<< Задача 1.2 .2 >>

Условие:

2. Точка равномерно движется в неподвижной двумерной декартовой системе координат. Каковы ее скорость и ускорение в равномерно вращающейся декартовой системе координат? Каковы эти скорости и ускорения в трехмерном случае? Чему равны ее Кориолисово и центробежное ускорения.

Решение :

<< Рассмотрим выражение для координат в двумерном случае >>

```
X[t_] := Cos[ϕ[t]] ξ[t] - Sin[ϕ[t]] η[t]
         косинус          синус
Y[t_] := Sin[ϕ[t]] ξ[t] + Cos[ϕ[t]] η[t]
         синус            косинус
```

$\phi[t\_] := \Omega\, t$

$\xi[t\_] := \xi_0 + v_\xi\, t$

$\eta[t\_] := \eta_0 + v_\eta\, t$

<< Рассмотрим скорости в двумерном случае >>

$V_x = \partial_t X[t]$

$v_y = \partial_t Y[t]$

$-\mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \eta'[t] + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \xi'[t] - \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \eta[t]\, \phi'[t] - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \xi[t]\, \phi'[t]$

$\mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \eta'[t] + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \xi'[t] - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \eta[t]\, \phi'[t] + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \xi[t]\, \phi'[t]$

<< Теперь рассмотрим ускорения в двумерном случае >>

$a_x = \partial_{t,t} X[t]$

$-2\,\mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \eta'[t]\, \phi'[t] - 2\,\mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \xi'[t]\, \phi'[t] + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \eta[t]\, \phi'[t]^2 - \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \xi[t]\, \phi'[t]^2 - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \eta''[t] + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \xi''[t] - \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \eta[t]\, \phi''[t] - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \xi[t]\, \phi''[t]$

$a_y = \partial_{t,t} Y[t]$

$-2\,\mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \eta'[t]\, \phi'[t] + 2\,\mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \xi'[t]\, \phi'[t] - \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \eta[t]\, \phi'[t]^2 - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \xi[t]\, \phi'[t]^2 + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \eta''[t] + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \xi''[t] - \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \eta[t]\, \phi''[t] + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \xi[t]\, \phi''[t]$

<< Получим Кориолисово ускорение в 2 d – случае >>

$\mathrm{MatrixForm}\Big[\mathrm{FullSimplify}\Big[2\,\partial_t \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\phi[t]] & -\mathrm{Sin}[\phi[t]] \\ \mathrm{Sin}[\phi[t]] & \mathrm{Cos}[\phi[t]] \end{pmatrix} . \partial_t \begin{pmatrix} \xi_0 + v_\xi\, t \\ \eta_0 + v_\eta\, t \end{pmatrix}\Big]\Big]$

матричная ⋯ упростить в полном объёме

$\begin{pmatrix} -2\,(\mathrm{Cos}[\phi[t]]\, v_\eta + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, v_\xi)\, \phi'[t] \\ 2\,(-\mathrm{Sin}[\phi[t]]\, v_\eta + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, v_\xi)\, \phi'[t] \end{pmatrix}$

<< Теперь запишем центробежное ускорение в 2 d – случае >>

$\mathrm{MatrixForm}\Big[\mathrm{FullSimplify}\Big[\partial_{t,t} \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\phi[t]] & -\mathrm{Sin}[\phi[t]] \\ \mathrm{Sin}[\phi[t]] & \mathrm{Cos}[\phi[t]] \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \xi_0 + v_\xi\, t \\ \eta_0 + v_\eta\, t \end{pmatrix}\Big]\Big]$

матричная ⋯ упростить в полном объёме

$\Big((t\, v_\eta + \eta_0)\, (\mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \phi'[t]^2 - \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \phi''[t]) - (t\, v_\xi + \xi_0)\, (\mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \phi'[t]^2 + \mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \phi$

$\Big((t\, v_\xi + \xi_0)\, (-\mathrm{Sin}[\phi[t]]\, \phi'[t]^2 + \mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \phi''[t]) - (t\, v_\eta + \eta_0)\, (\mathrm{Cos}[\phi[t]]\, \phi'[t]^2 + \mathrm{Sin}[\phi[t]]$

<< Теперь запишем выражение для координат в трехмерном случае >>

$$x[t\_] := \text{Cos}[\phi[t]]\,\xi[t] - \text{Sin}[\phi[t]]\,\eta[t]$$

косинус синус

$$y[t\_] := \text{Sin}[\phi[t]]\,\xi[t] + \text{Cos}[\phi[t]]\,\eta[t]$$

синус косинус

$$z[t\_] := \zeta[t]$$

$$\phi[t\_] := \Omega\, t$$
$$\xi[t\_] := \xi_0 + v_\xi\, t$$
$$\eta[t\_] := \eta_0 + v_\eta\, t$$
$$\zeta[t\_] := \zeta_0 + v_\zeta\, t$$

<< Запишем скорости в 3 d – случае >>

$$v_x = \partial_t x[t]$$
$$v_y = \partial_t y[t]$$
$$v_z = \partial_t z[t]$$

$$-\text{Sin}[t\,\Omega]\, v_\eta + \text{Cos}[t\,\Omega]\, v_\xi - \Omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\,(t\, v_\eta + \eta_0) - \Omega\,\text{Sin}[t\,\Omega]\,(t\, v_\xi + \xi_0)$$

$$\text{Cos}[t\,\Omega]\, v_\eta + \text{Sin}[t\,\Omega]\, v_\xi - \Omega\,\text{Sin}[t\,\Omega]\,(t\, v_\eta + \eta_0) + \Omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\,(t\, v_\xi + \xi_0)$$

$$v_\zeta$$

<< Теперь запишем ускорния в 3 d – случае >>

$$a_x = \partial_{t,t} x[t]$$
$$a_y = \partial_{t,t} y[t]$$
$$a_z = \partial_{t,t} z[t]$$

$$-2\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\, v_\eta - 2\,\Omega\,\text{Sin}[t\,\Omega]\, v_\xi + \Omega^2\,\text{Sin}[t\,\Omega]\,(t\, v_\eta + \eta_0) - \Omega^2\,\text{Cos}[t\,\Omega]\,(t\, v_\xi + \xi_0)$$

$$-2\,\Omega\,\text{Sin}[t\,\Omega]\, v_\eta + 2\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\, v_\xi - \Omega^2\,\text{Cos}[t\,\Omega]\,(t\, v_\eta + \eta_0) - \Omega^2\,\text{Sin}[t\,\Omega]\,(t\, v_\xi + \xi_0)$$

$$0$$

<< Теперь получим Кориолисово ускорение в 3 d – случае >>

$$\text{MatrixForm}\left[\text{FullSimplify}\left[2\,\partial_t \begin{pmatrix} \text{Cos}[\phi[t]] & -\text{Sin}[\phi[t]] & 0 \\ \text{Sin}[\phi[t]] & \text{Cos}[\phi[t]] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \partial_t \begin{pmatrix} \xi_0 + v_\xi\, t \\ \eta_0 + v_\eta\, t \\ \zeta_0 + v_\zeta\, t \end{pmatrix}\right]\right]$$

матричная ⋯ упростить в полном объёме

$$\begin{pmatrix} -2\,\Omega\,(\text{Cos}[t\,\Omega]\, v_\eta + \text{Sin}[t\,\Omega]\, v_\xi) \\ -2\,\Omega\,\text{Sin}[t\,\Omega]\, v_\eta + 2\,\Omega\,\text{Cos}[t\,\Omega]\, v_\xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

<< А также получим центробежное ускорение в 3 d – случае >>

$$\text{MatrixForm}\left[\text{FullSimplify}\left[\partial_{t,t} \begin{pmatrix} \text{Cos}[\phi[t]] & -\text{Sin}[\phi[t]] & 0 \\ \text{Sin}[\phi[t]] & \text{Cos}[\phi[t]] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \xi_0 + v_\xi\, t \\ \eta_0 + v_\eta\, t \\ \zeta_0 + v_\zeta\, t \end{pmatrix}\right]\right]$$

матричная ⋯ упростить в полном объёме

$$\begin{pmatrix} \Omega^2\,(\text{Sin}[t\,\Omega]\,(t\, v_\eta + \eta_0) - \text{Cos}[t\,\Omega]\,(t\, v_\xi + \xi_0)) \\ \Omega^2\,(-\text{Cos}[t\,\Omega]\,(t\, v_\eta + \eta_0) - \text{Sin}[t\,\Omega]\,(t\, v_\xi + \xi_0)) \\ 0 \end{pmatrix}$$