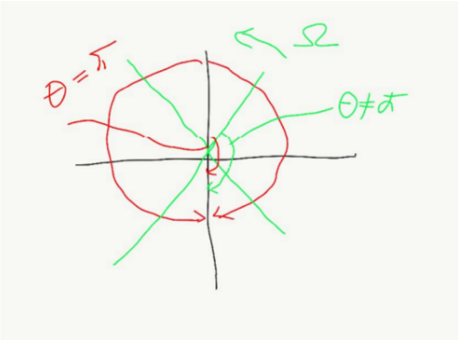
<< **Задача 1.2 .5** >>



Условие :

5. Рабста лазерного гироскопа - прибора определяющего угловую скорость вращения системы отсчета - очень понятна в системе отсчета неподвижной. В самой упрощенной формулировке она сводится к следующему. Два импульса света испускаются в противоположные стороны из одной точки закрепленного во вращающейся системе волновода, имеющего форму кольца радиуса ρ с центром на оси вращения, и регистрируется момент

их встречи на противоположной стороне кольца. В неподвижной системе отсчета, угол испускания и угол встречи разнесены по окружности ровно на величину π.

Однако вращающаяся система успевает повернуться за время распространения импульсов, и поэтому угол встречи импульсов в ней отличается на величину произведения ее угловой скорости на время распространения импульсов до момента их встречи. Рассмотреть этот процесс во вращающейся системе отсчета. Найти преобразование координат и времени при переходе во вращающуюся полярную систему отсчета. Найти матрицу Якоби для такого преобразования пространства-времени. Найти метрический тензор. Обратить внимание на присутствие в нем недиагональных матричных элементов. Найти соотношения времени и угла поворота следующие из условия равенства нулю интервала для событий лежащих на световом конусе. Найти угол, на котором происходит встреча сигналов во вращающейся системе отсчета.

<< **Положим** η -> **p Sin[ϕ], ξ -> p Cos[ϕ]** >>
синус косинус

x = p Cos[ϕ + Ω τ]
косинус
y = p Sin[ϕ + Ω τ]
синус
z = ζ
t = τ

p Cos[ϕ + τ Ω]

p Sin[ϕ + τ Ω]

ζ

τ

<< **Запишем матрицу Якоби для данного преобразования** >>

$$J = \begin{pmatrix} \partial_p x & \partial_\phi x & \partial_\xi x & \partial_\tau x \\ \partial_p y & \partial_\phi y & \partial_\xi y & \partial_\tau y \\ \partial_p z & \partial_\phi z & \partial_\xi z & \partial_\tau z \\ \partial_p t & \partial_\phi t & \partial_\xi t & \partial_\tau t \end{pmatrix}$$

{{Cos[$\phi + \tau\,\Omega$], -p Sin[$\phi + \tau\,\Omega$], 0, -p Ω Sin[$\phi + \tau\,\Omega$]},
{Sin[$\phi + \tau\,\Omega$], p Cos[$\phi + \tau\,\Omega$], 0, p Ω Cos[$\phi + \tau\,\Omega$]}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

MatrixForm[J]
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\phi + \tau\,\Omega] & -p\,\mathrm{Sin}[\phi + \tau\,\Omega] & 0 & -p\,\Omega\,\mathrm{Sin}[\phi + \tau\,\Omega] \\ \mathrm{Sin}[\phi + \tau\,\Omega] & p\,\mathrm{Cos}[\phi + \tau\,\Omega] & 0 & p\,\Omega\,\mathrm{Cos}[\phi + \tau\,\Omega] \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<< В силу инвариантности интервала в релятивистской системе отсчета, выражаем его >>

<< $ds^2 = dl^2 - c^2\,dt^2 = \begin{pmatrix} dx & dy & dz & dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{pmatrix}$ – общий случай >>

$ds^2 = \begin{pmatrix} dx & dy & dz & dt \end{pmatrix} J^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{pmatrix}$ – << Случай нашей СК >>

<< Запишем метрический тензор >>

Mt = FullSimplify[Transpose[J] . $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$ .J]
упростить в по··· транспозиция

$\{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, p^2, 0, p^2\,\Omega\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, p^2\,\Omega, 0, -c^2 + p^2\,\Omega^2\}\}$

MatrixForm[Mt]
матричная форма

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & 0 & p^2\,\Omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p^2\,\Omega & 0 & -c^2 + p^2\,\Omega^2 \end{pmatrix}$$

<< Положим $\Delta\phi$ – как отклонение угла от точки приема сигнала >>

<< Запишем интервал >>

FullSimplify[{0, $\Delta\phi$, 0, $\Delta\tau$} . $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & 0 & p^2\,\Omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p^2\,\Omega & 0 & -c^2 + p^2\,\Omega^2 \end{pmatrix}$.{0, $\Delta\phi$, 0, $\Delta\tau$}]
упростить в полном объёме

$-c^2\,\Delta\tau^2 + p^2\,(\Delta\phi + \Delta\tau\,\Omega)^2$

<< Интервал обязан быть равен 0, поскольку мы работаем со светом >>

<< Теперь найдем значние $\Delta\phi$ >>

$$\text{Solve}\left[-c^2\,\Delta\tau^2+p^2\,(\Delta\phi+\Delta\tau\,\Omega)^2==0,\ \Delta\phi\right]$$

решить уравнения

$$\left\{\left\{\Delta\phi\to-\frac{\Delta\tau\,(-c+p\,\Omega)}{p}\right\},\ \left\{\Delta\phi\to\frac{-c\,\Delta\tau-p\,\Delta\tau\,\Omega}{p}\right\}\right\}$$

<< Поскольку произошла встреча двух сигналов, то угол между ними равняется 2 π >>

<< Далее, находим значение $\Delta\tau$ >>

$$\text{Solve}\left[\frac{-c\,\Delta\tau-p\,\Delta\tau\,\Omega}{p}-\left(-\frac{\Delta\tau\,(-c+p\,\Omega)}{p}\right)==2\,\pi,\ \Delta\tau\right]$$

решить уравнения

$$\left\{\left\{\Delta\tau\to-\frac{p\,\pi}{c}\right\}\right\}$$

<< Теперь для нахождения $\Delta\phi$ остается подставить $\Delta\tau$ в уравнение >>

$$\text{Simplify}\left[\left\{\left\{\Delta\phi\to-\frac{\Delta\tau\,(-c+p\,\Omega)}{p}\right\},\ \left\{\Delta\phi\to\frac{-c\,\Delta\tau-p\,\Delta\tau\,\Omega}{p}\right\}\right\}\ /.\ \Delta\tau\to-\frac{p\,\pi}{c}\right]$$

упростить

$$\left\{\left\{\Delta\phi\to\pi\left(-1+\frac{p\,\Omega}{c}\right)\right\},\ \left\{\Delta\phi\to\pi+\frac{p\,\pi\,\Omega}{c}\right\}\right\}$$