t_h	Hold-Zeit	Solange muss Signal <u>nach</u> aktiver Taktflanke stabil anliegen.
t_{pd}	Verzögerungszeit	Durchlaufzeit

$$T_{min} \geq t_{pd1} + t_{pd,ks} + t_{s2} \quad f_{max} = \frac{1}{T_{min}}$$

t_h kann bei der Berechnung von f_{max} vernachlässigt werden.

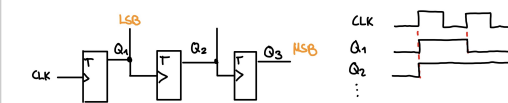
Zwischenspeicher-FF



FlipFlop, dass Input bei steigender Taktflanke übernimmt und bei der nächsten fallenden Taktflanke ausgibt. (oder umgekehrte Flanken)

- ⌋ Ausgabe bei fallender Flanke
- ⌋ Ausgabe bei steigender Flanke

Frequenzteiler und Zähler



Kaskadeuren von T-Flipflops führt zu einer Frequenzreduktion von CLK um Faktor 2.

Kann als Bitzähler verwendet werden (ohne CLK). MSB ist längste Frequenz. $n_{T,ff} \rightarrow 0 \dots (2^n - 1)$

Diverses

Physikalische Zuordnung logischer Zustände

0	Low 0 V	Ground
1	High 0.8 V	VDD

Toleranzen:

- GND: 0 V ... 0.15 V
- VDD 0.7 V ... 0.9 V

Schaltelemente

Multiplexer

Sendet eines von 2^n Eingangssignalen an den Ausgang. Hat n Auswahlbits.

Demultiplexer

Sendet 1 Eingangssignal an einen von 2^n Ausgängen. n Auswahlbits.

Halbaddierer

Addiert 2 Binärzahlen A und B. Produziert Summe und Carry-Out.

$$SUM = A \oplus B \quad CO = A \wedge B$$

Volladdierer

Nimmt einen zusätzlichen Input CI entgegen.

$$SUM = (A \oplus B) \oplus CI \quad CO = (A \wedge B) \vee (S_{AB} \wedge CI)$$

Serienaddierer

Addition einer Stelle pro Taktschritt.

Paralleladdierer (Normalform)

Addition aller Stellen pro Taktschritt.

Vorteile

- Maximal 3 Grundgatter zwischen Input und Output.
- Laufzeit ist unabhängig von Stellanzahl der Summanden.

→ Schnell aber Schaltungsaufwendig

Ripple-Carry Addierer (Paralleladdierer)

Vorteile

- Durch Kaskadierung einfach skalierbar.
- Schaltungsaufwand linear zur Stellanzahl.

→ Schnell aber Schaltungsaufwendig

Langsamer als Normalformaddierer aber einfacher zu realisieren.

Carry-Look-Ahead Addierer (Paralleladdierer)

Kombination der Vorteile des Normalform- und Ripple-Carry-Addierer → schnelle Schaltung mit begrenztem Aufwand.

Praktische Realisierung Addierer werden kaskadiert, Berechnung der Überträge erfolgt parallel zur Summenbildung. Berechnungsaufwand ist linear zur Stellanzahl, Laufzeit bleibt konstant.

Booth-Algorithmus

Dient der Multiplikation von Binärzahlen (A & B). Berechnung über Zwischenprodukte P_i .

Division durch 2 bedeutet: Verschiebung des Kommas nach links (shift), mit Vorzeichenverdoppelung falls nötig.

a_i	a_{i-1}	Operation
0	0	$P_i = P_{i-1}/2$
0	1	$P_i = (P_{i-1} + B)/2$
1	0	$P_i = (P_{i-1} - B)/2$
1	1	$P_i = P_{i-1}/2$

Anfangswerte: $P_{-1} = 0$, $a_{-1} = 0$
Beim letzten Schritt entfällt die Division durch 2.