Mat 1 projekt
Noter

David Diamond Wang Johansen (s214743)

F22

$$
\begin{aligned}
c_{11} + c_{12} &= 5 \\
c_{21} + c_{22} &= 2 \\
c_{11} + c_{21} &= 3 \\
c_{12} + c_{22} &= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}
$$

Figur 3:

$$
\begin{aligned}
c_{11} + c_{12} + c_{13} &= 3 \\
c_{21} + c_{22} + c_{23} &= 5 \\
c_{31} + c_{32} + c_{33} &= 1 \\
c_{11} + c_{21} + c_{31} &= 3 \\
c_{12} + c_{22} + c_{32} &= 3 \\
c_{13} + c_{23} + c_{33} &= 3
\end{aligned}
$$

Figur 4:

$$
\begin{aligned}
c_{11}+c_{12}+c_{13} &= 5\\
c_{21}+c_{22}+c_{23} &= 3\\
c_{31}+c_{32}+c_{33} &= 5\\
c_{11}+c_{21}+c_{31} &= 2\\
c_{12}+c_{22}+c_{32} &= 3\\
c_{13}+c_{23}+c_{33} &= 8\\
c_{21}+c_{12} &= 2\\
c_{31}+c_{22}+c_{13} &= 3\\
c_{32}+c_{23} &= 4\\
c_{12}+c_{23} &= 3\\
c_{11}+c_{22}+c_{33} &= 4\\
c_{21}+c_{32} &= 3
\end{aligned}
$$

Sandsynligheden for at en foton ikke bliver absorperet under antagelse af en binomialfordeling er $(1-p)^n$. Komplementærhændelsen, dvs. at den bliver ramt mindst én gang svarer til at fotonen bliver absorberet, og denne sandsynlighed er netop givet ved $1-(1-p)^n$.

Lad nu $x_1 = x$ være valgt frit, og x_2 udtrykkes nu ved $x_2 = x_1 + \Delta x = x + \Delta x$.

$$\Delta I = I(x+\Delta x) - I(x)$$

$$
\begin{aligned}
\Delta I &= -\mu(x^*)I(x)\Delta x\,,\ x^* \in [x, x+\Delta x]\\
\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x} &= -\mu(x^*)I(x)
\end{aligned}
$$

Lad os nu betragte grænsen:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} -\mu(x^*)I(x)$$

Så ved vi fra definitionen på differentialkvotient, og at x^* bliver 'sammenklemt':

$$I'(x) = -\mu(x)I(x)$$

Dette er en homogen førsteordens lineær differentialligning hvis løsning eksisterer og er entydig givet en begyndelsesværdibetingelse $I(x_0) = I_0$. Vi kender jo initialintensiteten I_0 som netop er intensiteten ved en tilbagelagt afstand på 0 igennem materialet, så vi har $I(0) = I_0$.

Samtlige løsninger er givet ved

$$
\begin{aligned}
I(x) &= ke^{-M(x)}\\
I(0) = ke^{-M(0)} = I_0 \Longrightarrow k &= I_0 e^{M(0)}
\end{aligned}
$$

hvor M opfylder $M'(x) = \mu(x)$. Så

$$I(x) = I_0 e^{-M(x)+M(0)} = I_0 e^{-\int_0^x \mu(z)\,dz}$$

Indsættes $x = L$:

$$\begin{aligned} I_1 = I(L) = e^{-\int_0^L \mu(x)\,dx} &\iff \\ \ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = -\int_0^L \mu(x)\,dx \end{aligned}$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 &\iff \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) =& 0 \iff \\ ax + by = ax_0 + by_0 \end{aligned}$$

I vores tilfælde har vi:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \end{bmatrix}, \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix},$$

indsat fås

$$\ell(\rho, \varphi) : \ \cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y = \rho$$

Parametriseringen ud fra begyndelsesstedvektor og retningsvektor (tværvektor til normalvektoren fra før):

$$\mathbf{r}_\ell(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Med $\mathbf{r}'_\ell(t) = \mathbf{v} = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ bliver Jakobi $\mathbf{J} = |\mathbf{r}'_\ell(t)| = \sqrt{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)} = 1$.

$$\begin{aligned} p_\varphi(\rho) &= \int_{\ell(\rho,\varphi)} f(x, y)\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho\cos(\varphi) - t\sin(\varphi), \rho\sin(\varphi) + t\cos(\varphi))\,dt \end{aligned}$$

$$f(x, y) = \operatorname{rect}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = 1 &\iff \\ \left|\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right| \le \frac{1}{2} &\iff \\ x^2 + y^2 \le 1^2 \end{aligned}$$

Dette er netop uligheden der beskriver enhedsskiven, altså vil funktionen have værdien 1 her og 0 udenfor. På den måde kan man sige at f definerer enhedsskiven idet den kun har 'vægtning' her.

Hvis $|\rho| > 1$ er $p_\varphi(\rho) = 0$ da linjen ligger udenfor cirkelskiven ($|\rho|$ er den mindste afstand til origo). I tilfældet $|\rho| \leq 1$ bestemmer linjeintegralet længden af linjen (linjestykket) der i (x, y)-planet ligger inde i enhedsskiven, da længden af kurven per definition fås ved at sætte $f(x, y) = 1$. Linjeintegralet af $\ell(\rho, \varphi)$ vil være uafhængig af φ da der er komplet symmetri ift. vinklen, da vægtningen er 1 på hele enhedsskiven.

Vi vælger derfor en bekvem vinkel som $\varphi = 0$ og antager $|\rho| \leq 1$. Så fås

$$\begin{aligned} p_0(\rho) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{\sqrt{\rho^2 + t^2}}{2}\right) dt \end{aligned}$$

Vi integrerer linjen over enhedsskiven ved at se på alle $t \in \mathbb{R}$ for hvilke følgende er opfyldt:

$$\begin{aligned} \rho^2 + t^2 \leq 1 &\iff \\ |t| \leq \sqrt{1 - \rho^2} &\iff \\ -\sqrt{1 - \rho^2} \leq t \leq \sqrt{1 - \rho^2} & \end{aligned}$$

Disse to grænser må da være vores integrationsgrænser.

$$\begin{aligned} p_0(\rho) &= \int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} 1\, dt + \int_{\mathbb{R} \setminus \left[-\sqrt{1-\rho^2}, \sqrt{1-\rho^2}\right]} 0\, dt \\ &= 2\sqrt{1 - \rho^2} \end{aligned}$$

Så $p_\varphi(\rho) = 2\sqrt{1 - \rho^2}$, $|\rho| \leq 1$.

Givet $f(x, y) = \operatorname{rect}(x) \operatorname{rect}(y)$. Det bemærkes at dette definerer det akseparallelle enhedskvadrat centreret i origo da $|x| \leq 1/2 \wedge |y| \leq 1/2$. Evalueres $\mathbf{r}_\ell(t)$ i denne med $\varphi = \pi/3$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_\ell(t)) &= \operatorname{rect}(\rho \cos(\pi/3) - t \sin(\pi/3)) \operatorname{rect}(\rho \sin(\pi/3) + t \cos(\pi/3)) \\ &= \operatorname{rect}\left(\frac{\rho}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \operatorname{rect}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho + \frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

Produktet er forskelligt fra 0 hvis og kun hvis begge argumenter har opfylder absolutværdibetingelsen.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\rho}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right| \leq \frac{1}{2} \wedge \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\rho+\frac{t}{2}\right| \leq \frac{1}{2} &\iff \\
\left|\rho-\sqrt{3}t\right| \leq 1 \wedge \left|\sqrt{3}\rho+t\right| \leq 1 &\iff \\
-1 \leq \rho-\sqrt{3}t \leq 1 \wedge -1 \leq \sqrt{3}\rho+t \leq 1 &\iff \\
\frac{-1-\rho}{\sqrt{3}} \leq -t \leq \frac{1-\rho}{\sqrt{3}} \wedge -1-\sqrt{3}\rho \leq t \leq 1-\sqrt{3}\rho &\iff \\
\frac{\rho+1}{\sqrt{3}} \geq t \geq \frac{\rho-1}{\sqrt{3}} \wedge -1-\sqrt{3}\rho \leq t \leq 1-\sqrt{3}\rho &\iff
\end{aligned}
$$

Pga. symmetrien behøver vi kun betragte $\rho \geq 0$, så hvis $\rho < 0$ sættes blot absolutværdi på. En analyse viser at

$$
L = \begin{cases} \frac{(\rho-1)\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{(\rho+1)\sqrt{3}}{3} & 0 \leq \rho < \frac{3\sqrt{3}-3}{12} \\ \frac{(\rho-1)\sqrt{3}}{3} \leq t \leq 1-\sqrt{3}\rho & \frac{3\sqrt{3}-3}{12} \leq \rho \leq \frac{3\sqrt{3}+3}{12} \\ t \in \emptyset & \rho > \frac{3\sqrt{3}+3}{12} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \leq \rho < \frac{3\sqrt{3}-3}{12} &: p_{\pi/3}(\rho) = \int_{\frac{(\rho-1)\sqrt{3}}{3}}^{\frac{(\rho+1)\sqrt{3}}{3}} 1\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\
\frac{3\sqrt{3}-3}{12} \leq \rho \leq \frac{3\sqrt{3}+3}{12} &: p_{\pi/3}(\rho) = \int_{\frac{(\rho-1)\sqrt{3}}{3}}^{1-\sqrt{3}\rho} 1\,dt = 1 + \frac{(1-4\rho)\sqrt{3}}{3} \\
\rho > \frac{3\sqrt{3}+3}{12} &: p_{\pi/3}(\rho) = 0
\end{aligned}
$$