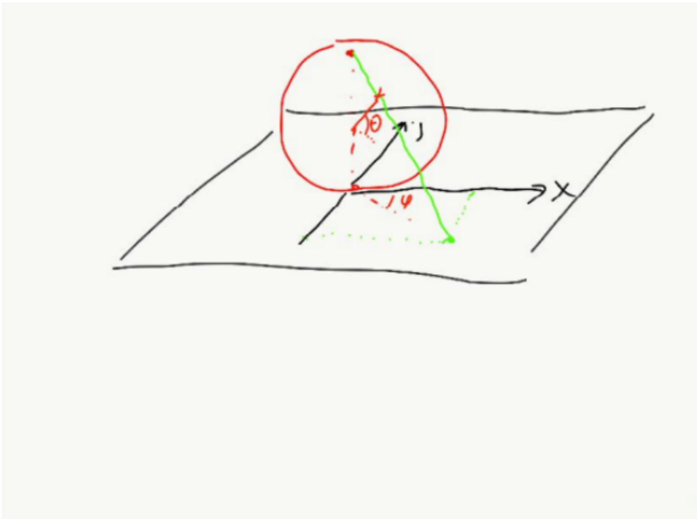
<< Задача 1.1 .2 >>



Условие :

2.Осуществить переход в систему координат стереографической проекции, ставящую в соответствие точки на плоскости и точки на сфере радиуса R, лежащей на плоскости в начале системы декартовых координат. Положение точки на сфере определяется полярным θ и азимутальным φ углами точки пересечения прямой, выходящей из "северного полюса" сферы и идущей в точку с декартовыми координатами x, y

Найти матрицу Якоби для преобразования системы координат. Выразить элемент длины через новые приращения координат. Найти метрический тензор в системе координат стереографической проекции. Пусть некая точка движется с постоянной скоростью в декартовой системе координат, найти ее ковариантную скорость в системе координат стереографической проекции. Найти ее контравариантную скорость. Найти соотношение между ускорением в декартовой системе координат и ковариантным ускорением в системе координат стереографической проекции. Построить декартовы траекторию, скорости и ускорения по координатам для частицы с постоянной ковариантной скоростью в системе координат стереографической проекции.

Решение :

<< 1: Сделаем переход к системе координаи стереографической проекции, геометр. выразив x и y через R и углы : >>

$$X = \frac{R * \text{Sin}[\xi]}{1 - \text{Cos}[\xi]} \text{Sin}[\eta];$$
синус

$$Y = \frac{R * \text{Sin}[\xi]}{1 - \text{Cos}[\xi]} \text{Cos}[\eta];$$
косинус

<< 2 : Для преобразования системы координат находим матрицу Якоби : >>

$$\text{MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\eta X \\ \partial_\xi Y & \partial_\eta Y \end{pmatrix}\right]$$
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \frac{R\,\text{Cos}[\xi]\,\text{Sin}[\eta]}{1-\text{Cos}[\xi]} - \frac{R\,\text{Sin}[\eta]\,\text{Sin}[\xi]^2}{(1-\text{Cos}[\xi])^2} & \frac{R\,\text{Cos}[\eta]\,\text{Sin}[\xi]}{1-\text{Cos}[\xi]} \\ \frac{R\,\text{Cos}[\eta]\,\text{Cos}[\xi]}{1-\text{Cos}[\xi]} - \frac{R\,\text{Cos}[\eta]\,\text{Sin}[\xi]^2}{(1-\text{Cos}[\xi])^2} & -\frac{R\,\text{Sin}[\eta]\,\text{Sin}[\xi]}{1-\text{Cos}[\xi]} \end{pmatrix}$$

<< Теперь найдем транспонированную матрицу Якоби : >>

$$\text{MatrixForm}\left[\text{FullSimplify}\left[\text{Transpose}\left[\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\eta X \\ \partial_\xi Y & \partial_\eta Y \end{pmatrix}\right]\right]\right]$$
матричная ⋯ упростить в по⋯ транспозиция

$$\begin{pmatrix} \frac{R\,\text{Sin}[\eta]}{-1+\text{Cos}[\xi]} & \frac{R\,\text{Cos}[\eta]}{-1+\text{Cos}[\xi]} \\ R\,\text{Cos}[\eta]\,\text{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right] & -R\,\text{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]\text{Sin}[\eta] \end{pmatrix}$$

<< 3 : Далее, находим Метрический Тензор g
Теперь умножаем матрицу Якоби на транспонированную Матрицу Якоби g = $J * J^{-T}$ и получаем метрический тензор >>

$$\text{MatrixForm}\left[\text{FullSimplify}\left[\text{Transpose}\left[\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\eta X \\ \partial_\xi Y & \partial_\eta Y \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\eta X \\ \partial_\xi Y & \partial_\eta Y \end{pmatrix}\right]\right]$$
матричная ф⋯ упростить в по⋯ транспозиция

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}R^2\,\text{Csc}\left[\frac{\xi}{2}\right]^4 & 0 \\ 0 & R^2\,\text{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]^2 \end{pmatrix}$$

<< Элемент длины $dl^2 = (d\xi \;\; d\eta).g.*\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$ >>

$$\text{MatrixForm}\left[\text{FullSimplify}\left[(d\xi \;\; d\eta).\begin{pmatrix} \frac{1}{4}R^2\,\text{Csc}\left[\frac{\xi}{2}\right]^4 & 0 \\ 0 & R^2\,\text{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]^2 \end{pmatrix}.\text{Transpose}[(d\xi \;\; d\eta)]\right]\right]$$
матричная ⋯ упростить в полном объёме транспозиция

$$\left(\frac{1}{4}R^2\left(4\,d\eta^2\,\text{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]^2 + d\xi^2\,\text{Csc}\left[\frac{\xi}{2}\right]^4\right)\right)$$

<< Далее находим ковариантные скорости $\begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} = J^{-1} * \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ >>

$$\text{MatrixForm}\left[\text{FullSimplify}\left[\text{Inverse}\left[\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\eta X \\ \partial_\xi Y & \partial_\eta Y \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}\right]\right]$$
матричная ф⋯ упростить в по⋯ обратная матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1+\text{Cos}[\xi])\,(\text{Sin}[\eta]\,v_x+\text{Cos}[\eta]\,v_y)}{R} \\ \frac{(\text{Cos}[\eta]\,v_x-\text{Sin}[\eta]\,v_y)\,\text{Tan}\left[\frac{\xi}{2}\right]}{R} \end{pmatrix}$$

<< При помощи формулы $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = g * \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix}$ находим контрвариантные скорости от v_x и v_y >>

$$\text{MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{4} R^2 \operatorname{Csc}\left[\frac{\xi}{2}\right]^4 & 0 \\ 0 & R^2 \operatorname{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{(-1+\operatorname{Cos}[\xi])\ (\operatorname{Sin}[\eta]\ v_x + \operatorname{Cos}[\eta]\ v_y)}{R} \\ \frac{(\operatorname{Cos}[\eta]\ v_x - \operatorname{Sin}[\eta]\ v_y)\ \operatorname{Tan}\left[\frac{\xi}{2}\right]}{R} \end{pmatrix}\right]$$

матричная форма

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} R\ (-1 + \operatorname{Cos}[\xi])\ \operatorname{Csc}\left[\frac{\xi}{2}\right]^4\ (\operatorname{Sin}[\eta]\ v_x + \operatorname{Cos}[\eta]\ v_y) \\ R \operatorname{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]\ (\operatorname{Cos}[\eta]\ v_x - \operatorname{Sin}[\eta]\ v_y) \end{pmatrix}$$

<< Положим $\xi = \xi[t]$ и $\eta = \eta[t]$, поскольку движение точки зависит от времени >>

$$X[t\_] := \frac{R * \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1 - \operatorname{Cos}[\xi[t]]} \operatorname{Sin}[\eta[t]];$$

синус

$$Y[t\_] := \frac{R * \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1 - \operatorname{Cos}[\xi[t]]} \operatorname{Cos}[\eta[t]];$$

косинус

<< Найдем матрицу скоростей $X_t' = V(x(t))$ и $Y_t' = V(y(t))$ >>

$$\text{MatrixForm}\left[\left\{\left(\frac{R * \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1 - \operatorname{Cos}[\xi[t]]} \operatorname{Sin}[\eta[t]]\right)'[t], \left(\frac{R * \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1 - \operatorname{Cos}[\xi[t]]} \operatorname{Cos}[\eta[t]]\right)'[t]\right\}\right]$$

матричная форма

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{R \operatorname{Sin}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)'[t] \\ \left(\frac{R \operatorname{Cos}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)'[t] \end{pmatrix}$$

<< Запишем в форме матрицы скорости >>

$$\partial_t = \begin{pmatrix} \left(\frac{R \operatorname{Sin}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)'[t] \\ \left(\frac{R \operatorname{Cos}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)'[t] \end{pmatrix};$$

<< Находим матрицу ускорений $X_t'' = V(x(t))' = a_x(t)$ и $Y_t'' = V(y(t))' = a_y(t)$ >>

$$\text{MatrixForm}\left[\left[\partial_{t,t}\left\{\left\{\left(\frac{R \operatorname{Sin}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1 - \operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)\right\}, \left\{\left(\frac{R \operatorname{Cos}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1 - \operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)\right\}\right\}\right]\right]$$

матричная форма

$$\text{MatrixForm}\Big[\Big\{\Big\{-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+\frac{2R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{2R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{3R\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}+\frac{2R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^3\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^3}+\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+\frac{R\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\xi''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\xi''[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}\Big\},$$

$$\Big\{-\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{2R\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+\frac{2R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}-\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{3R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}+\frac{2R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^3\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^3}-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\xi''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\xi''[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}\Big\}\Big\}\Big]$$

матричная форма

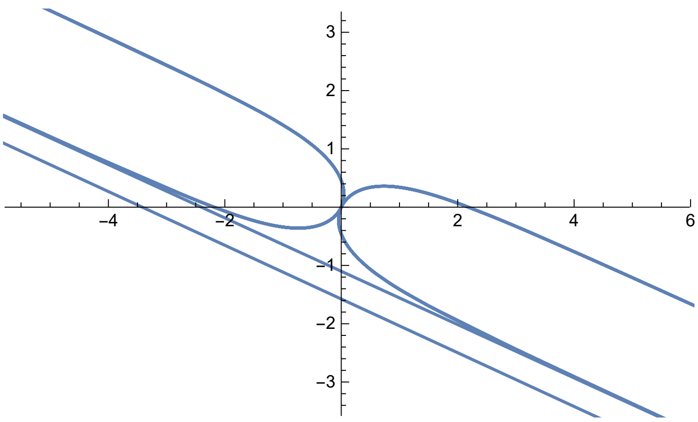
<< Соотношение между ускорением в декартовой и ковариантным ускорением запишем в форме матрицы ускорения >>

```
MatrixForm[
матричная форма
 FullSimplify[{{-R Sin[η[t]] Sin[ξ[t]] η′[t]^2/(1 - Cos[ξ[t]]) + 2 R Cos[η[t]] Cos[ξ[t]] η′[t] ξ′[t]/(1 - Cos[ξ[t]]) -
 упростить в полном объёме
    2 R Cos[η[t]] Sin[ξ[t]]^2 η′[t] ξ′[t]/(1 - Cos[ξ[t]])^2 - R Sin[η[t]] Sin[ξ[t]] ξ′[t]^2/(1 - Cos[ξ[t]]) -
    3 R Cos[ξ[t]] Sin[η[t]] Sin[ξ[t]] ξ′[t]^2/(1 - Cos[ξ[t]])^2 +
    2 R Sin[η[t]] Sin[ξ[t]]^3 ξ′[t]^2/(1 - Cos[ξ[t]])^3 + R Cos[η[t]] Sin[ξ[t]] η′′[t]/(1 - Cos[ξ[t]]) +
    R Cos[ξ[t]] Sin[η[t]] ξ′′[t]/(1 - Cos[ξ[t]]) - R Sin[η[t]] Sin[ξ[t]]^2 ξ′′[t]/(1 - Cos[ξ[t]])^2},
   {-R Cos[η[t]] Sin[ξ[t]] η′[t]^2/(1 - Cos[ξ[t]]) - 2 R Cos[ξ[t]] Sin[η[t]] η′[t] ξ′[t]/(1 - Cos[ξ[t]]) +
    2 R Sin[η[t]] Sin[ξ[t]]^2 η′[t] ξ′[t]/(1 - Cos[ξ[t]])^2 - R Cos[η[t]] Sin[ξ[t]] ξ′[t]^2/(1 - Cos[ξ[t]]) -
    3 R Cos[η[t]] Cos[ξ[t]] Sin[ξ[t]] ξ′[t]^2/(1 - Cos[ξ[t]])^2 +
    2 R Cos[η[t]] Sin[ξ[t]]^3 ξ′[t]^2/(1 - Cos[ξ[t]])^3 - R Sin[η[t]] Sin[ξ[t]] η′′[t]/(1 - Cos[ξ[t]]) +
    R Cos[η[t]] Cos[ξ[t]] ξ′′[t]/(1 - Cos[ξ[t]]) - R Cos[η[t]] Sin[ξ[t]]^2 ξ′′[t]/(1 - Cos[ξ[t]])^2}}]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{4 R \mathrm{Sin}\left[\frac{\xi[t]}{2}\right]^4 \left(\mathrm{Sin}[\eta[t]]\,\mathrm{Sin}[\xi[t]]\,\eta'[t]^2+2\,\mathrm{Cos}[\eta[t]]\,\eta'[t]\,\xi'[t]-\mathrm{Cos}[\eta[t]]\,\mathrm{Sin}[\xi[t]]\,\eta''[t]+\mathrm{Sin}[\eta[t]] \left(-\mathrm{Cot}\left[\frac{\xi[t]}{2}\right]\xi'[t]^2+\xi''[\right.\right.}{(-1+\mathrm{Cos}[\xi[t]])^3} \\ \frac{4 R \mathrm{Sin}\left[\frac{\xi[t]}{2}\right]^4 \left(\mathrm{Cos}[\eta[t]]\,\mathrm{Sin}[\xi[t]]\,\eta'[t]^2-2\,\mathrm{Sin}[\eta[t]]\,\eta'[t]\,\xi'[t]+\mathrm{Sin}[\eta[t]]\,\mathrm{Sin}[\xi[t]]\,\eta''[t]+\mathrm{Cos}[\eta[t]] \left(-\mathrm{Cot}\left[\frac{\xi[t]}{2}\right]\xi'[t]^2+\xi''[\right.\right.}{(-1+\mathrm{Cos}[\xi[t]])^3} \end{pmatrix}$$

<< Положив радиус равный единице, получаем график x (t) и y (t) (Декартова траекория) >>

```
ParametricPlot[{Sin[ξ]/(1 - Cos[ξ]) Sin[η], Sin[ξ]/(1 - Cos[ξ]) Cos[η]} /.
график параметрически заданной   синус          косинус
  {η → 2 - 1 t, ξ → 2 t}, {t, 0, 30}, , PlotTheme → "Scientific"]
                                        тематический стиль графика
```



X[t_] := $\frac{R * Sin[\xi[t]]}{1 - Cos[\xi[t]]}$ Sin[η[t]];
синус

Y[t_] := $\frac{R * Sin[\xi[t]]}{1 - Cos[\xi[t]]}$ Cos[η[t]];
косинус

η[t_] := 2 - 1 t

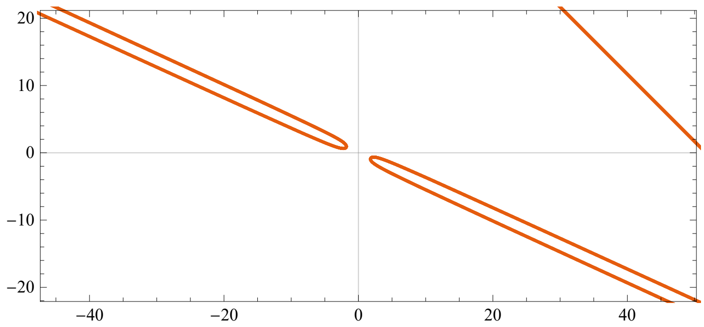
ξ[t_] := 2 t

R = 1

1

<< Рассмотрим график ускорения >>

ParametricPlot[Evaluate[{$\partial_t \partial_t$X[t], $\partial_t \partial_t$Y[t]}], {t, 0, 30}, PlotTheme → "Scientific"]
график параметр··· вычислить тематический стиль графика



<< Рассмотрим график скорости >>

ParametricPlot[Evaluate[{D[X[t], t], D[Y[t], t]}],
график параметр··· вычислить дифференци··· дифференциироват
{t, 0, 30}, PlotTheme → "Scientific"]
тематический стиль графика