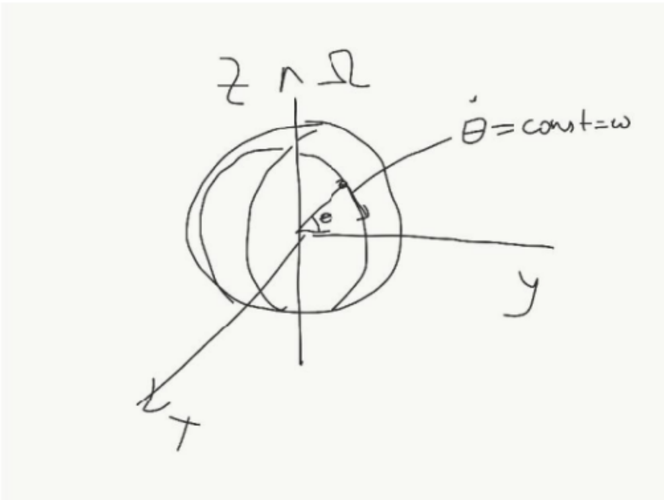
<< **Задача 1.2 .1** >>



Условие :

1. Точка движется с постоянной ковариантной скоростью ω по меридиану вращаюсейся сферы.

Каковы ее компоненты скорости и ускорения в неподвижной декартовой системе координат?

Решение :

<< **Запишем зависимости и правила перехода между системами координат** >>

```
X[t_] := R[t] * Cos[θ[t]] * Cos[φ[t]];
               косинус      косинус
Y[t_] := R[t] * Cos[θ[t]] * Sin[φ[t]];
               косинус      синус
Z[t_] := R[t] * Sin[θ[t]];
               синус

Clear[R, ω]
очистить
```

<< **Теперь, для преобразования СК находим матрицу Якоби J** >>

```
MatrixForm[FullSimplify[
матричная ⋯ упростить в полном объёме
 ( ∂R[t] (R[t] * Cos[θ[t]] * Cos[φ[t]])  ∂θ[t] (R[t] * Cos[θ[t]] * Cos[φ[t]])  ∂φ[t] (R[t] * Cos
   ∂R[t] (R[t] * Cos[θ[t]] * Sin[φ[t]])  ∂θ[t] (R[t] * Cos[θ[t]] * Sin[φ[t]])  ∂φ[t] (R[t] * Cos
         ∂R[t] (R[t] * Sin[θ[t]])              ∂θ[t] (R[t] * Sin[θ[t]])              ∂φ[t] (R[t
 )]]
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta[t]]\,\mathrm{Cos}[\varphi[t]] & -\mathrm{Cos}[\varphi[t]]\,R[t]\,\mathrm{Sin}[\theta[t]] & -\mathrm{Cos}[\theta[t]]\,R[t]\,\mathrm{Sin}[\varphi[t]] \\ \mathrm{Cos}[\theta[t]]\,\mathrm{Sin}[\varphi[t]] & -R[t]\,\mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\mathrm{Sin}[\varphi[t]] & \mathrm{Cos}[\theta[t]]\,\mathrm{Cos}[\varphi[t]]\,R[t] \\ \mathrm{Sin}[\theta[t]] & \mathrm{Cos}[\theta[t]]\,R[t] & 0 \end{pmatrix}$$

<< **Выразим θ[t], φ[t], и R[t], поскольку движение точки имеет зависит от врмени** >>

```
φ[t_] := Ω * t
θ[t_] := ω * t
R[t_] := R0
```

<< Найдем скорости, как производные по времени $X_t' = v_x$, $Y_t' = v_y$, $Z_t' = v_z$ >>

```
MatrixForm[
матричная форма
 ∂t {R[t] * Cos[θ[t]] * Cos[φ[t]], R[t] * Cos[θ[t]] * Sin[φ[t]], R[t] * Sin[θ[t]]}]
            косинус        косинус         косинус        синус            синус
```

$$\begin{pmatrix} -R0\,\omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega] - R0\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ R0\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] - R0\,\omega\,\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ R0\,\omega\,\text{Cos}[t\,\omega] \end{pmatrix}$$

<< Находим J^{-1} >>

```
MatrixForm[FullSimplify[Inverse[
матричная ⋯ упростить в по⋯ обратная матрица
```

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta[t]]\,\text{Cos}[\varphi[t]] & -\text{Cos}[\varphi[t]]\,R[t]\,\text{Sin}[\theta[t]] & -\text{Cos}[\theta[t]]\,R[t]\,\text{Sin}[\varphi[t]] \\ \text{Cos}[\theta[t]]\,\text{Sin}[\varphi[t]] & -R[t]\,\text{Sin}[\theta[t]]\,\text{Sin}[\varphi[t]] & \text{Cos}[\theta[t]]\,\text{Cos}[\varphi[t]]\,R[t] \\ \text{Sin}[\theta[t]] & \text{Cos}[\theta[t]]\,R[t] & 0 \end{pmatrix}]]]$$

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] & \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] & \text{Sin}[t\,\omega] \\ -\frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega]}{R0} & -\frac{\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{R0} & \frac{\text{Cos}[t\,\omega]}{R0} \\ -\frac{\text{Sec}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{R0} & \frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sec}[t\,\omega]}{R0} & 0 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[FullSimplify[
матричная ⋯ упростить в полном объёме
```

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] & \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] & \text{Sin}[t\,\omega] \\ -\frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega]}{R0} & -\frac{\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{R0} & \frac{\text{Cos}[t\,\omega]}{R0} \\ -\frac{\text{Sec}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{R0} & \frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sec}[t\,\omega]}{R0} & 0 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} -R0\,\omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega] - R0\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ R0\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] - R0\,\omega\,\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ R0\,\omega\,\text{Cos}[t\,\omega] \end{pmatrix}]]$$

<< Получаем скорости в неподвижной декартовой СК $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} v_\varphi \\ v_\theta \\ v_R \end{pmatrix}$ >>

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix}$$

<< А теперь найдем ускорения,
как вторые производные по времени $X_t'' = a_{x[t]}$, $Y_t'' = a_{y[t]}$, $Z_t'' = a_{z[t]}$ >>

```
MatrixForm[FullSimplify[
матричная ⋯ упростить в полном объёме
 ∂t,t {R[t] * Cos[θ[t]] * Cos[φ[t]], R[t] * Cos[θ[t]] * Sin[φ[t]], R[t] * Sin[θ[t]]}]]
            косинус        косинус         косинус        синус            синус
```

$$\begin{pmatrix} -R0\,(\omega^2+\Omega^2)\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] + 2\,R0\,\omega\,\Omega\,\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ -R0\,(2\,\omega\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega] + (\omega^2+\Omega^2)\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]) \\ -R0\,\omega^2\,\text{Sin}[t\,\omega] \end{pmatrix}$$

<< Запишем ускорения в неподвижной декартовой СК $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} a_\varphi \\ a_\theta \\ a_R \end{pmatrix}$ >>

$$\text{MatrixForm}\Big[\text{FullSimplify}\Big[\begin{pmatrix} \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] & \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] & \text{Sin}[t\,\omega] \\ -\frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega]}{\text{R0}} & -\frac{\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{\text{R0}} & \frac{\text{Cos}[t\,\omega]}{\text{R0}} \\ -\frac{\text{Sec}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{\text{R0}} & \frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sec}[t\,\omega]}{\text{R0}} & 0 \end{pmatrix}.$$

матричная ⋯ упростить в полном объёме

$$\begin{pmatrix} -\text{R0}\left(\omega^2+\Omega^2\right)\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] + 2\,\text{R0}\,\omega\,\Omega\,\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ -\text{R0}\left(2\,\omega\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega] + \left(\omega^2+\Omega^2\right)\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]\right) \\ -\text{R0}\,\omega^2\,\text{Sin}[t\,\omega] \end{pmatrix}\Big]\Big]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\text{R0}\left(2\,\omega^2+\Omega^2+\Omega^2\,\text{Cos}[2\,t\,\omega]\right) \\ \frac{1}{2}\,\Omega^2\,\text{Sin}[2\,t\,\omega] \\ -2\,\omega\,\Omega\,\text{Tan}[t\,\omega] \end{pmatrix}$$