Таблица 3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ω_i	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
φ_i	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
β_i	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
B_i	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$	
Y_i	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$	
y_i	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0

5. Прогонка для трехточечных уравнений с постоянными коэффициентами. Обратимся снова к методу матричной прогонки для трехточечных уравнений и рассмотрим частный случай таких уравнений, а именно:

$$-\boldsymbol{Y}_{j-1}+C\boldsymbol{Y}_j-\boldsymbol{Y}_{j+1}=\boldsymbol{F}_j, \qquad 1\leqslant j\leqslant N-1, \qquad \boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{F}_0, \quad \boldsymbol{Y}_N=\boldsymbol{F}_N, \tag{38}$$

где C — квадратная матрица размера $M\times M$, а $\boldsymbol{Y}_j$ и $\boldsymbol{F}_j$ — искомый и заданный векторы размерности M.

В п. 1 было показано, что к системе трехточечных уравнений вида (38) сводится разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольной сетке, заданной в прямоугольнике, причем матрица C будет симметричной и трехдиагональной. Далее, в п. 2 § 4 было показано, что метод матричной прогонки, имеющий для (38) вид

$$\alpha_{j+1}=(C-\alpha_j)^{-1}, \qquad j=1, 2, \ldots, N-1, \qquad \alpha_1=0, \tag{39}$$

$$\beta_{j+1}=\alpha_{j+1}(\boldsymbol{F}_j+\beta_j), \qquad j=1, 2, \ldots, N-1, \qquad \beta_1=\boldsymbol{F}_0, \tag{40}$$

$$\boldsymbol{Y}_j=\alpha_{j+1}\boldsymbol{Y}_{j+1}+\beta_{j+1}, \quad j=N-1, N-2, \ldots, 1, \quad \boldsymbol{Y}_N=\boldsymbol{F}_N, \tag{41}$$

является корректным и устойчивым. Там же было показано, что собственные значения матрицы C больше 2:

$$\lambda_k=\lambda_k(C)=2+4\frac{h_2^2}{h_1^2}\sin^2\frac{k\pi h_1}{2l_1}>2. \tag{42}$$

Напомним, что в случае общих трехточечных векторных уравнений для алгоритма матричной прогонки требуется $O(M^3N)$ арифметических действий для вычисления матриц α_j и $O(M^2N)$ действий для вычисления прогоночных векторов β_j и решения $\boldsymbol{Y}_j$. Для хранения полных и, вообще говоря, несимметричных матриц α_j необходимо запомнить $M^2(N+1)$ элементов этих матриц. Уменьшаются ли эти величины, если методом матричной прогонки решать специальную трехточечную векторную систему (38) с постоянными коэффициентами?

Для рассматриваемого примера все матрицы α_j будут симметричными в силу симметрии матрицы C, но хотя C есть трехдиагональная матрица, все матрицы α_j, $j\geqslant 2$, будут полными. Следовательно, можно уменьшить, учитывая симметрию матриц α_j, только объем промежуточной запоминаемой информации, но не более чем вдвое. Порядок числа арифметических действий по M и N не изменится.

Построим теперь модификацию алгоритма (39)—(41), которая не требует дополнительной памяти для хранения промежуточной информации и реализуется с затратой $O(MN^2)$ арифметических действий, если решается задача (38) с трехдиагональной матрицей C.

Сначала найдем явный вид прогоночных матриц α_j для любого j. Для этого, используя (39), выразим α_j через матрицу C.

Замечая, что

$$\alpha_1=0,\quad \alpha_2=C^{-1},\quad \alpha_3=(C^2-E)^{-1}C, \tag{43}$$

будем искать решение нелинейного разностного уравнения (39) в виде

$$\alpha_j=P_{j-1}^{-1}(C)\,P_{j-2}(C),\qquad j\geqslant 2, \tag{44}$$

где $P_j(C)$ — полином от C степени j. Перепишем (39) в виде

$$\alpha_{j+1}(C-\alpha_j)=E,\qquad j\geqslant 2,$$

и подставим сюда (44). Получим рекуррентное соотношение $P_j(C)=CP_{j-1}(C)-P_{j-2}(C)$, $j\geqslant 2$, или после сдвига индекса на единицу и учета (43)

$$\begin{aligned} &P_{j+1}(C)=CP_j(C)-P_{j-1}(C),\qquad j\geqslant 1,\\ &P_0(C)=E,\quad P_1(C)=C. \end{aligned} \tag{45}$$

Итак, формулы (45) полностью определяют полином $P_j(C)$ для любого $j\geqslant 0$.

Найдем решение (45). Соответствующий алгебраический полином удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &P_{j+1}(t)=tP_j(t)-P_{j-1}(t),\qquad j\geqslant 1,\\ &P_0(t)=1,\quad P_1(t)=t, \end{aligned}$$

которые представляют собой задачу Коши для трехточечного разностного уравнения с постоянными коэффициентами. В п. 2 § 4 гл. I было найдено решение этой задачи $P_j(t)=U_j\left(\frac{t}{2}\right)$, $j\geqslant 0$, где $U_j(x)$ — полином Чебышева второго рода степени j

$$U_j(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin((j+1)\arccos x)}{\sin\arccos x}, & |x|\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{\operatorname{sh}((j+1)\operatorname{Arch} x)}{\operatorname{sh}\operatorname{Arch} x}, & |x|\geqslant 1. \end{cases}$$

Таким образом, явное выражение для прогоночных матриц α_j найдено:

$$\alpha_j=U_{j-1}^{-1}\left(\frac{C}{2}\right)U_{j-2}\left(\frac{C}{2}\right),\quad j\geqslant 2,\quad \alpha_1=0. \tag{46}$$

Это избавляет нас от необходимости проводить вычисления по формуле (39) прогоночных матриц α_j, на что требуется основной объем вычислительной работы в алгоритме (39) — (41). Кроме того, матрицы α_j нет необходимости запоминать.

Рассмотрим теперь формулы (40) и (41). Они содержат умножение матрицы α_{j+1} на векторы $\boldsymbol{F}_j+\beta_j$ и $\boldsymbol{Y}_{j+1}$. Покажем сейчас, как можно, не вычисляя α_j по формуле (46), определить произведение матрицы α_j на вектор. Для этого нам потребуется лемма 6, которую мы приведем без доказательства.

Лемма 6. *Пусть многочлен $f_n(x)$ степени n имеет простые корни. Отношение многочлена $g_m(x)$ степени m к многочлену $f_n(x)$ степени $n>m$ без общих корней может быть представлено в виде суммы n элементарных дробей*

$$\frac{g_m(x)}{f_n(x)}=\sum_{l=1}^{n}\frac{a_l}{x-x_l},\quad a_l=\frac{g_m(x_l)}{f_n'(x_l)},$$

где x_l — корни $f_n(x)$, а $f_n'(x)$ — производная полинома $f_n(x)$.

Используя лемму 6, найдем разложение на простые дроби отношения $\varphi(x)=\dfrac{U_{j-2}(x)}{U_{j-1}(x)}$, $j\geqslant 2$. Так как корни $U_{j-1}(x)$ есть

$$x_k=\cos\frac{k\pi}{j},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ j-1,$$

а

$$U_{j-2}(x_k)=(-1)^{k-1},\qquad \frac{d}{dx}[U_{j-1}(x_k)]=\frac{j(-1)^{k-1}}{\sin^2\frac{k\pi}{j}},$$

то в силу леммы 6 имеем следующее разложение для $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{U_{j-2}(x)}{U_{j-1}(x)}=\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\sin^2\frac{k\pi}{j}}{j}\left(x-\cos\frac{k\pi}{j}\right)^{-1}. \tag{47}$$

Из (46) и (47) следует еще одно представление для матриц α_j, которым мы и будем пользоваться

$$\alpha_j=\sum_{k=1}^{j-1}a_{kj}\left(C-2\cos\frac{k\pi}{j}E\right)^{-1},\quad a_{kj}=\frac{2\sin^2\frac{k\pi}{j}}{j},\qquad j\geqslant 2. \tag{48}$$

Используя (48), умножение матрицы α_j на вектор $\boldsymbol{Y}$ можно осуществить по следующему алгоритму: для $k=1,\ 2,\ \ldots,\ j-1$ решаются уравнения

$$\left(C-2\cos\frac{k\pi}{j}E\right)\boldsymbol{V}_k=a_{kj}\boldsymbol{Y}, \tag{49}$$

где a_{kj} определено в (48), а результат $\alpha_j\boldsymbol{Y}$ получается последовательным суммированием векторов $\boldsymbol{V}_k$

$$\alpha_j\boldsymbol{Y}=\sum_{k=1}^{j-1}\boldsymbol{V}_k. \tag{50}$$

Заметим, что в силу (42) матрица $C-2\cos\frac{k\pi}{j}E$ является невырожденной и, кроме того, трехдиагональной, если таковой была матрица C. В этом случае каждое из уравнений (49) решается за $O(M)$ арифметических действий методом скалярной трехточечной прогонки, описанным в § 1. Следовательно, на решение всех задач (49), а также на вычисление суммы (50) потребуется $O(Mj)$ действий. Так как в (40) и (41) умножение матрицы α_j на векторы осуществляется для $j=2, 3, \ldots, N$, то модифицированный метод матричной прогонки (40), (41) и (49), (50) требует $O(MN^2)$ арифметических действий.

Итак, построен *модифицированный метод матричной прогонки*, позволяющий найти решение разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике с затратой $O(MN^2)$ арифметических действий. Уменьшение числа действий по сравнению с исходным алгоритмом (39) — (41) достигнуто за счет учета специфики решаемой задачи.

В последующих двух главах мы рассмотрим другие прямые методы решения указанной задачи и ей подобных разностных задач, которые будут требовать еще меньшего числа действий, чем построенный здесь метод.

ГЛАВА III
МЕТОД ПОЛНОЙ РЕДУКЦИИ

В данной главе изучается метод решения специальных сеточных эллиптических уравнений — метод полной редукции. Этот прямой метод позволяет найти решение разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике за $O(N^2 \log_2 N)$ арифметических действий, где N — число узлов сетки по каждому направлению.

В § 1 дана постановка краевых задач для разностных уравнений, для решения которых можно использовать метод редукции. В § 2 изложен алгоритм метода для случая первой краевой задачи, а в § 3 рассмотрены примеры применения метода. В § 4 дано обобщение метода на случай общих краевых условий.

§ 1. Краевые задачи для трехточечных векторных уравнений

1. Постановка краевых задач. В главе II для решения трехточечных скалярных и векторных уравнений были построены методы скалярной и матричной прогонок. Метод матричной прогонки для уравнения с переменными коэффициентами реализуется с затратой $O(M^3N)$ арифметических действий, где N — число уравнений, а M — размерность векторов неизвестных (число неизвестных в задаче равно MN). Для специальных классов векторных уравнений, соответствующих, например, разностной задаче Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике, был предложен модифицированный алгоритм метода матричной прогонки. Этот алгоритм позволяет сократить число действий до $O(MN^2)$.

Данная глава посвящена дальнейшему изучению прямых методов решения специальных векторных уравнений, к которым сводятся разностные схемы для простейших эллиптических уравнений. Будет построен метод *полной редукции*, позволяющий решать основные краевые задачи с затратой $O(MN \log_2 N)$ арифметических действий. Если не учитывать слабую логарифмическую зависимость от N, то число действий для этого метода пропорционально числу неизвестных MN. Создание этого метода является существенным шагом в развитии как прямых, так и итерационных методов решения сеточных уравнений.

Сформулируем краевые задачи для трехточечных векторных уравнений, решение которых можно найти по методу полной редукции. Мы будем рассматривать следующие задачи: