

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ И МАШИННАЯ АРИФМЕТИКА

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, глава 2]. Варианты к задачам 1.1-1.10 даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 1.A*.

Пример оформления **отчета** по лабораторной работе приведен в *ПРИЛОЖЕНИИ 1.B*. Вместо Mathcad можно использовать **Python**. После выполнения работы в SmartLMS прикрепляется файл с кодом с расширением **filename.ipynb** и отчет в формате PDF.

Задача 1.1. Дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Найти сумму ряда аналитически. Вычислить значения частичных сумм ряда

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \text{ и найти величину погрешности при значениях } N = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5.$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Найти сумму ряда S аналитически как предел частичных сумм ряда (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ 1.B*).

2. Используя функцию $S(N) = \sum_{n=0}^N a_n$, вычислить значения частичных сумм ряда при указанных значениях N .

3. Для каждого N вычислить величину абсолютной погрешности $|S(N) - S|$ и определить количество верных цифр в $S(N)$.

4. Представить результаты в виде гистограммы.

Задача 1.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. В каждый из диагональных элементов матрицы A по

очереди внести погрешность в 1%. Как изменился определитель матрицы A ? Указать количество верных цифр и вычислить величину относительной погрешности определителя в каждом случае.

Задача 1.3. Для заданной матрицы A найти обратную матрицу (если это возможно). Затем в элемент a_{11} внести погрешность в 10% и снова найти обратную матрицу. Объяснить полученные результаты.

Задача 1.4. Найти ранг заданной матрицы A . Затем внести погрешность в 0.1% а) в элемент a_{11} ; б) во все элементы матрицы и снова найти ранг. Объяснить полученные результаты.

Задача 1.5. Дано квадратное уравнение $x^2 + bx + c = 0$. Предполагается, что один из коэффициентов уравнения (в индивидуальном варианте помечен *) получен в результате округления. Произвести теоретическую оценку погрешностей корней в зависимости от погрешности коэффициента. Вычислить корни уравнения при нескольких различных значениях коэффициента в пределах заданной точности. Сравнить полученные результаты.

Задача 1.6. Для пакета MATHCAD найти значения машинного нуля, машинной бесконечности, машинного эпсилон (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ 1.B*).

Задача 1.7. Вычислить значения машинного нуля, машинной бесконечности, машинного эпсилон в режимах одинарной, двойной и расширенной точности на двух алгоритмических языках. Сравнить результаты.

Задача 1.8. Составить программу, моделирующую вычисления на ЭВМ с ограниченной разрядностью m . Решить задачу 1.1 для случая $N = 10000$, используя эту программу. Составить график зависимости погрешности от количества разрядов $m = 4, 5, \dots, 8$.

Задача 1.9. Для матрицы A решить вопрос о существовании обратной матрицы в следующих случаях:

1) элементы матрицы заданы точно;

2) элементы матрицы заданы приближенно с относительной погрешностью а) $\delta = \alpha\%$ и б) $\delta = \beta\%$.
Найти относительную погрешность результата.

УКАЗАНИЕ. См. ПРИЛОЖЕНИЕ 1.С.

Задача 1.10. Три вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ заданы своими координатами в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Что можно сказать о компланарности этих векторов, если: 1) координаты векторов заданы точно;

2) координаты векторов заданы приближённо с относительной погрешностью а) $\delta = \alpha\%$; б) $\delta = \beta\%$.

УКАЗАНИЕ. См. ПРИЛОЖЕНИЕ 1.С.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.А.

Схема вариантов к лабораторной работе 1

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	1.1.1, 1.2.1, 1.7, 1.6, 1.10.1	16	1.1.16, 1.5.4, 1.7, 1.6, 1.8
2	1.1.2, 1.3.1, 1.7, 1.6, 1.10.2	17	1.1.17, 1.2.5, 1.7, 1.6, 1.8
3	1.1.3, 1.4.1, 1.7, 1.6, 1.10.3	18	1.1.18, 1.3.5, 1.7, 1.6, 1.8
4	1.1.4, 1.5.1, 1.7, 1.6, 1.10.4	19	1.1.19, 1.4.5, 1.7, 1.6, 1.9.1
5	1.1.5, 1.2.2, 1.7, 1.6, 1.10.5	20	1.1.20, 1.5.5, 1.7, 1.6, 1.9.2
6	1.1.6, 1.3.2, 1.7, 1.6, 1.10.6	21	1.1.21, 1.2.6, 1.7, 1.6, 1.9.3
7	1.1.7, 1.4.2, 1.7, 1.6, 1.9.1	22	1.1.22, 1.3.6, 1.7, 1.6, 1.9.4
8	1.1.8, 1.5.2, 1.7, 1.6, 1.9.2	23	1.1.23, 1.4.6, 1.7, 1.6, 1.9.5
9	1.1.9, 1.2.3, 1.7, 1.6, 1.9.3	24	1.1.24, 1.5.6, 1.7, 1.6, 1.9.6
10	1.1.10, 1.3.3, 1.7, 1.6, 1.9.4	25	1.1.25, 1.2.1, 1.7, 1.6, 1.10.1
11	1.1.11, 1.4.3, 1.7, 1.6, 1.9.5	26	1.1.26, 1.3.1, 1.7, 1.6, 1.10.2
12	1.1.12, 1.5.3, 1.7, 1.6, 1.8	27	1.1.27, 1.4.1, 1.7, 1.6, 1.10.3
13	1.1.13, 1.2.4, 1.7, 1.6, 1.8	28	1.1.28, 1.5.1, 1.7, 1.6, 1.10.4
14	1.1.14, 1.3.4, 1.7, 1.6, 1.8	29	1.1.29, 1.2.2, 1.7, 1.6, 1.10.5
15	1.1.15, 1.4.4, 1.7, 1.6, 1.8	30	1.1.30, 1.3.2, 1.7, 1.6, 1.10.6

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 1

Таблица к задаче 1.1

N	a_n	N	a_n	N	a_n
1.1.1	$\frac{2}{n^2 + 5n + 6}$	1.1.11	$\frac{60}{11(n^2 + 12n + 35)}$	1.1.21	$\frac{24}{7(n^2 + 8n + 15)}$
1.1.2	$\frac{36}{11(n^2 + 5n + 4)}$	1.1.12	$\frac{144}{5(n^2 + 6n + 8)}$	1.1.22	$\frac{36}{n^2 + 5n + 4}$
1.1.3	$\frac{9}{n^2 + 7n + 12}$	1.1.13	$\frac{36}{n^2 + 7n + 10}$	1.1.23	$\frac{46}{n^2 + 5n + 6}$
1.1.4	$\frac{48}{5(n^2 + 6n + 8)}$	1.1.14	$\frac{48}{n^2 + 8n + 15}$	1.1.24	$\frac{96}{n^2 + 9n + 20}$
1.1.5	$\frac{48}{5(n^2 + 6n + 5)}$	1.1.15	$\frac{20}{n^2 + 4n + 3}$	1.1.25	$\frac{60}{n^2 + 6n + 8}$
1.1.6	$\frac{72}{5(n^2 + 6n + 8)}$	1.1.16	$\frac{32}{n^2 + 5n + 6}$	1.1.26	$\frac{72}{n^2 + 7n + 10}$

1.1.7	$\frac{24}{n^2 + 8n + 15}$	1.1.17	$\frac{144}{n^2 + 18n + 80}$	1.1.27	$\frac{24}{n^2 + 4n + 3}$
1.1.8	$\frac{32}{n^2 + 9n + 20}$	1.1.18	$\frac{24}{n^2 + 4n + 3}$	1.1.28	$\frac{96}{n^2 + 8n + 15}$
1.1.9	$\frac{216}{7(n^2 + 8n + 15)}$	1.1.19	$\frac{180}{n^2 + 20n + 99}$	1.1.29	$\frac{72}{n^2 + 6n + 8}$
1.1.10	$\frac{84}{13(n^2 + 14n + 48)}$	1.1.20	$\frac{112}{15(n^2 + 16n + 63)}$	1.1.30	$\frac{12}{5(n^2 + 6n + 8)}$

Таблица к задаче 1.2

N	A			N	A			N	A		
1.2.1	3	2	2	1.2.2	30	34	19	1.2.3	1.3	1	13
	33	28	24		314	354	200		3.4	1.4	23
	360	320	270		2	8	13		5	3	1.5
1.2.4	9	5	6	1.2.5	-7	-7	-1	1.2.6	3	1	13
	17	9	11		0	-2	-6		5	3	15
	7	4	5		5	6	4		11	5	40

Таблица к задаче 1.3

N	A			N	A			N	A		
1.3.1	2	16	-6	1.3.2	2	4.4	-2	1.3.3	3	5	3
	3	24	5		1	2	-1		9	15	9
	1	8	11		3	-5	0		6	7	2
1.3.4	48	3	6	1.3.5	2	0.4	6	1.3.6	5	5.5	5.5
	32	2	4		1.1	0.2	3		1	1	1
	5	-1	2		2.3	1.2	4		5	-1	2

Таблица к задаче 1.4

N	A				N	A				N	A			
1.4.1	1.1	0.1	0.8	1.6	1.4.2	0.6	4.5	0.3	3	1.4.3	1.8	4	0	1.9
	1.3	-0.3	1.2	2.1		-2.4	-12	0.9	-7		20.9	37	-25	19.2
	0.9	0.5	0.4	1.1		1.2	9	0.6	6		0.5	3	5	1.1
	-0.4	-3.8	2	1.3		-1.2	3	3.6	4		10.6	16	-20	8.9
1.4.4	2	15	22	7	1.4.5	1.9	9	1.6	0.1	1.4.6	1.2	9	0.6	6
	1	14.1	18.8	2.3		11.3	23	6.8	-3.7		1.6	23	-7.2	9
	2	4	9	9		0.5	10	1.1	1.1		2	4	9	9
	-0.4	2.5	2.1	-2.4		0.9	-11	-0.6	-2.1		2	37	-15	12

Таблица к задаче 1.5

N	Коэффициенты	N	Коэффициенты	N	Коэффициенты
1.5.1	b* = -39.6 c = -716.85	1.5.2	b = 27.4 c* = 187.65	1.5.3	b* = 37.4 c = 187.65
1.5.4	b = -30.9 c* = 238.7	1.5.5	b* = -3.29 c = 2.706	1.5.6	b = -3.29 c* = 2.706

Таблица к задаче 1.9

N	A			α	β	N	A			α	β
1.9.1	31	27	22	0.1	0.4	1.9.2	30	34	19	0.05	0.1
	32.2	28.2	24				31.4	35.4	20		
	36	32	27				24	28	13		

1.9.3	3 1 13 13.4 11.4 23 5 3 15	0.05	0.1	1.9.4	9 5 6 13.5 9.5 11 8 4 5	0.1	0.5
1.9.5	-7 -8 -10 28.6 27.6 25 7 6 4	0.1	0.2	1.9.6	-3 -1 -13 26.8 22.4 46 5 3 15	0.1	0.1

Таблица к задаче 1.10

N	a ₁	a ₂	a ₃	α	β
1.10.1	(10 , 15 , 1)	(0.7, 5.7, -9)	(11, 16, 2)	0.05	0.1
1.10.2	(- 2 , - 5 , 13)	(14.2 , 11.2 , 28)	(0, -3, 15)	0.5	0.1
1.10.3	(24, 28, 13)	(21.1, 25.1, 10)	(18, 22, 7)	0.05	0.01
1.10.4	(9, 17, 1)	(27, 35, -18)	(6, 14, 4)	0.5	0.1
1.10.5	(14, 4, 17)	(33.9, 23.9, 38)	(13, 3, 16)	0.05	0.1
1.10.6	(9, 17, 1)	(27, 35, -18)	(6, 14, 4)	0.5	0.1

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. В

Отчет по лабораторной работе оформляется на листах формата А4. Первый лист - титульный. На нем указываются фамилия студента, номер группы, тема лабораторной работы, номер варианта и номера выполняемых задач.

Ниже приведен пример оформления содержательной части отчета по лабораторной работе 1.

Задача 1.1.0. Постановка задачи: дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2 + 5n + 4}$. Найти сумму ряда S аналитически.

Вычислить значения частичных сумм ряда $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$ и найти величину погрешности при значениях

значениях $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$. Построить гистограмму зависимости верных цифр результата от N .

Аналитическое решение задачи:

$$S_N = \sum_{n=0}^N \frac{72}{n^2 + 5n + 4} = \sum_{n=0}^N \frac{72}{(n+1) \cdot (n+4)} = 72 \cdot \sum_{n=0}^N \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4} \right) =$$

$$= 24 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4} \right),$$

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 44. \quad \text{ОТВЕТ: } S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2 + 5n + 4} = 44.$$

Теоретический материал. Пусть a - точное значение, a^* - приближенное значение некоторой величины.

Абсолютной погрешностью приближенного значения a^* называется величина $\Delta(a^*) = |a - a^*|$.

Относительной погрешностью значения a^* (при $a \neq 0$) называется величина $\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a|}$. Так как

значение a как правило неизвестно, чаще получают оценки погрешностей вида: $|a - a^*| \leq \bar{\Delta}(a^*)$;

$\frac{|a - a^*|}{|a|} \leq \bar{\delta}(a^*)$. Величины $\bar{\Delta}(a^*)$ и $\bar{\delta}(a^*)$ называют верхними границами (или просто границами)

абсолютной и относительной погрешностей.

Значащую цифру числа a^* называют верной, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Введем функцию $S(N) = \sum_{n=0}^N \frac{72}{n^2 + 5n + 4}$. Тогда абсолютную погрешность можно определить с

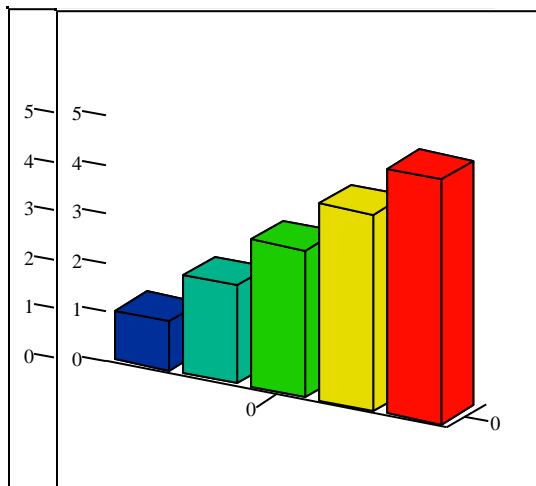
помощью функции $d(N) = |S(N) - S|$.

Результаты вычислительного эксперимента:

Значение частичной погрешности	Величина абсолютной верных цифр	Количество суммы ряда
$S(10)=38.439560439$	$d(10)=5.56$	$M_1 = 1$
$S(100)=43.3009269$	$d(100)=0.699$	$M_2 = 2$
$S(1000)=43.9282153$	$d(1000)=0.072$	$M_3 = 3$
$S(10000)=43.992802$	$d(10000)=0.0072$	$M_4 = 4$
$S(100000)=43.9992802159957$	$d(100000)=0.00072$	$M_5 = 5$

Вывод: Как видно из приведенного вычислительного эксперимента, увеличение числа членов ряда в 10 раз по сравнению с предыдущим случаем увеличивает число верных цифр в ответе на 1.

Гистограмма



М М

Задача 1.6. Постановка задачи: для пакета MATHCAD найти значения машинного нуля, машинной бесконечности, машинного эпсилон.

Теоретический материал. В ЭВМ для вещественных чисел используется двоичная система счисления и принята форма представления чисел с плавающей точкой $x = \mu \cdot 2^p$,

$\mu = \pm(\gamma_1 \cdot 2^{-1} + \gamma_2 \cdot 2^{-2} + \dots + \gamma_t \cdot 2^{-t})$. Здесь μ - мантисса; $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ - двоичные цифры, причем всегда $\gamma_1 = 1$, p - целое число называемое двоичным порядком. Количество t цифр, которое отводится для записи мантиссы, называется разрядностью мантиссы. Диапазон представления чисел в ЭВМ ограничен конечной разрядностью мантиссы и значением числа p . Все представимые числа на ЭВМ удовлетворяют неравенствам: $0 < X_0 \leq |x| < X_\infty$, где $X_0 = 2^{-(p_{\max} + 1)}$, $X_\infty = 2^{p_{\max}}$. Все числа, по модулю большие X_∞ , не представимы на ЭВМ и рассматриваются как машинная бесконечность. Все числа, по модулю меньшие X_0 , для ЭВМ не отличаются от нуля и рассматриваются как машинный нуль. Машинным эpsilon ε_M называется относительная точность ЭВМ, то есть граница относительной погрешности представления чисел в ЭВМ. Покажем, что $\varepsilon_M \approx 2^{-t}$. Пусть $x^* = \mu \cdot 2^p$, тогда граница абсолютной погрешности представления этого числа равна $\bar{\Delta}(x^*) \approx 2^{-t-1} \cdot 2^p$. Поскольку $\frac{1}{2} \leq \mu < 1$, то величина относительной погрешности представления оценивается так:

$$\bar{\delta}(x^*) \approx \frac{\bar{\Delta}(x^*)}{|x^*|} \approx \frac{2^{-t-1} \cdot 2^p}{\mu \cdot 2^p} = \frac{2^{-t-1}}{\mu} \leq \frac{2^{-t-1}}{2^{-1}} = 2^{-t}.$$

Машинное эpsilon определяется разрядностью мантиссы и способом округления чисел, реализованным на конкретной ЭВМ.

Примем следующие способы определения приближенных значений параметров, требуемых в задаче:

1. Положим $X_\infty = 2^n$, где n - первое натуральное число, при котором происходит переполнение.
2. Положим $X_0 = 2^{-m}$, где m - первое натуральное число, при котором 2^{-m} совпадает с нулем.
3. Положим $\varepsilon_M = 2^{-k}$, где k - наибольшее натуральное число, при котором сумма вычисленного значения $1 + 2^{-k}$ еще больше 1. Фактически ε_M есть граница относительной погрешности представления числа $x^* \approx 1$.

Результаты вычислительного эксперимента:

Машинная бесконечность $X_\infty \approx 10^{307}$

Машинный нуль $X_0 \approx 10^{-306}$

Машинное эpsilon $\varepsilon_M \approx 10^{-15}$

Тексты программ:

ЗАДАЧА 1.1.0

ORIGIN :- 1

$$S(N) := \sum_{n=0}^N \frac{72}{n^2 + 5 \cdot n + 4} \quad d(N) := |S(N) - 44|$$

Значение частичной суммы ряда	Величина абсолютной погрешности	Количество верных цифр
S(10) = 38.43956043956044	d(10) = 5.56	M ₁ :- 1
S(100) = 43.30092694284587	d(100) = 0.699	M ₂ :- 2
S(1000) = 43.9282153063675	d(1000) = 0.072	M ₃ :- 3
S(10000) = 43.99280215930432	d(10000) = 7.198•10 ⁻³	M ₄ :- 4
S(100000) = 43.99928002159933	d(100000) = 7.2•10 ⁻⁵	M ₅ :- 5

ЗАДАЧА 1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ

МАШИННАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ inf(n) :- 2ⁿ

МАШИННЫЙ НУЛЬ zero(m) :- 2^{-m}

МАШИННОЕ ЭПСИЛОН eps(k) :- 2^{-k}

$$\text{inf}(1019) = 5.618 \cdot 10^{306} \quad \text{inf}(1020) = 1.124 \cdot 10^{307} \quad \text{inf}(1021) =$$

$$\text{zero}(1019) = 1.78 \cdot 10^{-307} \quad \text{zero}(3020) = 0$$

$$\text{res}(k) := 1 + \text{eps}(k)$$

$$\text{res}(47) = 1.0000000000000007 \quad \text{res}(48) = 1.0000000000000004$$

$$\text{res}(49) = 1.0000000000000002 \quad \text{res}(50) = 1.0000000000000001 \quad \text{res}(51) = 1$$

$$\text{eps}(50) = 8.881784197001252 \cdot 10^{-16}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.С

В задачах 1.9 и 1.10 исходный вопрос решается путем нахождения определителя и сравнения его с нулем. В случае, когда элементы определителя заданы точно, следует вычислить определитель и правильно ответить на поставленный в задаче вопрос.

В случае, когда элементы определителя заданы приближенно с относительной погрешностью δ , дело обстоит сложнее. Пусть элементы матрицы обозначены через a_{ij} . Тогда каждый элемент матрицы a_{ij} теперь уже не равен конкретному значению, а может принимать любое значение из отрезка $[a_{ij}(1 - \delta); a_{ij}(1 + \delta)]$, если $a_{ij} > 0$, и из отрезка $[a_{ij}(1 + \delta); a_{ij}(1 - \delta)]$, если $a_{ij} < 0$. Множество всех возможных значений элементов матрицы представляет собой замкнутое ограниченное множество в 9-мерном пространстве. Сам определитель является непрерывной и дифференцируемой функцией 9 переменных - элементов матрицы a_{ij} . По известной теореме Вейерштрасса эта функция достигает на указанном множестве своего наибольшего и наименьшего значений M и m . Если отрезок $[m, M]$ не

содержит точку 0, то это означает, что при всевозможных допустимых значениях элементов матрицы a_{ij} определитель не обращается в 0. Если же точка 0 принадлежит отрезку $[m, M]$, такое утверждение будет неправомерным. Будет иметь место неопределённость.

Нахождению значений m и M помогают следующие рассуждения. Как функция своих аргументов (элементов матрицы a_{ij}) определитель обладает таким свойством (принцип максимума): эта функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений всегда на границе области. Более того, можно доказать, что эти значения достигаются в точках, координаты которых имеют вид $a_{ij}(1 \pm \delta)$. Таких точек $2^9 = 512$. В каждой из них следует вычислить определитель, а затем выбрать из полученных значений самое большое и самое маленькое. Это и будут числа M и m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.