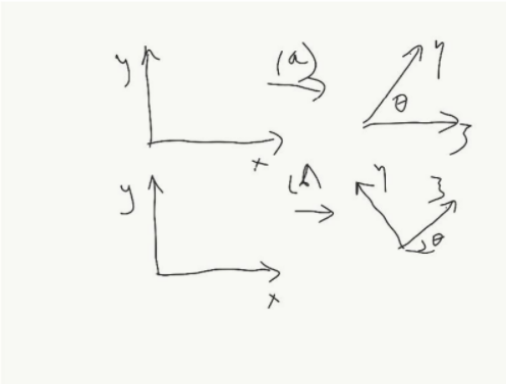
<< Задача 1.1 .5 >>

Условие:

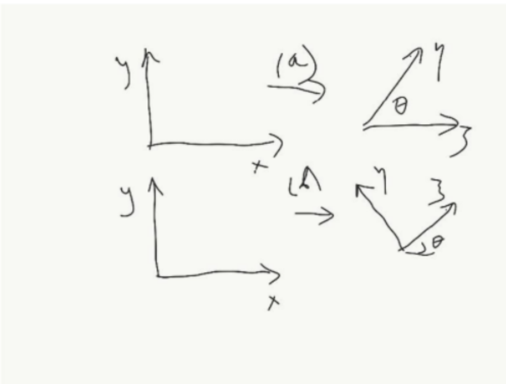


5. Осуществляются последовательно две замены координат : (a) переход в косоугольную систему координат с углом между осями Θ и (b) поворот системы координат на угол θ.

Найти матрицы Якоби в двух случаях: сперва (a), а потом (b), и в обратной последовательности. Найти элемент длинны и метрические тензора для обоих случаев. Найти декартовы скорости частицы, движущейся в преобразованных координатах с постоянной ковариантной скоростью. Найти контравариантные скорости в преобразованных системах координат.

Решение :

<< Рассмотрим случай перехода от косоугольной к поворотной СК >>



5. Осуществляются последовательно две замены координат : (a) переход в косоугольную систему координат с углом между осями Θ и (b) поворот системы координат на угол θ.

Найти матрицы Якоби в двух случаях: сперва (a), а потом (b), и в обратной последовательности. Найти элемент длинны и метрические тензора для обоих случаев. Найти декартовы скорости частицы, движущейся в преобразованных координатах с постоянной ковариантной скоростью. Найти контравариантные скорости в преобразованных системах координат.


```
X[ξ_, η_] := ξ + η Cos[Θ]
                    косинус
Y[ξ_, η_] := η Sin[Θ]
                синус
ξ[ξ_, μ_] := ξ Cos[θ] - μ Sin[θ]
               косинус     синус
η[ξ_, μ_] := ξ Sin[θ] + μ Cos[θ]
               синус       косинус
```

<< Рассчитаем матрицу Якоби для перехода из декартовой в косоугольную СК >>

```
J1 = Simplify[{{∂ξ X[ξ, η], ∂η X[ξ, η]}, {∂ξ Y[ξ, η], ∂η Y[ξ, η]}}]
```
упростить

{{1, Cos[Θ]}, {0, Sin[Θ]}}

```
MatrixForm[J1]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Cos}[\Theta] \\ 0 & \mathrm{Sin}[\Theta] \end{pmatrix}$$

<< Теперь рассчитаем матрицу Якоби для перехода из косоугольной в поворотную СК >>

```
J2 = Simplify[{{∂ξ ξ[ξ, μ], ∂μ ξ[ξ, μ]}, {∂ξ η[ξ, μ], ∂μ η[ξ, μ]}}]
```
упростить

{{Cos[θ], -Sin[θ]}, {Sin[θ], Cos[θ]}}

```
MatrixForm[J2]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta] & -\mathrm{Sin}[\theta] \\ \mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta] \end{pmatrix}$$

{{Cos[θ], -Sin[θ]}, {Sin[θ], Cos[θ]}}

<< Получили итоговое соотношение для искомомго перехода : Декартовая = > Косоугольная = > Повортоная >>

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Cos}[\Theta] \\ 0 & \mathrm{Sin}[\Theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta] & -\mathrm{Sin}[\theta] \\ \mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\mu \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Cos}[\Theta] \\ 0 & \mathrm{Sin}[\Theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta] & -\mathrm{Sin}[\theta] \\ \mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\mu \end{pmatrix}$$

<< Мы получили, что конечная матрица Якоби является произведением двух матриц Якоби >>

```
EJ = Simplify[J1.J2]
```
упростить

{{Cos[θ] + Cos[Θ] Sin[θ], Cos[θ] Cos[Θ] - Sin[θ]}, {Sin[θ] Sin[Θ], Cos[θ] Sin[Θ]}}

```
MatrixForm[EJ]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta] + \mathrm{Cos}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\Theta] - \mathrm{Sin}[\theta] \\ \mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\Theta] & \mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\Theta] \end{pmatrix}$$

<< Метрический тензор этого сложного преобразования >>

```
g1 = Simplify[Transpose[EJ].EJ]
```
упростить транспозиция

{{1 + Cos[Θ] Sin[2 θ], Cos[2 θ] Cos[Θ]}, {Cos[2 θ] Cos[Θ], 1 - 2 Cos[θ] Cos[Θ] Sin[θ]}}

```
MatrixForm[g1]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} 1 + \mathrm{Cos}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[2\theta] & \mathrm{Cos}[2\theta]\,\mathrm{Cos}[\Theta] \\ \mathrm{Cos}[2\theta]\,\mathrm{Cos}[\Theta] & 1 - 2\,\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[\theta] \end{pmatrix}$$

```
{{1 + Cos[Θ] Sin[2 θ], Cos[2 θ] Cos[Θ]}, {Cos[2 θ] Cos[Θ], 1 - 2 Cos[θ] Cos[Θ] Sin[θ]}}
      косинус синус      косинус  косинус    косинус  косинус     косинус косинус синус
{{1 + Cos[Θ] Sin[2 θ], Cos[2 θ] Cos[Θ]}, {Cos[2 θ] Cos[Θ], 1 - 2 Cos[θ] Cos[Θ] Sin[θ]}}
```

<< Далее, рассмотрим элемент длины в итоговой системе координат >>

```
dl^2 = Simplify[{{dξ, dμ}}.g1.{dξ, dμ}]
       упростить
```

$$\left\{d\xi^2 + d\mu^2 + 2\, d\xi\, d\mu \operatorname{Cos}[2\,\theta] \operatorname{Cos}[\Theta] - 2\, d\mu^2 \operatorname{Cos}[\theta] \operatorname{Cos}[\Theta] \operatorname{Sin}[\theta] + d\xi^2 \operatorname{Cos}[\Theta] \operatorname{Sin}[2\,\theta]\right\}$$

<< Имеем конечные координатные зависимости и время >>

```
X[t_] := ξ[t] Cos[θ] - μ[t] Sin[θ] + (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Cos[Θ]
              косинус        синус         синус          косинус   косинус
Y[t_] := (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Sin[Θ]
               синус         косинус  синус

Function[t, ξ[t] Cos[θ] - μ[t] Sin[θ] + (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Cos[Θ]]
функция          косинус        синус         синус         косинус   косинус
Function[t, ξ[t] Cos[θ] - μ[t] Sin[θ] + (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Cos[Θ]]

dxy = Simplify[{∂t ξ[t] Cos[θ] - μ[t] Sin[θ] + (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Cos[Θ],
      упростить          косинус        синус         синус          косинус   косинус
   ∂t (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Sin[Θ]}]
             синус        косинус  синус
```

$$\{\operatorname{Cos}[\Theta] \operatorname{Sin}[\theta]\, \xi[t] + (\operatorname{Cos}[\theta] \operatorname{Cos}[\Theta] - \operatorname{Sin}[\theta])\, \mu[t] + \operatorname{Cos}[\theta]\, \xi'[t],$$
$$\operatorname{Sin}[\Theta]\, (\operatorname{Sin}[\theta]\, \xi'[t] + \operatorname{Cos}[\theta]\, \mu'[t])\}$$

```
MatrixForm[dxy]
матричная форма
```

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Cos}[\Theta] \operatorname{Sin}[\theta]\, \xi[t] + (\operatorname{Cos}[\theta] \operatorname{Cos}[\Theta] - \operatorname{Sin}[\theta])\, \mu[t] + \operatorname{Cos}[\theta]\, \xi'[t] \\ \operatorname{Sin}[\Theta]\, (\operatorname{Sin}[\theta]\, \xi'[t] + \operatorname{Cos}[\theta]\, \mu'[t]) \end{pmatrix}$$

<< Получаем декартову скорость в преобразованной системе координат >>

```
dv^2 = FullSimplify[{dxy}.dxy]
       упростить в полном объёме
```

$$\{(\operatorname{Sin}[\theta]\, (\operatorname{Cos}[\Theta]\, \xi[t] - \mu[t]) + \operatorname{Cos}[\theta]\, (\operatorname{Cos}[\Theta]\, \mu[t] + \xi'[t]))^2 +$$
$$\operatorname{Sin}[\Theta]^2\, (\operatorname{Sin}[\theta]\, \xi'[t] + \operatorname{Cos}[\theta]\, \mu'[t])^2\}$$

<< Запишем координатные зависимости >>

```
X[ξ_, μ_] := ξ Cos[θ] - μ Sin[θ] + (ξ Sin[θ] + μ Cos[θ]) Cos[Θ]
               косинус    синус      синус      косинус   косинус
Y[ξ_, μ_] := (ξ Sin[θ] + μ Cos[θ]) Sin[Θ]
                синус     косинус   синус

vxy1 = {vx1, vy1}
{vx1, vy1}
```

<< Теперь запишем обратную матрицу Якоби для итогового преобразования >>

```
JJ1 = FullSimplify[Inverse[EJ]]
      упростить в по… обратная матриц
```

$$\{\{\operatorname{Cos}[\theta], -\operatorname{Cos}[\theta] \operatorname{Cot}[\Theta] + \operatorname{Csc}[\Theta] \operatorname{Sin}[\theta]\}, \{-\operatorname{Sin}[\theta], \operatorname{Csc}[\Theta]\, (\operatorname{Cos}[\theta] + \operatorname{Cos}[\Theta] \operatorname{Sin}[\theta])\}\}$$

```
MatrixForm[JJ1]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Cos}[\theta]\,\text{Cot}[\Theta]+\text{Csc}[\Theta]\,\text{Sin}[\theta] \\ -\text{Sin}[\theta] & \text{Csc}[\Theta]\,(\text{Cos}[\theta]+\text{Cos}[\Theta]\,\text{Sin}[\theta]) \end{pmatrix}$$

<< Записываем контрвариантную скорость в преобразованной системе координат >>

```
ctr1 = FullSimplify[g1.(JJ1.vxy1)]
```
упростить в полном объёме

$$\{\text{vx1}\,\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\theta]\,(\text{vx1}\,\text{Cos}[\Theta]+\text{vy1}\,\text{Sin}[\Theta]),\ -\text{vx1}\,\text{Sin}[\theta]+\text{Cos}[\theta]\,(\text{vx1}\,\text{Cos}[\Theta]+\text{vy1}\,\text{Sin}[\Theta])\}$$

```
MatrixForm[ctr1]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \text{vx1}\,\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\theta]\,(\text{vx1}\,\text{Cos}[\Theta]+\text{vy1}\,\text{Sin}[\Theta]) \\ -\text{vx1}\,\text{Sin}[\theta]+\text{Cos}[\theta]\,(\text{vx1}\,\text{Cos}[\Theta]+\text{vy1}\,\text{Sin}[\Theta]) \end{pmatrix}$$

<< Теперь рассмотрим второй случай – переход от поворотной к косоугольной СК >>

```
X[ξ_, η_] := ξ Cos[θ] - η Sin[θ]
```
косинус синус

```
Y[ξ_, η_] := ξ Sin[θ] + η Cos[θ]
```
синус косинус

```
ξ[ξ_, μ_] := ξ + μ Cos[Θ]
```
косинус

```
η[ξ_, μ_] := μ Sin[Θ]
```
синус

<< По аналогии с первым случаем записываем матрицу Якоби. Теперь для перехода из декартовой в поворотную СК >>

```
j1 = Simplify[{{∂ξ X[ξ, η], ∂η X[ξ, η]}, {∂ξ Y[ξ, η], ∂η Y[ξ, η]}}]
```
упростить

```
MatrixForm[j1]
```
матричная форма

$$\{\{\text{Cos}[\theta], -\text{Sin}[\theta]\}, \{\text{Sin}[\theta], \text{Cos}[\theta]\}\}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Sin}[\theta] \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Cos}[\theta] \end{pmatrix}$$

<< Теперь записывваем матрицу Якоби для перехода из косоугольной в поворотную СК >>

```
j2 = Simplify[{{∂ξ ξ[ξ, μ], ∂μ ξ[ξ, μ]}, {∂ξ η[ξ, μ], ∂μ η[ξ, μ]}}]
```
упростить

```
MatrixForm[j2]
```
матричная форма

$$\{\{1, \text{Cos}[\Theta]\}, \{0, \text{Sin}[\Theta]\}\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{Cos}[\Theta] \\ 0 & \text{Sin}[\Theta] \end{pmatrix}$$

<< Опять записываем конечное соотношение для переходов >>

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Sin}[\theta] \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Cos}[\theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{Cos}[\Theta] \\ 0 & \text{Sin}[\Theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\zeta \\ d\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Sin}[\theta] \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Cos}[\theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \text{Cos}[\Theta] \\ 0 & \text{Sin}[\Theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\zeta \\ d\mu \end{pmatrix}$$

<< Проводя аналогичные рассуждения с первым случаем, получаем, что итоговая матрица Якоби – произведение двух матриц Якоби >>

```
Ej = Simplify[j1.j2]
     упростить
MatrixForm[Ej]
матричная форма
```

{{Cos[θ], Cos[θ + Θ]}, {Sin[θ], Sin[θ + Θ]}}

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & \text{Cos}[\theta+\Theta] \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Sin}[\theta+\Theta] \end{pmatrix}$$

<< Запишем метрический тензор этого сложного преобразования >>

```
g2 = Simplify[Transpose[Ej].Ej]
     упростить транспозиция
MatrixForm[g2]
матричная форма
```

{{1, Cos[Θ]}, {Cos[Θ], 1}}

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{Cos}[\Theta] \\ \text{Cos}[\Theta] & 1 \end{pmatrix}$$

<< Далее, опять рассмотрим элемент длины в итоговой системе координат >>

```
dl^2 = Simplify[{{dζ, dμ}}.g2.{dζ, dμ}]
       упростить
```

$$\{d\zeta^2 + d\mu^2 + 2\, d\zeta\, d\mu\, \text{Cos}[\Theta]\}$$

<< Имеем конечные координатные зависимости и время >>

```
X[ζ_, μ_, t_] := (ζ[t] + μ[t] Cos[Θ]) Cos[θ] - μ[t] Sin[Θ] Sin[θ]
                                косинус    косинус          синус    синус
Y[ζ_, μ_, t_] := (ζ[t] + μ[t] Cos[Θ]) Sin[θ] + μ[t] Sin[Θ] Cos[θ]
                                косинус    синус            синус    косинус

dxy2 = Simplify[{∂t (ζ[t] + μ[t] Cos[Θ]) Cos[θ] - μ[t] Sin[Θ] Sin[θ],
       упростить                косинус    косинус          синус    синус
   ∂t (ζ[t] + μ[t] Cos[Θ]) Sin[θ] + μ[t] Sin[Θ] Cos[θ]}]
                  косинус    синус            синус    косинус
MatrixForm[
матричная форма
 dxy2]
```

{−Sin[θ] Sin[Θ] μ[t] + Cos[θ] (ζ′[t] + Cos[Θ] μ′[t]),
Cos[θ] Sin[Θ] μ[t] + Sin[θ] (ζ′[t] + Cos[Θ] μ′[t])}

$$\begin{pmatrix} -\text{Sin}[\theta]\,\text{Sin}[\Theta]\,\mu[t] + \text{Cos}[\theta]\,(\zeta'[t] + \text{Cos}[\Theta]\,\mu'[t]) \\ \text{Cos}[\theta]\,\text{Sin}[\Theta]\,\mu[t] + \text{Sin}[\theta]\,(\zeta'[t] + \text{Cos}[\Theta]\,\mu'[t]) \end{pmatrix}$$

<< Получаем декартову скорость в преобразованной системе координат >>

```
dv^2 = FullSimplify[{dxy2}.dxy2]
       упростить в полном объёме

{Sin[Θ]^2 μ[t]^2 + (ζ'[t] + Cos[Θ] μ'[t])^2}
```

<< Запишем координатные зависимости >>

```
X[ξ_, μ_] := (ξ + μ Cos[Θ]) Cos[θ] - μ Sin[Θ] Sin[θ]
                  косинус    косинус     синус    синус
Y[ξ_, μ_] := (ξ + μ Cos[Θ]) Sin[θ] + μ Sin[Θ] Cos[θ]
                  косинус    синус       синус    косинус

vxy2 = {vx2, vy2}

{vx2, vy2}
```

<< Записываем обратную матрицу Якоби для итогового преобразования >>

```
JJ2 = FullSimplify[Inverse[Ej]]
      упростить в по··· обратная матриц
MatrixForm[JJ2]
матричная форма

{{Csc[Θ] Sin[θ + Θ], -Cos[θ + Θ] Csc[Θ]}, {-Csc[Θ] Sin[θ], Cos[θ] Csc[Θ]}}
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Csc}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[\theta+\Theta] & -\mathrm{Cos}[\theta+\Theta]\,\mathrm{Csc}[\Theta] \\ -\mathrm{Csc}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Csc}[\Theta] \end{pmatrix}$$

<< И теперь записываем контрвариантную скорость в преобразованной системе координат >>

```
ctr2 = FullSimplify[g2.(JJ2.vxy2)]
       упростить в полном объёме
MatrixForm[ctr2]
матричная форма

{{Cos[θ], Sin[θ]}, {Cos[θ + Θ], Sin[θ + Θ]}}.vxy2

{{Cos[θ], Sin[θ]}, {Cos[θ + Θ], Sin[θ + Θ]}}.vxy2
```