

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
Институт компьютерных наук и кибербезопасности  
**«Высшая школа программной инженерии»**

**Курсовая работа**

по дисциплине «Разработка программного обеспечения для  
моделирования физических процессов»

Выполнил

студент  
гр.5130904/10101



Абраамян А. М.

Руководитель

Воскобойников С. П.

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_\_ г.

Санкт-Петербург  
2025

## Оглавление

### Оглавление

Постановка задачи.....	3
Дискретная модель.....	3
Построение главной матрицы.....	6
Решение $Aw=g$ .....	7
Тестовый пример.....	11
Вектор невязки.....	11
Пример 1.....	15
Пример 2.....	17
Пример 3.....	18
Вывод.....	19
Исходный код.....	21

## Постановка задачи

Используя интегро-интерполяционный метод, разработать программу для моделирования распределения температуры в бруске, описываемого математической моделью:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=f(x,y),$$

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad 0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2$$

и граничными условиями вида:

$$\begin{aligned} u|_{x=a} &= g_1(y), & -k_1 \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=b} &= \chi u|_{x=b} - g_2(y), \\ u|_{y=c} &= g_3(x), & u|_{y=d} &= g_4(x) \end{aligned}$$

Для построения и тестирования модели будет использоваться язык C++.

/\*Ы

## Дискретная модель

Введём обозначения:

$N$  - число разбиений интервала  $[X_a, X_b]$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

$$x_{i-1/2} = (x_i + x_{i-1})/2$$

$$\bar{h}_i = \begin{cases} \frac{h_i+1}{2}, & i = 0 \\ \frac{h_i+h_{i+1}}{2}, & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \frac{h_i}{2}, & i = N \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнение для промежутка, не включая границы:

$$-\left(\int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx dy + \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy\right) = \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x,y) dx dy$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1 \quad j = 1, \dots, N_y - 1$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} \left( (k_1(x_{i+0.5}) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+0.5}}) - (k_1(x_{i-0.5}) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_{i-0.5}}) \right) dy + \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy \right) = \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x, y) dx dy \\
& \quad i = 1, \dots, N_x - 1 \quad j = 1, \dots, N_y - 1 \\
& \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(x, y) dx dy = h_x h_y f_{ij} \quad \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \phi dx = h_x \phi \\
& k_1(x_{i+0.5}) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+0.5}, y=y_j} = k_1(x_{i+0.5}) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} \\
& \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{x=x_i, y=y_{j+0.5}} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} \\
& -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = \chi u \Big|_{x=b} - g_2(y) \quad \rightarrow \quad k_1(x_{i+0.5}) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} = \chi u \Big|_{x=b} - g_2(y) \quad i = N_x - 1
\end{aligned}$$

По формуле центральных разностей и по формуле **средних** прямоугольников получаем разностную схему:

$$\begin{aligned}
1. \quad & - \left[ h_y k_1(x_{i+1/2}) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} - h_y k_1(x_{i-1/2}) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_x} + h_x \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} - h_x \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y} \right] = h_x h_y f_{ij} \\
& \quad i = 1, \dots, N_x - 1 \quad j = 1, \dots, N_y - 1
\end{aligned}$$

$$2. \quad v_{i,j} = \mu_1(y_j) \quad i=0; \quad j=1, \dots, N_y - 1;$$

3. Подставляя граничное условие 3 рода получаем

$$\begin{aligned}
& - \left[ -h_y (\chi_2 v_{i,j} - \mu_2(y_j)) - h_y k_1(x_{i-1/2}) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_x} + \frac{h_x}{2} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} - \frac{h_x}{2} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y} \right] = \frac{h_x}{2} h_y f_{ij} \\
& \quad i = N_x; \quad j = 1, \dots, N_y - 1;
\end{aligned}$$

$$4. \quad v_{i,j} = \mu_3(x_i) \quad j=0; \quad i=1, \dots, N_x - 1;$$

$$5. \quad v_{i,j} = \mu_4(x_i) \quad j=N_y; \quad i=1, \dots, N_x - 1;$$

Домножим первое уравнение на  $h_y$  и разделим на  $h_x$ , получим:

$$1. \quad - \left[ h_y^2 k_1(x_{i+1/2}) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x^2} - h_y^2 k_1(x_{i-1/2}) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_x^2} + v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1} \right] = h_y^2 f_{ij}$$

$$2. \quad v_{i,j} = \mu_1(y_j) \quad i=0; \quad j=1, \dots, N_y - 1;$$

Домножим третье уравнение на  $2h_y$  и разделим на  $h_x$ , получим

$$3. \quad - \left[ -2h_y^2 (\chi_2 v_{i,j} - \mu_2(y_j)) - 2h_y^2 k_1(x_{i-1/2}) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_x^2} + v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1} \right] = h_y^2 f_{ij}$$

$$4. \quad v_{i,j} = \mu_3(x_i) \quad j=0; \quad i=1, \dots, N_x - 1;$$

$$5. \quad v_{i,j} = \mu_4(x_i) \quad j=N_y; \quad i=1, \dots, N_x - 1;$$

Теперь заменим двухразмерную  $v$  на одномерную  $w$  с помощью следующего преобразования

$$j=0, 1, \dots, N_y; \quad i=0, 1, \dots, N_x; \quad m = jL + i + 1, \quad L = N_x + 1$$

$$v_{i,j-1} \rightarrow w_{m-L} \quad v_{i-1,j} \rightarrow w_{m-1} \quad v_{i,j} \rightarrow w_m \quad v_{i+1,j} \rightarrow w_{m+1} \quad v_{i,j+1} \rightarrow w_{m+L}$$

Получаем для первого:

$$-\left[h_y^2 k_1(x_{i+1/2}) \frac{w_{m+1} - w_m}{h_x^2} - h_y^2 k_1(x_{i-1/2}) \frac{w_m - w_{m-1}}{h_x^2} + w_{m-L} - 2w_m + w_{m+L}\right] = h_y^2 f_m$$

$$a_m w_{m-L} + b_m w_{m-1} + c_m w_m + d_m w_{m+1} + e_m w_{m+L} = g_m,$$

$$a_m = -1,$$

$$b_m = -\frac{h_y^2}{h_x^2} k_1(x_{i-1/2})$$

$$c_m = 2 + \frac{h_y^2}{h_x^2} k_1(x_{i-1/2}) + \frac{h_y^2}{h_x^2} k_1(x_{i+1/2}) \quad d_m = -\frac{h_y^2}{h_x^2} k_1(x_{i+1/2}) \quad e_m = -1 \quad g_m = h_y^2 f_m$$

Для второго:

$$w_m = \mu_1(y_j) \quad c_m w_m = g_m, \quad a_m = 0, \quad b_m = 0 \quad c_m = 1 \quad d_m = 0 \quad e_m = 0 \quad g_m = \mu_1(y_j)$$

Для третьего:

$$-\left[-2h_y^2(\chi_2 w_m - \mu_2(y_j)) - 2h_y^2 k_1(x_{i-1/2}) \frac{w_m - w_{m-1}}{h_x^2} + w_{m+L} - 2w_m + w_{m-L}\right] = h_y^2 f_m$$

$$-w_{m-L} - \frac{2h_y^2}{h_x^2} k_1(x_{i-1/2}) w_{m-1} + \left(\frac{2h_y^2}{h_x^2} k_1(x_{i-1/2}) + 2 + 2h_y^2 \chi_2\right) w_m - w_{m+L} = h_y^2 f_{ij} + 2h_y^2 \mu_2(y_j)$$

$$a_m = -1,$$

$$b_m = -\frac{2h_y^2}{h_x^2} k_1(x_{i-1/2}) \quad c_m = 2 + \frac{h_y^2}{h_x^2} k_1(x_{i-1/2}) + 2h_y^2 \chi_2 \quad d_m = 0 \quad e_m = -1$$

$$g_m = h_y^2 f_m + 2h_y^2 \mu_2(y_j)$$

Для четвертого:

$$w_m = \mu_3(x_i) \quad c_m w_m = g_m, \quad a_m = 0, \quad b_m = 0 \quad c_m = 1 \quad d_m = 0 \quad e_m = 0 \quad g_m = \mu_3(x_i)$$

Для пятого:

$$w_m = \mu_4(x_i) \quad c_m w_m = g_m, \quad a_m = 0, \quad b_m = 0 \quad c_m = 1 \quad d_m = 0 \quad e_m = 0 \quad g_m = \mu_4(x_i)$$

Получим более упрощенный вариант главной матрицы:

7	8	9	10	12	13	14	15	17	18	19	20
---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

*	*			*							
*	*	*			*						
	*	*	*			*					
		*	*				*				
*				*	*			*			
	*			*	*	*			*		
		*			*	*	*			*	
			*			*	*				*
				*				*	*		
					*			*	*	*	
						*			*	*	*
							*			*	*

$$j = 1, 2, \dots, N_y - 1;$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x;$$

$$m = (j - 1)L + i,$$

$$L = N_x$$

## Решение $Aw=g$

Для решения заданной системы уравнений воспользуемся методом полной редукции. Приведем основные формулы

$$\begin{cases} V_0 = F_0, \\ -V_{j-1} + CV_j - V_{j+1} = F_j, & j = 1, 2, \dots, N_y - 1 \\ V_{N_y} = F_{N_y}, \end{cases} \quad N_y = 2^n$$

$$C \in R^{(N_x + 1) \times (N_x + 1)}, \quad F, V_j \in R^{(N_x + 1)},$$

$$C^{(0)} = C, \quad F_j^{(0)} = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1$$

$$\begin{cases} V_0 = F_0, \\ -V_{j-1} + C^{(0)}V_j - V_{j+1} = F_j^{(0)}, & j = 1, 2, \dots, N_y - 1 \\ V_{N_y} = F_{N_y}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
- V_{j-2} + C^{(0)} V_{j-1} - V_j &= F_{j-1}^{(0)}, \\
- V_{j-1} + C^{(0)} V_j - V_{j+1} &= F_j^{(0)}, \quad j=2,4,6,\dots,N_y-2 \\
- V_j + C^{(0)} V_{j+1} - V_{j+2} &= F_{j+1}^{(0)}
\end{aligned}$$

$$\frac{N_y}{2} - 1$$

$$- V_{j-2} + C^{(0)} V_j - V_{j+2} = F_j^{(0)}, \quad j=2,4,6,\dots,N_y-2$$

$$C^{(0)} = [C^{(0)}]^2 - 2E$$

$$F_j^{(0)} = F_{j-1}^{(0)} + C^{(0)} F_j^{(0)} + F_{j+1}^{(0)}, \quad j=2,4,6,\dots,N_y-2$$

$$C^{(0)} V_j = F_j^{(0)} + V_{j-1} + V_{j+1}, \quad j=1,3,5,\dots,N_y-1$$

$$\begin{aligned}
- V_{j-4} + C^{(1)} V_{j-2} - V_j &= F_{j-2}^{(1)}, \\
- V_{j-2} + C^{(1)} V_j - V_{j+2} &= F_j^{(1)}, \quad j=4,8,12,\dots,N_y-4 \\
- V_j + C^{(1)} V_{j+4} - V_{j+4} &= F_{j+2}^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\frac{N_y}{4} - 1$$

$$- V_{j-4} + C^{(2)} V_j - V_{j+4} = F_j^{(2)}, \quad j=4,8,12,\dots,N_y-4$$

$$C^{(2)} = [C^{(1)}]^2 - 2E$$

$$F_j^{(2)} = F_{j-2}^{(1)} + C^{(1)} F_j^{(1)} + F_{j+2}^{(1)}, \quad j=4,8,12,\dots,N_y-4$$



$$\begin{aligned}
- V_{j-4} + C^{(1)} V_{j-2} - V_j &= F_{j-2}^{(1)}, \\
- V_{j-2} + C^{(1)} V_j - V_{j+2} &= F_j^{(1)}, \quad j=4,8,12,\dots,N_y-4 \\
- V_j + C^{(1)} V_{j+4} - V_{j+2} &= F_{j+2}^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\frac{N_y}{4} - 1$$

$$- V_{j-4} + C^{(2)} V_j - V_{j+4} = F_j^{(2)}, \quad j=4,8,12,\dots,N_y-4$$

$$C^{(2)} = [C^{(1)}]^2 - 2E$$

$$F_j^{(2)} = F_{j-2}^{(1)} + C^{(1)} F_j^{(1)} + F_{j+2}^{(1)}, \quad j=4,8,12,\dots,N_y-4$$

Метод полной редукции. Прямой ход.

$$k=1,2,\dots,n-1$$

$$- V_{j-2^k} + C^{(k)} V_j - V_{j+2^k} = F_j^{(k)}, \quad j=2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, \dots, N_y - 2^k$$

$$V_0 = F_0, \quad V_{N_y} = F_{N_y},$$

$$C^{(k)} = [C^{(k-1)}]^2 - 2E$$

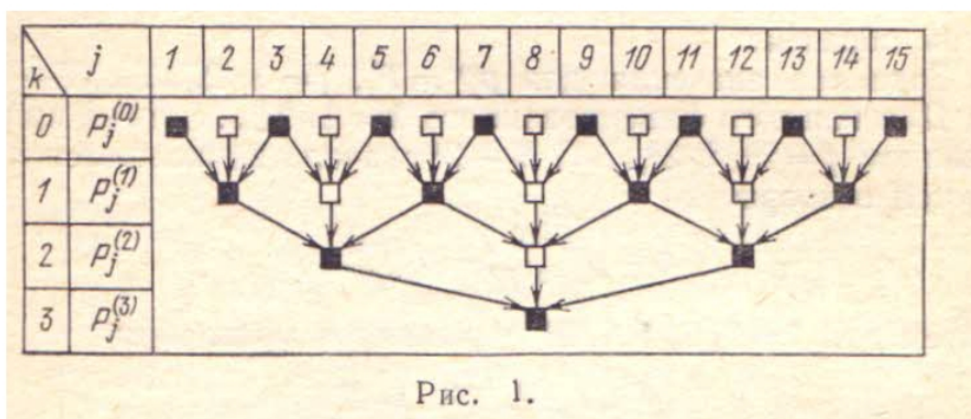
$$F_j^{(k)} = F_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + C^{(k-1)} F_j^{(k-1)} + F_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}, \quad j=2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, \dots, N_y - 2^k$$

$$k=n-1$$

$$j=2^{n-1}, N_y - 2^{n-1} \quad N_y - 2^{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1} \quad j=2^{n-1} = \frac{N_y}{2}$$

$$- V_0 + C^{(n-1)} V_j - V_{N_y} = F_j^{(n-1)}, \quad C^{(n-1)} V_j = F_j^{(n-1)} + V_0 + V_{N_y},$$

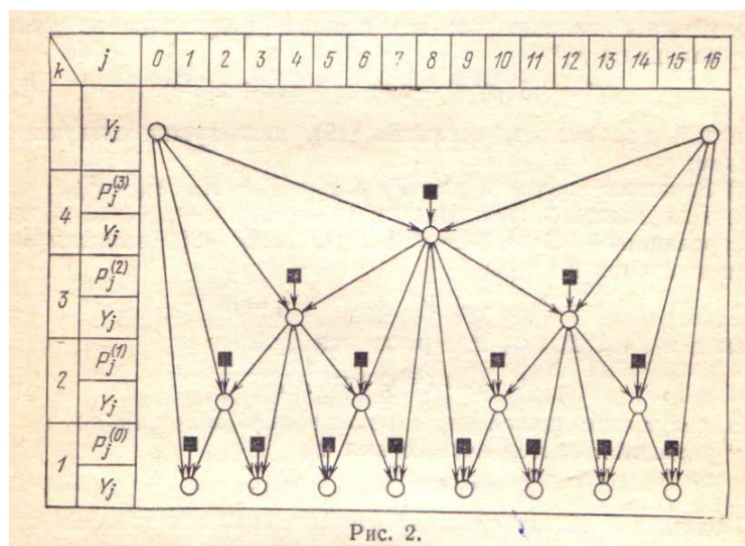
# Метод полной редукции. Прямой ход.



## Метод полной редукции. Обратный ход.

$$k = n, n - 1, \dots, 1$$

$$C^{(k-1)} V_j = F_j^{(k-1)} + V_{j-2^{k-1}} + V_{j+2^{k-1}}, \quad j = 2^{k-1}, 3 \cdot 2^{k-1}, 5 \cdot 2^{k-1}, \dots, N_y - 2^{k-1}$$



## Тестовый пример

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ожидаемое решение:

$$b = \begin{bmatrix} -0.72 \\ -1.39 \\ -1.72 \\ 2.22 \\ 1.28 \\ 0.94 \\ 5.61 \end{bmatrix}$$

## Вектор невязки

Для оценки погрешности примененного метода найдем формулу для вектора невязки

$$\begin{aligned} \varepsilon &= f(x, y) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ \varepsilon &= f(x, y) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ \varepsilon &= \left[ h_y k_1(x_{i+1/2}) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} - h_y k_1(x_{i-1/2}) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_x} + h_x \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} - h_x \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y} \right] + h_x h_y f_{ij} \\ i &= 1, \dots, N_x - 1 \quad j = 1, \dots, N_y - 1 \\ v_{i+1,j} &= v(x_i + h_x, y_j) = v_{i,j} + h_x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + h_x^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + h_x^3 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + h_x^4 \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + O(h_x^5) \\ \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} &= \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + h_x \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + h_x^2 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + h_x^3 \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + O(h_x^4) \\ k_{i+0.5} &= k(x_i + \frac{h_x}{2}) = k_i + \frac{h_x}{2} \frac{dk_i}{dx} + \frac{h_x^2}{8} \frac{d^2 k_i}{dx^2} + \frac{h_x^3}{48} \frac{d^3 k_i}{dx^3} + O(h_x^4) \\ k_{i+0.5} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x} &= k_i \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x}{2} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} k_i + \frac{h_x^2}{8} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x^2}{4} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \frac{dk_i}{dx} + \frac{h_x^2}{6} k_i \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} \\ &\quad + \frac{h_x^3}{24} k_i \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h_x^3}{12} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h_x^3}{16} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h_x^3}{48} \frac{d^3 k_i}{dx^3} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + O(h_x^4) \end{aligned}$$

$$v_{i-1,j}=v(x_i-h_x, y_j)=v_{i,j}-h_x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}+h_x^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}-h_x^3 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3}+h_x^4 \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4}+O(h_x^5)$$

$$\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_x}=\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}-\frac{h_x}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}+h_x^2 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3}-h_x^3 \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4}+O(h_x^4)$$

$$k_{i+0.5}=k(x_i+\frac{h_x}{2})=k_i-\frac{h_x}{2} \frac{dk_i}{dx}+\frac{h_x^2}{8} \frac{d^2 k_i}{dx^2}-\frac{h_x^3}{48} \frac{d^3 k_i}{dx^3}+O(h_x^4)$$

$$k_{i+0.5} \frac{v_{i-1,j}-v_{i,j}}{h_x}=k_i \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}-\frac{h_x}{2} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}-\frac{h_x}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} k_i+\frac{h_x^2}{8} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}+\frac{h_x^2}{4} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \frac{dk_i}{dx}+\frac{h_x^2}{6} k_i \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3}-\frac{h_x^3}{24} k_i \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4}-\frac{h_x^3}{12} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3}-\frac{h_x^3}{16} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}-\frac{h_x^3}{48} \frac{d^3 k_i}{dx^3} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}+O(h_x^4)$$

$$v_{i,j+1}=v(x_i, y_j+h_y)=v_{i,j}+h_y \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y}+h_y^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2}+h_y^3 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3}+h_y^4 \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4}+O(h_y^5)$$

$$\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_y}=\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y}+\frac{h_y}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2}+\frac{h_y^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3}+\frac{h_y^3}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4}+O(h_y^4)$$

$$v_{i,j-1}=v(x_i, y_j-h_y)=v_{i,j}-h_y \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y}+h_y^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2}-h_y^3 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3}+h_y^4 \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4}+O(h_y^5)$$

$$\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_y}=\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y}-\frac{h_y}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2}+\frac{h_y^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3}-\frac{h_y^3}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4}+O(h_y^4)$$

Подставим все выведенные формулы в изначальное уравнение

$$\varepsilon=h_y k_{i+0.5} \frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{h_x}-h_y k_{i+0.5} \frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_x}+h_x \frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_y}-h_x \frac{v_{i,j-1}-v_{i,j}}{h_y}+h_x h_y f_{i,j}$$

→

$$\begin{aligned} \varepsilon &= h_y k_i \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x}{2} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} k_i + \frac{h_x^2}{8} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x^2}{4} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \frac{dk_i}{dx} + \frac{h_x^2}{6} k_i \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} \\ &\quad + \frac{h_x^3}{24} k_i \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h_x^3}{12} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h_x^3}{16} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h_x^3}{48} \frac{d^3 k_i}{dx^3} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \\ &\quad - h_y k_i \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x}{2} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} k_i - \frac{h_x^2}{8} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} - \frac{h_x^2}{4} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \frac{dk_i}{dx} - \frac{h_x^2}{6} k_i \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} \\ &\quad + \frac{h_x^3}{24} k_i \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h_x^3}{12} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h_x^3}{16} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h_x^3}{48} \frac{d^3 k_i}{dx^3} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \\ &\quad + h_x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{h_y}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{h_y^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3} + \frac{h_y^3}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4} \\ &\quad - h_x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{h_y}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} - \frac{h_y^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3} + \frac{h_y^3}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4} + h_x h_y f_{i,j} \end{aligned}$$

Упрощаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & \frac{h_x}{2} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} k_i \\
& + \frac{h_x^3}{24} k_i \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h_x^3}{12} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h_x^3}{16} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h_x^3}{48} \frac{d^3 k_i}{dx^3} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \\
& + \frac{h_x}{2} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} k_i \\
& + \frac{h_x^3}{24} k_i \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h_x^3}{12} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h_x^3}{16} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h_x^3}{48} \frac{d^3 k_i}{dx^3} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \\
& + \frac{h_y}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{h_y^3}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4} \\
& + \frac{h_y}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{h_y^3}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4} + h_x h_y f_{i,j}
\end{aligned}$$

Еще упрощаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & h_x \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + h_x \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} k_i \\
& + \frac{h_x^3}{12} k_i \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h_x^3}{6} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h_x^3}{8} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h_x^3}{24} \frac{d^3 k_i}{dx^3} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \\
& + h_y \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{h_y^3}{12} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4} + h_x h_y f_{i,j}
\end{aligned}$$

В конце концов имеем:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & h_x \frac{\partial}{\partial x} \left( k_i \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right) \\
& + h_x^3 \left( \frac{k_i}{12} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{1}{6} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{1}{8} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{1}{24} \frac{d^3 k_i}{dx^3} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right) \\
& + h_y \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{h_y^3}{12} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4} + h_x h_y f_{i,j}
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим для границы третьего рода:

$$\varepsilon = \left[ -h_y \left( \chi_2 v_{i,j} - \mu_2(y_j) \right) - h_y k_1(x_{i-1/2}) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_x} + \frac{h_x}{2} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} - \frac{h_x}{2} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y} \right] + \frac{h_x}{2} h_y f_{ij}$$

Подставим вычисленные выше формулы

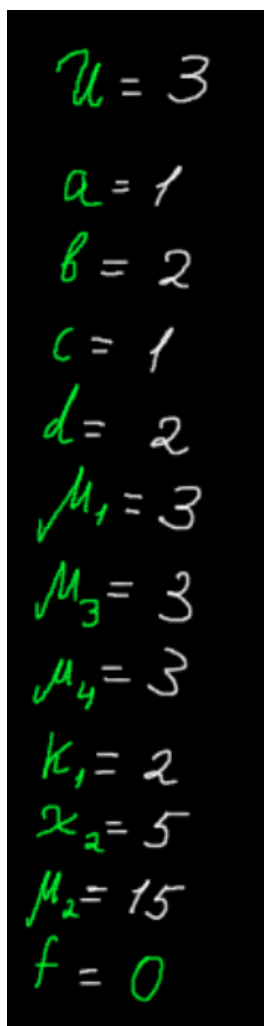
$$\begin{aligned}
\varepsilon = & -h_y \left( (x_2 v_{i,j} - \mu_2(y_j)) - k_i \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right) + \frac{h_x}{2} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} k_i - \frac{h_x^2}{8} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} - \frac{h_x^2}{4} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \frac{dk_i}{dx} - \frac{h_x^2}{6} k_i \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} \\
& + \frac{h_x^3}{24} k_i \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h_x^3}{12} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h_x^3}{16} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h_x^3}{48} \frac{d^3 k_i}{dx^3} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \\
& + h_x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{h_y}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{h_y^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3} + \frac{h_y^3}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4} \\
& - h_x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{h_y}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} - \frac{h_y^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3} + \frac{h_y^3}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4} + h_x h_y f_{i,j}
\end{aligned}$$

$$i = N_x - 1$$

Нетрудно заметить что первое слагаемое обращается в ноль и мы получаем аппроксимацию вектора невязки для граничного условия 3 рода

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{h_x}{2} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h_x}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} k_i - \frac{h_x^2}{8} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} - \frac{h_x^2}{4} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \frac{dk_i}{dx} - \frac{h_x^2}{6} k_i \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} \\ & + \frac{h_x^3}{24} k_i \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h_x^3}{12} \frac{dk_i}{dx} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h_x^3}{16} \frac{d^2 k_i}{dx^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h_x^3}{48} \frac{d^3 k_i}{dx^3} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \\ & + h_x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{h_y}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{h_y^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3} + \frac{h_y^3}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4} \\ & - h_x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{h_y}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} - \frac{h_y^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3} + \frac{h_y^3}{24} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial y^4} + h_x h_y f_{i,j} \end{aligned}$$

### Пример 1



A vertical list of handwritten mathematical constants in green ink on a black background. The constants are:  $u = 3$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 2$ ,  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_3 = 3$ ,  $\mu_4 = 3$ ,  $k_1 = 2$ ,  $x_2 = 5$ ,  $\mu_2 = 15$ , and  $f = 0$ .

$$\begin{aligned} u &= 3 \\ a &= 1 \\ b &= 2 \\ c &= 1 \\ d &= 2 \\ \mu_1 &= 3 \\ \mu_3 &= 3 \\ \mu_4 &= 3 \\ k_1 &= 2 \\ x_2 &= 5 \\ \mu_2 &= 15 \\ f &= 0 \end{aligned}$$

Данный пример нужен в основном чтобы удостовериться что в программе не допущена какая либо нелепая ошибка. Если всё написано корректно, то мы увидим достаточно хорошую точность, поскольку все входные данные здесь константы

x	y	Inaccuracy
5	5	6.68037543430942e-15
5	10	5.78876585363819e-15
5	20	6.56619844751721e-15
5	50	6.59688006695215e-15
10	5	1.18232947158736e-14
10	10	1.03951027385868e-14
10	20	1.06704455114298e-14
10	50	1.15364591896238e-14
20	5	2.05555494216064e-14
20	10	2.11079399115909e-14
20	20	2.09547941037243e-14
20	50	2.12577418495238e-14
50	5	5.07295689455837e-14
50	10	5.10268018203913e-14
50	20	5.19044594503495e-14
50	50	5.18323901360074e-14



## Пример 2

$$\begin{aligned}
 u &= 3x^3 + 2y^3 \\
 a &= 1 \\
 b &= 10 \\
 c &= 1 \\
 d &= 5 \\
 \mu_1 &= 3 + 2y^3 \\
 \mu_3 &= 3x^3 + 2 \\
 \mu_4 &= 3x^3 + 250 \\
 k_1 &= 2 \\
 x_2 &= 5 \\
 \mu_2 &= 15000 + 10y^3 + 1800 \\
 f &= -36x - 12y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2 \cdot 9 \cdot x^2 \Big|_{x=0} &= 5 \cdot (3000 + 2y^3) - \mu_2 \\
 \mu_2 &= 15000 + 10y^3 + 1800 \\
 -\left[ \frac{\partial}{\partial x} (2 \cdot 9x^2) + 12y \right] &= f \\
 -36x - 12y &= f
 \end{aligned}$$

Подготовим пример для тестирования программы. Исходная функция будет иметь 3 степень  $x$  и  $y$ , таким образом мы получили  $f$  которая зависит линейно от переменных.  $K$  возьмем константой для простоты.

В результате работы программы получаем следующие результаты:

x	y	Inaccuracy
5	5	0.011579222
5	10	0.0038637342
5	20	0.0027714943
5	50	0.0011218522
10	5	0.011180247
10	10	0.0027623034
10	20	0.0016537411
10	50	0.0010044378
20	5	0.0058799768
20	10	0.0039840064
20	20	0.0018472804
20	50	0.00085342642
50	5	0.0063509772
50	10	0.0037212081
50	20	0.0026662938
50	50	0.0010400537

Первый столбец — количество разбиений по  $X$ , второй столбец — количество разбиений по  $y$ . Последний столбец показывает максимальную

погрешность по всем столбцам и рядам. Видно что программа неплохо справилась и дала ответ с точностью до первого знака. Поскольку оригинальная функция содержала аж третью степень, то такой результат считается вполне уместным, особенно с учетом небольшого количества разбиений.

### Пример 3

Второй пример будет несколько сложнее первого в плане степеней.

Handwritten mathematical derivation for Example 3:

$$u = 10x^5 + 5y^5$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = 1$$

$$d = 2$$

$$\mu_1 = 10 + 5y^5$$

$$\mu_3 = 10x^5 + 5$$

$$\mu_4 = 10x^5 + 160$$

$$k_1 = 5x$$

$$x_2 = 10$$

$$\mu_2 = 500 \cdot 16 + 3200 + 50y^5$$

$$f = -1250x^4 - 100y^3$$

$$-5 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 2^4 = 10 \cdot 320 + 50y^5 - u_2$$

$$u_2 = 500 \cdot 16 + 3200 + 50y^5$$

$$-\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( 5x \cdot (50x^4) \right) + 100y^3 \right] = f(x, y)$$

$$-1250x^4 - 100y^3 = 0$$

Полученная максимальная погрешность является сравнительно большой, но в целом метод решения работает и он показывает очень хорошую эффективность.

x	y	Inaccuracy
5	5	26.763404
5	10	14.403224
5	20	14.272413
5	50	6.1331099
10	5	48.125373
10	10	17.154848
10	20	10.807548
10	50	5.4005383
20	5	41.039046
20	10	12.29348
20	20	13.55482
20	50	5.6462011
50	5	45.45107
50	10	25.312364
50	20	10.329059
50	50	2.6667914

## Вывод

Метод **нечётно-чётной редукции** является эффективным способом решения **пятидиагональных систем**, которые часто встречаются при дискретизации **двумерных дифференциальных уравнений в частных производных** методом конечных разностей. Этот метод значительно снижает вычислительную сложность по сравнению с прямыми методами решения, что делает его особенно полезным при решении **крупных задач**.

### Основные преимущества использования редукции

#### 1. Сведение пентадиагональной системы к трехдиагональной

- Вместо того, чтобы решать исходную систему напрямую, выполняется разбиение на **чётные и нечётные узлы**, что приводит к сокращению размерности системы и упрощает её решение.

#### 2. Снижение вычислительной сложности

- Прямое решение пятидиагональной системы с  $N$  неизвестными обычно требует  **$O(N^2)$  операций**,
- Метод редукции уменьшает сложность до  **$O(N)$**  в случае последовательного выполнения.

Хотя **последовательный алгоритм** редукции уже даёт выигрыш по скорости, его можно **существенно ускорить за счёт параллельных вычислений**.

#### 1. Разбиение системы на независимые подзадачи

- На этапе редукции можно **одновременно исключать элементы в разных частях матрицы**.
- Это позволяет эффективно использовать **многопоточные вычисления** на CPU.

#### 2. Использование GPU для ускорения решения

- Реализация метода на **графических процессорах (GPU)** с помощью **CUDA/OpenCL** позволяет распараллелить вычисления на тысячи потоков, что даёт **прирост производительности в разы**.

#### 3. Применение MPI для распределённых систем

- В случае **кластерных вычислений**, можно распределить подзадачи между узлами **МРІ**, что ускоряет решение при очень больших размерностях сетки.

## Исходный код

```

=====
File: ./src/main.cc
=====
#include <iostream>
#include <iomanip> // For std::setw, std::fixed, std::setprecision, etc.
#include <chrono>
#include <memory>

#include <Eigen/Dense>
#include <Eigen/Sparse>

#include <defines.hpp>
#include <input_parameters.hpp>
#include <default_impl/main_matrix_calculator.hpp>
#include <interval_splitter.hpp>
#include <default_impl/odd_even_reduction.hpp>
#include <utils.hpp>

auto build_main_matrix(DefaultMainMatrixCalculator const& calc) -> Eigen::SparseMatrix<double>
{
    size_t Nx = calc.interiour_x_points().size(); // Interior points in x-direction
    size_t Ny = calc.interiour_y_points().size(); // Interior points in y-direction
    size_t size = Nx * Ny; // Total unknowns (interior grid points)

    auto result = Eigen::SparseMatrix<double>(size, size);
    result.setZero(); // Initialize with zeros

    // Iterate over the interior grid
    for (size_t i = 0; i < Nx; ++i) {
        for (size_t j = 0; j < Ny; ++j) {
            size_t idx = i * Ny + j; // Correct 1D index

            // Left neighbor (i-1, j)
            if (i > 0) {
                result.insert(idx, idx - Ny) = calc.calc_a({i, j});
            }

            // Right neighbor (i+1, j)
            if (i < Nx - 1) {
                result.insert(idx, idx + Ny) = calc.calc_b({i, j});
            }

            // Bottom neighbor (i, j-1)
            if (j > 0) {
                result.insert(idx, idx - 1) = calc.calc_d({i, j});
            }

            // Top neighbor (i, j+1)
            if (j < Ny - 1) {
                result.insert(idx, idx + 1) = calc.calc_e({i, j});
            }

            // Center coefficient
            result.insert(idx, idx) = calc.calc_c({i, j});
        }
    }

    return result;
}

```

```

auto build_g_vector(DefaultMainMatrixCalculator const& calc) -> Eigen::VectorXd
{
    size_t Nx = calc.interiour_x_points().size(); // Interior points in x-direction
    size_t Ny = calc.interiour_y_points().size(); // Interior points in y-direction
    size_t size = Nx * Ny; // Total number of unknowns

    Eigen::VectorXd g(size); // Initialize vector of correct size

    // Iterate over interior grid points
    for (size_t i = 0; i < Nx; ++i) {
        for (size_t j = 0; j < Ny; ++j) {
            size_t idx = i * Ny + j; // Convert (i, j) to 1D index
            g[idx] = calc.calc_g({i, j}); // Compute g at (i, j)
        }
    }

    return g;
}

auto reduce_matrix(DefaultMainMatrixCalculator const& calc, Eigen::MatrixXd const& matrix)
-> Eigen::MatrixXd
{
    Eigen::MatrixXd reduced_matrix(matrix.rows() - 2, matrix.cols());
    for (size_t row = 1; row < calc.x_points().size(); ++row) {
        reduced_matrix.row(
            row + calc.x_points().size()
        ) = reduced_matrix.row(row + calc.x_points().size())
        - matrix.row(row) * (-matrix(row + calc.x_points().size(), row));
    }

    for (size_t row = matrix.rows() - calc.x_points().size(); row < matrix.rows(); ++row) {
        reduced_matrix.row(
            row - calc.x_points().size()
        ) = reduced_matrix.row(row - calc.x_points().size())
        - matrix.row(row) * (-matrix(row - calc.x_points().size(), row));
    }

    return reduced_matrix;
}

auto convert_w_to_v(Eigen::VectorXd const& w, DefaultMainMatrixCalculator const& calc) -> Eigen::MatrixXd {
    size_t Nx = calc.interiour_x_points().size();
    size_t Ny = calc.interiour_y_points().size();

    Eigen::MatrixXd v(Nx + 2, Ny + 2);
    v.setZero(); // Initialize with zeros

    size_t idx = 0;
    for (size_t i = 1; i <= Nx; ++i) { // Skip first & last row (boundaries)
        for (size_t j = 1; j <= Ny; ++j) { // Skip first & last column (boundaries)
            v(i, j) = w(idx++); // Fill interior solution
        }
    }

    auto params = calc.params();

    for (size_t j = 0; j < Ny + 2; ++j) {
        v(0, j) = params->u1(calc.y_points()[j]);
    }

    for (size_t j = 0; j < Ny + 2; ++j) {
        v(Nx + 1, j) = params->u2(calc.y_points()[j]);
    }

    for (size_t i = 0; i < Nx + 2; ++i) {

```

```

    v(i, 0) = params->u3(calc.x_points()[i]);
}

for (size_t i = 0; i < Nx + 2; ++i) {
    v(i, Ny + 1) = params->u4(calc.x_points()[i]);
}

return v;
}

void print_expected(DefaultMainMatrixCalculator const& calc, X_Y_Function_type expected_func) {
    const auto& x_points = calc.x_points(); // Full x grid
    const auto& y_points = calc.y_points(); // Full y grid
    size_t Nx = x_points.size();
    size_t Ny = y_points.size();

    //    Print table header (y-values at top)
    //    Print computed values in a grid format
    for (size_t i = 0; i < Nx; ++i) {
        for (size_t j = 0; j < Ny; ++j) {
            double expected_value = expected_func(x_points[i], y_points[j]); // Compute expected value
            std::cout << std::setw(10) << std::fixed << std::setprecision(4) << expected_value;
        }
        std::cout << "\n";
    }
}

void _do_all(std::shared_ptr<InputParameters> params, X_Y_Function_type expected_func)
{
    static constexpr auto x_interval_counts = {20};
    static constexpr auto y_interval_counts = {20};

    for(auto const x_count : x_interval_counts) {
        for(auto const y_count : y_interval_counts) {
            auto x_points = split_interval(params->xl, params->xr, x_count);
            auto y_points = split_interval(params->yl, params->yr, y_count);

            DefaultMainMatrixCalculator calc(params, x_points, y_points);
            auto main_matrix = build_main_matrix(calc);
            std::cout << "Main matrix: \n" << main_matrix << "\n";
            std::cout << "-----\n";
            auto g_vector = build_g_vector(calc);
            std::cout << "G vector: \n" << g_vector << "\n";
            std::cout << "-----\n";
            std::cout << "Main matrix size: " << main_matrix.rows() << "x" << main_matrix.cols() << "\n";
            std::cout << "G vector size: " << g_vector.size() << "\n";
            // Eigen::SparseLU<Eigen::SparseMatrix<double>> solver;
            // solver.compute(main_matrix);
            // Eigen::VectorXd solution = solver.solve(g_vector);
            Eigen::VectorXd solution = odd_even_reduction_solver(main_matrix, g_vector);
            std::cout << "Solution: \n" << solution << "\n";
            auto v_matrix = convert_w_to_v(solution, calc);
            std::cout << "Solution in v coordinates: \n" << v_matrix << "\n";
            std::cout << "-----\n";
            std::cout << "Expected: \n";
            print_expected(calc, expected_func);
        }
    }
}

void basic_example()
{
    std::shared_ptr<InputParameters> params = std::make_shared<InputParameters>();
    params->xl = 1;

```

```

params->xr = 10;
params->yl = 1;
params->yr = 5;

params->u1 = [](double y) { return 3 + 2 * y * y * y; };
params->u3 = [](double x) { return 3 * x * x * x + 2; };
params->u4 = [](double x) { return 3 * x * x * x + 250; };

params->k1 = [](double) { return 2; };
params->hi2 = 5;

params->u2 = [](double y) { return 15'000 + 10 * y * y * y + 1'800; };

params->f = [](double x, double y) { return -36 * x - 12 * y; };

auto expected_func = [](double x, double y) { return 3 * x * x * x + 2 * y * y * y; };

do_all1(params, expected_func);
}

int main()
{
    basic_example();
    return 0;
}

=====
File: ./src/default_impl/odd_even_reduction.cc
=====
#include <default_impl/odd_even_reduction.hpp>

Eigen::VectorXd odd_even_reduction_solver(
    Eigen::VectorXd const& a,
    Eigen::VectorXd const& b,
    Eigen::VectorXd const& c,
    Eigen::VectorXd const& rhs
)
{
    int n = rhs.size();

    if(n == 1) {
        return rhs.array() / b.array();
    }

    int n_half = n / 2;
    Eigen::VectorXd a_half(n_half), b_half(n_half), c_half(n_half), rhs_half(n_half);

    for(int i = 0; i < n_half; ++i) {
        int j = 2 * i + 1;
        double denom = b[j] - a[j] * c[j - 1] / b[j - 1];

        b_half[i] = denom;
        rhs_half[i] = rhs[j] - a[j] * rhs[j - 1] / b[j - 1];

        if(j + 1 < n) {
            a_half[i] = -a[j + 1];
            c_half[i] = -c[j - 1] * c[j] / b[j];
        }
    }

    Eigen::VectorXd x_half = odd_even_reduction_solver(a_half, b_half, c_half, rhs_half);

    Eigen::VectorXd x(n);
    for(int i = 0; i < n_half; ++i) {

```



```

    x[2 * i + 1] = x_half[i];
}

for(int i = 0; i < n_half; ++i) {
    int j = 2 * i;
    x[j] = (rhs[j] - c[j] * x[j + 1]) / b[j];
}

return x;
}

Eigen::VectorXd odd_even_reduction_solver(
    Eigen::VectorXd const& a,
    Eigen::VectorXd const& b,
    Eigen::VectorXd const& c,
    Eigen::VectorXd const& d,
    Eigen::VectorXd const& e,
    Eigen::VectorXd const& rhs
)
{
    int n = rhs.size();

    if(n == 1) {
        return rhs.array() / b.array();
    }

    int n_half = n / 2;
    Eigen::VectorXd a_half(n_half), b_half(n_half), c_half(n_half), rhs_half(n_half);

    for(int i = 0; i < n_half; ++i) {
        int j = 2 * i + 1;
        double denom = b[j] - a[j] * c[j - 1] / b[j - 1];

        b_half[i] = denom;
        rhs_half[i] = rhs[j] - a[j] * rhs[j - 1] / b[j - 1];

        if(j + 1 < n) {
            a_half[i] = -a[j + 1];
            c_half[i] = -c[j - 1] * c[j] / b[j];
        }
    }

    Eigen::VectorXd x_half = odd_even_reduction_solver(a_half, b_half, c_half, rhs_half);

    Eigen::VectorXd x(n);
    for(int i = 0; i < n_half; ++i) {
        x[2 * i + 1] = x_half[i];
    }

    for(int i = 0; i < n_half; ++i) {
        int j = 2 * i;
        x[j] = (rhs[j] - c[j] * x[j + 1]) / b[j];
    }

    return x;
}

Eigen::VectorXd
odd_even_reduction_solver(Eigen::MatrixXd const& main_matrix, Eigen::VectorXd const& b)
{
    return Eigen::VectorXd::Zero(b.size());
}

Eigen::VectorXd odd_even_reduction_solver(
    Eigen::SparseMatrix<double> const& main_matrix,

```

```

    Eigen::VectorXd const& b
)
{
    return Eigen::VectorXd::Zero(b.size());
}

=====
File: ./src/default_impl/main_matrix_calculator.cc
=====
#include <default_impl/main_matrix_calculator.hpp>

#include <cassert>

#include <contract/contract.hpp>

#include <interval_splitter.hpp>

auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_a(Index index) const -> double
{
    contract(fun) {
        precondition(index.i > 0, "index out of range"); // Prevent accessing invalid left neighbor
    };

    double dx = calc_h(interior_x_points(), index.i);
    double k_left = m_input_p->k1(middle_point(interior_x_points(), index.i - 1)); // Use i-1

    return - k_left / (dx * dx);
}

auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_b(Index index) const -> double
{
    contract(fun) {
        precondition(index.i < interior_x_points().size() - 1, "index out of range");
    };

    double dx = calc_h(interior_x_points(), index.i); // Use index.i instead of index.i + 1
    double k_right = m_input_p->k1(middle_point(interior_x_points(), index.i + 1));

    return - k_right / (dx * dx);
}

auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_c(Index index) const -> double
{
    contract(fun) {
        // precondition(index.i < interior_x_points().size() - 1, "index out of range"); // Fix boundary condition
        precondition(index.j < interior_y_points().size(), "index out of range");
    };

    double dx = calc_h(interior_x_points(), index.i);
    double dy = calc_h(interior_y_points(), index.j);

    double k_left = m_input_p->k1(middle_point(interior_x_points(), index.i - 1));
    double k_right = m_input_p->k1(middle_point(interior_x_points(), index.i + 1));

    return (k_right + k_left) / (dx * dx) + 2.0 / (dy * dy);
}

auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_d(Index index) const -> double
{
    contract(fun) {
        precondition(index.j > 0, "index out of range");
    };

    double dy = calc_h(interior_y_points(), index.j);

```

```

    return - 1.0 / (dy * dy);
}

auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_e(Index index) const -> double
{
    contract(fun) {
        precondition(index.j < interior_y_points().size() - 1, "index out of range"); // Add check
    };

    double dy = calc_h(interior_y_points(), index.j);

    return - 1.0 / (dy * dy);
}

auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_g(Index index) const -> double
{
    contract(fun) {
        precondition(index.i < interior_x_points().size(), "index out of range");
        precondition(index.j < interior_y_points().size(), "index out of range");
    };

    double dx = calc_h(interior_x_points(), index.i);
    double dy = calc_h(interior_y_points(), index.j);

    if (index.i == 0) { // Dirichlet at x = a
        return m_input_p->u1(interior_y_points()[index.j]);
    }
    else if (index.j == 0) { // Dirichlet at y = c
        return m_input_p->u3(interior_x_points()[index.i]);
    }
    else if (index.j == interior_y_points().size() - 1) { // Dirichlet at y = d
        return m_input_p->u4(interior_x_points()[index.i]);
    }
    else if (index.i == interior_x_points().size() - 1) { // Robin at x = b
        return (2.0 / dx) * (m_input_p->f(interior_x_points()[index.i], interior_y_points()[index.j])
            + m_input_p->u2(interior_y_points()[index.j]));
    }
    else { // Interior points
        return dx * dy * m_input_p->f(interior_x_points()[index.i], interior_y_points()[index.j]);
    }
}

// auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_a(Index index) const -> double
// {
//     // clang-format off
//     contract(fun) {
//         precondition(index.i != 0, "index out of range");
//         precondition(index.i < m_x_points.size(), "index out of range");
//         precondition(index.j < m_y_points.size(), "index out of range");
//     };
//     // clang-format on

//     if(index.i == 0 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == 0
//         return 0;
//     }
//     else if(index.j == 0 and index.i < m_x_points.size() - 1) { // j == 0
//         return 0;
//     }
//     else if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == Nx
//         return -1;
//     }
//     else if(index.i < m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1) { // j == Nx
//         return 0;
//     }
}

```

```

// else /*if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1)*/ {
//   return 1;
// }
// }

// auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_b(Index index) const -> double
// {
//   // clang-format off
//   contract(fun) {
//     precondition(index.i != m_x_points.size() - 1, "index out of range");
//     precondition(index.i < m_x_points.size(), "index out of range");
//     precondition(index.j < m_y_points.size(), "index out of range");
//   };
//   // clang-format on

//   auto sq = [](auto x) { return x * x; };

//   if(index.i == 0 and index.j == 0) { // i == 0 and j == 0
//     return 0; // Not too sure
//   }
//   else if(index.i == 0 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == 0
//     return 0;
//   }
//   else if(index.j == 0 and index.i < m_x_points.size() - 1) { // j == 0
//     return 0;
//   }
//   else if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == Nx
//     return -2 * sq(calc_h(m_y_points, index.j)) / sq(calc_h(m_x_points, index.i))
//       * m_input_p->k1(middle_point(m_x_points, index.i));
//   }
//   else if(index.i < m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1) { // j == Nx
//     return 0;
//   }
//   else /*if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1)*/ {
//     return sq(calc_h(m_y_points, index.j)) / sq(calc_h(m_x_points, index.i))
//       * m_input_p->k1(middle_point(m_x_points, index.i));
//   }
// }

// auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_c(Index index) const -> double
// {
//   // clang-format off
//   contract(fun) {
//     precondition(index.i < m_x_points.size(), "index out of range");
//     precondition(index.j < m_y_points.size(), "index out of range");
//   };
//   // clang-format on

//   auto sq = [](auto x) { return x * x; };

//   if(index.i == 0 and index.j == 0) { // i == 0 and j == 0
//     return 1; // Not too sure
//   }
//   else if(index.i == 0 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == 0
//     return 1;
//   }
//   else if(index.j == 0 and index.i < m_x_points.size() - 1) { // j == 0
//     return 1;
//   }
//   else if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == Nx
//     return 2
//       + sq(calc_h(m_y_points, index.j)) / sq(calc_h(m_x_points, index.i))
//       * m_input_p->k1(middle_point(m_x_points, index.i))
//       + 2 * sq(calc_h(m_y_points, index.j)) * m_input_p->hi2;
//   }
// }

```

```

// else if(index.i < m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1) { // j == Nx
//   return 1;
// }
// else /*if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1)*/ {
//   return 2
//     + sq(calc_h(m_y_points, index.j)) / sq(calc_h(m_x_points, index.i))
//     * m_input_p->k1(middle_point(m_x_points, index.i))
//     + sq(calc_h(m_y_points, index.j)) / sq(calc_h(m_x_points, index.i))
//     * m_input_p->k1(middle_point(m_x_points, index.i));
// }
// }

// auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_g(Index index) const -> double
// {
//   // clang-format off
//   contract(fun) {
//     precondition(index.i < m_x_points.size(), "index out of range");
//     precondition(index.j < m_y_points.size(), "index out of range");
//   };
//   // clang-format on

//   auto sq = [](auto x) { return x * x; };

//   if(index.i == 0 and index.j == 0) { // i == 0 and j == 0
//     return m_input_p->u1(m_y_points[index.j]); // Not too sure
//   }
//   else if(index.i == 0 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == 0
//     return m_input_p->u1(m_y_points[index.j]);
//   }
//   else if(index.j == 0 and index.i < m_x_points.size() - 1) { // j == 0
//     return m_input_p->u3(m_x_points[index.i]);
//   }
//   else if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == Nx
//     return 2 * sq(calc_h(m_y_points, index.j))
//       * m_input_p->f(m_x_points[index.i], m_y_points[index.j])
//       + 2 * sq(calc_h(m_y_points, index.j)) * m_input_p->u2(m_y_points[index.j]);
//   }
//   else if(index.i < m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1) { // j == Nx
//     return m_input_p->u4(m_x_points[index.i]);
//   }
//   else /*if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1)*/ {
//     return sq(calc_h(m_y_points, index.j)) * m_input_p->f(m_x_points[index.i], m_y_points[index.j]);
//   }
// }

// auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_d(Index index) const -> double
// {
//   // clang-format off
//   contract(fun) {
//     precondition(index.i < m_x_points.size(), "index out of range");
//     precondition(index.j < m_y_points.size(), "index out of range");
//   };
//   // clang-format on

//   auto sq = [](auto x) { return x * x; };

//   if(index.i == 0 and index.j == 0) { // i == 0 and j == 0
//     return 0; // Not too sure
//   }
//   else if(index.i == 0 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == 0
//     return 0;
//   }
//   else if(index.j == 0 and index.i < m_x_points.size() - 1) { // j == 0
//     return 0;
//   }
// }

```

```
// else if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == Nx
//   return 0;
// }
// else if(index.i < m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1) { // j == Nx
//   return 0;
// }
// else /*if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1)*/ {
//   return -sq(calc_h(m_y_points, index.j)) / sq(calc_h(m_x_points, index.i))
//     * m_input_p->k1(middle_point(m_x_points, index.i + 1));
// }
// }
```

```
// auto DefaultMainMatrixCalculator::calc_e(Index index) const -> double
```

```
// {
//   // clang-format off
//   contract(fun) {
//     precondition(index.i < m_x_points.size(), "index out of range");
//     precondition(index.j < m_y_points.size(), "index out of range");
//   };
//   // clang-format on

//   auto sq = [](auto x) { return x * x; };

//   if(index.i == 0 and index.j == 0) { // i == 0 and j == 0
//     return 0; // Not too sure
//   }
//   else if(index.i == 0 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == 0
//     return 0;
//   }
//   else if(index.j == 0 and index.i < m_x_points.size() - 1) { // j == 0
//     return 0;
//   }
//   else if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j < m_y_points.size() - 1) { // i == Nx
//     return -1;
//   }
//   else if(index.i < m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1) { // j == Nx
//     return 0;
//   }
//   else /*if(index.i == m_x_points.size() - 1 and index.j == m_y_points.size() - 1)*/ {
//     return -1;
//   }
// }
```

```
=====
```

```
File: ./src/interval_splitter.cc
```

```
=====
```

```
#include <interval_splitter.hpp>
```

```
auto split_interval(double const& left, double const& right, size_t num_intervals) -> std::vector<double>
{
  std::vector<double> intervals;

  contract(fun)
  {
    precondition(num_intervals > 0, "invalid number of intervals");
  };

  auto interval_size = (right - left) / num_intervals;
  for(size_t i = 0; i < num_intervals; ++i) {
    intervals.push_back(left + interval_size * i);
  }
  intervals.push_back(right);
  return intervals;
}
```

```

// Calculate the length of an interval `index-1` to `index`
auto calc_h(std::span<const double> points, size_t index) -> double
{
    contract(fun)
    {
        precondition(index < points.size(), "index out of range");
    };

    if(index == 0) {
        return points[1] - points[0];
    }

    return (points[index] - points[index - 1]);
}

// Calculate the cross h of an interval
auto calc_cross_h(std::span<const double> points, size_t index) -> double
{
    if(index == 0) {
        return calc_h(points, 1) / 2;
    }
    else if(index == points.size() - 1) {
        return calc_h(points, index) / 2;
    }
    else {
        return (calc_h(points, index) + calc_h(points, index + 1)) / 2;
    }
}

/// @return middle point between `index` and `index - 1`
auto middle_point(std::span<const double> points, size_t index) -> double
{
    return (points[index] + points[index - 1]) / 2;
}

=====
File: ./include/public/interface/i_main_matrix_calculator.hpp
=====
#pragma once

#include <cstdio>
#include <vector>
#include <span>

struct Index
{
    size_t i = -1;
    size_t j = -1;
};

class IMainMatrixCalculator
{
public:
    virtual auto calc_a(Index index) const -> double = 0;
    virtual auto calc_b(Index index) const -> double = 0;
    virtual auto calc_c(Index index) const -> double = 0;
    virtual auto calc_d(Index index) const -> double = 0;
    virtual auto calc_e(Index index) const -> double = 0;
    virtual auto calc_g(Index index) const -> double = 0;

    virtual auto x_points() const -> std::vector<double> const& = 0;
    virtual auto y_points() const -> std::vector<double> const& = 0;

    virtual auto interiour_x_points() const -> std::span<const double> = 0;

```

```
virtual auto interior_y_points() const -> std::span<const double> = 0;
};
```

```
=====
File: ./include/public/default_impl/odd_even_reduction.hpp
=====
```

```
#pragma once
```

```
#include <Eigen/Dense>
#include <Eigen/Sparse>
#include <vector>
```

```
// Function to solve a tridiagonal system using Odd-Even Reduction
```

```
Eigen::VectorXd odd_even_reduction_solver(
    Eigen::SparseMatrix<double> const& main_matrix,
    Eigen::VectorXd const& b
);
```

```
Eigen::VectorXd odd_even_reduction_solver(
    Eigen::VectorXd const& a,
    Eigen::VectorXd const& b,
    Eigen::VectorXd const& c,
    Eigen::VectorXd const& rhs
);
```

```
Eigen::VectorXd odd_even_reduction_solver(
    Eigen::VectorXd const& a,
    Eigen::VectorXd const& b,
    Eigen::VectorXd const& c,
    Eigen::VectorXd const& d,
    Eigen::VectorXd const& e,
    Eigen::VectorXd const& rhs
);
```

```
=====
File: ./include/public/default_impl/main_matrix_calculator.hpp
=====
```

```
#pragma once
```

```
#include <vector>
#include <memory>
```

```
#include <Eigen/Dense>
```

```
#include <interface/i_main_matrix_calculator.hpp>
#include <input_parameters.hpp>
```

```
class DefaultMainMatrixCalculator : public IMainMatrixCalculator
{
public:
    explicit DefaultMainMatrixCalculator(
        std::shared_ptr<InputParameters> params,
        std::vector<double> x_points,
        std::vector<double> y_points
    )
        : m_input_p(std::move(params))
        , m_x_points(std::move(x_points))
        , m_y_points(std::move(y_points))
    {}

```

```
    auto calc_a(Index index) const -> double override;
    auto calc_b(Index index) const -> double override;
    auto calc_c(Index index) const -> double override;
```



```

auto calc_g(Index index) const -> double override;
auto calc_d(Index index) const -> double override;
auto calc_e(Index index) const -> double override;

auto params() const -> std::shared_ptr<InputParameters> const& { return m_input_p; }

auto x_points() const -> std::vector<double> const& override { return m_x_points; }

auto y_points() const -> std::vector<double> const& override { return m_y_points; }

auto interieur_x_points() const -> std::span<double const> override
{
    return {m_x_points.data() + 1, m_x_points.size() - 2};
}

auto interieur_y_points() const -> std::span<double const> override
{
    return {m_y_points.data() + 1, m_y_points.size() - 2};
}

protected:
std::shared_ptr<InputParameters> m_input_p;

std::vector<double> m_x_points;
std::vector<double> m_y_points;
};

```

```

=====
File: ./include/public/input_parameters.hpp
=====

```

```

#pragma once

#include <defines.hpp>

struct InputParameters {
    double xl;
    double xr;
    double yl;
    double yr;

    // First type condition
    Y_Function_type u1;

    // Third type condition
    double hi2;
    X_Function_type k1;
    Y_Function_type u2;

    // First type condition
    X_Function_type u3;

    // First type condition
    X_Function_type u4;

    // Just input functions
    X_Y_Function_type f;
};

```

```

=====
File: ./include/public/interval_splitter.hpp
=====
#pragma once

```

```

#include <vector>
#include <cstdio>
#include <span>

#include <contract/contract.hpp>

#include <defines.hpp>

auto split_interval(const double& left, const double& right, size_t num_intervals) -> std::vector<double>;

// Calculate the length of an interval `index-1` to `index`
auto calc_h(std::span<const double> intervals, size_t index) -> double;

// Calculate the cross h of an interval
auto calc_cross_h(std::span<const double> intervals, size_t index) -> double;

/// @return middle point between `index` and `index - 1`
auto middle_point(std::span<const double> intervals, size_t index) -> double;

=====
File: ./include/public/defines.hpp
=====
#pragma once

#include <functional>

// First argument is X, second is Y
using X_Y_Function_type = std::function<double(double, double)>;

using X_Function_type = std::function<double(double)>;
using Y_Function_type = std::function<double(double)>;

=====
File: ./include/public/utils.hpp
=====
#pragma once

#include <memory>

#include <defines.hpp>
#include <input_parameters.hpp>

void do_all(std::shared_ptr<InputParameters> params, X_Y_Function_type expected_func);
void do_all1(std::shared_ptr<InputParameters> params, X_Y_Function_type expected_func);

```