Примена на Мобиусова Трансформација

Елена Тодоровска
Факултет за електротехника и информациски технологии
Куманово, Македонија
e-mail: todorovskae98@gmail.com

Благој Христов
Факултет за електротехника и информациски технологии
Велес, Македонија
e-mail: blhris@gmail.com

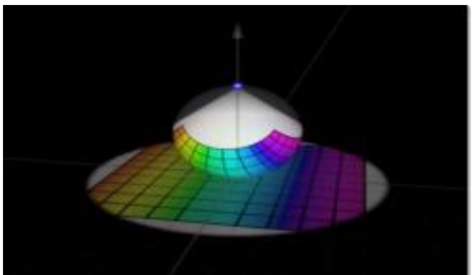
***Апстракт* —Мобиусовите трансформации спаѓаат во фундаменталните типови на пресликувања во геометријата. Дури и најсложените Мобиусови трансформации се прикажуваат, односно се дефинираат со едноставни движења на сферата.**

Клучни зборови – транслација, скалирање, ротација, инверзија, фиксни точки

I. Вовед

Работејќи во теорија на броеви, Август Фердинанд Мобиус, ги осмислил битните математички концепти на Мобиусова трансфромација кои играат важна улога во проективната геометрија и истите имаат широк спектар на употреба од т.н. “brain mapping” до теорија на релативност. Истата може да се сретне под различни имиња: хомографии, хомографски трансформации, линеарни фракциони трансформации, билинеарни трансформации или фракциони линеарни трансформации.

Секоја Мобиусовата трансформација всушност, е составена од едноставни транслации, ротација, рефлексија, скалирање (проширување или стеснување) и инверзија која ја превртува рамнината наопаку и притоа линиите во рамнината или остануваат линии или се трансформираат во кругови, додека правите агли остануваат запазени. Вообичаено, истата, може да биде сложена комбинација од сите наведени дејствија. Првите три се едноставни за опишување, а последната особина-инверзијата е аналогија на рефлексија, само преку круг, а не од линија. Нивните својства на пресликување линии и кругови во линии и кругови, како и пресликување "точка во бесконечност" во конечна точка се користат во комплексна анализа. Вистинската целина за значењето на Мобиусовата трансформација и нејзина употреба во геометријата најубаво се открива со преминување во нова димензија, притоа со употреба на сознанијата допринесени од Бернард Риман, односно со употреба на перспективен приказ на површина на геометриски тела - стереографска проекција на рамнина во сфера (2-сферна единица).



Слика 1: Стереографска проекција на рамнина во сфера

Доколку поставиме сфера над рамнината и замислиме светлина (за полесно објаснување и замислување на целиот процес се користи светлината) која ја поставуваме , така да целосно ја осветли сферната површина преку која ја осветлува рамнината, притоа како што се движи сферата, така ја пратат и точките на рамнината; при транслација на сферата, транслира и рамнината; при завртување на сферата, рамнината ротира; ротација на сферата околу хоризонталната оска допринесува на инверзија на рамнината; со поместување на сферата нагоре/надолу, доведува до проширување/стеснување на самата рамнина. За поубаво разбирање на концептот, погледнето го видеото [1]. Мобиусовите трансформации се проективните трансформации на Римановата сфера и истите формираат група[1], наречена Мобиусова група, која е проективна линеарна група PGL. Заедно со своите подгрупи, има бројни апликации во математиката и физиката. Дури и најсложените Мобиусови трансформации се прикажуваат, односно се дефинираат со едноставни движења на сферата.

II. Дефинирање и равенки

Општиот облик на Мобиусова трансформација е даден со следново равенство:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

каде што a, b, c и d се комплексни броеви за кои важи условот $ad - bc \neq 0$.

Забелешка: Условот $ad - bc \neq 0$ гарантира дека се задоволени следниве услови:

- → Ниту $az+b$, ниту $cz+d$ не исчезнуваат, односно не тежнееат кон 0.
- → a и c неможат истовремено да бидат нула (во тој случај $f(z)$ е константна.
- → b и d неможат истовремено да бидат нула (во тој случај $f(z)$ е константна.
- → Во општ случај, именителот не може да се претстави како производ од некоја константа по броителот:

[1] Во математиката, група е алгебарска структура која се состои од пар елементи снабдени со бинарна операција која ги комбинира двата елемента со цел да се добие трет елемент. За да стане збор за група мора да ги задоволи: својство на асоцијативност, идентитет и постоење на инферзна фунцкија.

Ако $k(az+b)=cz+d$ за некое $k\in\mathbb{C}$, тогаш за коефициентите на равенката добиваме резултат: $ka=c, kb=d$ и $ad-bc=a(kb)-b(ka)=0$.

Според тоа, условот $ad-bc\neq 0$, обезбедува $az+b$ и $cz+d$ да немаат никаков заеднички фактор што ја прави $f(z)$ добро-дефинирана, не-константна, холоморфна функција[2] $\mathbb{P}\to\mathbb{P}$, каде $\mathbb{P}$ е вистински, реален проекционен простор.

Доколку $ad=bc$, претходно дефининираната рационална функција ќе биде константа бидејќи:

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a(cz+d)}{c(cz+d)}=\frac{ad-bc}{c(cz+d)}=\frac{a}{c}$$

а оваа, не е Мобиусова трансформација.

Во случај на $c\neq 0$, оваа дефиниција се проширува на целата Риманова сфера со дефинирање на:

$$f\left(\frac{-d}{c}\right)=\infty \text{ и } f(\infty)=\frac{a}{c}$$

доколку $c=0\to f(\infty)=\infty$.

Оттука, Мобиусовата трансформација секогаш е биективна холоморфна функција од Римановата сфера. Множество од сите Мобиусови трансформации формира група. На таа група може да и биде дадена структура на комплексен манифолд (колекција од точки кои формираат множество) на тој начин што композицијата и инверзијата ќе претставуваат холоморфни пресликувања. Таквата група се нарекува комплексна Lie група (која во геометријата претставува холоморфен комплексно-аналитички манифолд). Нотација на таа група е: Aut($\mathbb{P}$) или Aut($\mathbb{C}$) (во зависност од литературата).

A. *Својства на Мобиусова трансформација*

Лема I: Секоја Мобиусова трансформација претставува состав (композиција) од четири елементарни пресликувања (секоја поединечно претставува Мобиусова трансформација):

a) Транслација, $z\to z+z_0, z_0\in\mathbb{C}$
b) Дилатација, $z\to\lambda z,\ \lambda>0,\ \lambda\in\mathbb{R}$
c) Ротација, $z\to e^{i\theta}z,\ \theta\epsilon\mathbb{R}$
d) Инверзија, $z\to 1/z$

Факти:

- Нека $S\in\mathbb{C}$ е круг. Користејќи ја кореспонденцијата (совпаѓањето) $\mathbb{C}\leftrightarrow\mathbb{P}\backslash\{\infty\}$ дадено од стереографската проекција, S се мапира (пресликува) во круг $S'\subset\mathbb{P}\backslash\{\infty\}$.
- Нека $L\in\mathbb{C}$ е права линија. Користејќи $\mathbb{C}\leftrightarrow\mathbb{P}\backslash\{\infty\}$, L се пресликува во $L'\subset\mathbb{P}$, што всушност низ ∞ претставува круг доколку се отстрани точката во бесконечност. Во спротивно на тоа, доколку $L'\subset\mathbb{P}$ е круг низ ∞ со отстранета ∞, тогаш стереографската проекција на L' дава линија за L во $\mathbb{C}$.

<u>Заклучок:</u>

→ Кругови во $\mathbb{C}\leftrightarrow$ кругови во $\mathbb{P}$ не низ ∞
→ Линии во $\mathbb{C}\leftrightarrow$ кругови во $\mathbb{P}$ низ ∞

❖ Композиција (состав) од едноставни трансформации

Нека:

- $f_1(z)=z+d/c$, транслација за d/c
- $f_2(z)=1/z$, инверзија / рефлексија
- $f_3(z)=\left(bc-ad/_{c^2}\right)*z$, дилатација и ротација
- $f_4(z)=z+a/c$, транлација за a/c

Сите овие функции можат да се состават односно да се поврзат во композиција, давајќи го изразот:

$$f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1(z)=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

B. *Определување на фиксни точки[3] на Мобиусовата трансформација*

Нека $f\in Aut(\mathbb{P}), f(z)=(az+b)/(cz+d)$.
Да претпоставиме дека z е фиксирано од f,

$$f(z)=z=\frac{az+b}{cz+d}cz2+dz=az+bcz2+(d-a)z-b=0.$$

Доколку $c\neq 0$ оваа е квадратна равенка и има 1 или 2 решенија во $\mathbb{C}^3$.

Ако $c=0$ и $d\neq a$ тогаш оваа е линеарна равенка и има едно решение во $\mathbb{C}$. Меѓутоа тогаш $f(z)=(a/d)z+b/d$ го задоволува условот $f(\infty)=\infty$ а ∞ е исто така фиксирана точка.

Ако $c=0$ и $d=a$, тогаш $f(z)=z+b/d$.

Ако $b\neq 0$ тогаш $f(\infty)=\infty$ е единствена фиксирана точка од f. (Во спротивно $f(z)=z$ е идентитет и ја фиксира секоја точка од $\mathbb{P}$).

<u>Заклучок:</u> *Секоја $f\in Aut(\mathbb{P})$ има или една или две фиксни точки во $\mathbb{P}$.*

Лема II: Мобиусовата трансформација е целосно определена од нејзините дејствија на три (карактеристични) различни точки.

C. *Едноставни особини*

1) *Формула за инверзна трансформација*

Постоењето (егзистенцијата) на инверзна Мобиусова трансформација и неговата експлицитна формула, лесно се добиваат од композицијата (составот) на инверзните функции на поедноставните трансформации. Такви се дефинираните функции:

[2] Во математиката, холоморфна функција е комплексна функција од една или повеќе комплексни променливи, кои во секоја точка од својот домен се диференцијабилни во околина на поедина точка. Функцијата е холоморфна во некоја точка ако постои изводот во таа точка и истиот е различен од нула.

[3] Во математиката, фиксна точка (уште позната како непроменлива точка) од функција е елемент од доменот на функцијата што се пресликува во самиот себе во функцијата, т.е доколку c е фиксна точка на функцијата f(x), тогаш f(c)=c

g_1, g_2, g_3 и g_4 така што секоја g_i е инверзна на f_i. Тогаш композицијата (составот):

$$g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ g_4(z) = f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

ја дава формулата на инверзната функција.

2) Задржување (одржување) на агли и генерализирани кругови

Од претходно искажаното, односно од "декомпозицијата", согледуваме дека Мобиусовите трансформации ги пренесуваат сите нетривијални својства на кружната инверзија[4].

На пример, зачувувањето на аглите се сведува на докажување дека кружната инверзија ги зачувува аглите бидејќи останатите видови на трансформации се дилатација и изометрија (транслација, ротација и рефлексија), кои тривијално ги зачувуваат (задржуваат) аглите.

Освен тоа, Мобиусовите трансформации ги пресликуваат генерализираните кругови во генерализирани кругови бидејќи самата кружна инверзија има такво својство. Притоа под генерализиран круг се подразбира или круг или линија (доколку второто – линијата- се смета за круг низ точка во бесконечноста). Треба да се забележи дека Мобиусовата трансформација не мора нужно да ги пресликува круговите во кругови а линиите во линии: може да ги измеша двете. Иако преслика круг во друг круг, не нужно го пресликува центарот на првиот круг во центарот на вториот круг.

3) Одржување на сооднос (cross-ratio[5])

Вкрстениоот сооднос е инваријантен при Мобиусова трансформација. Тоа е така доколку Мобиусовата трансформација пресликува четири различни (карактеристични) точки z_1, z_2, z_3, z_4 соодветно во четири карактеристични точки: w_1, w_2, w_3, w_4 тогаш:

$$\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_2 - w_3)(w_1 - w_4)}$$

Доколку една од точките z_1, z_2, z_3, z_4 , е точка која тежнее кон бесконечност соодносот мора да биде дефиниран со земање на соодветниот лимес.

Здружениот сооднос на четири различни точки е реален ако и само ако линија или круг минува низ нив. Оваа е уште еден начин да се докаже дека Мобиусовите трансформации зачувуваат генерализирани кругови.

[4]Корелација за полесно сфаќање на концептот кружна инверзија: да се "инвертира" број во аритметиката всушност значи да се земе неговата реципрочна вредност. Тесно поврзан концепт во геометријата е "инвертирање" на точка (Во рамнина, инверзната точка на точката P, во однос на референтниот круг со центар во O и радиус r е точката P' која лежи на правата што поминува низ O и P и за истата важи: OP x OP' = r^2)

[5]Во геометријата, вкрстениот сооднос, е број поврзан со листа од 4 колинеарни точки, особено точки кои се наоѓаат на линија на проекција

4) Коњугација

Две точки, z_1 и z_2 се коњугирани во однос на генерализиран круг C, ако, даден генерализиран круг D, кој поминува низ z_1 и z_2 и го сече C во две точки a и b, (z_1, z_2, a, b) се во хармоничен cross-ratio (односно нивниот сооднос е -1). Оваа својство не зависи од изборот на кругот D. Во некои случаи оваа својство се повикува како симетричност во однос на линија или круг.

Две точки, z, z^* се коњугирани во однос на линија, ако се симетрични во однос на истата. Две точки се коњугирани во однос на круг доколку се менуваат со инверзијата во однос на истиот.

5) Проективни матрични репрезентации

Секоја комплексна 2x2 матрица:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

можеме да ја поврземе со Мобиусовата трансформација:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

притоа условот $ad - bc \neq 0$ е еквивалентен на условот детерминантата на горната матрица да е различна од нула т.е $det(M) \neq 0$.

III. Визуализација на Мобиусовата Трансформација

За да ја визуализираме Мобиусовата трансформација, која претставува изместување во просторот, можеме да искористиме еден едноставен пример кој се состои од четириаголник во дводимензионален простор.

Точките на четириаголниот можеме да ги претставиме како вектор-колона чии елементи се нивните (x, y) координати, соодветно. Со множење на вектор-колоната со Мобиусова трансформациона матрица (од лева страна), добиваме нови координати на точката во зависност од поставените параметри a, b, c, d. Како илустрација на ова, врз четириаголникот ќе ги извршиме трансформациите: ротација, рефлексија, скалирање и Shear – трансформација.

A. Ротација

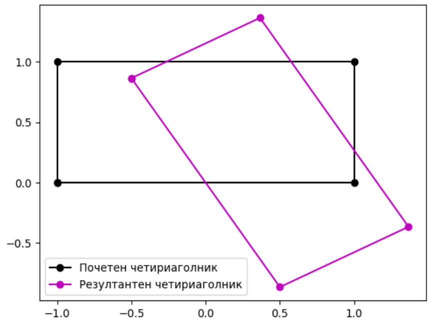
Ротацијата се остварува доколку параметрите a, b, c, d се заменат со тригонометриските функции синус и косинус, а ротацијата ќе зависи од аголот θ од кој зависат функциите. Општата ротациона матрица го има следниот облик:

$$M_{rotation} = \begin{bmatrix} cos(\Theta) & sin(\Theta) \\ -sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{bmatrix}$$

Во нашиот конкретен пример, за аголот Θ ќе ја земеме вредноста $\frac{\pi}{3}$, со што ќе ја добиеме следната трансформација:

$$M_{rotation} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ -sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.866 \\ -0.866 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Со множење на матрицата $M_{rotation}$ со секоја од точките на четириаголникот, го добиваме следното поместување:



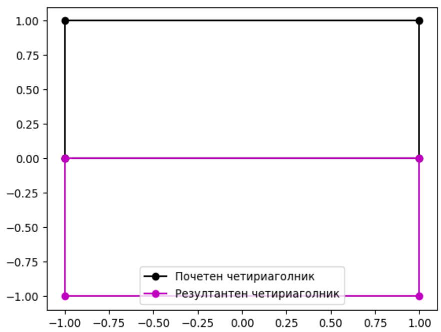
Слика 2: Мобиусова ротација

B. Рефлексија

Рефлексијата во однос на x- оската се остварува доколку параметрите b, c се нули, додека параметрите a, d се 1 и -1 соодветно. Од ова можеме да заклучиме дека општиот облик на рефлексионата матрица ќе биде:

$$M_{reflection} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Со множење на матрицата $M_{reflection}$ со секоја од точките на четириаголникот, го добиваме следното поместување:



Слика 3: Мобиусова рефлексија

C. Скалирање

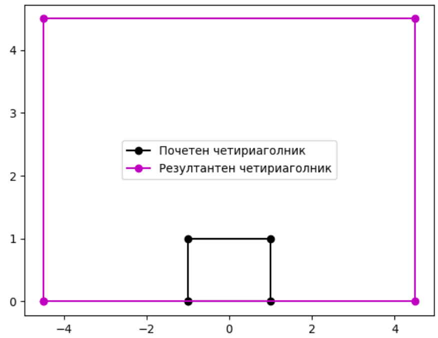
Со скалирањето, што може да се заклучи од зборот, доаѓа до зголемување/намалување на објектот за соодветен множител. Тоа се остварува доколку параметрите b, c се нули, додека параметрите a, d се некоја вредност која означува колку пати сакаме да го зголемиме или намалиме објектот. Општата ротациона матрица го има следниот облик:

$$M_{scale} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

За конкретниот пример, четириаголникот ќе го зголемиме за 4.5 пати во однос на оригиналниот. Тоа може да се оствари со множење на вектор-колоната од координати за секоја точка на четириаголникот со следната скалирачка матрица:

$$M_{scale} = \begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 4.5 \end{bmatrix}$$

Резултатот од скалирањето е претставен на следната слика:



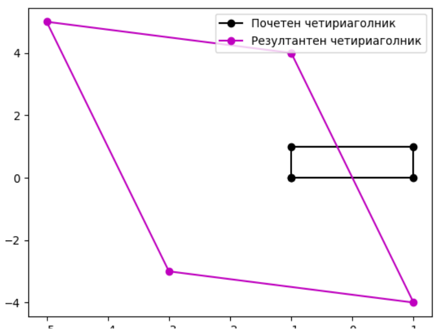
Слика 4:Мобиусово скалирање

D. Shear – трансформација

Последниот вид на трансформација кој што ќе го демонстрираме е shear – трансформацијата, која го “истегнува” објектот во зависност од параметрите a, b, c, d. Основниот облик на shear – трансформационата матрица го добиваме доколку параметрите a, d ги поставиме на 1, а од параметрите b, c ќе ни зависи изобличувањето на објектот:

$$M_{shear} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

Ако за параметрите b, c ги поставиме вредностите (-4,-4), и ја помножиме така добиената трансформациона матрица со координатите на точките на четириаголникот, ќе го добиеме следното изобличување:



Визуализацијата на овие трансформации беше реализирана со помош на програмскиот јазик *Python*.

Бидејќи сликите, кога ќе се претставaт во компјутер, не преставуваат ништо друго туку матрица од интензитетите на пикселите, Мобиусовата трансформација може да се примени за дигиталното процесирање на слики, како и за понапредни криптографски техники при процесирањето на слики.

IV. Примена при дигитално процесирање на слики

Мобиусовата трансформација, покрај мнозинството на математички примени, има и голем број на апликации во реалноста за реални проблеми. Една од овие примени е при дигиталното процесирање на слики. Сликата кога се претставува во компјутер не претстатува ништо друго туку обична матрица, каде димензиите на матрицата се бројот на пиксели во сликата, а елементите во матрицата се интензитетите на пикселите. Во зависност од тоа дали сликата е црно-бела или во боја, постојат две можни претстави.

Доколку е црно-бела, тогаш матрицата е $N \times M$, (каде N – бројот на пиксели по хоризонтала, а M – бројот на пиксели по вертикала), а интензитетите се претставени со вредности од 0.0 до 1.0 и тие претставуваат колку е "светол" пикселот (0 – црно, 1 – бело).

Кога се работи со слика во боја, што е најчестиот случај, тогаш претставата малку се комплицира бидејќи секој од каналите за RGB (R – црвена, G – зелена, B – сина) се претставени со посебна $N \times M$ матрица, а вкупната матрица на сликата е со димензии NxMx3.

За да може претходно наведените трансформации да се извршат врз некоја слика, потребен е алгоритам кој ќе ни ја овозможи реализацијата на трансформациите.

A. *Алгоритам за трансформација на слика со користење на Мобиусова трансформација*

Следниот алгоритам е напишан во програмскиот јазик *Python*, со користење на помошните библиотеки: *NumPy*, *scikit-image* и *Matplotlib*.

Најпрво, потребно е да ја внесеме сликата во матрична форма што се реализира со помош на функцијата *io.imread()* и доколку не е црно-бела, да ги издвоиме секој од RGB каналите во посебна променлива:

```
image = io.imread('butterfly.jpg')

image_r = image[:, :, 0]
image_g = image[:, :, 1]
image_b = image[:, :, 2]
```

Потоа треба да ги дефинираме параметрите a, b, c, d како и аголот Θ и да им ги доделиме посакуваните вредности:

```
a, b, c, d = 1, 0, 0, 1
theta = 0
```

Процесот на трансформацијата ќе го извршиме во посебна функција, со цел да може да ја повикаме за секој од каналите посебно, без притоа да треба да се повторува истиот код повеќекратно:

```
def mobius(image_channel, coefficients, theta=0):
```

Каде *image_channel* ни е матрицата на сликата што сакаме да ја трансформираме, *coefficients* е tuple од претходно дефинираните параметри, а *theta* е вредноста на аголот Θ доколку постои, доколку не тој е еднаков на 0.

Најпрво во функцијата се формира Мобиусовата трансформациона матрица, и тоа доколку Θ се разликува од 0 се смета дека трансформацијата ќе биде ротација, а доколку Θ е 0 тогаш се формира матрицата од параметрите a, b, c, d:

```
if theta == 0:
transformation = np.array([[a, b], [c, d]])
else:
transformation = np.array([[cos(theta), sin(theta)], [-
sin(theta), cos(theta)]])
```

Бидејќи елементите во матрицата на сликата претставуваат интензитетите на пикселите, а не нивните позиции, не можеме едноставно да ја помножиме трансформационата матрица со матрицата на сликата. Самите позиции или "координати" на пикселите се сместени во индексите на матрицата. Од ова може да се воочи дека едно можно решение на овој проблем е со користење на помошна матрица на индекси или *index_matrix* која ќе претставува $N \times M$ матрица (каде N – големина на матрицата на сликата по редови, M – големина на матрицата на сликата по колони), а секој елемент од матрицата ќе претставува вектор колона со димензии 2x1. Со користење на два вгнездени for-циклуси, се исполнува матрицата така што секој елемент (вектор-колона) завзема вредности на сите можни индекси на матрицата на сликата:

$$index_{mat} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 \\ m-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 1 \\ m-1 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Откако ќе се добие матрицата, повторно се изминува елемент по елемент, множејќи ја претходно добиената трансформациона матрица M со секој од вектор колоните поединечно, при што ново добиенот трансформиран вектор се сместува на истото место во матрицата *index_matrix*. Дополнително се извршува проверка дали минималниот ново добиен индекс е негативен, и доколку е, на сите елементи на сите вектор колони во матрицата се додава апсолутната вредност на минималниот елемент, така што сите индекси да бидат позитивни (негативни индекси во матрица не можат да постојат). Кодот за овој дел од алгоритамот е даден подоле, каде создавањето на матрицата и трансформирањето на индексите се вршат истовремено:

```
for n in range(0, rows):
    for m in range(0, columns):
        coordinates = np.array([[n, m]])
        new_coordinates =
          np.array(transformation.dot(coordinates.transpose()))
        index_matrix[n, m] = new_coordinates.astype(int)

if      np.min(index_matrix[:, :, 0, 0]) < 0:
    index_matrix[:, :, 0, 0] = index_matrix[:, :, 0, 0] +
abs(np.min(index_matrix[:, :, 0, 0]))

if np.min(index_matrix[:, :, 1, 0]) < 0:
    index_matrix[:, :, 1, 0] = index_matrix[:, :, 1, 0] +
abs(np.min(index_matrix[:, :, 1, 0]))
```

Во претпоследниот чекор од функцијата *mobius*, се создава матрица на новата трансформирана слика со димензии KxL (каде K – максималниот елемент во првата редица од сите вектор колони во матрицата *index_matrix*, а L – максималниот елемент во втората редица од сите вектор колони во матрицата *index_matrix*). На почетокот матрицата ја исполнуваме со нули, бидејќи не мора да значи дека во матрицата на индекси ќе бидат застапени сите индекси од [0,0] до [K-1, L-1] (пример кај ротација или shear – трансформација кога сликата го губи својот прав квадратен/правоаголен облик). Ова ќе предизвика за секој индекс што не постои во матрицата *index_matrix*, соодветниот пиксел да биде обоен црн (вредност 0).

Конечно, со два вгнездени for – циклуси се потполнува новата матрица на слика така што, читајќи ги индексите од матрицата на индекси, на соодветното место се става вредноста на интензитетот на пикселот, отчитана од старата позиција во матрицата *image_channel* (матрицата на оригиналнат слика). Кодот е даден подолу:

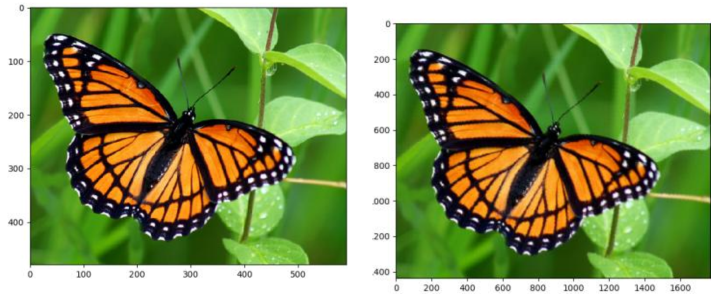
```
rows = np.max(abs((index_matrix[:, :, 0, 0])))
columns = np.max(abs(index_matrix[:, :, 1, 0]))

new_image = np.zeros((rows+1, columns+1), int)

rows, columns = image_channel.shape

for n in range(0, rows - 1):
    for m in range(0, columns - 1):
        new_image[index_matrix[n, m, 0], index_matrix[n, m,
1]] = image_channel[n, m]return new_image
```

Забелешка: Кај некои трансформации доаѓа до изобличување на сликата така што се губат податоци за некои од пикселите внатре во сликата, со што тие завземаат вредност 0 и се обојуваат црни. За да се поправи ова и да се врати изгледот на оригиналната слика, се користи дополнителна функција за конволуција на соседните пиксели. Функцијата работи така што за секој пиксел во сликата што има вредност 0 прави аритметичка средина на соседните пиксели, и на местото пикселот со вредност 0 ја става добиената вредност од просекот.

B. Резултати од алгоритмот

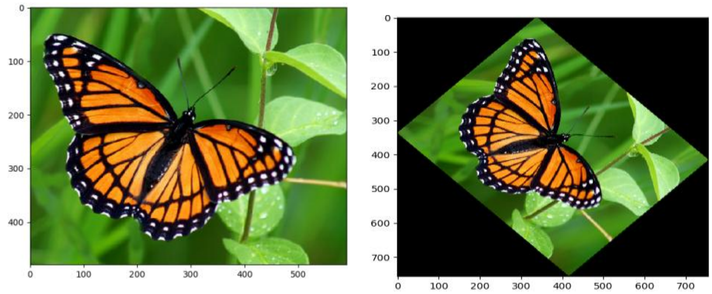
Со користење на погоре наведениот алгоритам се изведени основните четири Мобиусови трансформации врз слика. Резултатите од трансформирањето се прикажани на следните слики:

1) Скалирање (a = 3, d = 3) – се забележува на должините на оските



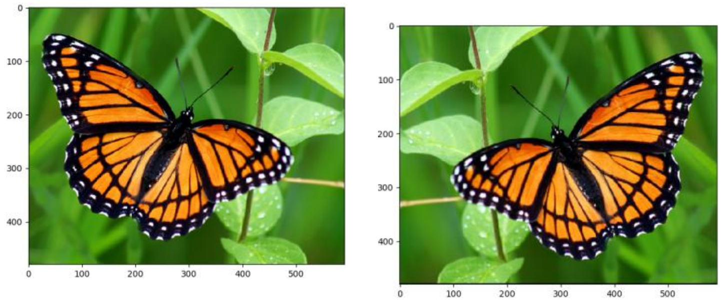
Слика 5: Сликата зголемена 3 пати

2) Ротација (Θ = π/4)



Слика 6: Сликата ротирана за pi/4

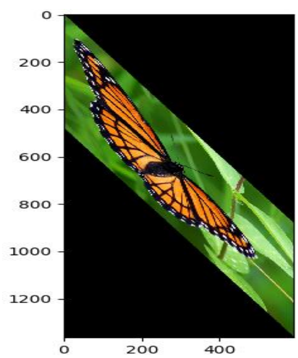
3) Рефлексија



Слика 7: Сликата рефлектирана во однос на y - оската

4) Shear – трансформација

(b = 1.5, c = 0)



Слика 8: Сликата изобличена со shear - трансформација

Заклучок

Мобиусовата трансформација има широка примена во геометријата. Побитни сегменти каде што истата се користи: Во невронски мрежи и процесирање на сигнали: Најпрво е прикажано дека и нелинеарна активациска функција на неврон од фазен филтер од прв ред може да се сметаат како Мобиусови трансформации. Понатаму, глобалната влезно-излезна врска во слоевите на невронските мрежи докажано е дека припаѓа на модуларна група од композициите на Мобиусовата трансформација.; Brain mapping; Резултатите од евалуација на Мобиусова трансфромација на некои често користени брановидни форми се користат при трансформации на слика, притоа ваквиот метод на модулација и демодулација во Чен-Мобиус комуникациски системи, кој е сосема поинаков од традиционалниот, е понов. За да се направи таква обработка, функциите за инверзна трансформација на Чен-Мобиус дејствуваат како "модулациски" бранови, а крајниот примач кохерентно "демодулира" од често користените дигитални бранови. Потоа сликата е поделена на сегментации кои се "модулирани" и "демодулирани" во различни множества на бранови. Затоа, тоа е уште еден нов метод на сликовна криптографија.

РЕФЕРЕНЦИ

[1]https://www.youtube.com/watch?v=0z1fIsUNhO4
[2]https://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius_transformation#Decomposition_and_elementary_properties
[3] https://math.stackexchange.com/questions/820894/what-exactly-does-a-m%C3%B6bius-transformation-do
[4] Различни pdf files со математичка анализа на Мобиусовата трансформација