MINIMIZAREA FUNCŢIILOR BOOLEENE

3.3.3. Minimizarea funcţiilor booleene

- Gradul de complexitate al funcţiei booleene $\Leftrightarrow$ Gradul de complexitate al circuitului numeric
- În sinteza circuitelor de comutaţie - **etapa de minimizare**, după etapa de definire
- Scopul minimizării = obţinerea unor **forme echivalente mai simple** $\Rightarrow$ forma minimă
- Metode de minimizare (simplificare) $\Rightarrow$ expresii minimale de forma SAU-uri de ŞI-uri (reuniune minimală) ori ŞI-uri de SAU-uri (intersecţie minimală)

3.3.3. Minimizarea funcţiilor booleene

- Criterii utilizate pentru minimizare:
  - Reducerea numărului de variabile
  - Reducerea numărului de termeni
  - Reducerea pe ansamblu a variabilelor şi termenilor încât suma lor să devină minimă
- Metode de minimizare:
  - Grafice
  - Algebrice

3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcţii complet definite

- Minimizarea se bazează pe proprietatea de adiacenţă a codului Grey
- Se aleg suprafeţe maxime formate din constituenţi ai unităţii, respectiv din constituenţi ai lui zero
- Suprafeţele au ca dimensiune un **număr de compartimente** egal întotdeauna cu **puteri ale lui 2**
- Suprafeţele corespund termenilor canonici, termenii vecini fiind adiacenţi (diferă printr-un singur bit)

3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcţii complet definite

- Prin gruparea termenilor adiacenţi şi aplicarea principiului terţului exclus ($x + \overline{x} = 1$) şi a proprietăţii elementului unitate ($x \bullet 1 = x$) eliminăm o variabilă:

$$x_1 \bullet x_2 + x_1 \bullet \overline{x_2} = x_1$$

- O suprafaţă cu 2^m compartimente va elimina “m” variabile de intrare
- Un compartiment poate fi membru în mai multe suprafeţe ($x + x + \ldots + x = x$ şi $x \bullet x \bullet \ldots \bullet x = x$)

3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcţii complet definite

- Metoda de minimizare:
  - Se realizează grupări de compartimente (numărul compartimentelor egal cu puteri ale lui 2)
  - Se scriu ecuaţiile corespunzătoare fiecărei suprafeţe ⇒ termenii elementari
  - Se realizează:
    - FDM = forma disjunctivă minimă - prin însumarea termenilor elementari obţinuţi prin gruparea constituenţilor lui 1
    - FCM = forma conjunctivă minimă - prin înmulţirea termenilor elementari obţinuţi prin gruparea constituenţilor lui 0

3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcţii complet definite

- **OBS.** Funcţiile minimale obţinute în cele 2 forme de minimizare sunt identice (diferă doar forma de reprezentare)

3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcţii complet definite

- **Exemplu:** $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$
- Minimizarea cu constituenţii lui 1 (FDM) are 2 variante, după cum se aleg suprafeţele de minimizare

x_4

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

x_1 x_2 x_3

3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcţii complet definite

- **Exemplu:** $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$
- Minimizarea cu constituenţii lui 1 (FDM) are 2 variante, după cum se aleg suprafeţele de minimizare

$f_{FDM1} = x_1 \bullet \overline{x}_3 + \overline{x}_1 \bullet x_3 \bullet x_4 + x_1 \bullet x_2 \bullet x_4$ sau

$f_{FDM2} = x_1 \bullet \overline{x}_3 + \overline{x}_1 \bullet x_3 \bullet x_4 + x_2 \bullet x_3 \bullet x_4$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcţii complet definite

- **Exemplu:** $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\,(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$
- Implementarea cu porţi de tip ŞI-NU utilizează principiul dublei negaţii şi apoi teoremele lui De Morgan
- $f_{FDM1} = \overline{\overline{f_{FDM1}}} = \overline{\overline{x_1 \bullet \overline{x_3} + \overline{x_1} \bullet x_3 \bullet x_4 + x_1 \bullet x_2 \bullet x_4}} =$

  $= \overline{\overline{x_1 \bullet \overline{x_3}} \bullet \overline{\overline{x_1} \bullet x_3 \bullet x_4} \bullet \overline{x_1 \bullet x_2 \bullet x_4}} =$

  $= \overline{\overline{x_1 \bullet \overline{x_3 \bullet x_3}} \bullet \overline{\overline{x_1 \bullet x_1} \bullet x_3 \bullet x_4} \bullet \overline{x_1 \bullet x_2 \bullet x_4}}$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

1. Diagrama Karnaugh - funcţii complet definite

- **Exemplu:** $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$
- Minimizarea cu constituenţii lui 0 (FCM)

x_4

	$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10	
	00	0	0	1	0	
	01	0	0	1	0	x_2
x_1	11	1	1	1	0	x_2
x_1	10	1	1	0	0	

x_3

- $f_{FCM} = (x_1 + x_3) \bullet (\overline{x_3} + x_4) \bullet (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

2. Diagrama Karnaugh - funcţii incomplet definite

- Funcţii incomplet definite: în anumite puncte ale domeniului de definiţie pot lua valoarea 0 sau 1
- Situaţii:
  - Combinaţii ale variabilelor de intrare pentru care funcţia are valori indiferente (nedefinite)
  - Combinaţii ale variabilelor de intrare care nu pot să apară din punct de vedere fizic - se studiază dacă pot să apară la manevre false sau după defecte de funcţionare

3.3.3.1. Minimizarea grafică

2. Diagrama Karnaugh - funcţii incomplet definite

- Valorile funcţiei în DK se numesc în aceste situaţii **indiferente** sau **arbitrare** sau **redundante**
- Notaţia acestor valori se face cu “**X**”
- La minimizare, pentru “X” se dau valori de 1 sau de 0, în funcţie de situaţie, pentru obţinerea unei forme minime a funcţiei
- **Observaţie**: Funcţia minimizată în FDM nu mai coincide întotdeauna cu funcţia minimizată în FCM

3.3.3.1. Minimizarea grafică

2. Diagrama Karnaugh - funcţii incomplet definite

- **Exemplu:** funcţie incomplet definită reprezentată direct în DK
- Minimizăm în FDM şi alegem “X” cu valoare 1, acolo unde este cazul
- **OBSERVAŢIE: NU** se grupează în suprafeţe numai valori de “X”!!!

3.3.3.1. Minimizarea grafică

2. Diagrama Karnaugh - funcţii incomplet definite

- **Exemplu:** funcţie incomplet definită reprezentată direct în DK

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00		x	1	
01	x	1		x
11	1	1	1	
10	1	x	1	x

- $f_{FDM} = x_1 \bullet \overline{x}_2 + x_2 \bullet \overline{x}_3 + x_1 \bullet x_4 + \overline{x}_2 \bullet x_4$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- Superpoziţia funcţiilor booleene
  - Dacă avem F(X), unde $X = (x_1,x_2,\dots x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$ şi considerăm $X_1 = (x_1,x_2,\dots x_i)$ şi $X_2 = (x_{i+1},\dots,x_n)$ şi dacă F(X) se poate scrie $F(X) = f_3[f_1(X_1), f_2(X_2)]$ atunci F(X) s-a obţinut prin superpoziţia funcţiilor $f_1(X_1)$ şi $f_2(X_2)$
- Decompoziţia funcţiilor booleene
  - Dacă avem f(X), unde $X = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ şi un set de funcţii, decompoziţia înseamnă că F(X) se poate scrie:
  - $f(X) = f_m[f_{m-1}(X_{m-1}), f_{m-2}(X_{m-2}),\dots, f_1(X_1), X_0]$ cu $Xi \subset X$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- **Exemplu:** $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\,(0, 2, 3, 7, 9, 10, 11, 14)$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1		1	1
01			1	
11				1
10		1	1	1

x_4 (columns 01, 11); x_3 (columns 11, 10); x_1 (rows 11, 10); x_2 (rows 01, 11)

- $f_{FDM} = \overline{x}_1 \bullet \overline{x}_2 \bullet \overline{x}_4 + \overline{x}_1 \bullet x_3 \bullet x_4 + x_1 \bullet x_3 \bullet \overline{x}_4 + x_1 \bullet \overline{x}_2 \bullet x_4 =$

$= \overline{x}_2 \bullet (x_1 \odot x_4) + x_3 \bullet (x_1 \oplus x_4) = \overline{x}_2 \bullet \overline{G} + x_3 \bullet G$

unde $G = (x_1 \oplus x_4)$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- **Exemplu:** $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\,(0, 2, 3, 7, 9, 10, 11, 14)$
- Folosind decompoziţia $f(X) = f_2[f_1(X_1), X_0]$ putem scrie $f = f_2[G(x_1,x_4), x_2, x_3]$
- În continuare facem un artificiu de calcul:

$$f = \overline{x}_2\bullet\overline{G} + x_3\bullet G = \overline{x}_2\bullet\overline{G}\bullet(x_3 + \overline{x}_3) + x_3\bullet G\bullet(x_2 + \overline{x}_2) =$$

$$= \overline{x}_2\bullet x_3\bullet\overline{G} + \overline{x}_2\bullet\overline{x}_3\bullet\overline{G} + x_2\bullet x_3\bullet G + \overline{x}_2\bullet x_3\bullet G = \overline{x}_2\bullet x_3 +$$

$$+ \overline{x}_2\bullet\overline{x}_3\bullet\overline{G} + x_2\bullet x_3\bullet G$$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- **Exemplu:** $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\,(0, 2, 3, 7, 9, 10, 11, 14)$
- DK corespunzătoare este acum:

$x_2 \backslash x_3$	0	1
0	$\overline{G}$	1
1 (x_2)	0	G

x_3

- Prin înglobarea în DK cu număr de compartimente 2^n, a “m” expresii (variabile) rezultă o DK cu 2^{n-m} compartimente

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- Paşii pentru minimizarea cu DK cu expresii (variabile) înglobate:
  - 1. Se consideră toate variabilele ca şi cum ar fi 0 şi se formează suprafeţe cu constituenţii lui 1 şi se minimizează
  - 2. Se consideră toate locaţiile cu 1 indiferente şi se formează suprafeţe cu variabilele înglobate
  - 3. Se consideră intersecţia variabilelor înglobate cu grupările obţinute prin minimizare la pasul 2

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- Paşii pentru minimizarea cu DK cu expresii (variabile) înglobate:
  - 4. Se face reuniunea termenilor obţinuţi în paşii 1 şi 3
  - 5. Pentru mai multe variabile se repetă pe rând pentru fiecare paşii 1-4 (celelalte variabile se consideră 0), apoi se face reuniunea tuturor termenilor obţinuţi

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- **Exemplu:** Să se minimizeze funcţia cu variabile înglobate $f(x_1,x_2,x_3,a,b,c)$:

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0		a+b	1	c
1	1		1	x

- Pasul 1

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	x

- Se obţine $x_2 \bullet x_3 + x_1 \bullet \overline{x_3}$

3.3.3.1. Minimizarea grafică

3. Diagrama Karnaugh - cu expresii înglobate

- **Exemplu:** Să se minimizeze funcţia cu variabile înglobate $f(x_1,x_2,x_3,a,b,c)$:
- Pasul 2 şi 3

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0		a+b	x	c
1	x		x	x

- Se obţine $c \bullet x_2 + (a+b) \bullet \overline{x}_1 \bullet x_3$
- Pasul 4 - se obţine funcţia minimizată:
- $f = x_2 \bullet x_3 + x_1 \bullet \overline{x}_3 + c \bullet x_2 + (a+b) \bullet \overline{x}_1 \bullet x_3$

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- Se bazează pe axiomele şi teoremele algebrei booleene
- Se utilizează pentru funcţii booleene cu mai mult de 6 variabile
- Exemplu de metodă de minimizare algebrică: **Metoda Quine-Mc Cluskey**

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- **Etapele de minimizare:**
- 1. Se grupează termenii canonici astfel încât termenii din fiecare grupare să conţină acelaşi număr de 1, respectiv de 0
- 2. Se compară fiecare termen dintr-o grupare cu toţi cei din gruparea următoare, aplicând relaţia de reducere: $x_1 \bullet x_2 + x_1 \bullet \bar{x}_2 = x_1$.
  - Se grupează termenii care diferă printr-o singură variabilă. Termenul obţinut prin reducere va conţine "-" pe poziţia acelei variabile.
  - Pasul se repetă până nu se mai pot face reduceri
  - Termenii rezultaţi în final se numesc implicanţi primi IP

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- Etapele de minimizare:
- 3. Se aleg acei implicanţi primi IP care asigură acoperirea minimală a termenilor canonici TC
  - Se construieşte un **tabel de acoperire** cu TC pe coloane şi IP pe linii
  - În intersecţiile tabelului se notează TC care sunt acoperiţi de fiecare IP
  - Unii IP sunt numiţi **esenţiali** deoarece acoperă cel puţin un TC care nu este acoperit de nici un alt IP $\Rightarrow$ IP esenţiali fac parte în mod obligatoriu din expresia minimală finală a funcţiei.

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- **Exemplu:** $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\ (0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$
  - Etapa 1 - gruparea termenilor canonici

TC	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
2	0	0	1	0
8	1	0	0	0
3	0	0	1	1
5	0	1	0	1
10	1	0	1	0
7	0	1	1	1
11	1	0	1	1
13	1	1	0	1
15	1	1	1	1

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- **Exemplu:** $f = \Sigma\,(0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$
  - Etapa 2 - compararea termenilor din grupe diferite

TC	x_1	x_2	x_3	x_4
0,2	0	0	-	0
0,8	-	0	0	0
2,3	0	0	1	-
2,10	-	0	1	0
8,10	1	0	-	0
3,7	0	-	1	1
3,11	-	0	1	1
5,7	0	1	-	1
5,13	-	1	0	1
10,11	1	0	1	-
7,15	-	1	1	1
11,15	1	-	1	1
13,15	1	1	-	1

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- **Exemplu:** $f = \Sigma\,(0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$
  - Etapa 2 - continuarea comparării

TC	x_1	x_2	x_3	x_4
0, 2, 8, 10	-	0	-	0
2, 3, 10, 11	-	0	1	-
3, 7, 11, 15	-	-	1	1
5, 7, 13, 15	-	1	-	1

  - Dacă în urma comparării un termen apare de mai multe ori se trece o singură dată
  - IP rezultaţi sunt: $(0,2,8,10) = \overline{x}_2 \bullet \overline{x}_4$, $(2,3,10,11) = \overline{x}_2 \bullet x_3$, $(3,7,11,15) = x_3 \bullet x_4$, $(5,7,13,15) = x_2 \bullet x_4$

3.3.3.2. Minimizarea algebrică

- **Exemplu:** $f = \Sigma\,(0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$
  - Etapa 3 - tabelul de acoperire

IP \ TC	0	2	3	5	7	8	10	11	13	15
0, 2, 8, 10	**x**	x				**x**	x			
2, 3, 10, 11		x	x				x	x		
3, 7, 11, 15			x		x			x		x
5, 7, 13, 15				**x**	x				**x**	x

  - Implicanţii primi esenţiali sunt (0,2,8,10) şi (5,7,13,15)
  - Pentru TC neacoperiţi de IP esenţiali se pot alege 2 variante de acoperire $\Rightarrow$ 2 soluţii de minimizare

$f = (0,2,8,10) + (5,7,13,15) + (2,3,10,11) = \overline{x_2}\bullet\overline{x_4} + x_2\bullet x_4 + \overline{x_2}\bullet x_3$ sau

$f = (0,2,8,10) + (5,7,13,15) + (3,7,11,15) = \overline{x_2}\bullet\overline{x_4} + x_2\bullet x_4 + x_3\bullet x_4$

3.3.4. Minimizarea sistemelor de funcţii

- Sistemele de funcţii booleene se exprimă prin:
  f: $B^n \rightarrow B^m$ unde $B = \{0,1\}$
- Argumentele funcţiilor pot fi de "n" variabile
- Există mai multe funcţii: $f_1, f_2, \ldots, f_m$

3.3.4. Minimizarea sistemelor de funcţii

- Se caută implicanţi primi pentru funcţiile individuale şi pentru produsele:
  - $f_1, f_2, \ldots, f_m$
  - $f_1 \bullet f_2, f_1 \bullet f_3, \ldots, f_1 \bullet f_m$
  - $f_1 \bullet f_2 \bullet f_3, f_1 \bullet f_2 \bullet f_4, \ldots$
  - $f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \bullet f_4, \ldots$
  - Exemplu: pentru un sistem de 3 funcţii vor rezulta pentru minimizare 7 funcţii şi produse de funcţii
- **Soluţia aleasă:** cea mai avantajoasă din punct de vedere al circuitelor disponibile şi al preţului