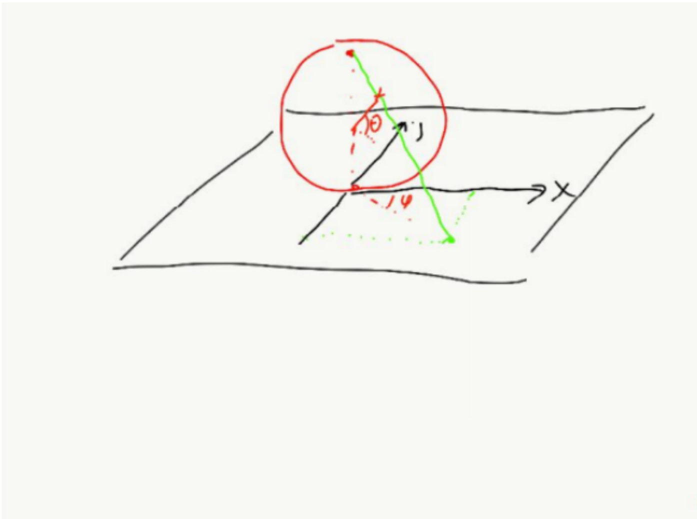
<< Задача 1.1 .2 >>



Условие :

2.Осуществить переход в систему координат стереографической проекции, ставящую в соответствие точки на плоскости и точки на сфере радиуса R, лежащей на плоскости в начале системы декартовых координат. Положение точки на сфере определяется полярным θ и азимутальным φ углами точки пересечения прямой, выходящей из “северного полюса” сферы и идущей в точку с декартовыми координатами x, y

Найти матрицу Якоби для преобразования системы координат. Выразить элемент длины через новые приращения координат. Найти метрический тензор в системе координат стереографической проекции. Пусть некая точка движется с постоянной скоростью в декартовой системе координат, найти ее ковариантную скорость в системе координат стереографической проекции. Найти ее контравариантную скорость. Найти соотношение между ускорением в декартовой системе координат и ковариантным ускорением в системе координат стереографической проекции. Построить декартовы траекторию, скорости и ускорения по координатам для частицы с постоянной ковариантной скоростью в системе координат стереографической проекции.

Решение :

<< 1: Сделаем переход к системе координаи стереографической проекции, геометр. выразив x и y через R и углы : >>

$$X = \frac{R * \mathrm{Sin}[\xi]}{1 - \mathrm{Cos}[\xi]} \mathrm{Sin}[\eta];$$

синус

$$Y = \frac{R * \mathrm{Sin}[\xi]}{1 - \mathrm{Cos}[\xi]} \mathrm{Cos}[\eta];$$

косинус

<< 2 : Для преобразования системы координат находим матрицу Якоби : >>

$$\text{MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\eta X \\ \partial_\xi Y & \partial_\eta Y \end{pmatrix}\right]$$

матричная форма

$$\begin{pmatrix} \frac{R\,\text{Cos}[\xi]\,\text{Sin}[\eta]}{1-\text{Cos}[\xi]} - \frac{R\,\text{Sin}[\eta]\,\text{Sin}[\xi]^2}{(1-\text{Cos}[\xi])^2} & \frac{R\,\text{Cos}[\eta]\,\text{Sin}[\xi]}{1-\text{Cos}[\xi]} \\ \frac{R\,\text{Cos}[\eta]\,\text{Cos}[\xi]}{1-\text{Cos}[\xi]} - \frac{R\,\text{Cos}[\eta]\,\text{Sin}[\xi]^2}{(1-\text{Cos}[\xi])^2} & -\frac{R\,\text{Sin}[\eta]\,\text{Sin}[\xi]}{1-\text{Cos}[\xi]} \end{pmatrix}$$

<< Теперь найдем транспонированную матрицу Якоби : >>

$$\text{MatrixForm}\left[\text{FullSimplify}\left[\text{Transpose}\left[\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\eta X \\ \partial_\xi Y & \partial_\eta Y \end{pmatrix}\right]\right]\right]$$

матричная ⋯ упростить в по⋯ транспозиция

$$\begin{pmatrix} \frac{R\,\text{Sin}[\eta]}{-1+\text{Cos}[\xi]} & \frac{R\,\text{Cos}[\eta]}{-1+\text{Cos}[\xi]} \\ R\,\text{Cos}[\eta]\,\text{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right] & -R\,\text{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]\text{Sin}[\eta] \end{pmatrix}$$

<< 3 : Далее, находим Метрический Тензор g
Теперь умножаем матрицу Якоби на транспонированную Матрицу Якоби g = $J * J^{-T}$ и получаем метрический тензор >>

$$\text{MatrixForm}\left[\ \text{FullSimplify}\left[\text{Transpose}\left[\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\eta X \\ \partial_\xi Y & \partial_\eta Y \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\eta X \\ \partial_\xi Y & \partial_\eta Y \end{pmatrix}\right]\right]$$

матричная ф⋯ упростить в по⋯ транспозиция

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}R^2\,\text{Csc}\left[\frac{\xi}{2}\right]^4 & 0 \\ 0 & R^2\,\text{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]^2 \end{pmatrix}$$

<< Элемент длины $dl^2 = (d\xi \;\; d\eta).g.*\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$ >>

$$\text{MatrixForm}\left[\ \text{FullSimplify}\left[(d\xi \;\; d\eta).\begin{pmatrix} \frac{1}{4}R^2\,\text{Csc}\left[\frac{\xi}{2}\right]^4 & 0 \\ 0 & R^2\,\text{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]^2 \end{pmatrix}.\text{Transpose}[(d\xi \;\; d\eta)]\right]\right]$$

матричная ⋯ упростить в полном объёме транспозиция

$$\left(\frac{1}{4}R^2\left(4\,d\eta^2\,\text{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]^2 + d\xi^2\,\text{Csc}\left[\frac{\xi}{2}\right]^4\right)\right)$$

<< Далее находим ковариантные скорости $\begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} = J^{-1} * \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ >>

$$\text{MatrixForm}\left[\ \text{FullSimplify}\left[\text{Inverse}\left[\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\eta X \\ \partial_\xi Y & \partial_\eta Y \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}\right]\right]$$

матричная ф⋯ упростить в по⋯ обратная матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1+\text{Cos}[\xi])\,(\text{Sin}[\eta]\,v_x+\text{Cos}[\eta]\,v_y)}{R} \\ \frac{(\text{Cos}[\eta]\,v_x-\text{Sin}[\eta]\,v_y)\,\text{Tan}\left[\frac{\xi}{2}\right]}{R} \end{pmatrix}$$

<< При помощи формулы $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = g * \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix}$ находим контрвариантные скорости от v_x и v_y >>

$$\text{MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{4} R^2 \operatorname{Csc}\left[\frac{\xi}{2}\right]^4 & 0 \\ 0 & R^2 \operatorname{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{(-1+\operatorname{Cos}[\xi])\ (\operatorname{Sin}[\eta]\ v_x+\operatorname{Cos}[\eta]\ v_y)}{R} \\ \frac{(\operatorname{Cos}[\eta]\ v_x-\operatorname{Sin}[\eta]\ v_y)\ \operatorname{Tan}\left[\frac{\xi}{2}\right]}{R} \end{pmatrix}\right]$$

матричная форма

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} R\ (-1+\operatorname{Cos}[\xi])\ \operatorname{Csc}\left[\frac{\xi}{2}\right]^4\ (\operatorname{Sin}[\eta]\ v_x+\operatorname{Cos}[\eta]\ v_y) \\ R \operatorname{Cot}\left[\frac{\xi}{2}\right]\ (\operatorname{Cos}[\eta]\ v_x-\operatorname{Sin}[\eta]\ v_y) \end{pmatrix}$$

<< Положим $\xi = \xi[t]$ и $\eta = \eta[t]$, поскольку движение точки зависит от времени >>

$$X[t\_] := \frac{R * \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]} \operatorname{Sin}[\eta[t]];$$

синус

$$Y[t\_] := \frac{R * \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]} \operatorname{Cos}[\eta[t]];$$

косинус

<< Найдем матрицу скоростей $X_t{}' = V\ (x\ (t))$ и $Y_t{}' = V\ (y\ (t))$ >>

$$\text{MatrixForm}\left[\left\{\left(\frac{R * \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]} \operatorname{Sin}[\eta[t]]\right)'[t],\ \left(\frac{R * \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]} \operatorname{Cos}[\eta[t]]\right)'[t]\right\}\right]$$

матричная форма

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{R \operatorname{Sin}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)'[t] \\ \left(\frac{R \operatorname{Cos}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)'[t] \end{pmatrix}$$

<< Запишем в форме матрицы скорости >>

$$\partial_t = \begin{pmatrix} \left(\frac{R \operatorname{Sin}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)'[t] \\ \left(\frac{R \operatorname{Cos}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)'[t] \end{pmatrix};$$

<< Находим матрицу ускорений $X_t{}'' = V\ (x\ (t))' = a_x\ (t)$ и $Y_t{}'' = V\ (y\ (t))' = a_y\ (t)$ >>

$$\text{MatrixForm}\left[\left[\partial_{t,t}\left\{\left\{\left(\frac{R \operatorname{Sin}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)\right\},\ \left\{\left(\frac{R \operatorname{Cos}[\eta[t]]\ \operatorname{Sin}[\xi[t]]}{1-\operatorname{Cos}[\xi[t]]}\right)\right\}\right\}\right]\right]$$

матричная форма

$$\text{MatrixForm}\Big[\Big\{\Big\{-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+$$

матричная форма

$$\frac{2\,R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{2\,R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}-$$

$$\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{3\,R\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}+$$

$$\frac{2\,R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^3\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^3}+\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+$$

$$\frac{R\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\xi''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\xi''[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}\Big\},$$

$$\Big\{-\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{2\,R\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+$$

$$\frac{2\,R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}-\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-$$

$$\frac{3\,R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}+$$

$$\frac{2\,R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^3\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^3}-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+$$

$$\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\xi''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\xi''[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}\Big\}\Big\}\Big]$$

<< Соотношение между ускорением в декартовой и ковариантным ускорением запишем в форме матрицы ускорения >>

MatrixForm[
матричная форма

FullSimplify[
упростить в полном объёме

$$\text{FullSimplify}\Big[\Big\{\Big\{-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+\frac{2\,R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{2\,R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{3\,R\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}+\frac{2\,R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^3\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^3}+\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+\frac{R\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\xi''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\xi''[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}\Big\},$$

$$\Big\{-\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{2\,R\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+\frac{2\,R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\eta'[t]\,\xi'[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}-\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{3\,R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}+\frac{2\,R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^3\,\xi'[t]^2}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^3}-\frac{R\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}+\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Cos}[\xi[t]]\,\xi''[t]}{1-\text{Cos}[\xi[t]]}-\frac{R\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]^2\,\xi''[t]}{(1-\text{Cos}[\xi[t]])^2}\Big\}\Big\}\Big]\Big]$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{4\,R\,\text{Sin}\left[\frac{\xi[t]}{2}\right]^4\left(\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta'[t]^2+2\,\text{Cos}[\eta[t]]\,\eta'[t]\,\xi'[t]-\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta''[t]+\text{Sin}[\eta[t]]\left(-\text{Cot}\left[\frac{\xi[t]}{2}\right]\xi'[t]^2+\xi''[\right.\right.}{(-1+\text{Cos}[\xi[t]])^3} \\ \frac{4\,R\,\text{Sin}\left[\frac{\xi[t]}{2}\right]^4\left(\text{Cos}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta'[t]^2-2\,\text{Sin}[\eta[t]]\,\eta'[t]\,\xi'[t]+\text{Sin}[\eta[t]]\,\text{Sin}[\xi[t]]\,\eta''[t]+\text{Cos}[\eta[t]]\left(-\text{Cot}\left[\frac{\xi[t]}{2}\right]\xi'[t]^2+\xi''[\right.\right.}{(-1+\text{Cos}[\xi[t]])^3} \end{array}\right.$$

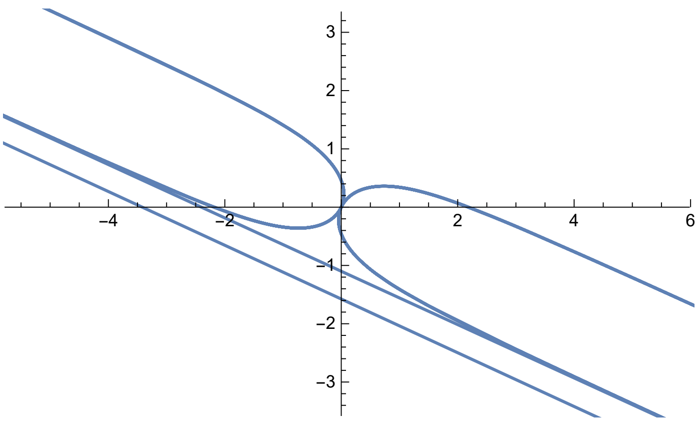
<< Положив радиус равный единице, получаем график x (t) и y (t) (Декартова траекория) >>

$$\text{ParametricPlot}\Big[\Big\{\frac{\text{Sin}[\xi]}{1-\text{Cos}[\xi]}\,\text{Sin}[\eta],\ \frac{\text{Sin}[\xi]}{1-\text{Cos}[\xi]}\,\text{Cos}[\eta]\Big\}\ /.$$

график параметрически заданной | синус | косинус

$$\{\eta \to 2-1\,t,\ \xi \to 2\,t\},\ \{t,\ 0,\ 30\},\ ,\ \text{PlotTheme} \to \text{"Scientific"}\Big]$$

тематический стиль графика



$$X[t\_] := \frac{R * Sin[\xi[t]]}{1 - Cos[\xi[t]]} Sin[\eta[t]];$$
синус

$$Y[t\_] := \frac{R * Sin[\xi[t]]}{1 - Cos[\xi[t]]} Cos[\eta[t]];$$
косинус

$\eta[t\_] := 2 - 1\,t$

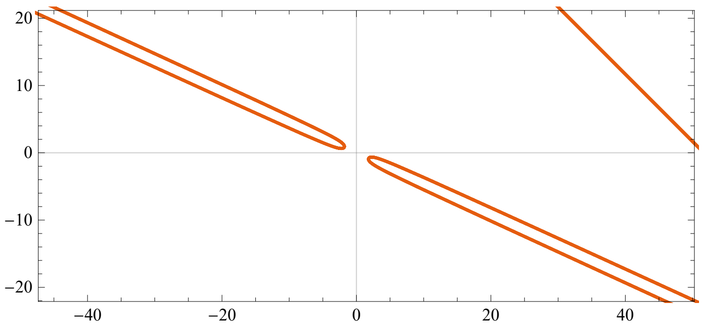
$\xi[t\_] := 2\,t$

R = 1

1

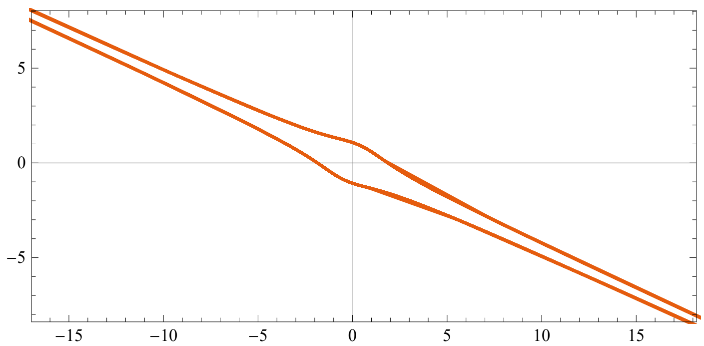
<< Рассмотрим график ускорения >>

ParametricPlot[Evaluate[{$\partial_t \partial_t$X[t], $\partial_t \partial_t$Y[t]}], {t, 0, 30}, PlotTheme → "Scientific"]
график параметр··· вычислить тематический стиль графика



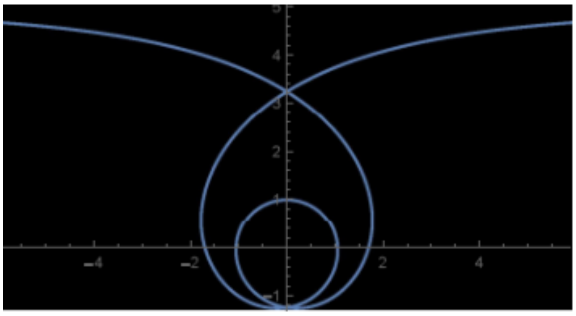
<< Рассмотрим график скорости >>

ParametricPlot[Evaluate[{D[X[t], t], D[Y[t], t]}],
график параметр··· вычислить дифференци··· дифференцироват
{t, 0, 30}, PlotTheme → "Scientific"]
тематический стиль графика



<< Задача 1.1 .3 >>

Точка движется на плоскости по траектории



Условие :

Форма траектории задается параметрически $x = R\cos(5\varphi)/\sin\varphi$, $y = R\sin(5\varphi)/\sin\varphi$. Построить траекторию $x = R\cos(b\varphi)/\sin\varphi$, $y = R\sin(b\varphi)/\sin\varphi$. графически для нескольких значений $b \neq 5$. Найти кривизну траектории в зависимости от значения параметра φ. Предположив, что параметр пропорционален времени $\varphi = \pi/2 + \omega t$, найти как функции времени: скорости по координатам, полную скорость, ускорение по координатам и полное ускорение. Построить зависимости графически. Предположить, что скорость

движения по траектории постоянна. Найти единичный вектор вдоль траектории. Построить график зависимости проекции скорости на ось x и на ось y в зависимости от времени. Построить график зависимости ускорения от времени. Найти момент времени когда ускорение максимально.

Решение :

$$X = \mathrm{Cos}\left[\sqrt{B}\ \psi\right]\frac{1}{\mathrm{Sin}[\psi]};$$
косинус

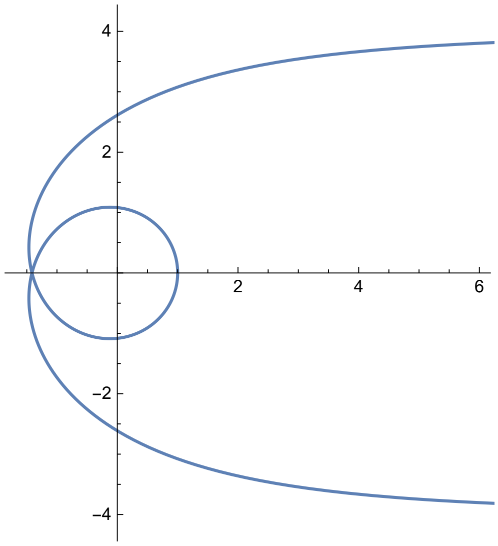
$$Y = \mathrm{Sin}\left[\sqrt{B}\ \psi\right]\frac{1}{\mathrm{Sin}[\psi]};$$
синус

<< Построим графики траектории движения точки (X[ψ], Y[ψ]) при нескольких значениях $\sqrt{B}$ = b ≠ 5 >>

<< b = 4 : >>

```
ParametricPlot[{Cos[√B ψ] 1/Sin[ψ], Sin[√B ψ] 1/Sin[ψ]} /. B → 16,
  {ψ, 0.0001, π - 0.00001}, PlotPoints → 300]
```

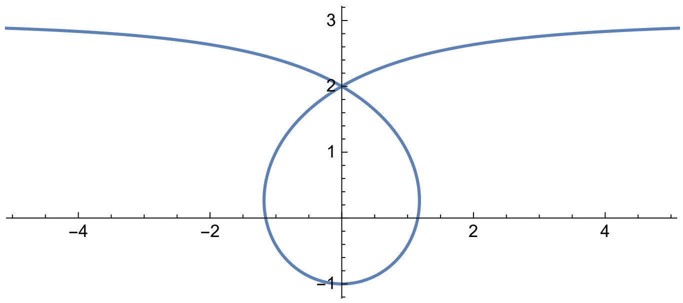
график параметри··· косинус синус начальное число точек в графике



<< b = 3 : >>

```
ParametricPlot[{Cos[√B ψ] 1/Sin[ ψ],Sin[√B ψ] 1/Sin[ ψ]}/.B→9,
  {ψ,0.0001,π-0.00001},PlotPoints→300]
```

график параметри··· косинус синус начальное число точек в графике

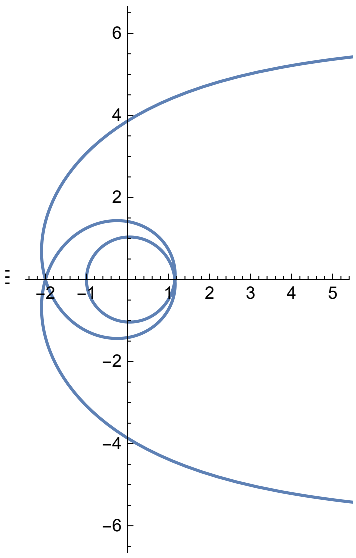


<< b = 6 : >>

```
ParametricPlot[{Cos[√B ψ] 1/Sin[ψ], Sin[√B ψ] 1/Sin[ψ]}/.B→36,
  {ψ,0.0001,π-0.0001},PlotPoints→300]
```

график параметри⋯ косинус синус

начальное число точек в графике



<< Кривизна траектории высчитывается при помощи следующего соотношения : K = $\frac{[v\times a]}{|v|^3}$ $\left([v\times a] = i v_x a_y - j v_y a_x,\ i, j = 1\right)$ **>>**

```
FullSimplify[
```

упростить в полном объёме

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Csc}[\psi]^2\left(-1+B+\mathrm{Csc}[\psi]^2\right)}^{3}}\right)\left(-\mathrm{Csc}[\psi]\left(\mathrm{Cos}[\sqrt{B}\,\psi]\,\mathrm{Cot}[\psi]+\sqrt{B}\,\mathrm{Sin}[\sqrt{B}\,\psi]\right)\right)$$

косеканс косинус котангенс синус

$$\left(\mathrm{Csc}[\psi]\left(-2\sqrt{B}\,\mathrm{Cos}[\sqrt{B}\,\psi]\,\mathrm{Cot}[\psi]+\left(-B+\mathrm{Cot}[\psi]^2+\mathrm{Csc}[\psi]^2\right)\mathrm{Sin}[\sqrt{B}\,\psi]\right)\right)-$$

косеканс косинус котангенс синус

$$\left(\mathrm{Csc}[\psi]\left(\sqrt{B}\,\mathrm{Cos}[\sqrt{B}\,\psi]-\mathrm{Cot}[\psi]\,\mathrm{Sin}[\sqrt{B}\,\psi]\right)\right)$$

косеканс косинус котан⋯ синус

$$\left(\mathrm{Csc}[\psi]\left(\mathrm{Cos}[\sqrt{B}\,\psi]\left(-B+\mathrm{Cot}[\psi]^2+\mathrm{Csc}[\psi]^2\right)+2\sqrt{B}\,\mathrm{Cot}[\psi]\,\mathrm{Sin}[\sqrt{B}\,\psi]\right)\right)]$$

косеканс косинус котан⋯ синус

$$\mathrm{Csc}[\psi]^2\left(-\left(\sqrt{B}\,\mathrm{Cos}[\sqrt{B}\,\psi]-\mathrm{Cot}[\psi]\,\mathrm{Sin}[\sqrt{B}\,\psi]\right)\left(\mathrm{Cos}[\sqrt{B}\,\psi]\left(-B+\mathrm{Cot}[\psi]^2+\mathrm{Csc}[\psi]^2\right)+2\sqrt{B}\,\mathrm{Cot}[\psi]\,\mathrm{Sin}[\sqrt{B}\,\psi]\right)-\left(\left(\mathrm{Cos}[\sqrt{B}\,\psi]\,\mathrm{Cot}[\psi]+\sqrt{B}\,\mathrm{Sin}[\sqrt{B}\,\psi]\right)\left(-2\sqrt{B}\,\mathrm{Cos}[\sqrt{B}\,\psi]\,\mathrm{Cot}[\psi]+\left(-B+\mathrm{Cot}[\psi]^2+\mathrm{Csc}[\psi]^2\right)\mathrm{Sin}[\sqrt{B}\,\psi]\right)\right)\Big/\left(\mathrm{Csc}[\psi]^2\left(-1+B+\mathrm{Csc}[\psi]^2\right)\right)^{3/2}\right)$$

<< Поскольку координаты зависят от времени,
то имеет место запись : (Причем положим, что $\varphi[t\_] = \pi/2 + \omega * t$ **и** $\omega = \pi/3$**) >>**

$$X[t\_] = \mathrm{Cos}\left[\sqrt{B}\ \psi[t]\right]\ \frac{1}{\mathrm{Sin}[\psi[t]]};$$

косинус

$$Y[t\_] = \mathrm{Sin}\left[\sqrt{B}\ \psi[t]\right]\ \frac{1}{\mathrm{Sin}[\psi[t]]};$$

синус

$$\psi[t\_] := \pi/2 + \omega * t;$$
$$\omega := \pi/3$$

$$\mathrm{FullSimplify}\left[\partial_t \left\{\mathrm{Cos}\left[\sqrt{B}\ \psi[t]\right]\ \frac{1}{\mathrm{Sin}[\psi[t]]},\ \mathrm{Sin}\left[\sqrt{B}\ \psi[t]\right]\ \frac{1}{\mathrm{Sin}[\psi[t]]}\right\}\right]$$

упростить в полном··· косинус синус

< Теперь выразим скорость как $X_t' = v_x[t]$ и $Y_t' = v_y[t]$ >>

$$\left\{\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(-\sqrt{B}\ \mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (3+2t)\right] + \mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (3+2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\ \mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (3+2t)\right] + \mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (3+2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right\}$$

<< Теперь рассмотрим график скорости от времени >>

ParametricPlot[

график параметрически заданной области на плоскости

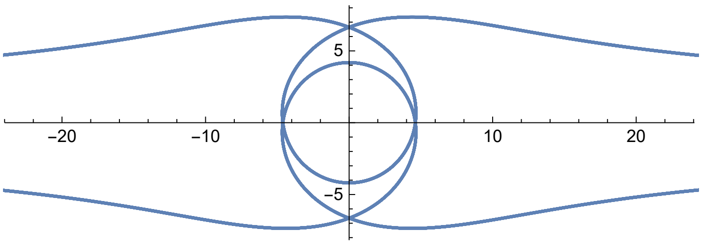
$$\left\{\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\ \mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (3-2t)\right] + \mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (3-2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right),\right.$$

секанс синус косинус тангенс

$$\left.-\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\ \mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (-3+2t)\right] + \mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (-3+2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right\}\ /.\ B \to$$

секанс косинус синус тангенс

$$16,\ \{t, -20, 20\}]$$



<< Поскольку абсолютная скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ >>

FullSimplify[

упростить в полном объёме

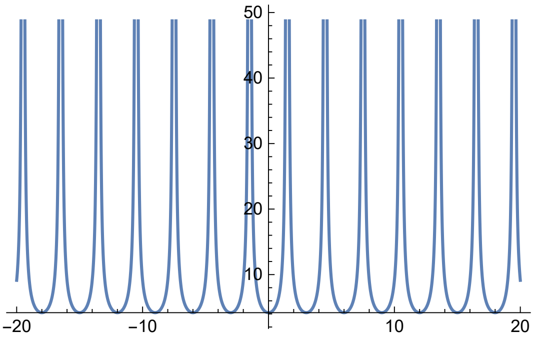
$$\sqrt{\left(\left(\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\ \mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (3-2t)\right] + \mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (3-2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\ \mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (-3+2t)\right] + \mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\ \pi\ (-3+2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right)^2\right)}]$$

$$\frac{1}{3}\pi\sqrt{\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1 + B + \mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)}$$

<< Теперь получим график абсолютной скорости >>

$$\texttt{Plot}\left[\frac{1}{3}\pi\sqrt{\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)}\ /.\ B\to 16,\ \{t,-20,20\}\right]$$

график функции



<< Распишем ускорение как $X_t'' = a_x[t]$ и $Y_t'' = a_y[t]$ >>

$$\texttt{FullSimplify}\left[\partial_{t,t}\left\{\text{Cos}\left[\sqrt{B}\ \psi[t]\right]\frac{1}{\text{Sin}[\psi[t]]},\ \text{Sin}\left[\sqrt{B}\ \psi[t]\right]\frac{1}{\text{Sin}[\psi[t]]}\right\}\right]$$

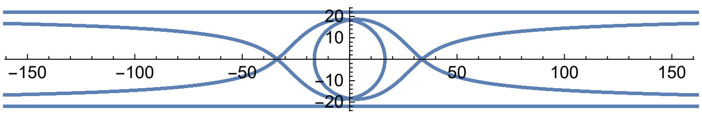
упростить в полном ⋯ косинус синус

$$\left\{\frac{1}{9}\pi^2\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(-\text{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3+2t)\right]\left(1+B-2\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)-2\sqrt{B}\,\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3+2t)\right]\text{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right),\ \frac{1}{9}\pi^2\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(-\left(1+B-2\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3+2t)\right]+2\sqrt{B}\,\text{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3+2t)\right]\text{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right\}$$

<< Получим график ускорения >>

$$\texttt{ParametricPlot}\left[\left\{\frac{1}{9}\pi^2\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(-\text{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]\left(1+B-2\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)+2\sqrt{B}\,\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]\text{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{9}\pi^2\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\left(1+B-2\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]+2\sqrt{B}\,\text{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(-3+2t)\right]\text{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right\}\ /.\ B\to 16,\ \{t,-20,20\}\right]$$

график параметрически ⋯ секанс косинус синус тангенс секанс синус косинус тангенс



<< Поскольку абсолютное ускорение $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ >>

$$\text{FullSimplify}\Big[\sqrt{\Big(\Big(\tfrac{1}{9}\pi^2 \text{Sec}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]\Big(-\text{Cos}\big[\tfrac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\big]\Big(1+B-2\,\text{Sec}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]^2\Big)+2\sqrt{B}\,\text{Sin}\big[\tfrac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\big]\,\text{Tan}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]\Big)\Big)^2+\Big(-\tfrac{1}{9}\pi^2 \text{Sec}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]\Big(\Big(1+B-2\,\text{Sec}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]^2\Big)\text{Sin}\big[\tfrac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\big]+2\sqrt{B}\,\text{Cos}\big[\tfrac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(-3+2t)\big]\,\text{Tan}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]\Big)\Big)^2\Big)}\Big]$$

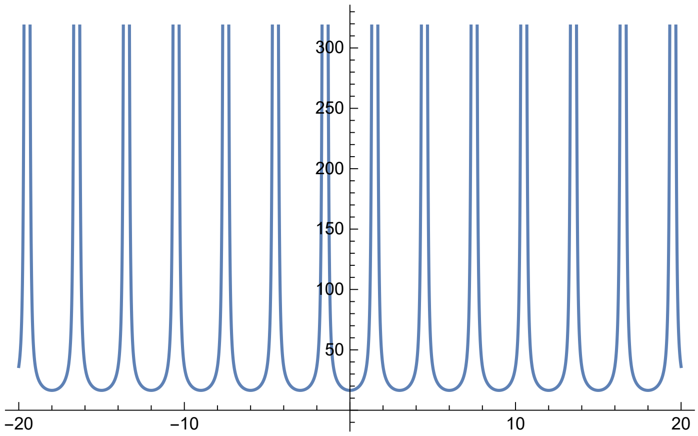
упростить в полном объеме

$$\frac{1}{9}\pi^2\sqrt{\Big(\text{Sec}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]^2\Big((-1+B)^2+4\,\text{Sec}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]^2\,\text{Tan}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]^2\Big)\Big)}$$

<< Теперь рассмотрим график абсолютного ускорения >>

$$\text{Plot}\Big[\frac{1}{9}\pi^2\sqrt{\Big(\text{Sec}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]^2\Big((-1+B)^2+4\,\text{Sec}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]^2\,\text{Tan}\big[\tfrac{\pi t}{3}\big]^2\Big)\Big)}\ /.\ B\to 16,\ \{t,-20,20\}\Big]$$

график функции



<< Единичный вектор вдоль траектории : $\left(\frac{v_x}{v};\ \frac{v_y}{v}\right)$ >>

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{1}{\frac{1}{3}\pi\sqrt{\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)}}\right.$$

упростить в полном объёме

$$\left\{\frac{1}{3}\pi\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\,\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]+\text{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]\text{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right),\right.$$

секанс, синус, косинус, тангенс

$$\left.\left.-\frac{1}{3}\pi\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\,\text{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(-3+2t)\right]+\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(-3+2t)\right]\text{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right\}\right]$$

секанс, косинус, синус, тангенс

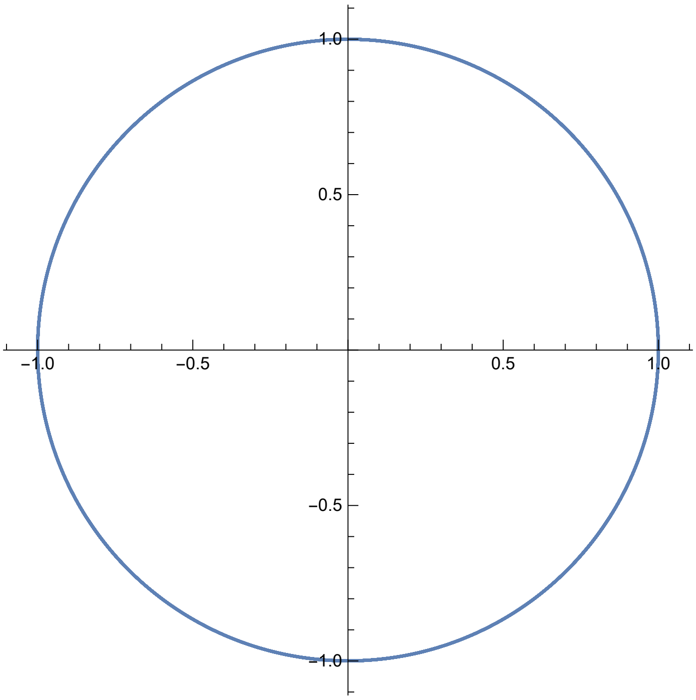
$$\left\{\left(\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\,\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]+\text{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]\text{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right)\Big/\left(\sqrt{\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)}\right),\right.$$

$$\left.-\left(\left(\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\,\text{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(-3+2t)\right]+\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(-3+2t)\right]\text{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right)\Big/\left(\sqrt{\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)}\right)\right)\right\}$$

<< Запросим график единичного вектора вдоль траектории >>

```
ParametricPlot[{(Sec[π t/3] (Sqrt[B] Sin[1/6 Sqrt[B] π (3 - 2 t)] + Cos[1/6 Sqrt[B] π (3 - 2 t)] Tan[π t/3])) /
   (Sqrt[Sec[π t/3]^2 (-1 + B + Sec[π t/3]^2)]),
  -((Sec[π t/3] (Sqrt[B] Cos[1/6 Sqrt[B] π (-3 + 2 t)] + Sin[1/6 Sqrt[B] π (-3 + 2 t)] Tan[π t/3])) /
   (Sqrt[Sec[π t/3]^2 (-1 + B + Sec[π t/3]^2)]))} /. B → 16, {t, -20, 20}]
```

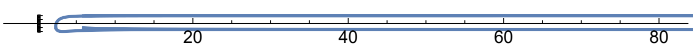
график параметриче⋯ | секанс | синус | косинус | тангенс | секанс | косинус | синус | тангенс



<< Получим график зависимости скорости на ось x и y >>

```
ParametricPlot[
 {1/3 π Sqrt[Sec[π t/3]^2 (-1 + B + Sec[π t/3]^2)], (1/(1/3 π Sqrt[Sec[π t/3]^2 (-1 + B + Sec[π t/3]^2)]))
  (1/3 π Sec[π t/3] (Sqrt[B] Sin[1/6 Sqrt[B] π (3 - 2 t)] + Cos[1/6 Sqrt[B] π (3 - 2 t)] Tan[π t/3]))} /. B →
  5, {t, -2, 2}]
```

график параметрически заданной области на плоскости | секанс | синус | косинус | тангенс



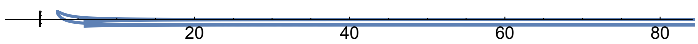
ParametricPlot[
график параметрически заданной области на плоскости

$$\left\{\frac{1}{3}\pi\sqrt{\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)},\ \left(\frac{1}{\frac{1}{3}\pi\sqrt{\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)}}\right)\right.$$

$$\left.\left(-\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(-3+2t)\right]+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(-3+2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right)\right\}\ /.$$

секанс, косинус, синус, тангенс

$B\to 5$, {t, -2, 2}, PlotPoints $\to$ 300]
начальное число точек в графике



<< **Для нахождения единичного ускорения, воспользуемся тем, что оно равно едениченому вектору вдоль траектории (при $\omega = \pi/3$)** >>

FullSimplify[∂_t {
упростить в полном ⋯

$$\left(\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]+\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right)\Big/\left(\sqrt{\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)}\right),$$

$$-\left(\left(\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\left(\sqrt{B}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(-3+2t)\right]+\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(-3+2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right)\Big/\left(\sqrt{\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)}\right)\right)\}]$$

секанс, синус, косинус, тангенс

$$\left\{-\left(\left((-1+B)\sqrt{B}\,\pi\,\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^3\left(\sqrt{B}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]-\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right)\Big/\left(3\left(\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)\right)^{3/2}\right)\right),\right.$$

$$\left.-\left(\left((-1+B)\sqrt{B}\,\pi\,\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^3\left(\sqrt{B}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]+\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\right)\Big/\left(3\left(\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\mathrm{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)\right)^{3/2}\right)\right)\right\}$$

<< **Далее, найдем полное ускорение** >>

FullSimplify[
упростить в полном объёме

$$\left(-\left(\left(\left(-1+B\right)\sqrt{B}\,\pi\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^3\left(\sqrt{B}\,\text{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]-\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]\right)\text{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\Big/\left(3\left(\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)\right)^{3/2}\right)\right)\right)^2+$$
$$\left(-\left(\left(\left(-1+B\right)\sqrt{B}\,\pi\,\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^3\left(\sqrt{B}\,\text{Sin}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]+\text{Cos}\left[\frac{1}{6}\sqrt{B}\,\pi\,(3-2t)\right]\right)\text{Tan}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right)\Big/\left(3\left(\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\left(-1+B+\text{Sec}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^2\right)\right)^{3/2}\right)\right)\right)^2\Bigg]$$

$$\frac{4\left(-1+B\right)^2 B\,\pi^2\,\text{Cos}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^4}{9\left(1+B+\left(-1+B\right)\text{Cos}\left[\frac{2\pi t}{3}\right]\right)^2}$$

<< Пусть $(a[t_1])' = 0 \; = \; > t_1$ – время,
в момент которого ускорение максимально при данном B >>

B := 16;

$$\text{FullSimplify}\left[\partial_t\left\{\frac{4\left(-1+B\right)^2 B\,\pi^2\,\text{Cos}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^4}{9\left(1+B+\left(-1+B\right)\text{Cos}\left[\frac{2\pi t}{3}\right]\right)^2}\right\}\right]$$
упростить в полном объёме

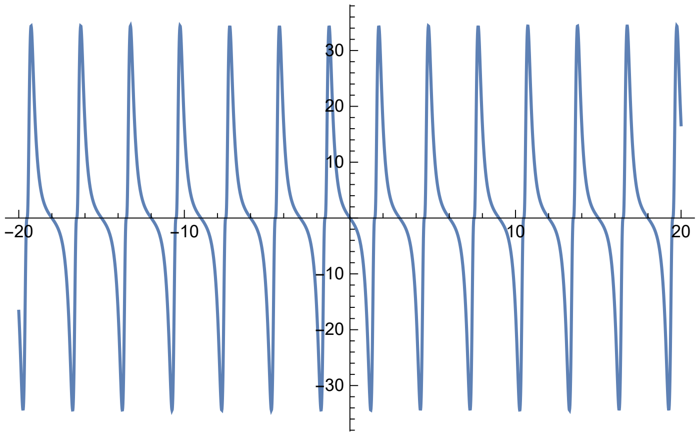
$$\left\{-\frac{12\,800\,\pi^3\,\text{Cos}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^3\,\text{Sin}\left[\frac{\pi t}{3}\right]}{3\left(17+15\,\text{Cos}\left[\frac{2\pi t}{3}\right]\right)^3}\right\}$$

$$\text{Solve}\left[-\frac{12\,800\,\pi^3\,\text{Cos}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^3\,\text{Sin}\left[\frac{\pi t}{3}\right]}{3\left(17+15\,\text{Cos}\left[\frac{2\pi t}{3}\right]\right)^3} == 0,\ t\right]$$
решить уравнения

$$\left\{\{t\to\text{ConditionalExpression}[6\,C[1],\ C[1]\in\text{Integers}]\},\right.$$
$$\left\{t\to\text{ConditionalExpression}\left[\frac{3\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\,C[1]\right)}{\pi},\ C[1]\in\text{Integers}\right]\right\},$$
$$\left\{t\to\text{ConditionalExpression}\left[\frac{3\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\,C[1]\right)}{\pi},\ C[1]\in\text{Integers}\right]\right\},$$
$$\left.\left\{t\to\text{ConditionalExpression}\left[\frac{3\left(\pi+2\pi\,C[1]\right)}{\pi},\ C[1]\in\text{Integers}\right]\right\}\right\}$$

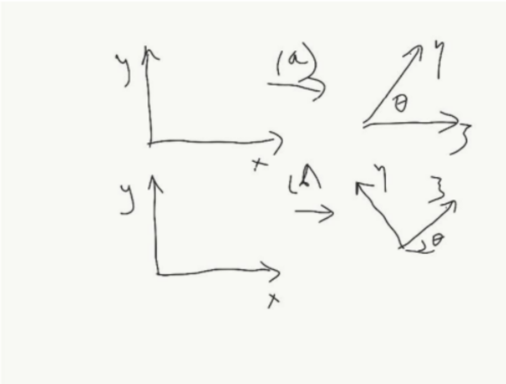
$$\text{Plot}\left[\left\{-\frac{12800\,\pi^3\,\text{Cos}\left[\frac{\pi t}{3}\right]^3\,\text{Sin}\left[\frac{\pi t}{3}\right]}{3\left(17+15\,\text{Cos}\left[\frac{2\pi t}{3}\right]\right)^3}\right\},\ \{t,\ -20,\ 20\}\right]$$

график функции



<< Задача 1.1 .5 >>

Условие:

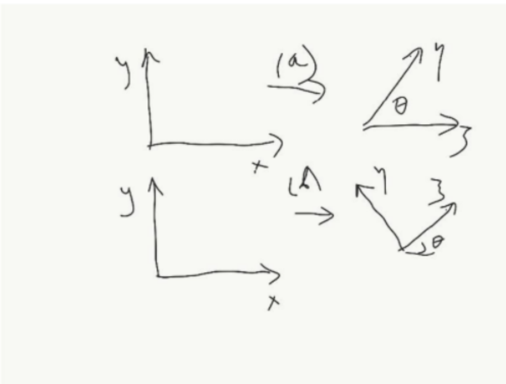


5. Осуществляются последовательно две замены координат : (a) переход в косоугольную систему координат с углом между осями Θ и (b) поворот системы координат на угол θ.

Найти матрицы Якоби в двух случаях: сперва (a), а потом (b), и в обратной последовательности. Найти элемент длинны и метрические тензора для обоих случаев. Найти декартовы скорости частицы, движущейся в преобразованных координатах с постоянной ковариантной скоростью. Найти контравариантные скорости в преобразованных системах координат.

Решение :

<< Рассмотрим случай перехода от косоугольной к поворотной СК >>



5. Осуществляются последовательно две замены координат : (a) переход в косоугольную систему координат с углом между осями Θ и (b) поворот системы координат на угол θ.

Найти матрицы Якоби в двух случаях: сперва (a), а потом (b), и в обратной последовательности. Найти элемент длинны и метрические тензора для обоих случаев. Найти декартовы скорости частицы, движущейся в преобразованных координатах с постоянной ковариантной скоростью. Найти контравариантные скорости в преобразованных системах координат.

```
X[ξ_, η_] := ξ + η Cos[Θ]
                   косинус
Y[ξ_, η_] := η Sin[Θ]
               синус
ξ[ξ_, μ_] := ξ Cos[θ] - μ Sin[θ]
               косинус    синус
η[ξ_, μ_] := ξ Sin[θ] + μ Cos[θ]
               синус      косинус
```

<< Рассчитаем матрицу Якоби для перехода из декартовой в косоугольную СК >>

```
J1 = Simplify[{{∂ξ X[ξ, η], ∂η X[ξ, η]}, {∂ξ Y[ξ, η], ∂η Y[ξ, η]}}]
```
упростить

```
{{1, Cos[Θ]}, {0, Sin[Θ]}}
```

```
MatrixForm[J1]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Cos}[\Theta] \\ 0 & \mathrm{Sin}[\Theta] \end{pmatrix}$$

<< Теперь рассчитаем матрицу Якоби для перехода из косоугольной в поворотную СК >>

```
J2 = Simplify[{{∂ξ ξ[ξ, μ], ∂μ ξ[ξ, μ]}, {∂ξ η[ξ, μ], ∂μ η[ξ, μ]}}]
```
упростить

```
{{Cos[θ], -Sin[θ]}, {Sin[θ], Cos[θ]}}
```

```
MatrixForm[J2]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta] & -\mathrm{Sin}[\theta] \\ \mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta] \end{pmatrix}$$

```
{{Cos[θ], -Sin[θ]}, {Sin[θ], Cos[θ]}}
```

<< Получили итоговое соотношение для искомомго перехода : Декартовая = > Косоугольная = > Повортоная >>

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Cos}[\Theta] \\ 0 & \mathrm{Sin}[\Theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta] & -\mathrm{Sin}[\theta] \\ \mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Cos}[\Theta] \\ 0 & \mathrm{Sin}[\Theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta] & -\mathrm{Sin}[\theta] \\ \mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\mu \end{pmatrix}$$

<< Мы получили, что конечная матрица Якоби является произведением двух матриц Якоби >>

```
EJ = Simplify[J1.J2]
```
упростить

```
{{Cos[θ] + Cos[Θ] Sin[θ], Cos[θ] Cos[Θ] - Sin[θ]}, {Sin[θ] Sin[Θ], Cos[θ] Sin[Θ]}}
```

```
MatrixForm[EJ]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta] + \mathrm{Cos}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\Theta] - \mathrm{Sin}[\theta] \\ \mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\Theta] & \mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\Theta] \end{pmatrix}$$

<< Метрический тензор этого сложного преобразования >>

```
g1 = Simplify[Transpose[EJ].EJ]
```
упростить транспозиция

```
{{1 + Cos[Θ] Sin[2 θ], Cos[2 θ] Cos[Θ]}, {Cos[2 θ] Cos[Θ], 1 - 2 Cos[θ] Cos[Θ] Sin[θ]}}
```

```
MatrixForm[g1]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} 1 + \mathrm{Cos}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[2\,\theta] & \mathrm{Cos}[2\,\theta]\,\mathrm{Cos}[\Theta] \\ \mathrm{Cos}[2\,\theta]\,\mathrm{Cos}[\Theta] & 1 - 2\,\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[\theta] \end{pmatrix}$$

```
{{1 + Cos[Θ] Sin[2 θ], Cos[2 θ] Cos[Θ]}, {Cos[2 θ] Cos[Θ], 1 - 2 Cos[θ] Cos[Θ] Sin[θ]}}
      косинус синус       косинус  косинус      косинус  косинус         косинус косинус синус
{{1 + Cos[Θ] Sin[2 θ], Cos[2 θ] Cos[Θ]}, {Cos[2 θ] Cos[Θ], 1 - 2 Cos[θ] Cos[Θ] Sin[θ]}}
```

<< Далее, рассмотрим элемент длины в итоговой системе координат >>

```
dl^2 = Simplify[{{dξ, dμ}}.g1.{dξ, dμ}]
       упростить
{dξ^2 + dμ^2 + 2 dξ dμ Cos[2 θ] Cos[Θ] - 2 dμ^2 Cos[θ] Cos[Θ] Sin[θ] + dξ^2 Cos[Θ] Sin[2 θ]}
```

<< Имеем конечные координатные зависимости и время >>

```
X[t_] := ξ[t] Cos[θ] - μ[t] Sin[θ] + (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Cos[Θ]
              косинус       синус           синус          косинус   косинус
Y[t_] := (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Sin[Θ]
               синус         косинус   синус

Function[t, ξ[t] Cos[θ] - μ[t] Sin[θ] + (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Cos[Θ]]
функция          косинус       синус          синус         косинус   косинус
Function[t, ξ[t] Cos[θ] - μ[t] Sin[θ] + (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Cos[Θ]]

dxy = Simplify[{∂t ξ[t] Cos[θ] - μ[t] Sin[θ] + (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Cos[Θ],
      упростить         косинус       синус          синус          косинус   косинус
   ∂t (ξ[t] Sin[θ] + μ[t] Cos[θ]) Sin[Θ]}]
            синус         косинус   синус
{Cos[Θ] Sin[θ] ξ[t] + (Cos[θ] Cos[Θ] - Sin[θ]) μ[t] + Cos[θ] ξ′[t],
 Sin[Θ] (Sin[θ] ξ′[t] + Cos[θ] μ′[t])}

MatrixForm[dxy]
матричная форма
( Cos[Θ] Sin[θ] ξ[t] + (Cos[θ] Cos[Θ] - Sin[θ]) μ[t] + Cos[θ] ξ′[t] )
(           Sin[Θ] (Sin[θ] ξ′[t] + Cos[θ] μ′[t])                     )
```

<< Получаем декартову скорость в преобразованной системе координат >>

```
dv^2 = FullSimplify[{dxy}.dxy]
       упростить в полном объёме
{(Sin[θ] (Cos[Θ] ξ[t] - μ[t]) + Cos[θ] (Cos[Θ] μ[t] + ξ′[t]))^2 +
  Sin[Θ]^2 (Sin[θ] ξ′[t] + Cos[θ] μ′[t])^2}
```

<< Запишем координатные зависимости >>

```
X[ξ_, μ_] := ξ Cos[θ] - μ Sin[θ] + (ξ Sin[θ] + μ Cos[θ]) Cos[Θ]
               косинус     синус        синус      косинус   косинус
Y[ξ_, μ_] := (ξ Sin[θ] + μ Cos[θ]) Sin[Θ]
                синус      косинус   синус

vxy1 = {vx1, vy1}
{vx1, vy1}
```

<< Теперь запишем обратную матрицу Якоби для итогового преобразования >>

```
JJ1 = FullSimplify[Inverse[EJ]]
      упростить в по··· обратная матриц
{{Cos[θ], -Cos[θ] Cot[Θ] + Csc[Θ] Sin[θ]}, {-Sin[θ], Csc[Θ] (Cos[θ] + Cos[Θ] Sin[θ])}}
```

```
MatrixForm[JJ1]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Cos}[\theta]\,\text{Cot}[\Theta] + \text{Csc}[\Theta]\,\text{Sin}[\theta] \\ -\text{Sin}[\theta] & \text{Csc}[\Theta]\,(\text{Cos}[\theta] + \text{Cos}[\Theta]\,\text{Sin}[\theta]) \end{pmatrix}$$

<< Записываем контрвариантную скорость в преобразованной системе координат >>

```
ctr1 = FullSimplify[g1.(JJ1.vxy1)]
```
упростить в полном объёме

$$\{\text{vx1}\,\text{Cos}[\theta] + \text{Sin}[\theta]\,(\text{vx1}\,\text{Cos}[\Theta] + \text{vy1}\,\text{Sin}[\Theta]),$$
$$-\text{vx1}\,\text{Sin}[\theta] + \text{Cos}[\theta]\,(\text{vx1}\,\text{Cos}[\Theta] + \text{vy1}\,\text{Sin}[\Theta])\}$$

```
MatrixForm[ctr1]
```
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \text{vx1}\,\text{Cos}[\theta] + \text{Sin}[\theta]\,(\text{vx1}\,\text{Cos}[\Theta] + \text{vy1}\,\text{Sin}[\Theta]) \\ -\text{vx1}\,\text{Sin}[\theta] + \text{Cos}[\theta]\,(\text{vx1}\,\text{Cos}[\Theta] + \text{vy1}\,\text{Sin}[\Theta]) \end{pmatrix}$$

<< Теперь рассмотрим второй случай – переход от поворотной к косоугольной СК >>

```
X[ξ_, η_] := ξ Cos[θ] - η Sin[θ]
```
косинус синус

```
Y[ξ_, η_] := ξ Sin[θ] + η Cos[θ]
```
синус косинус

```
ξ[ζ_, μ_] := ζ + μ Cos[Θ]
```
косинус

```
η[ζ_, μ_] := μ Sin[Θ]
```
синус

**<< По аналогии с первым случаем записываем матрицу
Якоби. Теперь для перехода из декартовой в поворотную СК >>**

```
j1 = Simplify[{{∂ξ X[ξ, η], ∂η X[ξ, η]}, {∂ξ Y[ξ, η], ∂η Y[ξ, η]}}]
```
упростить

```
MatrixForm[j1]
```
матричная форма

$\{\{\text{Cos}[\theta], -\text{Sin}[\theta]\}, \{\text{Sin}[\theta], \text{Cos}[\theta]\}\}$

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Sin}[\theta] \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Cos}[\theta] \end{pmatrix}$$

<< Теперь записывваем матрицу Якоби для перехода из косоугольной в поворотную СК >>

```
j2 = Simplify[{{∂ζ ξ[ζ, μ], ∂μ ξ[ζ, μ]}, {∂ζ η[ζ, μ], ∂μ η[ζ, μ]}}]
```
упростить

```
MatrixForm[j2]
```
матричная форма

$\{\{1, \text{Cos}[\Theta]\}, \{0, \text{Sin}[\Theta]\}\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{Cos}[\Theta] \\ 0 & \text{Sin}[\Theta] \end{pmatrix}$$

<< Опять записываем конечное соотношение для переходов >>

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Sin}[\theta] \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Cos}[\theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{Cos}[\Theta] \\ 0 & \text{Sin}[\Theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varsigma \\ d\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Sin}[\theta] \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Cos}[\theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \text{Cos}[\Theta] \\ 0 & \text{Sin}[\Theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varsigma \\ d\mu \end{pmatrix}$$

<< Проводя аналогичные рассуждения с первым случаем, получаем, что итоговая матрица Якоби – произведение двух матриц Якоби >>

```
Ej = Simplify[j1.j2]
     упростить
MatrixForm[Ej]
матричная форма
```

{{Cos[θ], Cos[θ + Θ]}, {Sin[θ], Sin[θ + Θ]}}

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & \text{Cos}[\theta+\Theta] \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Sin}[\theta+\Theta] \end{pmatrix}$$

<< Запишем метрический тензор этого сложного преобразования >>

```
g2 = Simplify[Transpose[Ej].Ej]
     упростить транспозиция
MatrixForm[g2]
матричная форма
```

{{1, Cos[Θ]}, {Cos[Θ], 1}}

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{Cos}[\Theta] \\ \text{Cos}[\Theta] & 1 \end{pmatrix}$$

<< Далее, опять рассмотрим элемент длины в итоговой системе координат >>

```
dl^2 = Simplify[{{dς, dμ}}.g2.{dς, dμ}]
       упростить
```

$\{d\varsigma^2 + d\mu^2 + 2\, d\varsigma\, d\mu\, \text{Cos}[\Theta]\}$

<< Имеем конечные координатные зависимости и время >>

```
X[ς_, μ_, t_] := (ς[t] + μ[t] Cos[Θ]) Cos[θ] - μ[t] Sin[Θ] Sin[θ]
                                косинус    косинус        синус    синус
Y[ς_, μ_, t_] := (ς[t] + μ[t] Cos[Θ]) Sin[θ] + μ[t] Sin[Θ] Cos[θ]
                                косинус    синус          синус    косинус
```

```
dxy2 = Simplify[{∂t (ς[t] + μ[t] Cos[Θ]) Cos[θ] - μ[t] Sin[Θ] Sin[θ],
       упростить                 косинус    косинус        синус    синус
   ∂t (ς[t] + μ[t] Cos[Θ]) Sin[θ] + μ[t] Sin[Θ] Cos[θ]}]
                  косинус    синус          синус    косинус
MatrixForm[
матричная форма
 dxy2]
```

{-Sin[θ] Sin[Θ] μ[t] + Cos[θ] (ς′[t] + Cos[Θ] μ′[t]),
Cos[θ] Sin[Θ] μ[t] + Sin[θ] (ς′[t] + Cos[Θ] μ′[t])}

$$\begin{pmatrix} -\text{Sin}[\theta]\,\text{Sin}[\Theta]\,\mu[t] + \text{Cos}[\theta]\,(\varsigma'[t] + \text{Cos}[\Theta]\,\mu'[t]) \\ \text{Cos}[\theta]\,\text{Sin}[\Theta]\,\mu[t] + \text{Sin}[\theta]\,(\varsigma'[t] + \text{Cos}[\Theta]\,\mu'[t]) \end{pmatrix}$$

<< Получаем декартову скорость в преобразованной системе координат >>

```
dv^2 = FullSimplify[{dxy2}.dxy2]
       упростить в полном объёме
```

$\{\mathrm{Sin}[\Theta]^2\,\mu[t]^2 + (\zeta'[t] + \mathrm{Cos}[\Theta]\,\mu'[t])^2\}$

<< Запишем координатные зависимости >>

```
X[ξ_, μ_] := (ξ + μ Cos[Θ]) Cos[θ] - μ Sin[Θ] Sin[θ]
                  косинус   косинус      синус    синус
Y[ξ_, μ_] := (ξ + μ Cos[Θ]) Sin[θ] + μ Sin[Θ] Cos[θ]
                  косинус   синус        синус    косинус
```

```
vxy2 = {vx2, vy2}
```

{vx2, vy2}

<< Записываем обратную матрицу Якоби для итогового преобразования >>

```
JJ2 = FullSimplify[Inverse[Ej]]
      упростить в по··· обратная матриц
MatrixForm[JJ2]
матричная форма
```

$\{\{\mathrm{Csc}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[\theta+\Theta], -\mathrm{Cos}[\theta+\Theta]\,\mathrm{Csc}[\Theta]\}, \{-\mathrm{Csc}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[\theta], \mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Csc}[\Theta]\}\}$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Csc}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[\theta+\Theta] & -\mathrm{Cos}[\theta+\Theta]\,\mathrm{Csc}[\Theta] \\ -\mathrm{Csc}[\Theta]\,\mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Csc}[\Theta] \end{pmatrix}$$

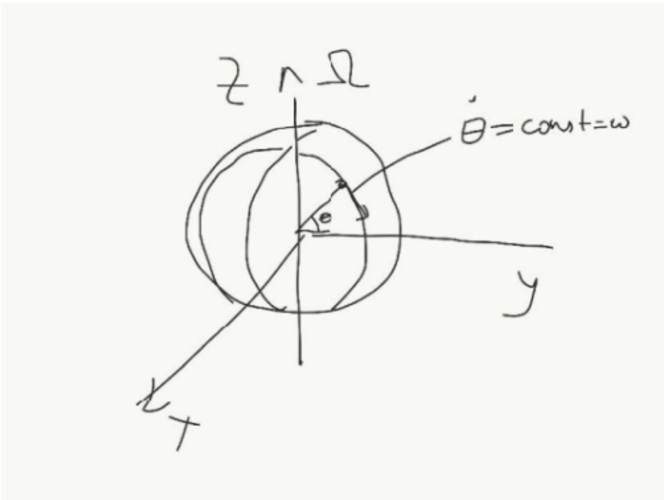
<< И теперь записываем контрвариантную скорость в преобразованной системе координат >>

```
ctr2 = FullSimplify[g2.(JJ2.vxy2)]
       упростить в полном объёме
MatrixForm[ctr2]
матричная форма
```

$\{\{\mathrm{Cos}[\theta], \mathrm{Sin}[\theta]\}, \{\mathrm{Cos}[\theta+\Theta], \mathrm{Sin}[\theta+\Theta]\}\}.\mathrm{vxy2}$

$\{\{\mathrm{Cos}[\theta], \mathrm{Sin}[\theta]\}, \{\mathrm{Cos}[\theta+\Theta], \mathrm{Sin}[\theta+\Theta]\}\}.\mathrm{vxy2}$

<< Задача 1.2 .1 >>



Условие :

1. Точка движется с постоянной ковариантной скоростью ω по меридиану вращающейся сферы.

Каковы ее компоненты скорости и ускорения в неподвижной декартовой системе координат?

Решение :

<< Запишем зависимости и правила перехода между системами координат >>

```
X[t_] := R[t] * Cos[θ[t]] * Cos[φ[t]];
                |косинус      |косинус
Y[t_] := R[t] * Cos[θ[t]] * Sin[φ[t]];
                |косинус      |синус
Z[t_] := R[t] * Sin[θ[t]];
                |синус
```

```
Clear[R, ω]
|очистить
```

<< Теперь, для преобразования СК находим матрицу Якоби J >>

```
MatrixForm[FullSimplify[
|матричная ⋯ |упростить в полном объёме
```

$$\begin{pmatrix} \partial_{R[t]}\left(R[t]*Cos[\theta[t]]*Cos[\varphi[t]]\right) & \partial_{\theta[t]}\left(R[t]*Cos[\theta[t]]*Cos[\varphi[t]]\right) & \partial_{\varphi[t]}\left(R[t]*Cos\right. \\ \partial_{R[t]}\left(R[t]*Cos[\theta[t]]*Sin[\varphi[t]]\right) & \partial_{\theta[t]}\left(R[t]*Cos[\theta[t]]*Sin[\varphi[t]]\right) & \partial_{\varphi[t]}\left(R[t]*Cos\right. \\ \partial_{R[t]}\left(R[t]*Sin[\theta[t]]\right) & \partial_{\theta[t]}\left(R[t]*Sin[\theta[t]]\right) & \partial_{\varphi[t]}\left(R[t\right. \end{pmatrix}$$

]]

$$\begin{pmatrix} Cos[\theta[t]]\,Cos[\varphi[t]] & -Cos[\varphi[t]]\,R[t]\,Sin[\theta[t]] & -Cos[\theta[t]]\,R[t]\,Sin[\varphi[t]] \\ Cos[\theta[t]]\,Sin[\varphi[t]] & -R[t]\,Sin[\theta[t]]\,Sin[\varphi[t]] & Cos[\theta[t]]\,Cos[\varphi[t]]\,R[t] \\ Sin[\theta[t]] & Cos[\theta[t]]\,R[t] & 0 \end{pmatrix}$$

<< Выразим θ[t], φ[t], и R[t], поскольку движение точки имеет зависит от врмени >>

```
φ[t_] := Ω * t
θ[t_] := ω * t
R[t_] := R0
```

<< Найдем скорости, как производные по времени $X_t' = v_x$, $Y_t' = v_y$, $Z_t' = v_z$ >>

```
MatrixForm[
матричная форма
 ∂t {R[t] * Cos[θ[t]] * Cos[φ[t]], R[t] * Cos[θ[t]] * Sin[φ[t]], R[t] * Sin[θ[t]]}]
            косинус      косинус        косинус       синус          синус
```

$$\begin{pmatrix} -R0\,\omega \,\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega] - R0\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ R0\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] - R0\,\omega\,\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ R0\,\omega\,\text{Cos}[t\,\omega] \end{pmatrix}$$

<< Находим J^{-1} >>

```
MatrixForm[FullSimplify[Inverse[
матричная ⋯ упростить в по⋯ обратная матрица
```

$$\left.\left.\left.\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta[t]]\,\text{Cos}[\varphi[t]] & -\text{Cos}[\varphi[t]]\,R[t]\,\text{Sin}[\theta[t]] & -\text{Cos}[\theta[t]]\,R[t]\,\text{Sin}[\varphi[t]] \\ \text{Cos}[\theta[t]]\,\text{Sin}[\varphi[t]] & -R[t]\,\text{Sin}[\theta[t]]\,\text{Sin}[\varphi[t]] & \text{Cos}[\theta[t]]\,\text{Cos}[\varphi[t]]\,R[t] \\ \text{Sin}[\theta[t]] & \text{Cos}[\theta[t]]\,R[t] & 0 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$$

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] & \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] & \text{Sin}[t\,\omega] \\ -\frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega]}{R0} & -\frac{\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{R0} & \frac{\text{Cos}[t\,\omega]}{R0} \\ -\frac{\text{Sec}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{R0} & \frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sec}[t\,\omega]}{R0} & 0 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[FullSimplify[
матричная ⋯ упростить в полном объёме

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] & \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] & \text{Sin}[t\,\omega] \\ -\frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega]}{R0} & -\frac{\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{R0} & \frac{\text{Cos}[t\,\omega]}{R0} \\ -\frac{\text{Sec}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{R0} & \frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sec}[t\,\omega]}{R0} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\left.\begin{pmatrix} -R0\,\omega \,\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega] - R0\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ R0\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] - R0\,\omega\,\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ R0\,\omega\,\text{Cos}[t\,\omega] \end{pmatrix}\right]\right]$$

<< Получаем скорости в неподвижной декартовой СК $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} v_\varphi \\ v_\theta \\ v_R \end{pmatrix}$ >>

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix}$$

<< А теперь найдем ускорения,
как вторые производные по времени $X_t'' = a_{x[t]}$, $Y_t'' = a_{y[t]}$, $Z_t'' = a_{z[t]}$ >>

```
MatrixForm[FullSimplify[
матричная ⋯ упростить в полном объёме
 ∂t,t {R[t] * Cos[θ[t]] * Cos[φ[t]], R[t] * Cos[θ[t]] * Sin[φ[t]], R[t] * Sin[θ[t]]}]]
              косинус      косинус        косинус       синус          синус
```

$$\begin{pmatrix} -R0\,(\omega^2+\Omega^2)\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] + 2\,R0\,\omega\,\Omega\,\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ -R0\,\left(2\,\omega\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega] + (\omega^2+\Omega^2)\,\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]\right) \\ -R0\,\omega^2\,\text{Sin}[t\,\omega] \end{pmatrix}$$

<< Запишем ускорения в неподвижной декартовой СК $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} a_\varphi \\ a_\theta \\ a_R \end{pmatrix}$ >>

$$\text{MatrixForm}\left[\text{FullSimplify}\left[\begin{pmatrix} \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] & \text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] & \text{Sin}[t\,\omega] \\ -\frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega]}{\text{R0}} & -\frac{\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{\text{R0}} & \frac{\text{Cos}[t\,\omega]}{\text{R0}} \\ -\frac{\text{Sec}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]}{\text{R0}} & \frac{\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sec}[t\,\omega]}{\text{R0}} & 0 \end{pmatrix}.\right.\right.$$

матричная ⋯ упростить в полном объёме

$$\left.\left.\begin{pmatrix} -\text{R0}\left(\omega^2+\Omega^2\right)\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Cos}[t\,\Omega] + 2\,\text{R0}\,\omega\,\Omega\,\text{Sin}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega] \\ -\text{R0}\left(2\,\omega\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\,\text{Sin}[t\,\omega] + \left(\omega^2+\Omega^2\right)\text{Cos}[t\,\omega]\,\text{Sin}[t\,\Omega]\right) \\ -\text{R0}\,\omega^2\,\text{Sin}[t\,\omega] \end{pmatrix}\right]\right]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\text{R0}\left(2\,\omega^2+\Omega^2+\Omega^2\,\text{Cos}[2\,t\,\omega]\right) \\ \frac{1}{2}\,\Omega^2\,\text{Sin}[2\,t\,\omega] \\ -2\,\omega\,\Omega\,\text{Tan}[t\,\omega] \end{pmatrix}$$

<< Задача 1.2 .2 >>

Условие:

2. Точка равномерно движется в неподвижной двумерной декартовой системе координат. Каковы ее скорость и ускорение в равномерно вращающейся декартовой системе координат? Каковы эти скорости и ускорения в трехмерном случае? Чему равны ее Кориолисово и центробежное ускорения.

Решение :

<< Рассмотрим выражение для координат в двумерном случае >>

```
X[t_] := Cos[ϕ[t]] ξ[t] - Sin[ϕ[t]] η[t]
```
косинус синус

```
Y[t_] := Sin[ϕ[t]] ξ[t] + Cos[ϕ[t]] η[t]
```
синус косинус

```
ϕ[t_] := Ω t
ξ[t_] := ξ0 + vξ t
η[t_] := η0 + vη t
```

<< Рассмотрим скорости в двумерном случае >>

```
Vx = ∂t X[t]
vy = ∂t Y[t]
```

$-\mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\eta'[t] + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\xi'[t] - \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\eta[t]\,\phi'[t] - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\xi[t]\,\phi'[t]$

$\mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\eta'[t] + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\xi'[t] - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\eta[t]\,\phi'[t] + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\xi[t]\,\phi'[t]$

<< Теперь рассмотрим ускорения в двумерном случае >>

```
ax = ∂t,t X[t]
```

$-2\,\mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\eta'[t]\,\phi'[t] - 2\,\mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\xi'[t]\,\phi'[t] + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\eta[t]\,\phi'[t]^2 - \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\xi[t]\,\phi'[t]^2 - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\eta''[t] + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\xi''[t] - \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\eta[t]\,\phi''[t] - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\xi[t]\,\phi''[t]$

```
ay = ∂t,t Y[t]
```

$-2\,\mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\eta'[t]\,\phi'[t] + 2\,\mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\xi'[t]\,\phi'[t] - \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\eta[t]\,\phi'[t]^2 - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\xi[t]\,\phi'[t]^2 + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\eta''[t] + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\xi''[t] - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\eta[t]\,\phi''[t] + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\xi[t]\,\phi''[t]$

<< Получим Кориолисово ускорение в 2 d – случае >>

$$\mathrm{MatrixForm}\left[\mathrm{FullSimplify}\left[2\,\partial_t\begin{pmatrix}\mathrm{Cos}[\phi[t]] & -\mathrm{Sin}[\phi[t]]\\ \mathrm{Sin}[\phi[t]] & \mathrm{Cos}[\phi[t]]\end{pmatrix}.\partial_t\begin{pmatrix}\xi_0 + v_\xi\, t\\ \eta_0 + v_\eta\, t\end{pmatrix}\right]\right]$$

матричная ··· упростить в полном объёме

$$\begin{pmatrix}-2\,(\mathrm{Cos}[\phi[t]]\,v_\eta + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,v_\xi)\,\phi'[t]\\ 2\,(-\mathrm{Sin}[\phi[t]]\,v_\eta + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,v_\xi)\,\phi'[t]\end{pmatrix}$$

<< Теперь запишем центробежное ускорение в 2 d – случае >>

$$\mathrm{MatrixForm}\left[\mathrm{FullSimplify}\left[\partial_{t,t}\begin{pmatrix}\mathrm{Cos}[\phi[t]] & -\mathrm{Sin}[\phi[t]]\\ \mathrm{Sin}[\phi[t]] & \mathrm{Cos}[\phi[t]]\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\xi_0 + v_\xi\, t\\ \eta_0 + v_\eta\, t\end{pmatrix}\right]\right]$$

матричная ··· упростить в полном объёме

$$\left(\begin{matrix}(t\,v_\eta + \eta_0)\,(\mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\phi'[t]^2 - \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\phi''[t]) - (t\,v_\xi + \xi_0)\,(\mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\phi'[t]^2 + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\phi\\ (t\,v_\xi + \xi_0)\,(-\mathrm{Sin}[\phi[t]]\,\phi'[t]^2 + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\phi''[t]) - (t\,v_\eta + \eta_0)\,(\mathrm{Cos}[\phi[t]]\,\phi'[t]^2 + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\end{matrix}\right.$$

<< Теперь запишем выражение для координат в трехмерном случае >>

```
x[t_] := Cos[ϕ[t]] ξ[t] - Sin[ϕ[t]] η[t]
         косинус          синус
y[t_] := Sin[ϕ[t]] ξ[t] + Cos[ϕ[t]] η[t]
         синус            косинус
z[t_] := ς[t]

ϕ[t_] := Ω t
ξ[t_] := ξ0 + vξ t
η[t_] := η0 + vη t
ς[t_] := ς0 + vς t
```

<< Запишем скорости в 3 d – случае >>

$v_x = \partial_t x[t]$
$v_y = \partial_t y[t]$
$v_z = \partial_t z[t]$

$-\mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,v_\eta + \mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,v_\xi - \Omega\,\mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,(t\,v_\eta + \eta_0) - \Omega\,\mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,(t\,v_\xi + \xi_0)$

$\mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,v_\eta + \mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,v_\xi - \Omega\,\mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,(t\,v_\eta + \eta_0) + \Omega\,\mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,(t\,v_\xi + \xi_0)$

v_ς

<< Теперь запишем ускорния в 3 d – случае >>

$a_x = \partial_{t,t} x[t]$
$a_y = \partial_{t,t} y[t]$
$a_z = \partial_{t,t} z[t]$

$-2\,\Omega\,\mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,v_\eta - 2\,\Omega\,\mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,v_\xi + \Omega^2\,\mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,(t\,v_\eta + \eta_0) - \Omega^2\,\mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,(t\,v_\xi + \xi_0)$

$-2\,\Omega\,\mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,v_\eta + 2\,\Omega\,\mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,v_\xi - \Omega^2\,\mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,(t\,v_\eta + \eta_0) - \Omega^2\,\mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,(t\,v_\xi + \xi_0)$

0

<< Теперь получим Кориолисово ускорение в 3 d – случае >>

$$\mathrm{MatrixForm}\left[\mathrm{FullSimplify}\left[2\,\partial_t \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\phi[t]] & -\mathrm{Sin}[\phi[t]] & 0 \\ \mathrm{Sin}[\phi[t]] & \mathrm{Cos}[\phi[t]] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \partial_t \begin{pmatrix} \xi_0 + v_\xi\,t \\ \eta_0 + v_\eta\,t \\ \varsigma_0 + v_\varsigma\,t \end{pmatrix}\right]\right]$$

матричная ⋯ упростить в полном объёме

$$\begin{pmatrix} -2\,\Omega\,(\mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,v_\eta + \mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,v_\xi) \\ -2\,\Omega\,\mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,v_\eta + 2\,\Omega\,\mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,v_\xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

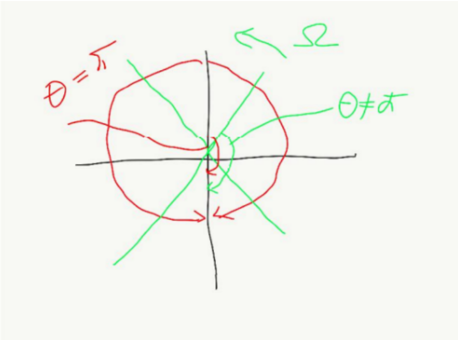
<< А также получим центробежное ускорение в 3 d – случае >>

$$\mathrm{MatrixForm}\left[\mathrm{FullSimplify}\left[\partial_{t,t} \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\phi[t]] & -\mathrm{Sin}[\phi[t]] & 0 \\ \mathrm{Sin}[\phi[t]] & \mathrm{Cos}[\phi[t]] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \xi_0 + v_\xi\,t \\ \eta_0 + v_\eta\,t \\ \varsigma_0 + v_\varsigma\,t \end{pmatrix}\right]\right]$$

матричная ⋯ упростить в полном объёме

$$\begin{pmatrix} \Omega^2\,(\mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,(t\,v_\eta + \eta_0) - \mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,(t\,v_\xi + \xi_0)) \\ \Omega^2\,(-\mathrm{Cos}[t\,\Omega]\,(t\,v_\eta + \eta_0) - \mathrm{Sin}[t\,\Omega]\,(t\,v_\xi + \xi_0)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

<< Задача 1.2 .5 >>



Условие :

5. Рабста лазерного гироскопа - прибора определяющего угловую скорость вращения системы отсчета - очень понятна в системе отсчета неподвижной. В самой упрощенной формулировке она сводится к следующему. Два импульса света испускаются в противоположные стороны из одной точки закрепленного во вращающейся системе волновода, имеющего форму кольца радиуса ρ с центром на оси вращения, и регистрируется момент

их встречи на противоположной стороне кольца. В неподвижной системе отсчета, угол испускания и угол встречи разнесены по окружности ровно на величину π.

Однако вращающаяся система успевает повернуться за время распространения импульсов, и поэтому угол встречи импульсов в ней отличается на величину произведения ее угловой скорости на время распространения импульсов до момента их встречи. Рассмотреть этот процесс во вращающейся системе отсчета. Найти преобразование координат и времени при переходе во вращающуюся полярную систему отсчета. Найти матрицу Якоби для такого преобразования пространства-времени. Найти метрический тензор. Обратить внимание на присутствие в нем недиагональных матричных элементов. Найти соотношения времени и угла поворота следующие из условия равенства нулю интервала для событий лежащих на световом конусе. Найти угол, на котором происходит встреча сигналов во вращающейся системе отсчета.

<< Положим η -> p Sin[ϕ], ξ -> p Cos[ϕ] >>
синус косинус

x = p Cos[ϕ + Ω τ]
косинус

y = p Sin[ϕ + Ω τ]
синус

z = ζ
t = τ

p Cos[ϕ + τ Ω]

p Sin[ϕ + τ Ω]

ζ

τ

<< Запишем матрицу Якоби для данного преобразования >>

$$J = \begin{pmatrix} \partial_p x & \partial_\phi x & \partial_\xi x & \partial_\tau x \\ \partial_p y & \partial_\phi y & \partial_\xi y & \partial_\tau y \\ \partial_p z & \partial_\phi z & \partial_\xi z & \partial_\tau z \\ \partial_p t & \partial_\phi t & \partial_\xi t & \partial_\tau t \end{pmatrix}$$

```
{{Cos[ϕ + τ Ω], -p Sin[ϕ + τ Ω], 0, -p Ω Sin[ϕ + τ Ω]},
 {Sin[ϕ + τ Ω], p Cos[ϕ + τ Ω], 0, p Ω Cos[ϕ + τ Ω]}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

MatrixForm[J]
матричная форма

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\phi+\tau\Omega] & -p\,\mathrm{Sin}[\phi+\tau\Omega] & 0 & -p\,\Omega\,\mathrm{Sin}[\phi+\tau\Omega] \\ \mathrm{Sin}[\phi+\tau\Omega] & p\,\mathrm{Cos}[\phi+\tau\Omega] & 0 & p\,\Omega\,\mathrm{Cos}[\phi+\tau\Omega] \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<< В силу инвариантности интервала в релятивистской системе отсчета, выражаем его >>

<< $ds^2 = dl^2 - c^2 dt^2 = \begin{pmatrix} dx & dy & dz & dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{pmatrix}$ **– общий случай >>**

$ds^2 = \begin{pmatrix} dx & dy & dz & dt \end{pmatrix} J^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{pmatrix}$ **– << Случай нашей СК >>**

<< Запишем метрический тензор >>

$$Mt = \mathrm{FullSimplify}\left[\mathrm{Transpose}[J].\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}.J\right]$$

упростить в по··· транспозиция

$$\{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, p^2, 0, p^2\Omega\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, p^2\Omega, 0, -c^2 + p^2\Omega^2\}\}$$

MatrixForm[Mt]
матричная форма

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & 0 & p^2\Omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p^2\Omega & 0 & -c^2 + p^2\Omega^2 \end{pmatrix}$$

<< Положим $\Delta\phi$ – как отклонение угла от точки приема сигнала >>

<< Запишем интервал >>

$$\mathrm{FullSimplify}\left[\{0, \Delta\phi, 0, \Delta\tau\}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & 0 & p^2\Omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p^2\Omega & 0 & -c^2 + p^2\Omega^2 \end{pmatrix}.\{0, \Delta\phi, 0, \Delta\tau\}\right]$$

упростить в полном объёме

$$-c^2\Delta\tau^2 + p^2(\Delta\phi + \Delta\tau\,\Omega)^2$$

<< Интервал обязан быть равен 0, поскольку мы работаем со светом >>

<< Теперь найдем значние $\Delta\phi$ >>

$\text{Solve}\left[-c^2\,\Delta\tau^2 + p^2\,(\Delta\phi + \Delta\tau\,\Omega)^2 == 0,\ \Delta\phi\right]$
решить уравнения

$\left\{\left\{\Delta\phi \to -\frac{\Delta\tau\,(-c + p\,\Omega)}{p}\right\},\ \left\{\Delta\phi \to \frac{-c\,\Delta\tau - p\,\Delta\tau\,\Omega}{p}\right\}\right\}$

<< Поскольку произошла встреча двух сигналов, то угол между ними равняется 2 π >>

<< Далее, находим значение $\Delta\tau$ >>

$\text{Solve}\left[\frac{-c\,\Delta\tau - p\,\Delta\tau\,\Omega}{p} - \left(-\frac{\Delta\tau\,(-c + p\,\Omega)}{p}\right) == 2\,\pi,\ \Delta\tau\right]$
решить уравнения

$\left\{\left\{\Delta\tau \to -\frac{p\,\pi}{c}\right\}\right\}$

<< Теперь для нахождения $\Delta\phi$ остается подставить $\Delta\tau$ в уравнение >>

$\text{Simplify}\left[\left\{\left\{\Delta\phi \to -\frac{\Delta\tau\,(-c + p\,\Omega)}{p}\right\},\ \left\{\Delta\phi \to \frac{-c\,\Delta\tau - p\,\Delta\tau\,\Omega}{p}\right\}\right\}\ /.\ \Delta\tau \to -\frac{p\,\pi}{c}\right]$
упростить

$\left\{\left\{\Delta\phi \to \pi\left(-1 + \frac{p\,\Omega}{c}\right)\right\},\ \left\{\Delta\phi \to \pi + \frac{p\,\pi\,\Omega}{c}\right\}\right\}$

<< Задача 1.2 .7 >>

Условие:

7. Проинтегрировать уравнения движения маятника Фуко $\ddot{x} = -kx + \Omega\dot{y}$, $\ddot{y} = -ky - \Omega\dot{x}$. Найти тангенциальные и нормальное ускорения.

Решение :

<< Распишем данные уравнения ускорений по координатам от времени >>

$$\partial_{t,t}x[t] = -\kappa\, x[t] + \Omega\, \partial_t\, y[t]$$
$$\partial_{t,t}y[t] = -\kappa\, y[t] - \Omega\, \partial_t\, x[t]$$

$$-\kappa\, x[t] + \Omega\, y'[t]$$

$$-\kappa\, y[t] - \Omega\, x'[t]$$

<< Для нахождения уравнения движения, проинтегрируем уравнения, записанные выше, тем самым происходит переход к решению дифуров >>

```
FullSimplify[DSolve[{∂t,t x[t] == -κ x[t] + Ω ∂t y[t], ∂t,t y[t] == -κ y[t] - Ω ∂t x[t],
```
упростить в по··· решить дифференциальные уравнения
```
   x[0] == x0, y[0] == 0, x'[0] == 0, y'[0] == v0}, {x[t], y[t]}, t]]
```

$$\Bigg\{\Bigg\{x[t] \to \frac{1}{2\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\Bigg(\left(-2\,v0\,\Omega + x0\left(-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\Big[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Big] + \left(2\,v0\,\Omega + x0\left(\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\Big[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Big]\Bigg),\ y[t] \to$$
$$\frac{\dfrac{\left(-2\,x0\,\kappa\,\Omega+v0\left(\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\Big[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Big]}{\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}} + \dfrac{\left(2\,x0\,\kappa\,\Omega+v0\left(-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\Big[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Big]}{\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}}{\sqrt{2}\,\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\Bigg\}\Bigg\}$$

DSolve[{True, True, x0 == x[0], y[0] == 0, x′[0] == 0, v0 == y′[0]},
решить··· ист··· истина

$$\left\{\frac{1}{2\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\left(\left(-2\,v0\,\Omega + x0\left(-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right] + \left(2\,v0\,\Omega + x0\left(\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]\right),\right.$$

гиперболический косинус гиперболический косинус

$$\left.\frac{\frac{\left(-2\,x0\,\kappa\,\Omega+v0\left(\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\left[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]}{\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}+\frac{\left(2\,x0\,\kappa\,\Omega+v0\left(-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\left[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]}{\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}}{\sqrt{2}\,\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\right\},$$

t]

<< Получаем уравнения движения Маятника Фуко >>

$$x[t]=\left(\left(-2\,v0\,\Omega+x0\left(-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]+\right.$$

гиперболический косинус

$$\left.\left(2\,v0\,\Omega+x0\left(\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]\right)\Big/\left(2\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)$$

гиперболический косинус

$$y[t]=\left(\left(\left(-2\,x0\,\kappa\,\Omega+v0\left(\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]\right)\Big/\right.$$

гиперболический синус

$$\left(\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}\right)+$$

$$\left(\left(2\,x0\,\kappa\,\Omega+v0\left(-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]\right)\Big/$$

гиперболический синус

$$\left.\left(\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}\right)\right)\Big/\left(\sqrt{2}\,\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)$$

$$\left(\left(-2\,v0\,\Omega+x0\left(-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]+\right.$$

$$\left.\left(2\,v0\,\Omega+x0\left(\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]\right)\Big/\left(2\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)$$

$$\left(\left(\left(-2\,x0\,\kappa\,\Omega+v0\left(\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]\right)\Big/\right.$$

$$\left(\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}\right)+$$

$$\left(\left(2\,x0\,\kappa\,\Omega+v0\left(-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]\right)\Big/$$

$$\left.\left(\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}\right)\right)\Big/\left(\sqrt{2}\,\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)$$

<< Корень из суммы квадратов скоростей по осям X и Y будет полной скоростью маятника Фуко. Найдем ее >>

```
V = FullSimplify[√((∂t x[t])^2 + (∂t y[t])^2)]
```

упростить в полном объёме

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\left(\left(\left(-2\,x0\,\kappa\,\Omega+v0\left(\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]+\left(2\,x0\,\kappa\,\Omega+v0\left(-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\left(-2\,v0\,\Omega+x0\left(-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\left(-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)}\right]+\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\left(2\,v0\,\Omega+x0\left(\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\left(-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\right)}\right]\right)^2\right)\right)}$$

**<< Для нахождения тангенциальное ускорения воспользуемся тем,
что оно равно производной модуля вектора скорости
(т. е. полной скорости) по времени,
поскольку оно отвечает за приращение скорости за промежуток времени,
то есть изменение величины скорости >>**

Atan = FullSimplify[∂_t V]

упростить в полном объё

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\Omega^2\left(v0^2 - x0^2\,\kappa + v0\,x0\,\Omega\right)\Bigg(\sqrt{-2\,\kappa - \Omega^2 - \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}}\;\left(4\,\kappa + \Omega^2 - \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}\right) \\
&\quad \mathrm{Cosh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa - \Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]\mathrm{Sinh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa - \Omega^2 - \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right] + \\
&\quad \sqrt{-2\,\kappa - \Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}}\;\left(4\,\kappa + \Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa - \Omega^2 - \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right] \\
&\quad \mathrm{Sinh}\left[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa - \Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}}}{\sqrt{2}}\right]\Bigg)\Bigg) \Bigg/ \Bigg(\sqrt{2}\,\left(4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4\right)\sqrt{\Bigg(\frac{1}{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}} \\
&\quad \Bigg(\Bigg(\left(-2\,x0\,\kappa\,\Omega + v0\left(\Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\left(-2\,\kappa - \Omega^2 - \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}\right)}\right] + \\
&\qquad \left(2\,x0\,\kappa\,\Omega + v0\left(-\Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\left(-2\,\kappa - \Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}\right)}\right]\Bigg)^2 + \\
&\quad \frac{1}{2}\Bigg(\sqrt{-2\,\kappa - \Omega^2 - \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}}\;\left(-2\,v0\,\Omega + x0\left(-\Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}\right)\right) \\
&\qquad \mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\left(-2\,\kappa - \Omega^2 - \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}\right)}\right] + \sqrt{-2\,\kappa - \Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}} \\
&\qquad \left(2\,v0\,\Omega + x0\left(\Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\left(-2\,\kappa - \Omega^2 + \sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2 + \Omega^4}\right)}\right]\Bigg)^2\Bigg)\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

<< По аналогии с тем, что уже делали :
полное ускорение маятника Фуко – это корень из суммы квадратов ускорений по осям X и Y >>

```
Afull = FullSimplify[√((∂t,t x[t])^2 + (∂t,t y[t])^2)]
```

упростить в полном объёме

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\left(\frac{1}{4}\left(\left(2\,\kappa+\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\left(-2\,\mathrm{v0}\,\Omega+\mathrm{x0}\left(-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\right.\right.\right.}\\
&\quad \mathrm{Cosh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\left(-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)}\right]-\left(-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\\
&\quad \left.\left(2\,\mathrm{v0}\,\Omega+\mathrm{x0}\left(\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Cosh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\left(-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)}\right]\right)^2+\\
&\quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}\left(-2\,\mathrm{x0}\,\kappa\,\Omega+\mathrm{v0}\left(\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\right.\\
&\quad \mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\left(-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)}\right]+\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}\\
&\quad \left.\left.\left.\left(2\,\mathrm{x0}\,\kappa\,\Omega+\mathrm{v0}\left(-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\left(-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)}\right]\right)^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

<< Для построения ускорения можно воспользоваться теоремой Пифагора из курса школьной геометрии. Тогда тангенциальное и нормальное ускорение – это катеты, а полное ускорение – гипотенуза : Anorm^2 + Atan^2 = A^2 , таким образом находим нормальное ускорение >>

```
Anorm = √((Afull)^2 - (Atan)^2)
```

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\Bigg(\frac{1}{4\left(4\kappa\Omega^2+\Omega^4\right)}\Bigg(\frac{1}{4}\Bigg(\Big(\Big(2\kappa+\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\Big(-2\,\mathrm{v0}\,\Omega+\mathrm{x0}\Big(-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\Big)\Big.\Big.\Big.\Big.}\\
&\qquad\mathrm{Cosh}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\Big(-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)}\Big]-\Big(-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\\
&\qquad\Big(2\,\mathrm{v0}\,\Omega+\mathrm{x0}\Big(\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\Big)\,\mathrm{Cosh}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\Big(-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)}\Big]\Big)^2+\\
&\quad\frac{1}{2}\Big(\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\Big(-2\,\mathrm{x0}\,\kappa\,\Omega+\mathrm{v0}\Big(\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\Big)\\
&\qquad\mathrm{Sinh}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\Big(-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)}\Big]+\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\\
&\qquad\Big(2\,\mathrm{x0}\,\kappa\,\Omega+\mathrm{v0}\Big(-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\Big)\,\mathrm{Sinh}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\Big(-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)}\Big]\Big)^2\Bigg)-\\
&\ \Big(\Omega^4\left(\mathrm{v0}^2-\mathrm{x0}^2\kappa+\mathrm{v0}\,\mathrm{x0}\,\Omega\right)^2\Big(\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\Big(4\kappa+\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\\
&\qquad\mathrm{Cosh}\Big[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Big]\,\mathrm{Sinh}\Big[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Big]+\\
&\quad\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\Big(4\kappa+\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\\
&\qquad\mathrm{Cosh}\Big[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Big]\\
&\qquad\mathrm{Sinh}\Big[\frac{t\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Big]\Big)^2\Big)\Big/\Big(2\left(4\kappa\Omega^2+\Omega^4\right)\\
&\quad\Big(\Big(\Big(-2\,\mathrm{x0}\,\kappa\,\Omega+\mathrm{v0}\Big(\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\Big)\,\mathrm{Cosh}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\Big(-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)}\Big]+\\
&\qquad\Big(2\,\mathrm{x0}\,\kappa\,\Omega+\mathrm{v0}\Big(-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\Big)\,\mathrm{Cosh}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\Big(-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)}\Big]\Big)^2+\\
&\quad\frac{1}{2}\Big(\sqrt{-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\Big(-2\,\mathrm{v0}\,\Omega+\mathrm{x0}\Big(-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\Big)\\
&\qquad\mathrm{Sinh}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\Big(-2\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)}\Big]+\sqrt{-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}}\\
&\qquad\Big(2\,\mathrm{v0}\,\Omega+\mathrm{x0}\Big(\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)\Big)\,\mathrm{Sinh}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}t\sqrt{\Big(-2\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\kappa\Omega^2+\Omega^4}\Big)}\Big]\Big)^2\Big)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

<< Наконец-то построим траекторию нашего маятника >>

$$\text{ParametricPlot}\Bigg[\Bigg\{\Bigg(\left(-2\,\text{v0}\,\Omega+\text{x0}\left(-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\text{Cosh}\Bigg[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Bigg]+\left(2\,\text{v0}\,\Omega+\text{x0}\left(\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\text{Cosh}\Bigg[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Bigg]\Bigg)\Big/\left(2\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right),$$

$$\Bigg(\Bigg(\left(-2\,\text{x0}\,\kappa\,\Omega+\text{v0}\left(\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\text{Sinh}\Bigg[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Bigg]\Bigg)\Big/\left(\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2-\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}\right)+\Bigg(\left(2\,\text{x0}\,\kappa\,\Omega+\text{v0}\left(-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\right)\text{Sinh}\Bigg[\frac{t\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}}{\sqrt{2}}\Bigg]\Bigg)\Big/\left(\sqrt{-2\,\kappa-\Omega^2+\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}}\right)\Bigg)\Big/$$

$$\left(\sqrt{2}\sqrt{4\,\kappa\,\Omega^2+\Omega^4}\right)\Bigg\}\;/.\;\{\text{x0}\to 1,\ \kappa\to 1,\ \Omega\to\pi,\ \text{v0}\to 1\},\ \{t,\ 0,\ 300\}\Bigg]$$

график параметрически заданной области на плоскости

гиперболический косинус

гиперболический синус