

book

BABEŞ–BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR  
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR  
INFORMATIKA SZAK

**Szakdolgozat**

**Felhasználói értékeléseken alapuló  
collaborative filtering algoritmusok  
kiértékelése funkcionális környezetben**



TÉMAVEZETŐ:  
DR. BODÓ ZALÁN

SZERZŐ:  
ZEDIU  
ÁLMOŞ-ÁGOSTON

2022

BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY OF CLUJ-NAPOCA  
FACULTY OF MATHEMATICS AND INFORMATICS  
SPECIALIZATION: COMPUTER SCIENCE

**Diploma Thesis**

**License thesis title**



ADVISOR:

DR. BODÓ ZALÁN

AUTHOR:

ÁLMOȘ-ĂGOSTON  
ZEDIU

2022

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ  
SPECIALIZAREA INFORMATICĂ

**Lucrare de licență**

**Titlu lucrare licență**



CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:  
DR. BODÓ ZALÁN

ABSOLVENT:  
ÁLMOȘ-ÁGOSTON  
ZEDIU

2022

## 1 Bevezetés

## 2 TODO Az adathalmazról

## 3 Clojure

- 3.1 Funkcionális nyelvekről kicsit általánosan. . . . .
- 3.2 Funkcionális programozás Clojureben . . . . .
- 3.3 Perzisztens adatstruktúrák . . . . .
- 3.4 Homoikonicitás . . . . .
  - 3.4.1 Makrók . . . . .

## 4 Algoritmusok

- 4.1 Slope one . . . . .
  - 4.1.1 Működési elv . . . . .
  - 4.1.2 Implementáció . . . . .
- 4.2 Locality sensitive hashing . . . . .
  - 4.2.1 Definíció . . . . .
  - 4.2.2 Véletlenszerű hiperterekre alapuló LSH . . . . .
  - 4.2.3 **TODO** Implementáció . . . . .
- 4.3 Singular Value Decomposition (SVD) . . . . .
  - 4.3.1 Definíció . . . . .
  - 4.3.2 Felhasználás ajánlórendszerekben . . . . .
  - 4.3.3 Implementáció . . . . .

1.

# Bevezetés

Napjainkban egyre nagyobb hangsúly kerül a különböző ajánló rendszerekre, algoritmusokra melyek felhasználási területe igencsak kiterjedt, legyen akár szó e-commerce felületek termékaajánlásáról, streaming szolgáltatások ízlésmeghatározásáról, vagy pedig a közösségi média oldalak fő bevételforrásának számító személyes reklámajánlásáról.

A dolgozat fő tematikája három széles körben alkalmazott algoritmus, algoritmuscsalád ismertetése, előnyeinek és hátrányainak bemutatása, körbejárva az implementációs nehézségeket, kiértékelési metrikákat és az adott algoritmusok megfelelő környezetben való felhasználását.

A három bemutatott algoritmus a Slope One, mely egy lineáris regresszióval egyszerűbb ajánlási modell egyetlen szabad paraméterrel, a Locality Sensitive Hashing, ami a hasonló ízléssel rendelkező felhasználók értékelési vektorait egy magas ütközési rátával rendelkező hasítófüggvénnyel csoportosítja, és a Singular Value Decomposition mátrix faktorizációs módszer, ami a felhasználók és az értékelt elemek közötti legfontosabb látens faktorokat hozza napvilágra.

Egy másik bemutatott szempont az algoritmusok Clojure nyelvben való implementálása. A Clojure egy funkcionális Lispre alapuló nyelv, mely a JVM platformon fut, nagy hangsúlyt fektet az adatvezérelt programozásra, az interaktív, REPL alapú fejlesztésre és a keretrendszerek helyett az egyszerű könyvtárakra, melyeket az Unix filozófia alapján modulárisan használunk fel.

2.

## TODO **Az adathalmazról**

Az adathalmaz a Minnesotai Egyetem MovieLens adathalmaza, mely 100 000 értékelést tartalmaz 943 felhasználótól 1682 filmről. (?)

### 3.

## Clojure

A Clojure egy dinamikus funkcionális nyelv, mely ötvözi a JVM platform előnyeit a Lisp nyelvek kifejezőkészségével.

### 3.1 Funkcionális nyelvekről kicsit általánosan.

A funkcionális nyelvek fő alapelve az, hogy nincs mutálható memória, és ahelyett, hogy imperatív, egymáson és programállapoton alapuló utasításokkal dolgozunk, előtérbe helyezzük a kifejezéseket, és a “tisztá” mellékhatásoktól mentes függvényeket, melyeknek eredménye a bemeneti paramétereiktől függ.

### 3.2 Funkcionális programozás Clojureben

A Clojure fő filozófiája az egyszerű adatszerkezetekkel, főleg mapekkel való modellezése a problémáknak. Ahelyett, hogy bonyolult absztrakciókat képezünk és enkap-szuláljuk az adatainkat a rajtuk végzett műveletekkel (ezáltal “objektumokat”, és “metódusokat képezve”), vagy pedig előbb bonyolult típusosztályokkal algebrai adatstruktúrákat képezünk, előtérbe helyezzük az egyszerű adatstruktúrákat, és az egyszerű adatstruktúrákon operáló függvényeket.

A Clojureben a függvények az elsőrendű absztrakciók, képesek vagyunk akár argumentumként is kezelni őket, stb.

```
(defn my-adder [a b] (+ a b))
```

```
(def my-five-adder (partial my-adder 5))
```



### 3. : CLOJURE

```
(map my-five-adder [1, 2, 3, 4])
```

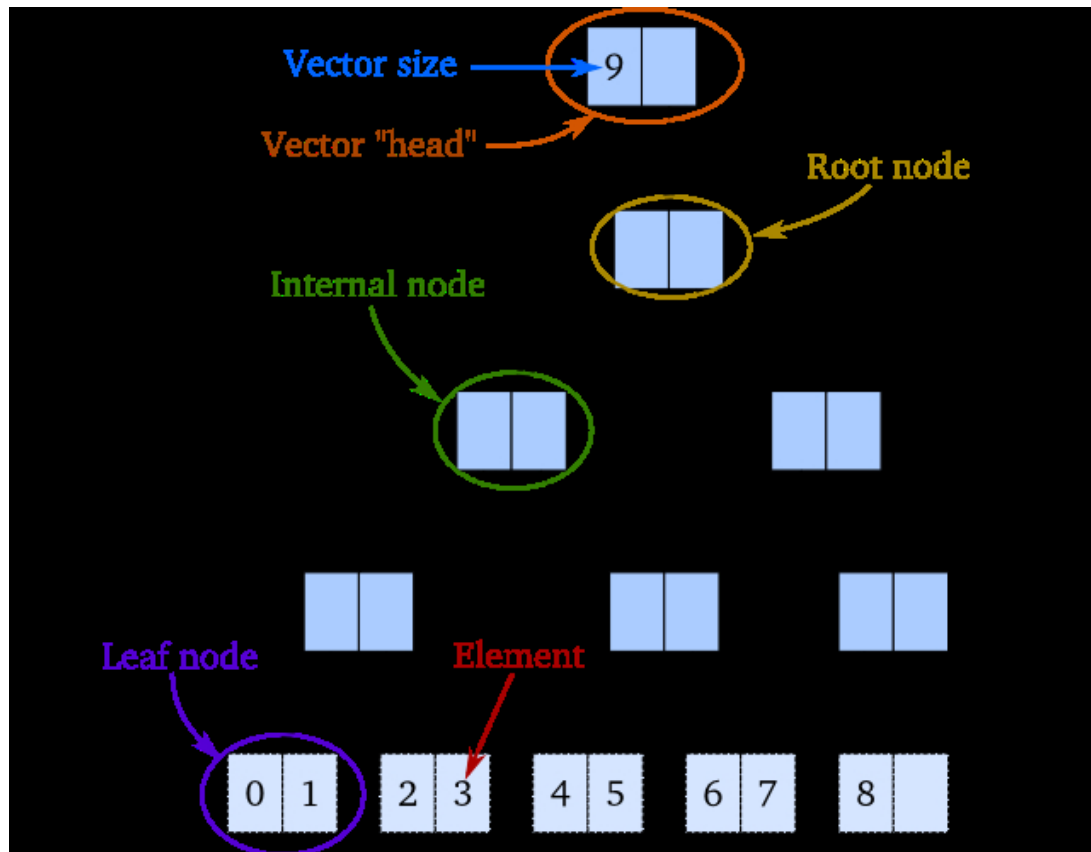
- #'user/my-adder
- #'user/my-five-adder
- (6 7 8 9)

## 3.3 Perzisztens adatstruktúrák

Egy lényegi kérdés ami felmerülhet funkcionális nyelvek esetén, az a memóriahasználat, és a futási idő problémája. Mivel minden változó alapvetően konstans, ezért minden egyes olyan művelet, ami imperatív nyelvekben az eredeti adatstruktúra változtatását vette volna igénybe (új elem beszúrás, törlés, tulajdonság megváltoztatása), a funkcionális nyelvekben egy “módosított” változatát adja vissza az eredeti algoritmusnak. Egy naiv háttérbeli implementáció esetén tehát egy esetleges tömb beszúrásnál le kellene másolni az egész tömböt. Itt jön be a perzisztencia, és a strukturális megosztás ötlete. Ha van olyan része a memóriának, ami változatlan marad az új adatstruktúrában is, fölösleges azon a memóriarészen levő értékeket lemásolni, és több értelme van megosztani vele.

A Clojure alap adatstruktúrái az ideális hasítófákra vannak alapozva. (?) (?). Egy konceptuális elképzelésért rátekinthetünk erre a képre:

### 3. : CLOJURE



A lényegi rész az, hogy ahhoz, hogy olyan adatstruktúrák, mint a vektorok performánsak legyenek, de perzisztensek, szükségünk van specializált bináris fák felépítésére.

## 3.4 Homoikonicitás

Ami talán leginkább megkülönbözteti a Lisp nyelvcsaládban levő nyelveket a többiektől, az a homoikonicitás (?) tulajdonság, vagyis maga a programkód formálható ugyanazzal a nyelvvel futás közben, mint amiben meg volt írva.

Hasonló viselkedést elérhetünk nem homoikonikus nyelvekben is, mint mondjuk a Java vagy a C# reflection rendszere, vagy pedig a Python dekorátor szintaxisa, viszont a Lisp nyelvek makrórendszerével azért könnyebb valamilyen szinten dolgozni, mivel nincsenek speciálisan megkülönböztetve a programban felhasznált adatstruktúrák szintaxisai, és a programot felépítő, elágazásokat, ismétlő ciklusokat, függvénydefiníciókat jelző nyelvi struktúrák szintaxisai.

Vegyük példának okáért a következő egyszerű programot:

### 3. : CLOJURE

```
(defn add-list-numbers [number-list]
  (apply + number-list))
```

```
(add-list-numbers '(1 2 3 4 5))
```

```
– #'user/add-list-numbers
```

```
– 15
```

Látható, hogy a függvénydefiníció kerek zárójelekbe írtuk, a függvény argumentumai pedig egy vektorszerű struktúrában kaptak helyet, utána pedig maga a függvényhívás is zárójelek között volt. Érdekes módon az átadott lista szintúgy zárójelezve adódott át, viszont raktunk elé egy aposztrófot is.

Erre azért volt szükség, mivel a Lisp nyelvekben a kerek zárójel listát jelöl, és minden lista, hacsak nem jelezzük aposztróffal, függványmeghívással jár. Annak köszönhetően viszont, hogy “listákban” programozunk, képesek vagyunk a programrészeinket mint lista, vektor, vagy halmazelemeket módosítani átrendezni.

#### 3.4.1 Makrók

A Lisp makrók olyan programszerkezetek, amelyek kódrészletet kapnak argumentumként, módosítják azt, és a módosított programrészlet eredményét futtatják végül le. Fontos megjegyezni, hogy a végső kód legenerálása fordítási időben történik, nem futási időben.

Egy jó példa arra, hogyan segíthet ez fejlesztésben és talán még fontosabb, adatelemzés során, az az úgynevezett “threading” makró.

```
(defn generate-masked-grouped-ratings [dataset-path]
  (-> (load-ratings dataset-path)
      (tc/dataset)
      (tc/complete :user :item)
      (tc/group-by :user {:result-type :as-seq})))
```

Szerepe tulajdonképpen abból áll, hogy az első logikai egységet ami a nyíl mellett áll, “befűzi” a következő függvényhívás első argumentumaként és azon függvényhívás eredményét pedig ugyanúgy befűzi a következő függvényhívás első argumentumaként, és így tovább.

### 3. : CLOJURE

Bár talán komplikáltnak tűnhet egy hasonló funkcionalitás implementálása, ezen makró forráskódja mindössze 10 sor, és kihasználja azt, hogy a “formok” (a Clojure kód kerek zárójelbe helyezett futtatható egysége) igazából listák, így a makró feladata egyszerűen a helyes futtatható lista megalkotása.

```
(defmacro ->
  [x & forms]
  (loop [x x, forms forms]
    (if forms
      (let [form (first forms)
            threaded (if (seq? form)
                        (with-meta `(~(first form) ~x ~@(next form)) (meta form))
                        (list form x))]
        (recur threaded (next forms)))
      x)))
```

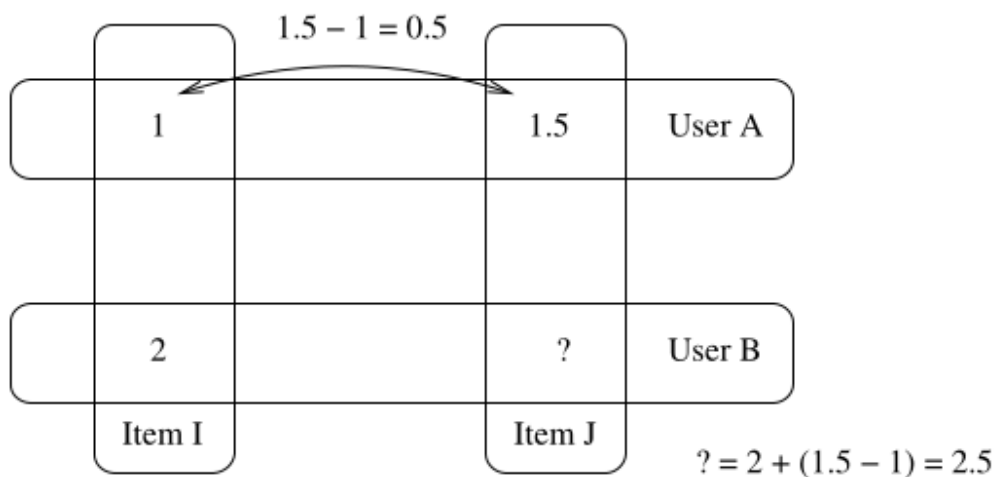
4.

## Algoritmusok

### 4.1 Slope one

A Slope One egy egyszerűen implementálható, de ennek ellenére meglepően jó eredményekkel rendelkező algoritmuscsalád melyet Anna Maclachlan és Daniel Lemire jelentettek meg. (?)

Nevét onnan kapta, hogy a amíg az egyszerű lineáris regresszió esetén két paramétert becsülünk meg, itt elég csak egy paraméter, leegyszerűsítve a  $f(x) = ax + b$  modellt egy  $f(x) = x + b$  modellre. Abban az esetben, mikor felhasználói értékelésekről beszélünk nem egy adott termék vagy értékelendő tárgy individuális értékeléseit vizsgáljuk, hanem az egy-egy tárgy értékelései közötti átlagos különbséget.



## 4. : ALGORITMUSOK

### 4.1.1 Működési elv

Az algoritmus dióhéjban összesíti a tárgyak közötti szavazatkülönbségeket, utána pedig ahhoz, hogy megközelítsük egy felhasználó ismeretlen szavazatát, összeadjuk a létező szavazatait a vizsgálandó tárgy és az létező szavazatok közötti átlagos különbségekkel, és súlyozott átlagot számolunk, ahol a súly az, hogy hányan szavaztak mindkét tárgyra.

Ha a felhasználó  $u$ -ként jelöljük, a szavazatai halmazát  $S(u)$ -ként, akkor egy  $j$  tárgyra adott:

$$\hat{r}_{j|u} = \frac{\sum_{i \in S(u); i \neq j} (\Delta_{i,j} + u_i) c_{j,i}}{\sum_{i \in S(u); i \neq j} c_{j,i}} \quad (4.1)$$

(?)

Ahol  $c_{j,i} = \text{card}(S_{j,i}(R))$  vagyis a kardinalitása a  $j$  és  $i$ -re is szavazott embereknek.

### 4.1.2 Implementáció

Az ebben a szekcióban levő kód nagy része Henry Garner Clojureben való gépi tanulásról szóló könyvéből lett átvéve, (?) , és a **top-n** ajánlási mechanizmussal együtt is alig tesz ki 50 sort.

Először a listakonstruktor elvű **for** makróval tárgy párokat generálunk, majd egy üres **map** asszociatív struktúrából kiindulva leredukáljuk ezeket a párokat egy mapre, melyben minden az összes tárgyak közötti különbség el van mentve.

```
(defn conj-item-difference [dict [i j]]
  (let [difference (- (:rating j) (:rating i))]
    (update-in dict [(:item i) (:item j)] conj difference)))

(defn collect-item-differences [dict items]
  (reduce conj-item-difference dict
    (for [i items
          j items
          :when (not= i j)]
      [i j])))

(defn item-differences [user-ratings]
  (reduce collect-item-differences {} user-ratings))
```

Ezután elmentjük a különbségek átlagát, és a közös szavazók számát.

#### 4. : ALGORITMUSOK

```
(defn summarize-item-differences [related-items]
  (let [f (fn [differences]
            { :mean (s/mean differences)
              :count (count differences) })]
    (map-vals f related-items)))

(defn slope-one-recommender [ratings]
  (->> (item-differences ratings)
        (map-vals summarize-item-differences)))
```

A felhasználási lépésben, amikor egy adott tárgyra szeretnénk értékelést megsaccolni, hozzáadjuk a meglevő szavazatokat a különbségekhez és elvégezzük a súlyozott átlagolást.

```
(defn candidates [recommender { :keys [rating item] }]
  (->> (get recommender item)
        (map (fn [[id { :keys [mean count] }]]
                { :item id
                  :rating (+ rating mean)
                  :count count }))))

(defn weighted-rating [[id candidates]]
  (let [ratings-count (reduce + (map :count candidates))
        sum-rating (map #(* (:rating %) (:count %)) candidates)
        weighted-rating (/ (reduce + sum-rating) ratings-count)]
    { :item id
      :rating weighted-rating
      :count ratings-count })))
```

A top-n ajánlás már csak annyit ad hozzá, hogy elvégzi az egész adathalmazra a megközelítéseket, kiveszi a vizsgált felhasználó már értékelt tárgyait, és csökkenő sorrendbe helyezi az értékeléseket.

```
(defn slope-one-recommend [recommender rated top-n]
  (let [already-rated (set (map :item rated))
        already-rated? (fn [{ :keys [id] }]
                          (contains? already-rated id))
        recommendations (->> (mapcat #(candidates recommender %)
                                      rated)
                              (group-by :item)
                              (map weighted-rating)
                              (remove already-rated?)
                              (sort-by :rating >))]
    (take top-n recommendations)))
```

## 4.2 Locality sensitive hashing

A Locality Sensitive Hashing egy olyan hasítófüggvényekre alapuló módszer, ami a legtöbb hasítófüggvény implementációval ellentétben nem minimizálja az ugyanolyan kimenetek, kulcsok számát, hanem maximalizálja, mivel a hasonló tárgyak, (esetünkben szavazatvektorok) hasonló kimenettel kell rendelkezzenek.

### 4.2.1 Definíció

Egy LSH séma egy olyan  $F$  hasítófüggvénycsalád, melyekre igaz, hogy a valószínűsége annak, hogy két  $x, y$  objektum függvényértéke megegyezik, megegyezik a két függvény hasonlósági távolságával valamilyen metrika szerint. (Charikar)

$$Pr_{h \in F}[h(x) = h(y)] = sim(x, y) \quad (4.2)$$

ahol  $sim(x, y) \in [0, 1]$  természetesen.

Ezzel egyrészt csoportosítani tudjuk a potenciálisan hasonló ízléssel rendelkezőket, és ugyanakkor kompaktan, kevés helyfelhasználással később is fel tudjuk használni ezen csoportokat, ami segít a futási időn is persze.

### 4.2.2 Véletlenszerű hiperterekre alapuló LSH

Az ötlet a következő: egy  $R^d$ -ből levő vektorcsoport esetén mintavételezzünk egy normál eloszlású  $\vec{r}$   $d$  dimenziós vektort. Ennek a vektornak a függvényében definiálhatjuk a következő  $h_{\vec{r}}$  függvényt:

$$h_{\vec{r}}(\vec{u}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \vec{r} * \vec{u} \geq 0 \\ 0 & \text{ha } \vec{r} * \vec{u} < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Ekkor  $\vec{u}$  és  $\vec{v}$  esetén igaz lesz, hogy:

$$Pr_{h \in F}[h(x) = h(y)] = 1 - \frac{\theta(\vec{u}, \vec{v})}{\pi} \quad (4.4)$$

(Charikar)



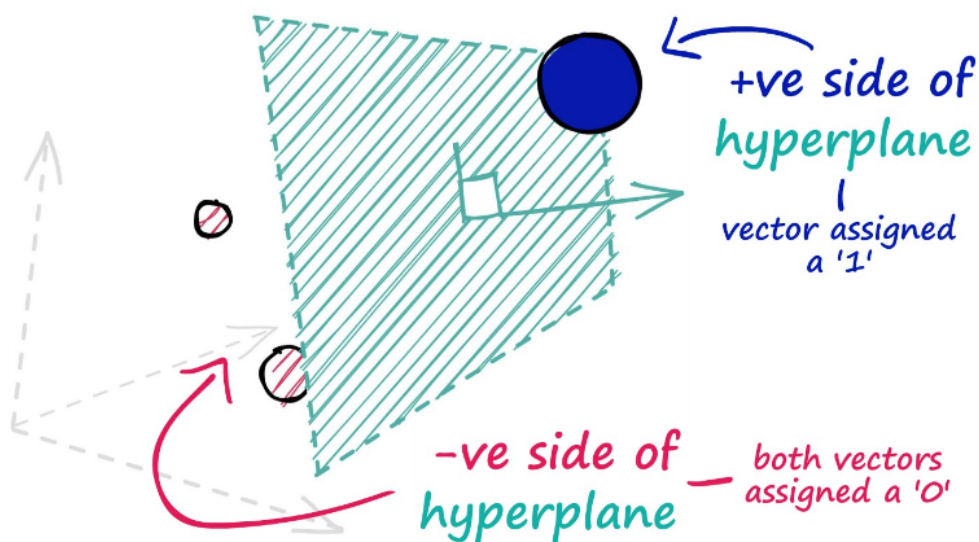
## 4. : ALGORITMUSOK

Vagyis annak a valószínűsége, hogy két vektor egyenkénti skaláris szorzata a véletlenszerűvel és az erre alkalmazott előjel függvény kimenete ugyanaz legyen megegyezik a két vektor között bezárt szög koszinuszával. Ezt először Goemans és Williamson bizonyította (Goemans és Williamson, 1995) egy a MAX-CUT relaxációjával foglalkozó cikkükben.

Intuitívan arról van szó, hogy ha veszünk egy  $d$  dimenziós hiperteret, ahol  $d$  az adathalmazunkban levő tárgyak száma, akkor minden felhasználót el tudunk helyezni ebben a hipertérben, hisz a szavazataik meghatározzák a pozíciójukat, hisz  $d$  dimenziós vektorok.

Egy véletlenszerűen felvett vektor normálvektora egy a hiperteret kettéosztó hipersíknak, vagyis a vele való skaláris szorzat előjele meghatározza, hogy egy pont a hipersík melyik felén helyezkedik el.

Elég ilyen hipersíkot felvéve ki tudunk alakítani csoportokat, akik több hipersíknak is ugyanazon a felén vannak, ebből következően hasonlóak.



(Ran)

### 4.2.3 TODO Implementáció

Az első lépés a random normálvektorok legenerálása:

```
(defn generate-random-vectors [d nbits]
  (nrand/rand-normal! 0 1 (nmat/dge d nbits)))
```

#### 4. : ALGORITMUSOK

A függvény amely kiszámítja mely “vödörbe kerül” egy felhasználó az értékelési vektora alapján

```
(def threshold
  "The sign function which translates a value into a binary 1 or 0."
  (fn [x]
    (if (> x 0.0)
      1.0
      0.0)))
```

```
(defn calculate-lsh-hash
  "Used to calculate the LSH hash of a random vector."
  [user-vector rand-normals]
  (. Integer parseInt (->> (ncore/mv rand-normals user-vector)
    (fmap threshold)
    (into [])
    (map int)
    (apply str)) 2))
```

A függvény amely elvégzi a “vödör” generálást, és feltölti őket.

```
(defn generate-lsh-buckets
  "Generating the buckets for the stuff."
  [all-items grouped-ratings rand-normals]
  (loop [current-rating (first grouped-ratings)
        remaining-ratings (rest grouped-ratings)
        current-user (get-in current-rating [:user 0])
        buckets {}]
    (let [sparse-vector (-> (get-sparse-ratings all-items current-rating)
      (get-sparse-vector))
          lsh-hash (calculate-lsh-hash sparse-vector rand-normals)
          new-buckets (if (contains? buckets lsh-hash)
            (update buckets lsh-hash conj current-user)
            (conj buckets [lsh-hash [current-user]]))]
      (if (empty? remaining-ratings)
        new-buckets
        (recur (first remaining-ratings) (rest remaining-ratings) (get-in (first remaining-ratings) [:user 0]) new-buckets)))))
```

## 4.3 Singular Value Decomposition (SVD)

### 4.3.1 Definíció

A Singular Value Decomposition (röviden SVD) egy mátrix faktorizációs módszer, melyben egy  $m \times n$  mátrixot felbontunk  $M = U\Sigma V^*$  módon, ahol  $U$  egy  $m \times m$  alakú unitáris mátrix,  $\Sigma$  egy  $m \times n$  alakú diagonális mátrix,  $V$  pedig egy  $n \times n$  unitáris mátrix.  $\Sigma$  átlón elhelyezkedő értékei a négyzetgyökei  $M * M$  sajátértékeinek, és sok SVD implementációban az értékek csökkenő sorrendben jelennek meg  $\Sigma$  főátlóján.

### 4.3.2 Felhasználás ajánlórendszerekben

Hasznossága abban rejlik, hogy ha kiválasztjuk az  $r$  legnagyobb singular value-t (vagy röviden s-értéket) akkor meg tudjuk közelíteni az eredeti  $M$  mátrixot, egy másik,  $\widetilde{M}$  mátrixsal, ahol  $rank(\widetilde{M}) = r$  (?). Ez azért tud hasznos lenni ajánlórendszerekben, mivel ezáltal le tudjuk redukálni az eltárolandó felhasználó-értékelt objektum kapcsolatok számát, és csak a redukált  $r$  rangú  $M, \Sigma, V^*$  mátrixokat tárolva helyet spórolunk, ugyanakkor ki tudjuk emelni az  $r$  legfontosabb “látens faktort”, amik megadják az összefüggést bizonyos felhasználók és bizonyos filmekre adott értékelések között.

### 4.3.3 Implementáció

Az alkalmazott implementáció alapjául Badrul N. Sarwar, George Karypis etc, Minnesotai Egyetem kutatóinak cikke szolgál, (?) és felbontható a következő stádiumokra:

Az implementációban a normalizálás az objektumok átlagos pontszámai alapján történtek, vagyis csoportosítva lettek a szavazatok objektum szerint és onnan kivontuk az átlagszavazatot:

```
(def multiple-averages (-> grouped-ratings
  (tc/complete :user :item)
  (tc/group-by :item {:result-type :as-seq})))

(def averages
  (map
    (fn [group]
      (let [mean (-> (tc/aggregate group #(dfn/mean (% :rating)))]
```

#### 4. : ALGORITMUSOK

```
(tc/get-entry "summary" 0))
normalized-group (-> (tc/replace-missing group :rating :value mean)
                    (tc/update-columns :rating [(partial map #(- % mean))])
{:normal normalized-group
 :mean mean})) multiple-averages))
```

Az átlagos értékelések el lettek mentve, hogy az adathalmaz rekonstrukciójakor de-normalizálni tudjuk a szavazatokat, megkapva az előrejelzett értékeléseket.

Az SVD kiszámítása a LAPACK lineáris algebra könyvtár Intel MKL implentációja alapján történik.

```
(def svd (-> (nnat/dge 1680 943 (:rating new-normal))
              (nlin/svd true true)))
```

Az adathalmaz rekonstrukciója során kiválasztjuk a 14 legnagyobb s-értéket, ugyanakkor az  $U$  és  $V^*$  mátrixok almatrrixait, gyököt vonunk a redukált  $\Sigma$  mátrixokból, és újra összeszorozzuk őket, megkapva a 14-es ranggal rendelkező  $\widetilde{M}$  mátrixot.

```
(def sigma (-> (:sigma svd)
               (ncore/submatrix 14 14)))
(def u (ncore/submatrix (:u svd) 1680 14))
(def vt (ncore/submatrix (:vt svd) 14 943))
(def s_root (nvmath/sqrt sigma))
(def usk (ncore/mm u s_root))
(def skV (ncore/mm s_root vt))
(def usv (ncore/mm usk skV))
```

# Bibliography

Random Projection for Locality Sensitive Hashing | Pinecone.  
<https://www.pinecone.io/learn/locality-sensitive-hashing-random-projection/>.

Bagwell, P., editor. *Ideal Hash Trees*. 2001.

Brand, M. Fast online SVD revisions for lightweight recommender systems. In *Proceedings of the 2003 SIAM International Conference on Data Mining*, pages 37–46. Society for Industrial and Applied Mathematics, May 2003. ISBN 978-0-89871-545-3 978-1-61197-273-3. doi: 10.1137/1.9781611972733.4.

Charikar, M. S. Similarity Estimation Techniques from Rounding Algorithms. page 9.

Garner, H. *Clojure for Data Science: Statistics, Big Data, and Machine Learning for Clojure Programmers*. 2015. ISBN 978-1-78439-750-0.

Goemans, M. X. és Williamson, D. P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of the ACM*, 42(6):1115–1145, Nov. 1995. ISSN 0004-5411. doi: 10.1145/227683.227684.

Jayasinghe, T., Stanek, K. Z., Kochanek, C. S., Thompson, T. A., Shappee, B. J., és Fausnaugh, M. An Extreme Amplitude, Massive Heartbeat System in the LMC Characterized Using ASAS-SN and TESS. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489(4):4705–4711, Nov. 2019. ISSN 0035-8711, 1365-2966. doi: 10.1093/mnras/stz2460.

Lemire, D. és Maclachlan, A. Slope One Predictors for Online Rating-Based Collaborative Filtering, Sept. 2008.

McIlroy, M. D. Macro instruction extensions of compiler languages. *Communications of the ACM*, 3(4):214–220, Apr. 1960. ISSN 0001-0782. doi: 10.1145/367177.367223.