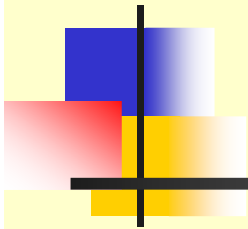


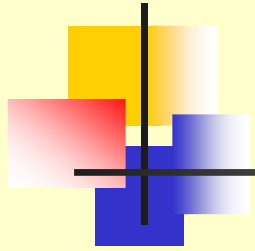
MINIMIZAREA FUNCȚIILOR BOOLEENE



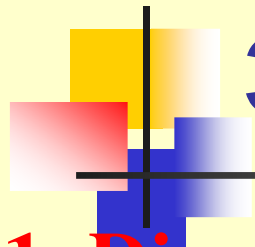
3.3.3. Minimizarea funcțiilor booleene

- Gradul de complexitate al funcției booleene \Leftrightarrow Gradul de complexitate al circuitului numeric
- În sinteza circuitelor de comutație - **etapa de minimizare**, după etapa de definire
- Scopul minimizării = obținerea unor **forme echivalente mai simple** \Rightarrow forma minimă
- Metode de minimizare (simplificare) \Rightarrow expresii minimale de forma SAU-uri de ȘI-uri (reuniune minimală) ori ȘI-uri de SAU-uri (intersecție minimală)

3.3.3. Minimizarea funcțiilor booleene



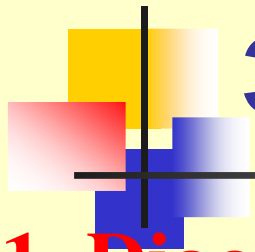
- Criterii utilizate pentru minimizare:
 - Reducerea numărului de variabile
 - Reducerea numărului de termeni
 - Reducerea pe ansamblu a variabilelor și termenilor încât suma lor să devină minimă
- Metode de minimizare:
 - Grafice
 - Algebrice



3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcții complet definite

- Minimizarea se bazează pe proprietatea de adiacență a codului Grey
- Se aleg suprafețe maxime formate din constituenți ai unității, respectiv din constituenți ai lui zero
- Suprafețele au ca dimensiune un **număr de compartimente** egal întotdeauna cu **puteri ale lui 2**
- Suprafețele corespund termenilor canonici, termenii vecini fiind adiacenți (diferă printr-un singur bit)



3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcții complet definite

- Prin gruparea termenilor adiacenți și aplicarea principiului terțului exclus ($x + \overline{x} = 1$) și a proprietății elementului unitate ($x \cdot 1 = x$) eliminăm o variabilă:

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} = x_1$$

- O suprafață cu 2^m compartimente va elimina “m” variabile de intrare
- Un compartiment poate fi membru în mai multe suprafețe ($x + x + \dots + x = x$ și $x \cdot x \cdot \dots \cdot x = x$)



3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcții complet definite

■ Metoda de minimizare:

- Se realizează grupări de compartimente (numărul compartimentelor egal cu puteri ale lui 2)
- Se scriu ecuațiile corespunzătoare fiecărei suprafețe \Rightarrow termenii elementari
- Se realizează:
 - FDM = forma disjunctivă minimă - prin însumarea termenilor elementari obținuți prin gruparea constituenților lui 1
 - FCM = forma conjunctivă minimă - prin înmulțirea termenilor elementari obținuți prin gruparea constituenților lui 0



3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcții complet definite

- **OBS.** Funcțiile minimale obținute în cele 2 forme de minimizare sunt identice (diferă doar forma de reprezentare)

3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcții complet definite

- **Exemplu:** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$
- Minimizarea cu constituenții lui 1 (FDM) are 2 variante, după cum se aleg suprafețele de minimizare

		x_4			
		00	01	11	10
x_1	x_2				
	00	0	0	1	0
	01	0	0	1	0
	11	1	1	1	0
	10	1	1	0	0
		x_3			



3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcții complet definite

- **Exemplu:** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$
- Minimizarea cu constituenții lui 1 (FDM) are 2 variante, după cum se aleg suprafețele de minimizare

$$f_{\text{FDM1}} = x_1 \bullet \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bullet x_3 \bullet x_4 + x_1 \bullet x_2 \bullet x_4 \text{ sau}$$

$$f_{\text{FDM2}} = x_1 \bullet \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bullet x_3 \bullet x_4 + x_2 \bullet x_3 \bullet x_4$$



3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcții complet definite

- **Exemplu:** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$
- Implementarea cu porți de tip ȘI-NU utilizează principiul dublei negații și apoi teoremele lui De Morgan

- $$\begin{aligned} f_{FDM1} &= \overline{\overline{f_{FDM1}}} = \overline{x_1 \bullet \overline{x_3} + \overline{x_1} \bullet x_3 \bullet x_4 + x_1 \bullet x_2 \bullet x_4} = \\ &= \overline{x_1 \bullet \overline{x_3} \bullet \overline{\overline{x_1} \bullet x_3 \bullet x_4} \bullet \overline{x_1 \bullet x_2 \bullet x_4}} = \\ &= \overline{x_1 \bullet x_3 \bullet x_3 \bullet x_1 \bullet x_1 \bullet x_3 \bullet x_4 \bullet x_1 \bullet x_2 \bullet x_4} \end{aligned}$$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcții complet definite

- **Exemplu:** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$
- Minimizarea cu constituenții lui 0 (FCM)

		x_4			
		00	01	11	10
x_1	x_2				
	00	0	0	1	0
	01	0	0	1	0
	11	1	1	1	0
	10	1	1	0	0

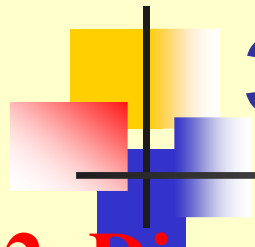
- $f_{\text{FCM}} = (x_1 + x_3) \cdot (\overline{x_3} + x_4) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$



3.3.3.1. Minimizarea grafică

2. Diagrama Karnaugh - funcții incomplet definite

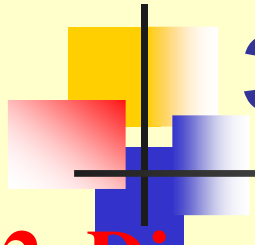
- Funcții incomplet definite: în anumite puncte ale domeniului de definiție pot lua valoarea 0 sau 1
- Situații:
 - Combinații ale variabilelor de intrare pentru care funcția are valori indifferente (nedefinite)
 - Combinații ale variabilelor de intrare care nu pot să apară din punct de vedere fizic - se studiază dacă pot să apară la manevre false sau după defecte de funcționare



3.3.3.1. Minimizarea grafică

2. Diagrama Karnaugh - funcții incomplet definite

- Valorile funcției în DK se numesc în aceste situații **indiferente** sau **arbitrare** sau **redundante**
- Notăția acestor valori se face cu “**X**”
- La minimizare, pentru “X” se dau valori de 1 sau de 0, în funcție de situație, pentru obținerea unei forme minime a funcției
- **Observație:** Funcția minimizată în FDM nu mai coincide întotdeauna cu funcția minimizată în FCM



3.3.3.1. Minimizarea grafică

2. Diagrama Karnaugh - funcții incomplet definite

- **Exemplu:** funcție incomplet definită reprezentată direct în DK
- Minimizăm în FDM și alegem “X” cu valoare 1, acolo unde este cazul
- **OBSERVAȚIE:** NU se grupează în suprafețe numai valori de “X”!!!

3.3.3.1. Minimizarea grafică

2. Diagrama Karnaugh - funcții incomplet definite

- **Exemplu:** funcție incomplet definită reprezentată direct în DK

		x_4			
		00	01	11	10
x_1	x_2				
	00		x	1	
	01	x	1		x
	11	1	1	1	
x_1	10	1	x	1	x

Diagrama Karnaugh pentru funcția incomplet definită f_{FDM} . Variabilele x_1 și x_2 sunt etichetate pe axele verticale, iar x_3 și x_4 sunt etichetate pe axele orizontale. Celulele conținând 'x' reprezintă valori necunoscute (funcție incomplet definită).

- $f_{FDM} = x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_4 + \bar{x}_2 \cdot x_4$



3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- Superpoziția funcțiilor booleene
 - Dacă avem $F(X)$, unde $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ și considerăm $X_1 = (x_1, x_2, \dots, x_i)$ și $X_2 = (x_{i+1}, \dots, x_n)$ și dacă $F(X)$ se poate scrie $F(X) = f_3[f_1(X_1), f_2(X_2)]$ atunci $F(X)$ s-a obținut prin superpoziția funcțiilor $f_1(X_1)$ și $f_2(X_2)$
- Decompoziția funcțiilor booleene
 - Dacă avem $f(X)$, unde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și un set de funcții, decompoziția înseamnă că $F(X)$ se poate scrie:
 - $f(X) = f_m[f_{m-1}(X_{m-1}), f_{m-2}(X_{m-2}), \dots, f_1(X_1), X_0]$ cu $X_i \subset X$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- Exemplu:** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum (0, 2, 3, 7, 9, 10, 11, 14)$

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$		00	01	11	10
x_1	00	1		1	1
	01			1	
	11				1
	10		1	1	1

x_3

x_2

- $$f_{\text{FDM}} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_4 + \overline{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_4 =$$

$$= \overline{x}_2 \cdot (x_1 \odot x_4) + x_3 \cdot (x_1 \oplus x_4) = \overline{x}_2 \cdot \overline{G} + x_3 \cdot G$$

unde $G = (x_1 \oplus x_4)$



3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

■ **Exemplu:** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma (0, 2, 3, 7, 9, 10, 11, 14)$

■ Folosind decompoziția $f(X) = f_2[f_1(X_1), X_0]$ putem scrie $f = f_2[G(x_1, x_4), x_2, x_3]$

■ În continuare facem un artificiu de calcul:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}_2 \cdot \bar{G} + x_3 \cdot G = \bar{x}_2 \cdot \bar{G} \cdot (x_3 + \bar{x}_3) + x_3 \cdot G \cdot (x_2 + \bar{x}_2) = \\ &= \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{G} + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{G} + x_2 \cdot x_3 \cdot G + \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot G = \bar{x}_2 \cdot x_3 + \\ &\quad + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{G} + x_2 \cdot x_3 \cdot G \end{aligned}$$

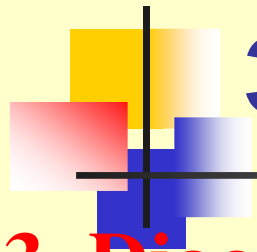
3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- **Exemplu:** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma (0, 2, 3, 7, 9, 10, 11, 14)$
- DK corespunzătoare este acum:

		x_3	
		0	1
x_2	0	\overline{G}	1
	1	0	\underline{G}
		$\underline{x_3}$	

- Prin înglobarea în DK cu număr de compartimente 2^n , a “m” expresii (variabile) rezultă o DK cu 2^{n-m} compartimente



3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- Pași pentru minimizarea cu DK cu expresii (variabile) înglobate:
 - 1. Se consideră toate variabilele ca și cum ar fi 0 și se formează suprafețe cu constituenții lui 1 și se minimizează
 - 2. Se consideră toate locațiile cu 1 indiferente și se formează suprafețe cu variabilele înglobate
 - 3. Se consideră intersecția variabilelor înglobate cu grupările obținute prin minimizare la pasul 2



3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- Pașii pentru minimizarea cu DK cu expresii (variabile) înglobate:
 - 4. Se face reuniunea termenilor obținuți în pașii 1 și 3
 - 5. Pentru mai multe variabile se repetă pe rând pentru fiecare pașii 1-4 (celelalte variabile se consideră 0), apoi se face reuniunea tuturor termenilor obținuți

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- **Exemplu:** Să se minimizeze funcția cu variabile înglobate $f(x_1, x_2, x_3, a, b, c)$:

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0		$a+b$	1	c
1	1		1	x

- **Pasul 1**

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	x

- Se obține $x_2 \bullet x_3 + x_1 \bullet \overline{x_3}$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- **Exemplu:** Să se minimizeze funcția cu variabile înglobate $f(x_1, x_2, x_3, a, b, c)$:
- Pasul 2 și 3

$x_1 \backslash x_2 x_3$		00	01	11	10
0			$a+b$	x	c
1	x			x	x

- Se obține $c \cdot x_2 + (a+b) \cdot \bar{x}_1 \cdot x_3$
- Pasul 4 - se obține funcția minimizată:
- $f = x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_3 + c \cdot x_2 + (a+b) \cdot \bar{x}_1 \cdot x_3$

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- Se bazează pe axiomele și teoremele algebrei booleene
- Se utilizează pentru funcții booleene cu mai mult de 6 variabile
- Exemplu de metodă de minimizare algebrică:
Metoda Quine-Mc Cluskey

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- **Etapele de minimizare:**
- 1. Se grupează termenii canonici astfel încât termenii din fiecare grupare să conțină același număr de 1, respectiv de 0
- 2. Se compară fiecare termen dintr-o grupare cu toți cei din gruparea următoare, aplicând relația de reducere: $x_1 \bullet x_2 + x_1 \bullet \bar{x}_2 = x_1$.
 - Se grupează termenii care diferă printr-o singură variabilă. Termenul obținut prin reducere va conține “-” pe poziția acelei variabile.
 - Pasul se repetă până nu se mai pot face reduceri
 - Termenii rezultați în final se numesc implicanți primi **IP**

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- Etapele de minimizare:
- 3. Se aleg acei implicantți primi IP care asigură acoperirea minimală a termenilor canonici TC
 - Se construiește un **tabel de acoperire** cu TC pe coloane și IP pe linii
 - În intersecțiile tabelului se notează TC care sunt acoperiți de fiecare IP
 - Unii IP sunt numiți **esențiali** deoarece acoperă cel puțin un TC care nu este acoperit de nici un alt IP \Rightarrow IP esențiali fac parte în mod obligatoriu din expresia minimală finală a funcției

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

■ **Exemplu:** $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma (0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$

■ Etapa 1 - gruparea termenilor canonici

TC	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
2	0	0	1	0
8	1	0	0	0
3	0	0	1	1
5	0	1	0	1
10	1	0	1	0
7	0	1	1	1
11	1	0	1	1
13	1	1	0	1
15	1	1	1	1

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- **Exemplu:** $f = \Sigma (0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$
 - Etapa 2 - compararea termenilor din grupe diferite

TC	x_1	x_2	x_3	x_4
0,2	0	0	-	0
0,8	-	0	0	0
2,3	0	0	1	-
2,10	-	0	1	0
8,10	1	0	-	0
3,7	0	-	1	1
3,11	-	0	1	1
5,7	0	1	-	1
5,13	-	1	0	1
10,11	1	0	1	-
7,15	-	1	1	1
11,15	1	-	1	1
13,15	1	1	-	1

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

■ **Exemplu:** $f = \Sigma (0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$

■ Etapa 2 - continuarea comparării

TC	x_1	x_2	x_3	x_4
0, 2, 8, 10	-	0	-	0
2, 3, 10, 11	-	0	1	-
3, 7, 11, 15	-	-	1	1
5, 7, 13, 15	-	1	-	1

- Dacă în urma comparării un termen apare de mai multe ori se trece o singură dată
- IP rezultați sunt: $(0,2,8,10) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_4}$, $(2,3,10,11) = \overline{x_2} \cdot x_3$,
 $(3,7,11,15) = x_3 \cdot x_4$, $(5,7,13,15) = x_2 \cdot x_4$

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

■ **Exemplu:** $f = \Sigma (0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$

■ Etapa 3 - tabelul de acoperire

IP \ TC	0	2	3	5	7	8	10	11	13	15
0, 2, 8, 10	x	x				x	x			
2, 3, 10, 11		x	x				x	x		
3, 7, 11, 15			x		x			x		x
5, 7, 13, 15				x	x				x	x

■ Implicanții primi esențiali sunt (0,2,8,10) și (5,7,13,15)

■ Pentru TC neacoperiți de IP esențiali se pot alege 2 variante de acoperire \Rightarrow 2 soluții de minimizare

$$f = (0,2,8,10) + (5,7,13,15) + (2,3,10,11) = \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_4 + x_2 \cdot x_4 + \overline{x}_2 \cdot x_3 \text{ sau}$$

$$f = (0,2,8,10) + (5,7,13,15) + (3,7,11,15) = \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_4 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4$$

3.3.4. Minimizarea sistemelor de funcții

- Sistemele de funcții booleene se exprimă prin:
 $f: B^n \rightarrow B^m$ unde $B = \{0,1\}$
- Argumentele funcțiilor pot fi de “n” variabile
- Există mai multe funcții: f_1, f_2, \dots, f_m

3.3.4. Minimizarea sistemelor de funcții

- Se caută implicații primi pentru funcțiile individuale și pentru produsele:
 - f_1, f_2, \dots, f_m
 - $f_1 \bullet f_2, f_1 \bullet f_3, \dots, f_1 \bullet f_m$
 - $f_1 \bullet f_2 \bullet f_3, f_1 \bullet f_2 \bullet f_4, \dots$
 - $f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \bullet f_4, \dots$
 - Exemplu: pentru un sistem de 3 funcții vor rezulta pentru minimizare 7 funcții și produse de funcții
- **Soluția aleasă:** cea mai avantajoasă din punct de vedere al circuitelor disponibile și al prețului