第 I 部
基礎

1　基本的な記号

$$v = \frac{1}{1+i} \qquad d = \frac{i}{1+i} \qquad d = 1 - v = vi$$

$$1+i = \left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right)^k \qquad 1-d = \left(1-\frac{d^{(k)}}{k}\right)^k \qquad d^{(k)} = \frac{i^{(k)}}{(1+i)^{1/k}}$$

$$\delta = \log(1+i) \qquad \mathrm{e}^{\delta} = 1+i \qquad \mathrm{e}^{-\delta} = v \qquad \delta \approx \frac{i+d}{2}$$

2　確定年金

2.1　年金現価・終価

終価：　期始　$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{d}$　　期末　$s_{\overline{n}|} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

現価：　$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{d}$　　$a_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{i}$

f 年据置：　${}_{f|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^f \ddot{a}_{\overline{n}|}$　　${}_{f|}a_{\overline{n}|} = v^f a_{\overline{n}|}$

年 k 回：　$\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n}|} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{d^{(k)}}$　　$s^{(k)}_{\overline{n}|} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i^{(k)}}$

$\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{d^{(k)}}$　　$a^{(k)}_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{i^{(k)}}$

連続払：　$\bar{s}_{\overline{n}|} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{\delta} \quad (n \in \mathbb{R}^+)$

$\bar{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{\delta} \quad (n \in \mathbb{R}^+)$

2.2　種々の関係式

期始払いで成り立つ式は期末払でも成り立つ．vice versa．また，年 k 回払いの式において，$k=1$ とおくことにより年払いの式も得る．終身年金の場合は，以下の関係式において単に $n \to \infty$ とすればいい．

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n \ddot{s}_{\overline{n}|}} \qquad \boxed{a_{\overline{n}|} = v\ddot{a}_{\overline{n}|}},\ s_{\overline{n}|} = v\ddot{s}_{\overline{n}|} \qquad \frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)} = s_{\overline{n+\frac{1}{k}}|}^{(k)} - \frac{1}{k} \qquad \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = a_{\overline{n-\frac{1}{k}}|}^{(k)} + \frac{1}{k} \qquad {}_{f|}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{a}_{\overline{f+n}|}^{(k)} - \ddot{a}_{\overline{f}|}^{(k)}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(k)} s_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{n}|} \qquad s_{\overline{n}|}^{(k)} = s_{\overline{1}|}^{(k)} s_{\overline{n}|} = a_{\overline{1}|}^{(k)} \ddot{s}_{\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(k)} a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(k)} \ddot{a}_{\overline{n}|} \qquad a_{\overline{n}|}^{(k)} = s_{\overline{1}|}^{(k)} a_{\overline{n}|} = a_{\overline{1}|}^{(k)} \ddot{a}_{\overline{n}|} \qquad \bar{a}_{\infty} = \frac{1}{\delta}$$

2.3 累加年金現価・終価

	定義
$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{1}{d}\,\ddot{a}_{\overline{n}|} - \frac{n\,v^n}{d}$	$= \sum_{t=1}^{n} t\,v^{t-1}$
$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{1}{i}\,\ddot{a}_{\overline{n}|} - \frac{n\,v^n}{i} = \frac{1}{d}\,a_{\overline{n}|} - \frac{n\,v^n}{i}$	$= \sum_{t=1}^{n} t\,v^{t}$
$(I\ddot{s})_{\overline{n}|} = \frac{1}{d}\,\ddot{s}_{\overline{n}|} - \frac{n}{d}$	$= \sum_{t=1}^{n} t(1+i)^{n-t+1}$
$(Is)_{\overline{n}|} = \frac{1}{d}\,s_{\overline{n}|} - \frac{n}{i} = \frac{1}{i}\,\ddot{s}_{\overline{n}|} - \frac{n}{i}$	$= \sum_{t=1}^{n} t(1+i)^{n-t}$

3 生命表と生命関数

3.1 生命確率

x	：年齢	$l_x = 0 \quad \text{for } x \geq \omega$
ω	：最高年齢	$d_x = l_x - l_{x+1}$
l_x	：生存者数	$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$
d_x	：死亡者数	
p_x	：生存率	$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$
q_x	：死亡率	$p_x + q_x = 1$

n 年間生存する確率： ${}_n p_x = \dfrac{l_{x+n}}{l_x}$

n 年以内に死亡する確率： ${}_n q_x = \dfrac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$

f 年間生存し，次の 1 年以内に死亡する確率： ${}_{f|}q_x = \dfrac{d_{x+f}}{l_x}$

f 年間生存し，次の r 年以内に死亡する確率： ${}_{f|r}q_x = \dfrac{l_{x+f} - l_{x+f+r}}{l_x}$

生命確率の間の関係式：

$$ {}_{m+n}p_x = {}_m p_x \cdot {}_n p_{x+m} \qquad {}_n p_x + {}_n q_x = 1 \qquad {}_{f|r}q_x = {}_f p_x \cdot {}_r q_{x+f} = {}_f p_x - {}_{f+r}p_x $$

3.2 死力

任意の年齢 x における単位時間当たりの死亡率を死力 μ_x という.

$$ \mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{\mathrm{d}l_x}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log l_x \qquad \mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}}\frac{\mathrm{d}l_{x+t}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log l_{x+t} $$

$$ \mu_{x+t} = -\frac{1}{{}_t p_x}\frac{\mathrm{d}{}_t p_x}{\mathrm{d}t} $$

死力の定義から、$l_{x+t}\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t$ は年齢 (x) で構成された集団の時刻 t における瞬間の死亡者数を表す。ゆえに、同じことであるが ${}_t p_x \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t$ は年齢 (x) で構成された集団の時刻 t における瞬間の死亡率を表す。このことから、以下の等式を得る。

$$ \boxed{\int_0^{\omega-x} {}_t p_x \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t = 1} $$

死力を用いると生命確率がこれの積分で表される．以下の d_x の式は、死力の定義からも明らかである。

$$ {}_n p_x = -\int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad {}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t\right) $$

$$ d_x = \int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t \qquad q_x = \int_0^1 {}_t p_x \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t $$

$$ {}_n q_x = \int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t \qquad {}_{f|r}q_x = \int_f^{f+r} {}_t p_x \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t $$

$$ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_t p_x = {}_t p_x(\mu_x - \mu_{x+t}) $$

死力の近似公式も有用である．

$$2\text{ 次のオーダー：}\ \mu_x \approx \frac{l_{x-1}-l_{x+1}}{2l_x} = \frac{d_{x-1}+d_x}{2l_x}$$
$$4\text{ 次のオーダー：}\ \mu_x \approx \frac{7(d_{x-1}+d_x)-(d_{x-2}+d_{x+1})}{12l_x}$$
$$x=0\text{ における近似 1：}\ \mu_0 \approx \frac{3l_0-4l_1+l_2}{2} = \frac{3d_0-d_1}{2l_0}$$
$$x=0\text{ における近似 2：}\ \mu_0 \approx \frac{365}{7}\,\frac{3d_0-d_{7\mathrm{days}}}{2}$$

3.3 平均余命

x 際に到達した者の、その後の生存年数の平均を x 際の（完全）平均余命という。

完全平均余命において，端数を切り捨てて平均したものを略算平均余命という（略算平均余命 e を表す式は完全平均余命 $\mathring{e}$ において積分を和に変え，下端を 1 増やせばいい）．定期平均余命は x 歳のものが n 年を上限に平均何年生きれるかを示すものであり，据置平均余命は x 歳の者が f 年経過後，残りどれくらい生きれるかを与えるものである．

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} t\,l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\omega-x} t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\,\mathrm{d}t$$

$$\text{略算平均余命：}\ e_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tp_x \qquad \text{完全平均余命：}\ \mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\,\mathrm{d}t$$
$$\text{定期：}\ {}_ne_x = \sum_{t=1}^{n} {}_tp_x \qquad \text{定期：}\ {}_n\mathring{e}_x = \int_0^{n} {}_tp_x\,\mathrm{d}t$$
$$\text{据置：}\ {}_{f|}e_x = \sum_{t=f+1}^{\omega-x} {}_tp_x \qquad \text{据置：}\ {}_{f|}\mathring{e}_x = \int_f^{\omega-x} {}_tp_x\,\mathrm{d}t$$

また、以下の関係式が成立する．

$$\mathring{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\,\mu_x \qquad {}_{n|}\mathring{e}_x = {}_np_x\,\mathring{e}_{x+n} \qquad \mathring{e}_x = {}_n\mathring{e}_x + {}_{n|}\mathring{e}_x$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathring{e}_x}{\mathrm{d}x} = \mu_x\mathring{e}_x - 1 \qquad \mu_x = \frac{1}{\mathring{e}_x} + \frac{1}{\mathring{e}_x}\,\frac{\mathrm{d}\mathring{e}_x}{\mathrm{d}x}$$

3.4 開集団とその定常状態

保険集団へ新規加入者を受け入れる場合，これを開集団という．開集団の年齢構成が時間的に一定となっているとき，この集団は定常状態にあるという．定常状態にあるとき，x 歳以上の総死亡者数は l_x に等しい．すなわち，

$$d_x + d_{x+1} + \cdots d_{\omega-1} = l_x$$

3.4.1 人口と平均年齢

任意の時点で x と $x+1$ の間の総人口　$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\,\mathrm{d}t \approx l_x - \frac{d_x}{2}$

x 歳以上の総人口　$T_x = \sum_{t=x}^{\omega-1} L_t = \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\,\mathrm{d}t$

完全平均余命　$\mathring{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$

x 歳以上の 1 年間の死亡者平均年齢　$\frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} (x+s) l_{x+s}\,\mu_{x+s}\,\mathrm{d}s = x + \mathring{e}_x$

x と $x+n$ の間の 1 年間の平均死亡年齢　$x + \frac{T_x - T_{x+n} - n l_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}$

3.4.2 死亡率

x 歳以上の総人口死亡率　$\frac{l_x}{T_x} = \frac{1}{\mathring{e}_x}$

総人口死亡率　$\frac{1}{\mathring{e}_0}$

中央死亡率　$m_x = \frac{d_x}{L_x}$

x から $x+n$ の観察中央死亡率　${}_n m_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_0^n l_{x+t}\,\mathrm{d}t} \approx \frac{{}_n q_x}{n(1 - \frac{{}_n q_x}{2})}$

4　多重脱退残存表

4.1　主集団と副集団

被保険者集団から脱退するということは、集団に属するための条件を失ったことをいう。その条件は複数あってよい。このような場合の脱退残存表を多重脱退残存表という。

集団に属するための条件をすべて満たしているような集団を主集団という。一方、特定の条件だけを満たしているような集団を副集団という。A なる原因で集団を脱退した場合、これを A 脱退という。

4.2　多重脱退率、絶対脱退率

(x) の主集団から A_j 脱退するものの数を a_x^j と書くことにする。

主集団の人数：　$l_{x+1} = l_x - \sum_j a_x^j$

A_j 脱退率：　$q_x^{A_j} = \dfrac{a_x^j}{l_x}$

主集団の生存率：　$p_x^* = \dfrac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - \sum_j q_x^{A_j}$

A_j 絶対脱退率：　$q_x^{A_j *}$（その他の脱退が存在しないと仮定した場合の A_j 脱退率）

A_j 脱退力：　$\mu_x^{A_j} = \dfrac{1}{l_x} \dfrac{\mathrm{d}a_x^j}{\mathrm{d}x}$

主脱退力：　$\mu_x = \sum_j \mu_x^{A_j}$

4.2.1　2 重脱退表

$$q_x^A \approx q_x^{A*} \left(1 - \frac{1}{2}\, q_x^{B*}\right), \quad q_x^B \approx q_x^{B*} \left(1 - \frac{1}{2}\, q_x^{A*}\right)$$

4.2.2　3 重脱退表

$$\begin{aligned} q_x^A &\approx q_x^{A*} \left[1 - \frac{1}{2} \left(q_x^{B*} + q_x^{C*}\right) + \frac{1}{3}\, q_x^{B*} q_x^{C*}\right] \\ &\approx q_x^{A*} \left(1 - \frac{1}{2}\, q_x^{B*} - \frac{1}{2}\, q_x^{C*}\right) \approx q_x^{A*} \left(1 - \frac{1}{2}\, q_x^{B*}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\, q_x^{C*}\right) \end{aligned}$$

$$q_x^{A*} \approx \frac{q_x^A}{1 - \frac{1}{2}\, q_x^B - \frac{1}{2}\, q_x^C}$$

第 II 部
純保険料

5 計算基数と生命年金

5.1 計算基数

$$D_x = v^x l_x \qquad N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t} \qquad C_x = v^{x+1} d_x \qquad M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}$$

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} N_{x+t} \qquad R_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} M_{x+t} \qquad \bar{C} = v^{x+\frac{1}{2}} d_x \qquad \bar{M}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \bar{C}_{x+k}$$

$$D_x = N_x - N_{x+1} \qquad C_x = M_x - M_{x+1} \qquad N_x = S_x - S_{x+1} \qquad M_x = R_x - R_{x+1}$$

$$\boxed{C_x = vD_x - D_{x+1}} \qquad \boxed{M_x = vN_x - N_{x+1} = D_x - dN_x}$$

$$\sum_{t=1}^{n} tD_{x+t} = S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{t=0}^{n-1} tD_{x+t}\\ =&S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\\ =&S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n}\end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^{n} t\,C_{x+t} = R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{t=0}^{n-1} t\,C_{x+t}\\ =&R_{x+1} - R_{x+n} - (n-1)M_{x+n}\\ =&R_{x+1} - R_{x+n+1} - nM_{x+n}\end{aligned}$$

5.2 生命年金現価

有期： $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$ $\qquad a_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$

終身： $\ddot{a}_x = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_x}{D_x}$ $\qquad a_x = \lim_{n\to\infty} a_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$

据置： ${}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_{x+f} - N_{x+f+n}}{D_x}$ $\qquad {}_{f|}a_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_{x+f+1} - N_{x+f+n+1}}{D_x}$

年 k 回： ${}_{f|}\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{t=0}^{nk-1} v^{f+\frac{t}{k}}\, {}_{f+\frac{t}{k}}p_x$ $\qquad {}_{f|}a^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{t=1}^{nk} v^{f+\frac{t}{k}}\, {}_{f+\frac{t}{k}}p_x$

連続払：
$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \lim_{k\to\infty} \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \lim_{k\to\infty} a^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x \,\mathrm{d}t = \int_0^n \mathrm{e}^{-\int_0^t (\delta+\mu_{x+s})\,\mathrm{d}s} \,\mathrm{d}t$$

5.3 生命年金終価

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \qquad {}_{f|}\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n+f}}$$

$$s_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \qquad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\,\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$$

ただし，ここでの据置は n 年経過後から更に f 年間利殖するという意である.

5.4 生命年金と計算基数の関係式

$$a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{D_{x+n}}{D_x} - 1 \qquad \boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}$$

$$D_x\,a_{x:\overline{n}|} = D_{x+1}\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n}|} \qquad {}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{f}|}}\,\ddot{a}_{x+f:\overline{n}|}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n+1}|} - 1 \qquad {}_{f|}a_x = {}_{f+1|}\ddot{a}_x$$

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

$$vp_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} \qquad vq_x = \frac{C_x}{D_x}$$

5.5 累加・累減生命年金現価

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x} = \sum_{t=1}^{n} t\,\frac{D_{x+t-1}}{D_x}$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{nN_x - (S_{x+1} - S_{x+n+1})}{D_x}$$

上限が $m(< n)$ の累加年金

$$(I_{\overline{m}|}\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x} = (I\ddot{a})_{x:\overline{m}|} + m\,\frac{D_{x+m}}{D_x}\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$$

m から下限が 1 の累減年金

$$(D_{\overline{m}|}\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{mN_x - (S_{x+1} - S_{x+m}) - N_{x+n}}{D_x} = (D\ddot{a})_{x:\overline{m}|} + \frac{D_{x+m}}{D_x}\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$$

6 一時払い純保険料

保険期間 1 年の生存保険、定期保険の保険料（自然保険料）は特に簡単で、それぞれ vp_x, vq_x と表される。

6.1 代表的な保険種類とその一時払い純保険料

生存保険

$$A_{x:\overset{\,1}{\overline{n|}}} = v^n {}_np_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

x 歳加入，保険期間 n の生存保険の一時払純保険料

定期保険

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \boxed{\sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q_x} = v\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}}$$

x 歳加入，保険期間 n，保険金年末払い有期定期保険の一時払純保険料

定期保険（保険料年 k 回支払い）

$$A^{1\,(k)}_{x:\overline{n|}} = 1 - d^{(k)}\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n|}} - v^n {}_np_x$$

x 歳加入，保険期間 n，保険金期末払い，保険料年 k 回払い有期定期保険の一時払純保険料

定期保険（保険金即時払い）

$$\begin{aligned}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} &= \lim_{k\to\infty} A^{1\,(k)}_{x:\overline{n|}} = A^{1\,(\infty)}_{x:\overline{n|}} \\ &= \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t = 1 - \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n|}} - v^n {}_np_x \approx \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x}\end{aligned}$$

x 歳加入，保険期間 n，保険金即時払い有期定期保険の一時払純保険料

終身保険

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

x 歳加入，保険金年末払い終身保険の一時払純保険料

養老保険

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = A^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n|}}} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q_x + v^n {}_np_x$$

x 歳加入，保険期間 n，保険金年末払い養老保険の一時払純保険料

その他の養老保険

$$A^{(k)}_{x:\overline{n|}} = A^{1\,(k)}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n|}}}, \quad \bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n|}}}$$

6.2 養老保険の一時払い純保険料に関する重要な関係式

$$\boxed{A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x$$

$$A^{(k)}_{x:\overline{n}|} = 1 - d^{(k)}\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} \qquad A^{(k)}_x = 1 - d^{(k)}\ddot{a}^{(k)}_x$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} \qquad \bar{A}_x = 1 - \delta\,\bar{a}_x$$

$$\boxed{(IA)_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - d\cdot(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}$$

6.3 累加・累減定期保険

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x} \qquad (IA)_{x:\overline{n}|} = (IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + nA_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;\,1}$$

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x}$$

$$(I_{\overline{m}|}A)^{1}_{x:\overline{n}|} = (IA)^{1}_{x:\overline{m}|} + m\,\frac{D_{x+m}}{D_x}\,A^{1}_{x+m:\overline{n-m}|}$$

同一年度での死亡保険金は一定だが，保険金は即時払いのときの一時払純保険料を $(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|}$ とかく．ここで，$(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|}$ は $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}$ において $M \to \bar{M}$ などとしたものに（近似的に）等しい．

また，もっと一般的に時刻 t での死亡に対し，保険金 t を即時に支払うときは，

$$(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t\,v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t$$

となる．

6.4 完全生命年金

通常の生命年金では、期末で生存していることを条件に支給が行われる。したがって、その前までに死亡した場合はその保険年度の給付は行われない。ゆえに、年度内の異なる時点で死亡してもその年金現価は変わらない。受給者にとってこれは納得のいかないものであるから、これを点を解消した年金が誕生した。すなわち、死亡が起こった保険年度中の生存期間に応じた給付を付け加える。このような生命年金を完全生命年金

$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}$ という。年 k 回払いの場合、定義と計算から以下の等式を得る。

$$\begin{aligned}
\mathring{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} + \alpha^{(k)} \\
\alpha^{(k)} &= \sum_{t=0}^{nk-1} \int_0^{\frac{1}{k}} s v^{\frac{t}{k}+s} \ {}_{\frac{t}{k}+s}p_x \, \mu_{x+\frac{t}{k}+s} \, \mathrm{d}s \\
&\approx \frac{1}{2k} \, \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{12k^2} \left(\mu_x - v^n \, {}_np_x \, \mu_{x+n} \right) \\
\mathring{a}_{x:\overline{n}|} &\approx \frac{\delta}{i} \, \bar{a}_{x:\overline{n}|} \\
\bar{A}_{x:\overline{n}|} &\approx 1 - i \, \mathring{a}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}$$

6.5 種々の近似式

$$\begin{aligned}
\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} &\approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{k-1}{2k} \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \\
&\qquad - \frac{k^2-1}{12k^2} \left[\delta \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) + \left(\mu_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \, \mu_{x+n} \right) \right] \\
\ddot{a}^{(k)}_x &\approx \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} - \frac{k^2-1}{12k^2} \left(\delta + \mu_x \right) \\
A^{1\,(k)}_{x:\overline{n}|} &\approx (1+i)^{\frac{k-1}{2k}} A^{1}_{x:\overline{n}|} \\
A^{(k)}_{x:\overline{n}|} &\approx A_{x:\overline{n}|} + \frac{k-1}{2k} \, i \, A^{1}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}$$

7 年払い保険料

7.1 平準保険料

年払い平準保険料は収支相等の原則により求められる．すなわち，求めたい平準保険料を P，対応する保険商品の一時払い保険料を A とすると，$P\ddot{a} = A$ が成り立つ．毎年初めに支払う同一金額の保険料．保険期間 n と保険料払込期間 m が等しいとき全期払いといい，$m < n$ の場合短期払いという．

生存保険

- 全期払： $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \dfrac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
- 短期払： ${}_mP_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \dfrac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$

定期保険

- 全期払： $P^{1}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$

- 短期払： ${}_mP^{1}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$

定期保険（保険金即時払い）

- 全期払： $\bar{P}^{1}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \dfrac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$

- 短期払： ${}_m\bar{P}^{1}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \dfrac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$

終身保険

- 全期払： $P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x} = \dfrac{M_x}{N_x}$
- 短期払： ${}_mP_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \dfrac{M_x}{N_x - N_{x+m}}$

終身保険（保険金即時払い）

- 全期払： $\bar{P}_x = \dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} = \dfrac{\bar{M}_x}{N_x}$
- 短期払： ${}_m\bar{P}_x = \dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \dfrac{\bar{M}_x}{N_x - N_{x+m}}$

養老保険

$$\text{e.g. } P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P^{1}_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}, \quad \bar{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \quad {}_m\bar{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}},$$

$${}_mP^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{(k)}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|}}, \quad {}_m\bar{P}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|}}, \quad \boxed{P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d},$$

$$P^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}} - d^{(k)}, \quad \bar{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} - \delta$$

なお、$\bar{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} = P^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}$ である。

年払い定期保険の支出額（保険金）の、第 t 保険年度における終価は $P^{1}_{x:\overline{t}|}\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$ である。これは次節の責任準備金を表す際に必要となるので、別の記号を割り当てておくと便利である。

$$P^{1}_{x:\overline{t}|}\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|} = \frac{M_t - M_{x+t}}{D_{x+t}} = {}_tk_x$$

同様に ${}_t\bar{k}_x$ も定義する。

8　責任準備金（純保険料式）

8.1　記法

対象となる保険商品の純保険料を X とするとき，t 年経過後の責任準備金を ${}_tV(X)$ と表す．特に，${}_mP_{x:\overline{n}|}$ などの年払い純保険料の場合は，${}^m_tV_{x:\overline{n}|}$ などと略して表す．

8.2　一般的性質

x 歳加入, 保険期間 n のある保険の純保険料を $X_{x:\overline{n}|}$ とすると，${}_tV(X_{x:\overline{n}|}) = X_{x+t:\overline{n-t}|}$ が成り立つ．これは将来法による結果である．

また，過去法と将来法によって得られるそれぞれの結果は当然ながら一致する．ここで，過去法による計算とは，責任準備金を計算する直前における「過去の収入から支出を引いた額の終価を生存者一人当たりで求めた額」であり，将来法による計算は「将来の支出から収入を引いた額の現価を生存者一人当たりで求めた額」のことである．なお，責任準備金は一人当たりの額であることに注意しておく．

8.3　養老保険の責任準備金

養老保険の責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ を過去法と将来法による方法で求めた結果を挙げる：

過去法	$\dfrac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} P_{x:\overline{n}|} - \dfrac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}$	$=$	$P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|} - {}_tk_x$
将来法	$\dfrac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - \dfrac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} P_{x:\overline{n}|}$	$=$	$\boxed{A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$

短期払いの場合、将来法による責任準備金は以下のように場合分けされる：

$$
{}^m_t\bar{V}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_m\bar{P}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & (t < m) \\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} & (t \geq m) \end{cases}
$$

8.4　重要な関係式

- ${}_t\bar{V}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} = {}_tV^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}$

- $\boxed{{}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}$,　${}_t\bar{V}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$,
$${}^m_tV^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} - d\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right)$$
- 再帰式：$\boxed{{}_{t-1}V + {}_tP - E_{t-1} - vq_{x+t-1}S_t = vp_{x+t-1}\,{}_tV}$
ただし，${}_tP, E_{t-1}, S_t$ はそれぞれ第 t 年度の保険料，$t-1$ 年後の生存者に支払う給付，第 t 年度の死亡に対してその年度末に支払う給付であり，これらは毎年異なった値をもってもよい.
- ファクラーの再帰式：${}_tV = u_{x+t-1}({}_{t-1}V + {}_tP - E_{t-1}) - k_{x+t-1}S_t$
ここで，$u_{x+t} = \dfrac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}, k_{x+t} = \dfrac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}}$ はファクラーの累積因子と呼ばれる.
- 保険料の分解式：$\boxed{P_{x:\overline{n}|} = \underbrace{vq_{x+t-1}(1 - {}_tV_{x:\overline{n}|})}_{\text{危険保険料}{}_tP^r} + \underbrace{(v\,{}_tV_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|})}_{\text{貯蓄保険料}{}_tP^s}}$
より一般的には、$P = vq_{x+t-1}(S_t - {}_tV) + E_{t-1} + (v_tV - {}_{t-1}V)$ と書ける。
即時払いのときは，それぞれ次のようになる：
$$\begin{cases} {}_t\bar{P}^r = v^{\frac{1}{2}}q_{x+t-1}(1 - v^{\frac{1}{2}}\,{}_t\bar{V}_{x:\overline{n}|}) \\ {}_t\bar{P}^s = v\,{}_t\bar{V}_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}\bar{V}_{x:\overline{n}|} \end{cases}$$
- Thiele の微分方程式：連続払い保険料 ${}_tP^{(\infty)}$ を考えたとき、次の微分方程式が成立する。
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_tV^{(\infty)} = {}_tP^{(\infty)} + (\delta + \mu_{x+t})_tV^{(\infty)} - \mu_{x+t}S_t}$$

第 III 部
営業保険料と実務上の責任準備金

9　営業保険料

営業保険料は純保険料と付加保険料の合計であり，それぞれ $P^*, P,\ P^e = P^* - P$ で表す．営業保険料は収支相等の原理より導かれる．純保険料の場合と異なり，様々な経費が支出に繰り込まれる.

	予定事業費	依存性	期間
α	予定新契約費	保険金	第一保険年度
β	予定集金費	保険料	払込期間
γ	予定維持費	保険金	払込期間
γ'	予定維持費	保険金	保険期間

9.1 保険料の算式（保険金即時払い養老保険）

- 全期払　$\bar{P}^*_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta\bar{P}^*_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

$$\bar{P}^*_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{1-\beta}\left(\bar{P}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \gamma\right)$$

- 短期払　${}_m\bar{P}^*_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta{}_m\bar{P}^*_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|})$

$$\boxed{{}_m\bar{P}^*_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{1-\beta}\left[{}_m\bar{P}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + \gamma + \gamma'\left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} - 1\right)\right]}$$

- 分割払　${}_m\bar{P}^{(k)*}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta{}_m\bar{P}^{(k)*}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|} + \gamma\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|} + \gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|})$

$${}_m\bar{P}^{(k)*}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{1-\beta}\left({}_m\bar{P}^{(k)}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|}} + \gamma + \gamma'\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|}}\right)$$

10 責任準備金

10.1 修正純保険料式

修正純保険料式責任準備金を計算するための正味の純保険料は平準ではない. [*1]

10.1.1 チルメル式

第一保険年度の正味純保険料を P_1，それ以降のチルメル期間の正味純保険料を P_2 としたとき，$P_2 - P_1 = \alpha$ をチルメル割合という.

短期チルメル

$${}^m_t\bar{V}^{[hz]}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \boxed{{}^m_t\bar{V}_{x:\overline{n}|} - \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}} & (t < h) \\ {}^m_t\bar{V}_{x:\overline{n}|} & (t \geq h) \end{cases}$$

[*1] なお，修正純保険料式責任準備金という名は試験にはでない.

$$P_2 = {}_m\bar{P}_{x:\overline{n|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}}, \qquad P_1 = {}_m\bar{P}_{x:\overline{n|}} - \alpha\left(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}}\right)$$

全期チルメル

$${}^m_t\bar{V}^{[z]}_{x:\overline{n|}} = {}^m_t\bar{V}_{x:\overline{n|}} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}$$

$t = 0$ で形式的に ${}^m_0\bar{V}^{[z]}_{x:\overline{n|}} = -\alpha$ となるが，実務上は負の責任準備金を 0 とみなす．

10.1.2　初年度定期式

短期チルメル式で $t = 1$ のとき，$V = 0$ となるように求めたチルメル割合を用いる．

$$\begin{aligned}{}^m_t\bar{V}^{[PT]}_{x:\overline{n|}} &= {}^{m-1}_{t-1}\bar{V}_{x+1:\overline{n-1|}} \quad (t \geq 1)\\ \alpha &= ({}_{m-1}\bar{P}_{x+1:\overline{n-1|}} - {}_m\bar{P}_{x:\overline{n|}})\ddot{a}_{x:\overline{m|}} = \underbrace{{}_{m-1}\bar{P}_{x+1:\overline{n-1|}}}_{P_2} - \underbrace{v^{\frac{1}{2}}q_x}_{P_1}\end{aligned}$$

10.2　充足保険料式

予定事業費から，安全割増や営業利益を除いた保険料を充足保険料[*2]といい，これを収入として考える．すると，収支相等の原理より以下の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}{}^m_t\bar{V}^{[A]}_{x:\overline{n|}} &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} + \beta\,{}_m\bar{P}^*_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} + \gamma\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} + \gamma'(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}})\\ &\quad - {}_m\bar{P}^*_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}\\ &= \begin{cases} {}^m_t\bar{V}_{x:\overline{n|}} - \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} + \gamma'\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}\right) & (t < m)\\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} + \gamma'\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} & (t \geq m)\end{cases}\end{aligned}$$

また，全期払い（$\gamma' = 0$）のときは全期チルメル式と一致する．i.e. ${}_t\bar{V}^{[A]}_{x:\overline{n|}} = {}_t\bar{V}^{[z]}_{x:\overline{n|}}$.

10.3　調整純保険料式

充足保険料式において，γ' だけ[*3]を考えたときの責任準備金を調整純保険料式責任準備金という．

$$\boxed{{}^m_t\bar{V}^{[I]}_{x:\overline{n|}} = {}^m_t\bar{V}_{x:\overline{n|}} + {}^m_tV^{[\gamma]}_{x:\overline{n|}}, \quad {}^m_tV^{[\gamma]}_{x:\overline{n|}} = \gamma'\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}\right)}$$

[*2] 営業保険料計算時の予定事業費との役割は同じだが，値は一般に小さくなる．

[*3] γ は収入された年度に消費される．責任準備金は将来への蓄えだから，これに γ を勘定する必要はない．つまり，γ' は払込後の維持費であり，払込後は収入がないので蓄える必要がある．それ故に責任準備金に取り込まれる．

ここで，${}^{m}_{t}V^{[\gamma]}_{x:\overline{n}|}$ を事業費責任準備金といい，これを用いると充足保険料式も簡単に表せる．

$$\boxed{{}^{m}_{t}\bar{V}^{[A]}_{x:\overline{n}|} = {}^{m}_{t}\bar{V}^{[z]}_{x:\overline{n}|} + {}^{m}_{t}V^{[\gamma]}_{x:\overline{n}|} = {}^{m}_{t}\bar{V}^{[I]}_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}$$

11　解約

11.1　解約返戻金

$$ {}_{t}W = \begin{cases} {}^{t}V^{[I]} - \sigma\,\dfrac{10-t}{10} & (t<10) \\ {}^{t}V^{[I]} & (t \geq 10) \end{cases} $$

11.2　保険料振替貸付条件

${}_{t}L$ を貸付金総額とすると，次の条件が満たされるならば貸付可能である：$({}_{t}L + P)(1+i') \leq {}_{t+1}W$．ここで，$i'$ は保険料計算時の予定利率と異なってもよい．

11.3　払済保険

保険料の払い込みをやめ，当該保険契約を継続する代わりに，保険金を変更する．変更した保険金（払済保険金額）を S とすると，${}_{t}W - {}_{t}L = S(X_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma'\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})$ が成り立つ．ここで，$X_{x+t:\overline{n-t}|}$ 当該保険の一時払い保険料を表す．

11.4　延長保険

当該保険契約を解約し，解約返戻金で保険期間 T（延長期間）の定期保険，または定期付き生存保険を契約する保険である．その際，新たな保険料収集は行わない．

$T < n-t$ の場合

延長期間が残余期間未満の場合，定期保険のみを購入する．

$$ {}_{t}W = \bar{A}_{\overset{1}{x+t}:\overline{T}|} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{T}|} $$

ただし，$\gamma'^{(1)}$ は γ' の死亡に関する項である．

$T \geq n-t$ の場合

残余期間を延長期間とし，保険金額 S' の生存保険を購入する．

$$ {}_tW - (\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}^{1} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}) = S'(A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ \ \ \ 1} + \gamma'^{(2)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}) $$

ここで，$\gamma'^{(2)}$ は γ' の生存に関する項であり，$\gamma' = \gamma'^{(1)} + \gamma'^{(2)}$ が成立する．

もし貸付金があるならば，解約返戻金から差し引き，$1 - {}_tL$ を定期保険金額に設定することが多い．i.e.

$$ ({}_tW - {}_tL) - (1 - {}_tL)(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}^{1} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}) = S'(A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ \ \ \ 1} + \gamma'^{(2)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}) $$

11.5 転換

11.5.1 払済保険を購入する方法

旧契約の責任準備金で新契約と同一保険期間の払済保険を購入する．その保険金額は $S' = \dfrac{{}_t\bar{V}}{\bar{X}_{x:\overline{n}|} + \gamma'\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ となる．ただし，ここでの x, n は新契約時での年齢と新保険期間である．新契約の保険料は，新契約保険金額 S と S' の差で計算される．すなわち，$\bar{P}^{*}_{x:\overline{n}|}(S - S')$．

この保険の s 経過時点での責任準備金は次のようになる：$(S - S')_s\bar{V}_{x:\overline{n}|} + S'{}_s\bar{V}$．

11.5.2 生命年金を購入する方法

転換時点での責任準備金で生命年金を購入し，支払われる年金を保険料に充てる．したがって，新契約の保険料は $\bar{P}^{*}_{x:\overline{n}|}S - \dfrac{{}_t\bar{V}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ となる．

このときの責任準備金は $S\,{}_s\bar{V}_{x:\overline{n}|} + \dfrac{{}_t\bar{V}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+s:\overline{n-s}|}$ となる．

第 IV 部
連合生命

12　2 人連生確率

12.1　共存，非共存

t 年後に共存	${}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_x, \quad {}_{s+t}p_{xy} = {}_tp_{xy} \cdot {}_tp_{x+s,y+s}$
t 年後に非共存	${}_tq_{xy} := 1 - {}_tp_{xy} = q_{xy} + {}_{1\|}q_{xy} + \cdots + {}_{t-1\|}q_{xy}$
$[t, t+1]$ で初めて非共存	${}_{t\|}q_{xy} := \dfrac{l_{x+t,y+t} - l_{x+t+1,y+t+1}}{l_{xy}} = {}_tp_{xy} - {}_{t+1}p_{xy}$

12.2　死亡，単生命

t 年内に全滅	${}_tq_{\overline{xy}} := {}_tq_x \cdot {}_tq_y = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{xy}$
	$= q_{\overline{xy}} + {}_{1\|}q_{\overline{xy}} + \cdots + {}_{t-1\|}q_{\overline{xy}}$
t 年後に生存者あり	${}_tp_{\overline{xy}} := 1 - {}_tq_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}$
$[t, t+1]$ で全滅	${}_{t\|}q_{\overline{xy}} = {}_tp_{\overline{xy}} - {}_{t+1}p_{\overline{xy}} = {}_{t\|}q_x + {}_{t\|}q_y - {}_{t\|}q_{xy}$

12.3　死力

$$\mu_{x+t,y+t} := -\frac{1}{l_{x+t,y+t}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l_{x+t,y+t} = -\frac{1}{{}_tp_{xy}}\frac{\mathrm{d}\,{}_tp_{xy}}{\mathrm{d}t} = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$$

$$ {}_{t|}q_{xy} = \int_t^{t+1} {}_sp_{xy}\,\mu_{x+s,y+s}\,\mathrm{d}s, \qquad {}_tq_{xy} = \int_0^t {}_sp_{xy}\,\mu_{x+s,y+s}\,\mathrm{d}s$$

$$\mu_{\overline{x+t,y+t}} := -\frac{1}{{}_tp_{\overline{xy}}}\frac{\mathrm{d}\,{}_tp_{\overline{xy}}}{\mathrm{d}t} = \frac{{}_tp_x \cdot {}_tq_y}{{}_tp_{\overline{xy}}}\,\mu_{x+t} + \frac{{}_tq_x \cdot {}_tp_y}{{}_tp_{\overline{xy}}}\,\mu_{y+t}$$

$$ {}_{t|}q_{\overline{xy}} = \int_t^{t+1} {}_sp_{\overline{xy}}\,\mu_{\overline{x+s,y+s}}\,\mathrm{d}s, \qquad {}_tq_{\overline{xy}} = \int_0^t {}_sp_{\overline{xy}}\,\mu_{\overline{x+s,y+s}}\,\mathrm{d}s$$

12.4　平均余命

共存の継続を考える場合：

$$e_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tp_{xy}, \qquad \mathring{e}_{xy} = \int_0^{\infty} {}_sp_{xy}\,\mathrm{d}s \approx e_{xy} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\,\mu_{xy}$$

最終死亡者を考える場合：

$$e_{\overline{xy}} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tp_{\overline{xy}}, \qquad \mathring{e}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} {}_sp_{\overline{xy}}\,\mathrm{d}s \approx e_{\overline{xy}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\,\mu_{\overline{xy}}$$

13　連生確率（3 人以上）

13.1　共存，非共存

t 年後に全員生存	${}_tp_{xyz\cdots(m)} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot {}_tp_z \cdots$
t 年内に非共存	${}_tq_{xyz\cdots(m)} := 1 - {}_tp_{xyz\cdots(m)}$
$[t, t+1]$ で非共存	${}_{t\|}q_{xyz\cdots(m)} = {}_tp_{xyz\cdots(m)} - {}_{t+1}p_{xyz\cdots(m)}$

13.2　死亡，単生命

t 年内に全滅	${}_tq_{\overline{xyz\cdots(m)}} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y \cdot {}_tq_z \cdots$
t 年後に生存者あり	${}_tp_{\overline{xyz\cdots(m)}} := 1 - {}_tq_{\overline{xyz\cdots(m)}}$
$[t, t+1]$ で全滅完了	${}_{t\|}q_{\overline{xyz\cdots(m)}} = {}_tp_{\overline{xyz\cdots(m)}} - {}_{t+1}p_{\overline{xyz\cdots(m)}}$
t 年後に m 人中 r 人が生存	${}_tp^{[r]}_{\overline{xyz\cdots(m)}} = \sum_{\sigma(r)} {}_tp_{\sigma(r)} \cdot {}_tq_{\overline{\sigma(m)-\sigma(r)}}$
	${}_tp^{[m]}_{\overline{xyz\cdots(m)}} = {}_tp_{xyz\cdots(m)}$
	ここで，$\sigma(r) = x_1x_2\cdots(r)$ は m 人中 r 人の組合わせを意味し，和はその組合わせすべてについてとる．
t 年後に r 人以上生存	${}_tp^{r}_{\overline{xyz\cdots(m)}} = \sum_{i=r}^{m} {}_tp^{[i]}_{\overline{xyz\cdots(m)}}$

13.3　組み合わせ

何人かの部分共存を考え、全体の生存を考えることがある。例えば、(x) と組み合わせ $\{(y),(z)\}$ のどちらかが生存する確率は $p_{x,\overline{yz}}$ と書く。定義より、

$${}_tp_{x,\overline{yz}} = {}_tp_x \cdot {}_tp_{\overline{yz}} = {}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} - {}_tp_{xyz}$$

が成立する。

14　条件付き連生確率

被保険者の年齢の上下に付いた数字は志望の順番を表し、上付きは観察期中、下付きは任意の時刻の死亡を表す。以下で具体的な例を挙げてみる。

- $[t, t+1]$ で 1 番目に (x) が死亡し、その瞬間に (y) が生存している確率：

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} = \int_t^{t+1} {}_sp_{xy}\mu_{x+s}\,\mathrm{d}s = {}_{t|}q_{xy} - {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}} \approx {}_{t+\frac{1}{2}}p_y \cdot {}_{t|}q_x $$

- t 年以内に (x) が死亡し、その瞬間 (y) は生存している確率：

$$ {}_tq_{\overset{1}{x}y} = \sum_{f=0}^{t-1} {}_{f|}q_{\overset{1}{x}y} = \int_0^t {}_sp_{xy}\mu_{x+s}\,\mathrm{d}s = {}_tq_{xy} - {}_tq_{x\overset{1}{y}} $$

- $[t, t+1]$ で (x) が、それ以前に (y) が死亡している確率：

$$ {}_{t|}q_{\overset{2}{x}y} = \int_t^{t+1} {}_sq_y\, {}_sp_x\mu_{x+s}\,\mathrm{d}s = {}_{t|}q_x - {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} $$

- t 年以内に $(y), (x)$ の純で死亡する確率：

$$ {}_tq_{\overset{2}{x}y} = \int_0^t {}_sp_{xy}\mu_{x+s} \cdot {}_{t-1}q_{x+s}\,\mathrm{d}s = {}_tq_x - {}_tq_{\overset{1}{x}y} = {}_tqx\overset{1}{y} - {}_tp_x \cdot {}_tq_y $$

- $[t, t+1]$ で (y) が、それ以前に (x) が死亡し、(y) の死亡時点で (z) が生存している確率：

$$ {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_t^{t+1} {}_sq_x\, {}_sp_{yz}\, \mu_{y+s}\,\mathrm{d}s = {}_{t|}q_{\overset{1}{y}z} - {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}z} $$

- $(x), (y), (z)$ の順で死亡し、(z) の死亡が $[t, t+1]$ で起きる確率：

$$ {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} = \int_t^{t+1} {}_sq_{x\overset{2}{y}}\, {}_sp_z\, \mu_{z+s}\,\mathrm{d}s $$

- t 年以内に $(x), (y), (z)$ の順で死亡する確率：

$$ {}_tq_{\overset{1}{x}\overset{2}{y}\overset{3}{z}} = {}_tq_{\overset{1}{y}z} - {}_tq_y\, {}_tp_z - {}_tq_{x\overset{1}{y}z} + {}_tq_{x\overset{1}{y}}\, {}_tp_z = {}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} - {}_tq_{x\overset{2}{y}}\, {}_tp_z $$

- (x) が 1 番に死亡し、$[t, t+1]$ で (y) が 2 または 3 番目に死亡、その時点で (z) が生存している確率：

$$ {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2:3}{y}z} = {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} + {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{3}{y}\underset{2}{z}} $$

- m 人中、$[t, t+1]$ で r 番目に (x) が死亡する確率（その他の生死は考えない）：

$$ {}_{t|}q^{r}_{xyz\cdots(m)} = \int_t^{t+1} {}_sp^{[m-r]}_{\overline{yz\cdots(m-1)}}\, {}_sp_x\, \mu_{x+s}\,\mathrm{d}s $$

- t 年以内に m 人中 r 番目に (x) が死亡する確率（その他の生死は考えない）：

$$ {}_{t}q^{r}_{xyz\cdots(m)} = \sum_{f=0}^{t-1} {}_{f|}q^{r}_{xyz\cdots(m)} = \int_0^t {}_{s}p_{\overline{yz\cdots(m-1)}}^{\;[m-r]}\, {}_{s}p_x\, \mu_{x+s}\, \mathrm{d}s $$

- $[t, t+1]$ で (x) が死亡し、$(y), (z)$ の最終生存者がその時点で生存している確率：

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{x},\overline{yz}} = \int_t^{t+1} {}_{s}p_{\overline{yz}}\, {}_{s}p_x\, \mu_{x+s}\, \mathrm{d}s = {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} + {}_{t|}q_{\overset{1}{x}z} - {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yz} $$

- $[t, t+1]$ で (x) が死亡し、その時点で既に $(y), (z)$ が全滅している確率：

$$ {}_{t|}q_{\overset{2}{x},\overline{yz}} = \int_t^{t+1} (1 - {}_{s}p_{\overline{yz}})\, {}_{s}p_x\, \mu_{x+s}\, \mathrm{d}s = {}_{t|}q_x - {}_{t|}q_{\overset{1}{x},\overline{yz}} = {}_{t|}q_{\overset{3}{x}yz} $$

- $[t, t+1]$ で $(x), (y)$ の最終生存者が死亡（全滅）し、その時点で (z) が生存している確率：

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{\overline{xy}},z} = \int_t^{t+1} {}_{s}p_z\, {}_{s}p_{\overline{xy}}\, \mu_{\overline{x+s},\overline{y+s}}\, \mathrm{d}s = {}_{t|}q_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z} + {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} $$

- $[t, t+1]$ で $(x), (y)$ の共存が破れ（どちらかが死亡）、その時点で (z) が生存している確率：

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{\overline{xy}},z} = \int_t^{t+1} {}_{s}p_z\, {}_{s}p_{xy}\, \mu_{x+s,y+s}\, \mathrm{d}s = {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yz} + {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}z} $$

15 連生年金、連生保険

連生を考えた場合、自然とそれに対応した年金や保険を考えることができる。それらの表式は単生命のそれとほとんど同じであるため、容易に拡張することができる。一方で、単生命にはない連生の性質を生かした種々の年金や保険もある。それらを表す複雑な記号は、連生確率での p や q を a, A, P, V で置き換えただけであり、前節でその意味を詳しく紹介したので容易に理解できるはずである。したがって、この節では初めの数点だけを詳しく述べるだけにとどめておく。

15.1 連生年金、連生保険

15.1.1 連生有期年金

$(x), (y)$ 共に生存している限り支払う年金を連生有期年金という。例えば、支払い期間 n 年の年金金額 1 に対する期始払い連生有期年金を $\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}$ と表す。すぐわかるよ

うに、これは $\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\, {}_tp_{xy}$ である。同様に期末払い $a_{xy:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tp_{xy}$ や終身 $\ddot{a}_{xy} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{xy:\overline{n|}}$ もある。その他の関係式も単生命の場合と同様に成り立つ。

$$\ddot{a}^{(k)}_{xy:\overline{n|}} \approx \ddot{a}_{xy:\overline{n|}} - \frac{k-1}{2k}(1 - v^n\, {}_np_{xy}), \quad \bar{a}_{xy:\overline{n|}} = \int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\,\mathrm{d}t$$

15.1.2 連生生存保険

$(x), (y)$ 共に n 年間生存した場合に保険金 1 が支払われるような生存保険の一時払い純保険料は、$A_{xy:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n\, {}_np_{xy}$ と表される。

15.1.3 連生定期定期

$(x), (y)$ のどちらかが死亡した場合に保険金が支払われるような定期保険の一時払い純保険料を $A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}}$ と書き、以下の等式を満たす。

$$A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\, {}_{t|}q_{xy} = v\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}} = 1 - d\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} - v^n\, {}_np_{xy}$$

共に死亡した場合に保険金が支払われるような定期保険 $A_{\overset{1}{\overline{\overline{xy}}}:\overline{n|}}$ は後述する。

15.1.4 連生養老定期

連生養老保険の場合も、単生命の場合と同様な関係式が成り立つ。

$$A_{xy:\overline{n|}} = A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} + A_{xy:\overset{1}{\overline{n|}}} = 1 - d\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}$$
$$A^{(k)}_{xy:\overline{n|}} = A^{(k)}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} + A_{xy:\overset{1}{\overline{n|}}} = 1 - d^{(k)}\,\ddot{a}^{(k)}_{xy:\overline{n|}}$$
$$\bar{A}_{xy:\overline{n|}} = 1 - \delta\,\bar{a}_{xy:\overline{n|}}$$
$$P_{xy:\overline{n|}} = \frac{A_{xy:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}} = \frac{1}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}} - d$$
$${}_tV_{xy:\overline{n|}} = A_{x+t,y+t:\overline{n-t|}} - P_{xy:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}$$

15.2 連生計算基数

計算基数についても連生の場合に拡張することができる。以下のその定義を示し、それらを用いて保険料を表す。

$$D_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)}\, l_{xy} = v^{\frac{x}{2}}\, l_x \cdot v^{\frac{y}{2}}\, l_y$$
$$N_{xy} = D_{xy} + D_{x+1,y+1} + \dots$$
$$C_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+1}\, d_{xy}, \qquad \bar{C}_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}}\, d_{xy}$$
$$M_{xy} = \sum_{t=0} C_{x+t,y+t}, \qquad \bar{M}_{xy} = \sum_{t=0} \bar{C}_{x+t,y+t}$$
$$\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} = \frac{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$
$$A_{xy:\overline{n}|} = \frac{M_{xy} - M_{x+n,y+n} + D_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$
$${}_m\bar{P}_{xy:\overline{n}|} = \frac{\bar{M}_{xy} - \bar{M}_{x+n,y+n} + D_{x+n,y+n}}{N_{xy} - N_{x+m,y+m}}$$

15.3 最終生存者連生保険・年金

この年金・保険は、最終生存者の生死に関するものである。その表式は前節までの表式において $xy \to \overline{xy}$ などという置き換えで得られる。ゆえに、ここでは新しい関係式を挙げておく。

$$\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} \qquad A^{\ 1}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} + A^{\ 1}_{y:\overline{n}|} - A^{\ 1}_{xy:\overline{n}|}$$
$$\ddot{a}_{x,\overline{yz}:\overline{n}|} = \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} + \ddot{a}_{xz:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xyz:\overline{n}|} \qquad a_{\overset{[r]}{\overline{xyz\cdots(m)}}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_{\overset{[r]}{\overline{xyz\cdots(m)}}}$$

15.4 遺族年金、復帰年金

15.4.1 遺族年金

2 人の連生を考え、一方の被保険者の死亡時点から年金を開始し、他方の被保険者が生存する限り年金が支給されるような年金を遺族年金という。例えば、(x) の死亡後、その年末から (y) が生存する限り金額 1 を期末に支給し、n 年経過後は支給を打ち切るような遺族年金現価を $a_{x|y:\overline{n}|}$ と表す。このとき、

$$a_{x|y:\overline{n}|} = a_{y:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{n}|}$$

が成立し、終身の場合や分割支給、連続支給の場合においても同様な等式が成立する。

15.4.2　復帰年金

遺族年金の適用範囲を広げたものを復帰年金という。その具体例を以下に挙げる。

- (x) の死亡後、$(y),(z)$ が共存する限り第 n 保険年度末まで毎年末に 1 を支払う年金の現価：

$$a_{x|yz:\overline{n}|} = a_{yz:\overline{n}|} - a_{xyz:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_y \, v^t \, {}_tp_z \, \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|}$$

- (x) の死亡後、$(y),(z)$ のどちらかが生存する限り第 n 保険年度末まで毎年末に 1 を支払う年金の現価：

$$a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|} = a_{\overline{yz}:\overline{n}|} - a_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}$$

- $(x),(y)$ の最終生存者が死亡後、(z) が生存する限り第 n 保険年度末まで毎年末に 1 を支払う年金の現価：

$$a_{\overline{xy}|z:\overline{n}|} = a_{z:\overline{n}|} - a_{\overline{xy},z:\overline{n}|}$$

- 保険料を年払いとし、支給が開始されるまで払い込む場合、上記のような復帰年金の年払い保険料：

$$\frac{a_{x|yz:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|}}, \quad \frac{a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}}, \quad \frac{a_{\overline{xy}|z:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{xy},z:\overline{n}|}}$$

- 契約から $m(<n)$ 年以内に (x) が死亡の場合はその年度末から、m 年後に生存している場合はその時点から開始するような復帰年金現価と年払い保険料：

$$a_{x:\overline{m}||y:\overline{n}|} = a_{y:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{m-1}|}, \quad \frac{a_{x:\overline{m}||y:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xy:\overline{m}|}}$$

- (x) の死亡直後に支給を開始するような、即時開始復帰年金現価（ただし、死亡は平均して年央で発生）：

$$\hat{a}_{x|y:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\overset{1}{x}y} \, v^{t-\frac{1}{2}} \, \ddot{a}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1}|}$$

15.5　条件付き連生保険・年金

$A_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|}$ と書けば、保険期間である n 年以内に (x) が (y) より先に死亡した場合に限り保険金を支払うような条件付定期保険の一時払い純保険料を意味する。年払いの場合は $\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$ で除すると得られる。また、

$$C_{\overset{1}{x}y} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+1} d_x \, l_{y+\frac{1}{2}} \qquad M_{\overset{1}{x}y} = \sum C_{\overset{1}{x+t},y+t}$$

$$\bar{C}_{\overset{1}{x}y} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}} d_x \, l_{y+\frac{1}{2}} \qquad \bar{M}_{\overset{1}{x}y} = \sum \bar{C}_{\overset{1}{x+t},y+t}$$

と条件付計算基数を定義しておくと、$A_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|} = \dfrac{\bar{M}_{\overset{1}{x}y} - \bar{M}_{\overset{1}{x+n},y+n}}{D_{xy}}$ が成立する。その他、様々な条件を付けて様々な保険や年金を考えることができる。例えば、$A_{\overset{3}{x}\underset{2}{y}\underset{1}{z}:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \, {}_{t|}q_{\overset{3}{x}\underset{2}{y}\underset{1}{z}}$ は n 年以内に $(z), (y), (x)$ の順に死亡した場合のみ保険金 1 が支払われるような定期保険を表す。

第 V 部
就業不能に関する諸給付