III. ALGEBRĂ BOOLEANĂ. FUNCŢII BOOLEENE

Algebră booleană

- Bazele algebrei logice (booleene) – matematicianul englez George Boole (1815-1864)
- Metodă simbolică pentru tratarea funcţiilor logicii formale
- Claude Shannon (1916-2001), în 1938, a utilizat-o prima dată pentru analiza circuitelor de comutaţie
- **Circuitele de comutare** – transferă, prelucrează şi păstrează date numerice sau nenumerice în sistemele de calcul

Algebră booleană

- **Algebra logică** este o parte a logicii matematice = ştiinţa care utilizează metode matematice pentru soluţionarea problemelor de logică
- Algebra logicii operează cu propoziţii care pot fi "adevărate" sau "false"
- Unei propoziţii adevărate i se atribuie valoarea "1", iar unei propoziţii false i se atribuie valoarea "0"
- O propoziţie nu poate fi simultan adevărată sau falsă
- Două propoziţii sunt echivalente dacă simultan ele sunt adevărate sau false
- Propoziţiile compuse se obţin din cele simple prin legături logice de tipul conjuncţiei $\wedge$, disjuncţiei $\vee$ sau negaţiei $\neg$

Algebră booleană

- Circuitele de comutare au **2 stări stabile distincte**, diferite calitativ
- Stările sunt puse în corespondenţă cu valorile logice "adevărat" sau "fals" sau cu valorile binare "1" şi "0" $\Rightarrow$ denumirea de **circuite logice**

3.1. Definirea axiomatică a algebrei booleene

- Algebra booleană este o algebră formată din:
  - elementele {0,1}
  - 2 operaţii binare numite SAU şi SI, notate simbolic + sau $\vee$ şi • sau $\wedge$
  - 1 operaţie unară numită NU negaţie, notată simbolic ¯ sau $\neg$
- Operaţiile se definesc astfel:

ŞI	**SAU**	**NU**
$0 \bullet 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	$\overline{0} = 1$
$0 \bullet 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$\overline{1} = 0$
$1 \bullet 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	
$1 \bullet 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	

3.1. Definirea axiomatică a algebrei booleene

Axiomele algebrei booleene

- Fie o mulţime M compusă din elementele $x1$, $x2$,…xn, împreună cu operaţiile ‚•' şi ‚+'. Această mulţime formează o algebră dacă:
  - **1**) Mulţimea M conţine cel puţin 2 elemente distincte $x1 \neq x2$ ($x1$, $x2 \in M$)
  - **2**) Pentru $\forall\, x1 \in M$, $x2 \in M$ avem: $x1 + x2 \in M$ şi $x1 \bullet x2 \in M$
  - **3**) Operaţiile ‚•' şi ‚+' au următoarele proprietăţi:
    - sunt comutative: $x1 \bullet x2 = x2 \bullet x1$

      $x1 + x2 = x2 + x1$
    - sunt asociative: $x1 \bullet (x2 \bullet x3) = (x1 \bullet x2) \bullet x3$

      $x1 + (x2 + x3) = (x1 + x2) + x3$
    - sunt distributive una faţă de cealaltă: $x1 \bullet (x2 + x3) = x1 \bullet x2 + x1 \bullet x3$

      $x1 + (x2 \bullet x3) = (x1 + x2) \bullet (x1 + x3)$

3.1. Definirea axiomatică a algebrei booleene

Axiomele algebrei booleene

- Fie o mulţime M compusă din elementele $x1$, $x2$,…xn, împreună cu operaţiile ‚•' şi ‚+'. Această mulţime formează o algebră dacă:
  - **4)** Ambele operaţii admit câte un element neutru cu următoarele proprietăţi:

    $$x1 + 0 = 0 + x1 = x1$$

    $$x1 \bullet 1 = 1 \bullet x1 = x1$$

    unde 0 este elementul "nul" al mulţimii, iar 1 este elementul "unitate" al mulţimii
  - **5)** Dacă mulţimea M nu conţine decât două elemente, acestea trebuie să fie obligatoriu elementul nul 0 şi elementul unitate 1; atunci pentru $\forall\ x \in M$ există un element unic notat cu $\overline{x}$, cu proprietăţile:

    $\mathrm{x} \bullet \overline{\mathrm{x}} = 0$ principiul contradicţiei

    $\mathrm{x} + \overline{\mathrm{x}} = 1$ principiul terţului exclus

    $\overline{\mathrm{x}}$ este inversul elementului x

3.1. Definirea axiomatică a algebrei booleene

- Denumiri şi notaţii specifice utilizate

Matematică	Logică	Tehnică
Prima lege de compoziţie $x_1 + x_2$	Disjuncţie $x_1 \vee x_2$	SAU $x_1 + x_2$
A doua lege de compoziţie $x_1 \cdot x_2$	Conjuncţie $x_1 \wedge x_2$	SI $x_1 \cdot x_2$
Elementul invers $\overline{x}$	Negare $\neg x$	NU $\overline{x}$

3.2. Proprietăţile algebrei booleene

- Din axiome se deduc o serie de proprietăţi care formează reguli de calcul în algebra booleană
- **Proprietăţile algebrei booleene**:
  - **1)** Principiul dublei negaţii

    $\overline{\overline{x}} = x$ dubla negaţie duce la o afirmaţie
  - **2)** Idempotenţa

    $x \bullet x = x$

    $x + x = x$
  - **3)** Absorbţia

    $x1 \bullet (x1 + x2) = x1$

    $x1 + (x1 \bullet x2) = x1$

3.2. Proprietăţile algebrei booleene

- **Proprietăţile algebrei booleene**:
  - **4)** Proprietăţile elementelor neutre

$$x \bullet 0 = 0 \qquad x \bullet 1 = x$$
$$x + 0 = x \qquad x + 1 = 1$$

  - **5)** Formulele lui De Morgan

$$\overline{x1 \bullet x2} = \overline{x1} + \overline{x2}$$
$$\overline{x1 + x2} = \overline{x1} \bullet \overline{x2}$$

    - Sunt deosebit de utile pentru **transformarea produsului logic în sumă logică şi invers**
    - Se pot generaliza pentru un număr arbitrar de termeni

$$\overline{x1 \bullet x2 \bullet \ldots \bullet xn} = \overline{x1} + \overline{x2} + \ldots + \overline{xn}$$
$$\overline{x1 + x2 + \ldots + xn} = \overline{x1} \bullet \overline{x2} \bullet \ldots \bullet \overline{xn}$$

3.2. Proprietăţile algebrei booleene

- **Proprietăţile algebrei booleene**:
  - **6)** Principiul dualităţii – dacă în axiomele şi proprietăţile algebrei booleene se interschimbă 0 cu 1 şi + cu •, sistemul de axiome rămâne acelaşi, în afara unor permutări
- **Verificarea proprietăţilor**:
  - Se face cu ajutorul tabelelor de adevăr
  - 2 funcţii sunt egale dacă iau aceleaşi valori în toate punctele domeniului de definiţie
- **Observaţie**: comutativitatea şi asociativitatea se pot extinde la un număr arbitrar, dar finit, de termeni

3.3. Funcţii booleene

- **Funcţie booleană f: $B^n \rightarrow$ B**, unde **B = {0,1}**
- y = f(x1, x2,…,xn) – important – atât variabilele cât şi funcţia nu pot lua decât două valori distincte, 0 sau 1
- Funcţia pune în corespondenţă fiecărui element al produsului cartezian n dimensional, valorile 0 sau 1
- Funcţii booleene – utilizate pentru caracterizarea funcţionării unor dispozitive (circuite) construite cu elemente de circuit având două stări (funcţionarea unui astfel de circuit va fi descrisă de o variabilă booleană **xi**)

3.3.1. Funcţii booleene elementare

- Forma generală a unei funcţii booleene de “n” variabile: **$y = f(x1, x2,\dots,xn)$**
- Domeniul de definiţie: format din **$m = 2^n$** puncte
- În fiecare din aceste puncte funcţia poate lua doar valorile 0 şi 1 $\Rightarrow$ numărul total al funcţiilor booleene de “n” variabile este **$N = 2^m$**

3.3.1. Funcţii booleene elementare

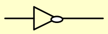
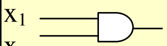
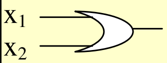
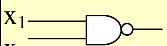
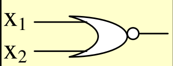
- **Exemplu**: considerăm funcţiile elementare de 1 variabilă
  - Pentru n = 1 avem m = 2 şi N = 4
  - Funcţia are forma y = f(x) şi cele 4 forme ale ei se găsesc în tabel

f_i \ x	0	1	Reprezentare	Denumire
f_0	0	0	0	Constanta 0
f_1	0	1	x	Variabila x
f_2	1	0	$\overline{x}$	Negaţia lui x
f_3	1	1	1	Constanta 1

- Toate funcţiile booleene se pot realiza cu funcţii de bază
- Funcţiilor de bază le corespund circuite logice elementare
- Cu circuite logice elementare se poate realiza **ORICE** tip de circuit

3.3.1. Funcţii booleene elementare

- Tabelul funcţiilor elementare
- Circuitele logice de comutaţie au 2 stări stabile: LOW (L) şi HIGH (H)
- Se asociază lui L ← 0 şi lui H ← 1

Denumire	Funcţie	Simbol	Tabel de adevăr	Tabel de definiţie
Inversor – NOT	$f = \overline{x}$	x  $f = \overline{x}$	x f 0 1 1 0	x f L H H L
Poartă SI – AND	$f = x_1 \cdot x_2$	x_1 x_2  $f=x_1 \cdot x_2$	x_1 x_2 f 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1	x_1 x_2 f L L L L H L H L L H H H
Poartă SAU – OR	$f = x_1 + x_2$	x_1 x_2  $f=x_1+x_2$	x_1 x_2 f 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1	x_1 x_2 f L L L L H H H L H H H H
Poartă SI-NU – NAND	$f = \overline{x_1 \cdot x_2}$	x_1 x_2  $f=\overline{x_1 \cdot x_2}$	x_1 x_2 f 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0	x_1 x_2 f L L H L H H H L H H H L
Poartă SAU-NU – NOR	$f = \overline{x_1 + x_2}$	x_1 x_2  $f=\overline{x_1+x_2}$	x_1 x_2 f 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0	x_1 x_2 f L L H L H L H L L H H L
SAU EXCLUSIV – XOR	$f = x_1 \oplus x_2$	x_1 x_2  $f=x_1 \oplus x_2$	x_1 x_2 f 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0	x_1 x_2 f L L L L H H H L H H H L
COINCIDENŢĂ – XNOR	$f = x_1 \odot x_2$	x_1 x_2  $f=x_1 \odot x_2$ $=\overline{x_1 \oplus x_2}$	x_1 x_2 f 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1	x_1 x_2 f L L H L H L H L L H H H

3.3.2. Reprezentarea funcţiilor booleene

- Moduri de reprezentare a funcţiilor booleene:
  - Reprezentare grafică
  - Reprezentare analitică
- **Reprezentare grafică** – intuitivă – greu de utilizat la funcţii cu număr mare de variabile (utilizare de obicei până la 4-5 variabile)
  - Tabel de adevăr (TA)
  - Diagramă Karnaugh (DK)
  - Schemă logică
  - Diagramă de timp (cronogramă)
- **Reprezentare analitică** – permite metode automate – utilizare la funcţii de mai mult de 4 variabile
  - Forme canonice
  - Forma minimizată (elementară)
  - Forma neelementară

3.3.2.1. Modalităţi de reprezentare grafică

- **1. Tabel de adevăr**
  - Se marchează într-un tabel corespondenţa dintre valorile de adevăr ale variabilelor de intrare şi valoarea de adevăr a funcţiei, în fiecare punct al domeniului de definiţie
  - Pentru o funcţie cu n variabile de intrare există 2^n combinaţii ale acestora
  - Dacă pentru anumite combinaţii ale variabilelor de intrare valoarea funcţiei nu este specificată ⇒ **funcţii incomplet definite**
    - În tabel, în locul în care funcţia nu este specificată, valoarea ei se notează cu "**X**"
    - Dacă o funcţie booleană este incomplet definită pentru "m" combinaţii ale variabilelor de intrare, se pot defini 2^m funcţii noi prin alegerea arbitrară a valorilor incomplet definite

3.3.2.1. Modalităţi de reprezentare grafică

- **1. Tabel de adevăr**
  - **Exemplu**: Să se reprezinte prin tabel de adevăr funcţia booleană de 4 variabile:

$$f = \bar{a} \bullet b \bullet \bar{d} + \bar{a} \bullet b \bullet \bar{c} \bullet d + a \bullet b \bullet c \bullet \bar{d}$$

a	**b**	**c**	**d**	**f**
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

3.3.2.1. Modalităţi de reprezentare grafică

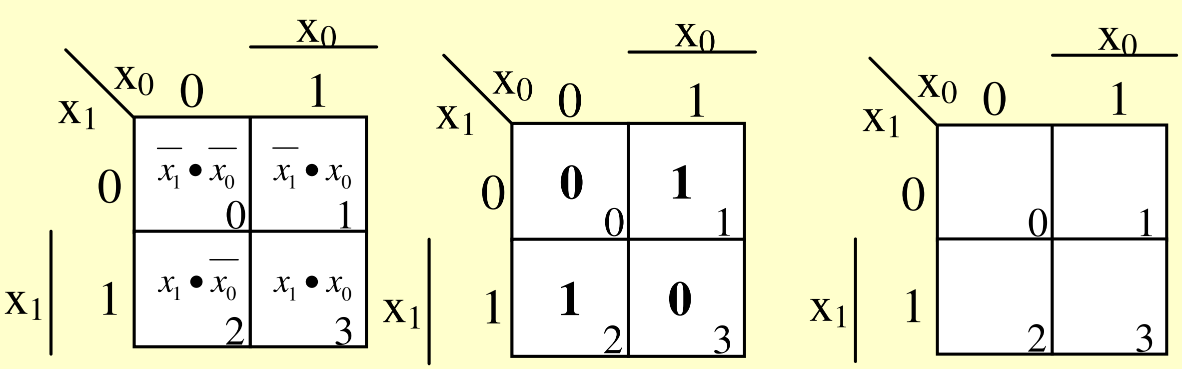
- **2. Diagramă Karnaugh (DK)**
  - O diagramă Karnaugh pentru o funcţie booleană de “n” variabile se desenează sub forma unui pătrat sau dreptunghi împărţit în 2^n compartimente
  - Fiecare compartiment este rezervat unui termen canonic al funcţiei, respectiv unuia dintre vârfurile cubului n dimensional din reprezentarea geometrică a funcţiei
  - Două compartimente vecine pe o linie sau pe o coloană corespund la doi termeni canonici care diferă numai printr-o singură variabilă, care apare în unul adevărată, iar în celălalt negată
  - Se consideră vecine şi compartimentele aflate la capetele opuse ale unei linii, respectiv coloane

3.3.2.1. Modalităţi de reprezentare grafică

- **2. Diagramă Karnaugh**
  - **Notarea DK**: fie indicând domeniul fiecărei variabile, fie indicând pe linie şi coloană n-uple de zerouri şi unităţi corespondente unui compartiment din diagramă şi ordinea variabilelor
    - Prima notaţie se foloseşte în cazul în care se reprezintă funcţia prin forma ei canonică
    - A doua notaţie se foloseşte în cazul în care funcţia se reprezintă prin tabel de adevăr
    - Numerotarea liniilor şi coloanelor se face în **cod Gray** (cod binar reflectat)
    - Pentru a putea reprezenta uşor funcţii exprimate în mod convenţional prin indicii termenilor canonici se poate nota fiecare compartiment cu indicele termenului corespondent, ţinând cont de o anumită ordine a variabilelor

3.3.2.1. Modalităţi de reprezentare grafică

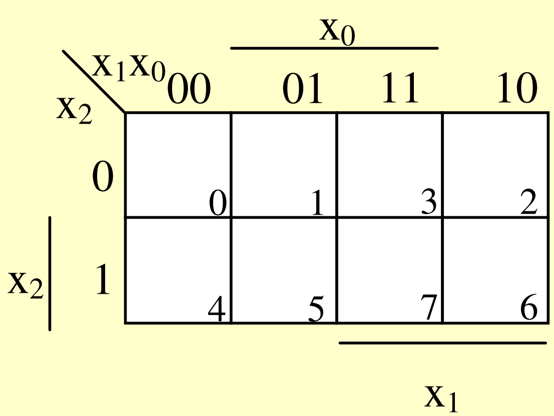
- **2. Diagramă Karnaugh**
  - **1)** Diagrama Karnaugh pentru funcţia booleană de 2 variabile
    - **Exemplu**: $f(x1, x0) = \overline{x1} \bullet x0 + x1 \bullet \overline{x0}$

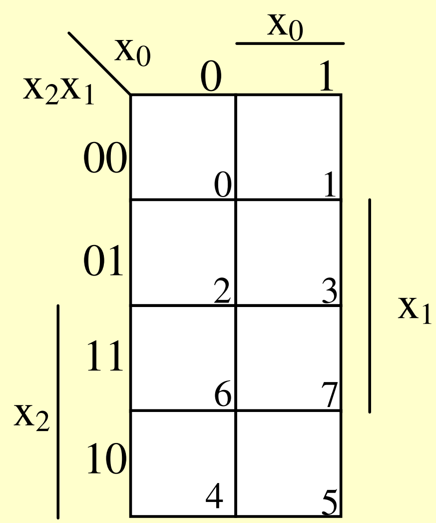


x_1	x_0	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3.3.2.1. Modalităţi de reprezentare grafică

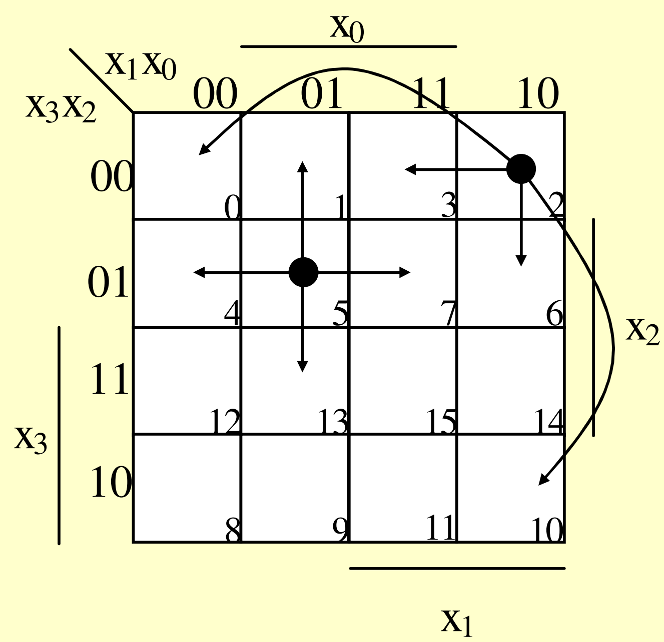
- **2. Diagramă Karnaugh**
  - **2)** Diagrama Karnaugh pentru funcţia booleană de 3 variabile: y = f(x2,x1,x0)
    - Domeniul de definiţie este format din $2^3 = 8$ puncte şi reprezintă vârfurile unui cub cu latura 1





3.3.2.1. Modalităţi de reprezentare grafică

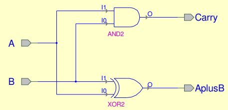
- **2. Diagramă Karnaugh**
  - **3)** Diagrama Karnaugh pentru funcţia booleană de 4 variabile y = f(x3,x2,x1,x0)
    - Prin săgeţi sunt marcate vecinătăţile



  - Pentru funcţii de mai mult de 4 variabile folosim DK pentru 4 variabile ca DK elementare

3.3.2.1. Modalităţi de reprezentare grafică

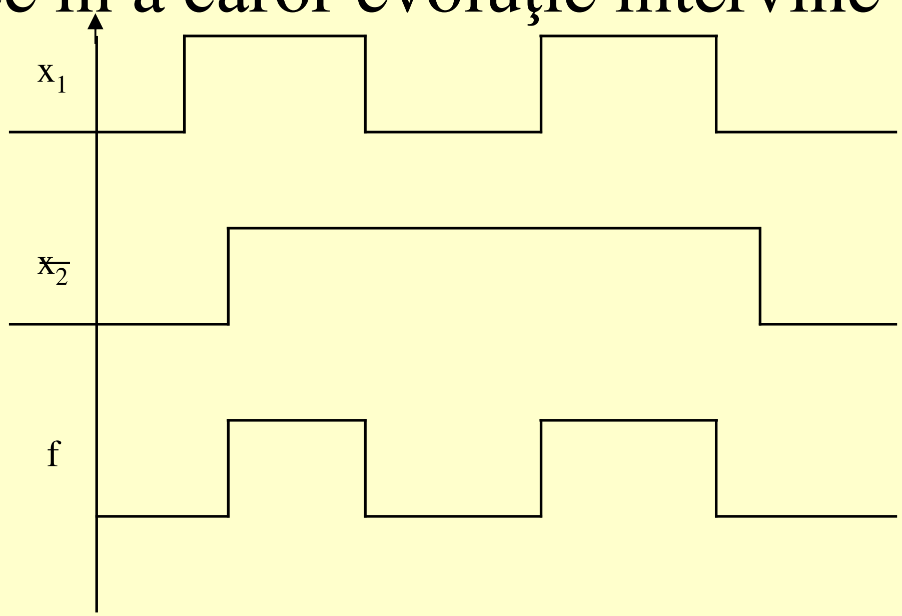
- **3. Schemă logică**
  - Reprezentare cu ajutorul simbolurilor circuitelor logice
  - **Exemplu**:



3.3.2.1. Modalităţi de reprezentare grafică

- **4. Diagrame de timp (cronogramă)**
  - Reprezentare utilă pentru studiul unor forme tranzitorii de hazard în circuitele logice
  - Se reprezintă funcţii logice în a căror evoluţie intervine timpul
  - **Exemplu**:

    $f(x2, x1) = \overline{x2} \bullet x1$



3.3.2.2. Modalităţi de reprezentare analitică

- **1. Forme canonice**
  - Fie o funcţie booleană f(X), unde X = (x1,x2,…,xn)
  - Se defineşte numărul de combinaţie

    $i = x1 \bullet 2^0 + x2 \bullet 2^1 + x3 \bullet 2^2 + \ldots + xn \bullet 2^{n-1}$
  - **Exemplu**:

x_3	x_2	x_1	f		
0	0	0	1	$\rightarrow$	$i = 0\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 0$
0	0	1	1	$\rightarrow$	$i = 0\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 1$
0	1	0	0	$\rightarrow$	$i = 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 2$
0	1	1	1	$\rightarrow$	$i = 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 3$

3.3.2.2. Modalităţi de reprezentare analitică

- **1. Forme canonice**
  - Definim funcţia P_i: $B^n \rightarrow B$ şi B = {0,1}
  - $P_i(x1,x2,\ldots,xn) = \begin{cases} 1 \text{ dacă numărul de combinaţie este i} \\ 0 \text{ în caz contrar} \end{cases}$
  - **P_i** se numeşte **constituent al unităţii**
  - Orice funcţie booleană dată prin tabel de adevăr se poate scrie ca o sumă de constituenţi ai unităţii:

$$f(x1, x2,\ldots,xn) = Pi_1 + Pi_2 + \ldots + Pi_p = \sum_{i,j\in M1} Pi_j$$

  - M1 este mulţimea tuturor combinaţiilor argumentelor pentru care funcţia ia valoarea 1
  - Această formă de scriere se numeşte **forma canonică disjunctivă FCD**
  - Termenii constituenţi se numesc termeni canonici disjunctivi sau **mintermi**
  - FCD se mai numeşte şi forma **sumă de produse**
  - **Termenii conţin toate variabilele de intrare independente**

3.3.2.2. Modalităţi de reprezentare analitică

- **1. Forme canonice**
  - Definim funcţia S_i: $B^n \rightarrow B$ şi $B = \{0,1\}$
  - $S_i(x1,x2,\ldots,xn) = \begin{cases} 0 \text{ dacă numărul de combinaţie este i} \\ 1 \text{ în caz contrar} \end{cases}$
  - **S_i** se numeşte **constituent al lui 0**
  - Orice funcţie booleană dată prin tabel de adevăr se poate scrie ca un produs de constituenţi ai lui 0:

    $$f(x1, x2,\ldots,xn) = Si_1 \bullet Si_2 \bullet \ldots \bullet Si_q = \prod_{i,j \in M0} Si_j$$
  - M0 este mulţimea tuturor combinaţiilor argumentelor pentru care funcţia ia valoarea 0
  - Această formă de scriere se numeşte **forma canonică conjunctivă FCC**
  - Termenii constituenţi se numesc termeni canonici conjunctivi sau **maxtermi**
  - FCC se mai numeşte şi forma **produs de sume**
  - **Termenii conţin toate variabilele de intrare independente**

3.3.2.2. Modalităţi de reprezentare analitică

- **1. Forme canonice**
  - Algoritmi de obţinere a formelor canonice
    - FCD
      - Se determină toate combinaţiile variabilelor pentru care valoarea funcţiei este 1
      - Se scriu mintermii corespunzători – o variabilă apare nenegată dacă are valoarea 1 şi negată dacă are valoarea 0
      - Se însumează mintermii obţinuţi
    - FCC
      - Se determină toate combinaţiile variabilelor pentru care valoarea funcţiei este 0
      - Se scriu maxtermii corespunzători prin însumarea variabilelor – o variabilă apare nenegată dacă are valoarea 0 şi negată dacă are valoarea 1
      - Se înmulţesc maxtermii obţinuţi

3.3.2.2. Modalităţi de reprezentare analitică

- **1. Forme canonice**
  - **Exemplu**:

Tabel de adevăr / **Mintermi** / **Maxtermi**

x1	x2	x3	f	Mintermi	Maxtermi
0	0	0	0		$x1+x2+x3$
0	0	1	1	$\overline{x1}\bullet\overline{x2}\bullet x3$	
0	1	0	0		$x1+\overline{x2}+x3$
0	1	1	1	$\overline{x1}\bullet x2\bullet x3$	
1	0	0	1	$x1\bullet\overline{x2}\bullet\overline{x3}$	
1	0	1	0		$\overline{x1}+x2+\overline{x3}$
1	1	0	1	$x1\bullet x2\bullet\overline{x3}$	
1	1	1	1	$x1\bullet x2\bullet x3$	

FCD: $\overline{x1}\bullet\overline{x2}\bullet x3 + \overline{x1}\bullet x2\bullet x3 + x1\bullet\overline{x2}\bullet\overline{x3} + x1\bullet x2\bullet\overline{x3} + x1\bullet x2\bullet x3$

FCD: $P1 + P3 + P4 + P6 + P7$

FCD: $\sum(1, 3, 4, 6, 7)$

FCC: $(x1+x2+x3)\bullet(x1+\overline{x2}+x3)\bullet(\overline{x1}+x2+\overline{x3})$

FCC: $S0\bullet S2\bullet S5$

FCC: $\Pi(0, 2, 5)$

- Trecerea dintr-o formă canonică în alta se poate face:
  - Cu ajutorul tabelului de adevăr
  - Prin aplicarea dublei negaţii şi apoi a teoremelor lui De Morgan

3.3.2.2. Modalităţi de reprezentare analitică

- **Teoreme**
  - **Teorema lui Shannon** – complementul unei funcţii se obţine prin complementarea fiecărei variabile şi interschimbarea operatorilor SI cu SAU şi reciproc
  - $\overline{f(x1,x2,\dots,xn)\mathbf{+,\bullet}} = f(\overline{x1},\overline{x2},\dots,\overline{xn})\mathbf{\bullet,+}$
  - **Teorema de expansiune** – funcţiile booleene se pot expanda după variabile
    - Fie funcţia booleană f(x1,x2,…, xi-1, xi, xi+1,…,xn) care se expandează după variabila xi
    - Atunci:
      - $f(x1,x2,\dots, xi\text{-}1, xi, xi\text{+}1,\dots,xn) = xi\bullet f(x1,x2,\dots, xi\text{-}1, 1, xi\text{+}1,\dots,xn) + \overline{xi}\bullet f(x1,x2,\dots, xi\text{-}1, 0, xi\text{+}1,\dots,xn)$
    - Funcţia duală este:
      - $f = [xi + f(x1,x2,\dots, xi\text{-}1, 0, xi\text{+}1,\dots,xn)] \bullet[\overline{xi} + f(x1,x2,\dots, xi\text{-}1, 1, xi\text{+}1,\dots,xn)]$

3.3.2.2. Modalităţi de reprezentare analitică

- **2. Forma minimizată (elementară)**
  - Termenii formelor elementare nu conţin toate variabilele de intrare ale funcţiei
  - Se obţine din formele canonice prin operaţia de minimizare
- **3. Forma neelementară**
  - Conţine variabile sau grupuri de variabile comune mai multor termeni
  - Se obţine din celelalte forme de reprezentare prin aplicarea algebrei booleene
  - Permite reducerea numărului de intrări în circuitele logice
  - Dezavantaj: măreşte numărul de nivele logice