существования B^{-1}. Очевидно, что обратная к B матрица будет существовать, если система линейных алгебраических уравнений

$$BY=F \tag{30}$$

имеет единственное решение для любой правой части F.

В силу определения матрицы B, (30) может быть записано в виде разностной схемы

$$\begin{gathered}\Lambda_1 y=y+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}y_{\bar{x}_1 x_1}=f, \qquad h_1\leqslant x_1\leqslant l_1-h_1,\\ y(0)=y(l_1)=0.\end{gathered} \tag{31}$$

В § 1 гл. II было показано, что если для схемы (31) выполнены достаточные условия устойчивости метода прогонки, то решение уравнения (31) существует и единственно при любой правой части f, причем оно может быть найдено методом прогонки. Расписывая разностную производную $y_{\bar{x}_1 x_1}$ по точкам, запишем (31) в виде скалярных трехточечных уравнений

$$\begin{gathered}-A_i y_{i-1}+C_i y_i-B_i y_{i+1}=F_i, \qquad 1\leqslant i\leqslant M-1,\\ y_0=0, \quad y_M=0,\end{gathered} \tag{32}$$

где $A_i=B_i=\dfrac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2}$, $C_i=\dfrac{h_1^2+h_2^2}{6h_1^2}-1$.

Напомним, что для (32) достаточные условия устойчивости метода прогонки имеют вид $|C_i|\geqslant|A_i|+|B_i|$, $i=1, 2, \ldots, M-1$. Из этих условий найдем, что матрица B имеет обратную, если шаги сетки $\bar{\omega}$ удовлетворяют ограничению $h_2\leqslant\sqrt{2}h_1$. При выполнении этого условия задача (29) может быть сведена к задаче (1), (2) с $C=B^{-1}A$.

§ 2. Метод полной редукции для первой краевой задачи

1. Процесс нечетно-четного исключения. Переходим теперь к описанию метода полной редукции. Начнем с первой краевой задачи для трехточечных векторных уравнений

$$\begin{gathered}-Y_{j-1}+CY_j-Y_{j+1}=F_j, \qquad 1\leqslant j\leqslant N-1,\\ Y_0=F_0, \quad Y_N=F_N.\end{gathered} \tag{1}$$

Идея метода полной редукции решения задачи (1) состоит в последовательном исключении из уравнений (1) неизвестных Y_j сначала с нечетными номерами j, затем из оставшихся уравнений с номерами j, кратными 2, затем 4 и т. д. Каждый шаг процесса исключения уменьшает число неизвестных, и если N есть степень 2, т. е. $N=2^n$, то в результате процесса исключения останется одно уравнение, из которого можно найти $Y_{N/2}$. Обратный ход метода заключается в последовательном нахождении неизвестных Y_j сначала с номерами j, кратными $N/4$, затем $N/8$, $N/16$ и т. д.

Очевидно, что метод полной редукции есть модификация метода исключения Гаусса, примененного к задаче (1), в котором исключение неизвестных происходит в специальном порядке. Напомним, что, в отличие от этого метода, в методе матричной прогонки исключение неизвестных происходит в естественном порядке.

Итак, пусть $N=2^n$, $n>0$. Для удобства введем следующие обозначения: $C^{(0)}=C$, $F_j^{(0)}=F_j$, $j=1, 2, \ldots, N-1$, используя которые запишем (1) в виде

$$\begin{gathered}-Y_{j-1}+C^{(0)}Y_j-Y_{j+1}=F_j^{(0)}, \qquad 1\leqslant j\leqslant N-1, \quad N=2^n,\\ Y_0=F_0, \quad Y_N=F_N.\end{gathered} \tag{1'}$$

Рассмотрим первый шаг процесса исключения. На этом шаге из уравнений системы (1′) для j, кратных 2, исключим неизвестные Y_j с нечетными номерами j. Для этого выпишем три идущие подряд уравнения (1′):

$$\begin{aligned}-Y_{j-2}+C^{(0)}Y_{j-1}-Y_j\quad &=F_{j-1}^{(0)},\\ -Y_{j-1}+C^{(0)}Y_j\quad -Y_{j+1}&=F_j^{(0)},\\ -Y_j\quad +C^{(0)}Y_{j+1}-Y_{j+2}&=F_{j+1}^{(0)}, \qquad j=2, 4, 6, \ldots, N-2.\end{aligned}$$

Умножим второе уравнение слева на $C^{(0)}$ и сложим все три получившиеся уравнения. В результате будем иметь

$$\begin{gathered}-Y_{j-2}+C^{(1)}Y_j-Y_{j+2}=F_j^{(1)}, \qquad j=2, 4, 6, \ldots, N-2,\\ Y_0=F_0, \quad Y_N=F_N,\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$C^{(1)}=[C^{(0)}]^2-2E,$$

$$F_j^{(1)}=F_{j-1}^{(0)}+C^{(0)}F_j^{(0)}+F_{j+1}^{(0)}, \qquad j=2, 4, 6, \ldots, N-2.$$

Система (2) содержит неизвестные Y_j только с четными номерами j, число неизвестных в (2) равно $N/2-1$, и если эта система будет решена, то неизвестные Y_j с нечетными номерами в силу (1′) могут быть найдены из уравнений

$$C^{(0)}Y_j=F_j^{(0)}+Y_{j-1}+Y_{j+1}, \qquad j=1, 3, 5, \ldots, N-1 \tag{3}$$

с уже известными правыми частями.

Итак, исходная задача (1′) эквивалентна системе (2) и уравнениям (3), причем по структуре система (2) аналогична исходной системе.

На втором шаге процесса исключения из уравнений «укороченной» системы (2) для j, кратных 4, исключаются неизвестные с номерами j, кратными 2, но не кратными 4. По аналогии с первым шагом берутся три уравнения системы (2):

$$\begin{aligned}
-Y_{j-4}+C^{(1)}Y_{j-2}-Y_j \quad &= F_{j-2}^{(1)},\\
-Y_{j-2}+C^{(1)}Y_j \quad -Y_{j+2} &= F_j^{(1)},\\
-Y_j \quad +C^{(1)}Y_{j+2}-Y_{j+4} &= F_{j+2}^{(1)}, \quad j=4, 8, 12, \ldots, N-4,
\end{aligned}$$

второе уравнение умножается на $C^{(1)}$ слева, и все три уравнения складываются. В результате получаем систему из $N/4-1$ уравнений, содержащую неизвестные Y_j с номерами, кратными 4:

$$-Y_{j-4}+C^{(2)}Y_j-Y_{j+4}=F_j^{(2)}, \qquad j=4, 8, 12, \ldots, N-4,$$
$$Y_0=F_0, \quad Y_N=F_N;$$

уравнения $C^{(1)}Y_j=F_j^{(1)}+Y_{j-2}+Y_{j+2}$, $j=2, 6, 10, \ldots, N-2$ для нахождения неизвестных с номерами, кратными 2, но не кратными 4, и уравнения (3) для неизвестных с нечетными номерами. При этом матрица $C^{(2)}$ и правые части $F_j^{(2)}$ определяются по формулам

$$C^{(2)}=[C^{(1)}]^2-2E,$$
$$F_j^{(2)}=F_{j-2}^{(1)}+C^{(1)}F_j^{(1)}+F_{j+2}^{(1)}, \qquad j=4, 8, 12, \ldots, N-4.$$

Этот процесс исключения может быть продолжен. В результате l-го шага получим редуцированную систему для неизвестных с номерами, кратными 2^l:

$$-Y_{j-2^l}+C^{(l)}Y_j-Y_{j+2^l}=F_j^{(l)}, \qquad j=2^l, 2\cdot 2^l, 3\cdot 2^l, \ldots, N-2^l,$$
$$Y_0=F_0, \quad Y_N=F_N, \tag{4}$$

и группы уравнений

$$C^{(k-1)}Y_j=F_j^{(k-1)}+Y_{j-2^{k-1}}+Y_{j+2^{k-1}},$$
$$j=2^{k-1}, 3\cdot 2^{k-1}, 5\cdot 2^{k-1}, \ldots, N-2^{k-1}, \tag{5}$$

решая которые последовательно для $k=l, l-1, \ldots, 1$, найдем оставшиеся неизвестные. Матрицы $C^{(k)}$ и правые части $F_j^{(k)}$ находятся по рекуррентным формулам

$$C^{(k)}=[C^{(k-1)}]^2-2E,$$
$$F_j^{(k)}=F_{j-2^{k-1}}^{(k-1)}+C^{(k-1)}F_j^{(k-1)}+F_{j+2^{k-1}}^{(k-1)},$$
$$j=2^k, 2\cdot 2^k, 3\cdot 2^k, \ldots, N-2^k, \tag{6}$$

для $k=1, 2, \ldots$

Из (4) следует, что после $(n-1)$-го шага исключения $(l=n-1)$ останется одно уравнение для $Y_{2^{n-1}}=Y_{N/2}$:

$$C^{(n-1)}Y_j=F_j^{(n-1)}+Y_{j-2^{n-1}}+Y_{j+2^{n-1}}=F_j^{(n-1)}+Y_0+Y_N, \quad j=2^{n-1},$$
$$Y_0=F_0, \quad Y_N=F_N$$

с известной правой частью. Объединяя это уравнение с (5), получим, что все неизвестные находятся последовательно из уравнений

$$C^{(k-1)}Y_j=F_j^{(k-1)}+Y_{j-2^{k-1}}+Y_{j+2^{k-1}}, \quad Y_0=F_0, \quad Y_N=F_N,$$
$$j=2^{k-1}, 3\cdot 2^{k-1}, 5\cdot 2^{k-1}, \ldots, N-2^{k-1}, \quad k=n, n-1, \ldots, 1. \tag{7}$$

Итак, формулы (6) и (7) полностью описывают метод полной редукции. По формулам (6) преобразуются правые части, а из уравнений (7) находится решение исходной задачи (1).

Описанный метод мы назовем методом полной редукции, так как здесь последовательное уменьшение числа уравнений в системе осуществляется до конца, пока не останется одно уравнение для $Y_{N/2}$. В методе неполной редукции, который будет рассмотрен в главе IV, осуществляется лишь частичное понижение порядка системы и «укороченная» система решается специальным методом.

2. Преобразование правой части и обращение матриц. Вычисление правой части $F_j^{(k)}$ по рекуррентным формулам (6) может привести к накоплению погрешностей вычислений, если норма матрицы $C^{(k-1)}$ будет больше единицы. Кроме того, матрицы $C^{(k)}$ являются, вообще говоря, полными матрицами, даже если исходная матрица $C^{(0)}=C$ была трехдиагональной. А это существенным образом влияет на увеличение объема вычислительной работы при вычислении $F_j^{(k)}$ по формулам (6). Для рассмотренных в § 1 примеров норма матрицы действительно будет значительно превышать единицу, и такой алгоритм метода будет вычислительно неустойчив.

Чтобы обойти эту трудность, будем вместо векторов $F_j^{(k)}$ вычислять векторы $p_j^{(k)}$, которые связаны с $F_j^{(k)}$ следующим соотношением:

$$F_j^{(k)} \equiv \prod_{l=0}^{k-1} C^{(l)} p_j^{(k)} 2^k, \tag{8}$$

причем формально положим $\prod_{l=0}^{-1} C^{(l)}=E$, так что $p_j^{(0)}\equiv F_j^{(0)}\equiv F_j$.

Найдем рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют $p_j^{(k)}$. Для этого подставим (8) в (6). Считая, что $C^{(l)}$ — невырожденная матрица для любого l, из (6) получим

$$2\prod_{l=0}^{k-1} C^{(l)} p_j^{(k)} = \prod_{l=0}^{k-2} C^{(l)} [p_{j-2^{k-1}}^{(k-1)}+C^{(k-1)}p_j^{(k-1)}+p_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}]$$

или

$$2C^{(k-1)}p_j^{(k)}=p_{j-2^{k-1}}^{(k-1)}+C^{(k-1)}p_j^{(k-1)}+p_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}. \tag{9}$$

Обозначая $S_j^{(k-1)}=2p_j^{(k)}-p_j^{(k-1)}$, из (9) получим, что $p_j^{(k)}$ могут быть последовательно найдены по следующим формулам:

$$C^{(k-1)}S_j^{(k-1)}=p_{j-2^{k-1}}^{(k-1)}+p_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}, \quad p_j^{(k)}=0{,}5\,(p_j^{(k-1)}+S_j^{(k-1)}),$$
$$j=2^k, 2\cdot 2^k, 3\cdot 2^k, \ldots, N-2^k, \quad k=1, 2, \ldots, n-1, \quad p_j^{(0)}\equiv F_j. \tag{10}$$

Рекуррентные соотношения (10) содержат сложение векторов, умножение вектора на число и обращение матриц $C^{(k-1)}$.

Осталось теперь исключить $F_j^{(k-1)}$ из уравнений (7). Подставляя (8) в (7), получим

$$\begin{gathered} C^{(k-1)}Y_j = 2^{k-1}\prod_{l=0}^{k-2} C^{(l)} p_j^{(k-1)} + Y_{j-2^{k-1}} + Y_{j+2^{k-1}}, \\ Y_0 = F_0, \quad Y_N = F_N, \\ j = 2^{k-1},\ 3\cdot 2^{k-1},\ \ldots,\ N-2^{k-1},\quad k = n,\ n-1,\ \ldots,\ 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь тоже необходимо обращать матрицы $C^{(k-1)}$, но, кроме того, в правой части (11) появилось умножение матрицы на вектор. В рассмотренном ниже алгоритме используемый способ обращения матрицы $C^{(k-1)}$ позволяет избежать нежелательной операции умножения матрицы на вектор и реализацию (11) свести к обращению матриц и сложению векторов.

Рассмотрим теперь вопрос об обращении матриц $C^{(k-1)}$, определяемых по рекуррентным формулам (6)

$$C^{(k)} = [C^{(k-1)}]^2 - 2E, \qquad k = 1, 2, \ldots, \ C^{(0)} = C. \tag{12}$$

Из (12) следует, что $C^{(k)}$ есть матричный полином степени 2^k относительно C с единичным коэффициентом при старшей степени. Этот полином через известные полиномы Чебышева выражается следующим образом:

$$C^{(k)} = 2T_{2^k}\left(\frac{1}{2}C\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

где $T_n(x)$ — полином Чебышева n-й степени первого рода (см. п. 2 § 4 гл. I):

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x), & |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^{-n}\right], & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Действительно, в силу свойств полинома $T_n(x)$

$$T_{2n}(x) = 2[T_n(x)]^2 - 1, \quad T_1(x) = x,$$

из (12) очевидным образом следует (13).

Далее, используя соотношение

$$\prod_{l=0}^{k-2} 2T_{2^l}(x) = U_{2^{k-1}-1}(x),$$

связывающее полиномы Чебышева первого рода с полиномом второго рода $U_n(x)$, где

$$U_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}, & |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x+\sqrt{x^2-1})^{-(n+1)}\right], & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

легко вычислить произведение полиномов $C^{(l)}$

$$\prod_{l=0}^{k-2} C^{(l)} = U_{2^{k-1}-1}\left(\frac{1}{2}C\right). \tag{14}$$

Итак, явное выражение для $C^{(k)}$ и $\prod_{l=0}^{k-1} C^{(l)}$ получено.

Для дальнейшего нам потребуется лемма 6 (см. п. 5 § 4 гл. II). Согласно лемме 6 любое отношение $g_m(x)/f_n(x)$ многочленов без общих корней в случае $n > m$ и простых корней $f_n(x)$ разлагается следующим образом на элементарные дроби:

$$\frac{g_m(x)}{f_n(x)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{a_l}{x - x_l}, \quad a_l = \frac{g_m(x_l)}{f_n'(x_l)},$$

где x_l — корни полинома $f_n(x)$.

Используем лемму 6 для разложения отношений $1/T_n(x)$ и $U_{n-1}(x)/T_n(x)$ на элементарные дроби. Корни полинома $T_n(x)$ известны:

$$x_l = \cos\frac{(2l-1)}{2n}\pi, \qquad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

и в этих точках полином $U_{n-1}(x)$ принимает отличные от нуля значения

$$U_{n-1}(x_l) = \frac{\sin(n \arccos x_l)}{\sin(\arccos x_l)} = \frac{(-1)^{l+1}}{\sin\frac{(2l-1)}{2n}\pi}, \qquad l = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому, используя соотношение $T_n'(x) = nU_{n-1}(x)$, из леммы 6 получим следующие разложения:

$$\frac{1}{T_n(x)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^{l+1}\sin\frac{(2l-1)\pi}{2n}}{n(x-x_l)}, \tag{16}$$

$$\frac{U_{n-1}(x)}{T_n(x)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n(x-x_l)}, \tag{17}$$

где x_l определено в (15). Необходимые разложения найдены.

Получим теперь выражения для матриц $[C^{(k-1)}]^{-1}$ и $[C^{(k-1)}]^{-1}\prod_{l=0}^{k-2} C^{(l)}$ через матрицу C. Из (13) и (14) с учетом разложений алгебраических полиномов (16), (17) получим

$$[C^{(k-1)}]^{-1} = \sum_{l=1}^{2^{k-1}} \alpha_{l,k-1}\left(C - 2\cos\frac{(2l-1)\pi}{2^k}E\right)^{-1},$$

$$[C^{(k-1)}]^{-1}\prod_{l=0}^{2^{k-1}} C^{(l)} = \frac{1}{2^{k-1}}\sum_{l=1}^{2^{k-1}}\left(C - 2\cos\frac{(2l-1)\pi}{2^k}E\right)^{-1}.$$

$y=C^{-1}p \quad Cy=p$

Найденные соотношения позволяют записать в следующем виде как формулы (10):

$$S_j^{(k-1)}=\sum_{l=1}^{2^{k-1}}\alpha_{l,\,k-1}C_{l,\,k-1}^{-1}\left(p_{j-2^{k-1}}^{(k-1)}+p_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}\right),$$
$$p_j^{(k)}=0{,}5\left(p_j^{(k-1)}+S_j^{(k-1)}\right), \qquad (18)$$
$$p_j^{(0)}\equiv F_j,$$
$$j=2^k,\ 2\cdot 2^k,\ 3\cdot 2^k,\ \ldots,\ N-2^k,\ k=1,2,\ldots,n-1,$$

так и формулы (11):

$$Y_j=\sum_{l=1}^{2^{k-1}}C_{l,\,k-1}^{-1}\left[p_j^{(k-1)}+\alpha_{l,\,k-1}\left(Y_{j-2^{k-1}}+Y_{j+2^{k-1}}\right)\right],$$
$$Y_0=F_0,\ Y_N=F_N, \qquad (19)$$
$$j=2^{k-1},\ 3\cdot 2^{k-1},\ 5\cdot 2^{k-1},\ \ldots,\ N-2^{k-1},$$
$$k=n,\ n-1,\ \ldots,\ 1,$$

где обозначено

$$C_{l,\,k-1}=C-2\cos\frac{(2l-1)\pi}{2^k}E,\quad \alpha_{l,\,k-1}=\frac{(-1)^{l+1}}{2^{k-1}}\sin\frac{(2l-1)\pi}{2^k}. \qquad (20)$$

Итак, получены преобразованные формулы (18), (19), описывающие метод полной редукции решения задачи (1). Эти формулы содержат только операции сложения векторов, умножения вектора на число и обращения матриц.

Заметим, что если C — трехдиагональная матрица, то трехдиагональной будет и любая матрица $C_{l,\,k-1}$. Задача обращения таких матриц была решена в главе II. Далее, если для матрицы C выполняется условие $(CY, Y)\geqslant 2(Y, Y)$, то из (20) следует, что матрицы $C_{l,\,k}$ будут положительно определенными, и, следовательно, будут иметь ограниченные обратные. Тогда из разложения $[C^{(k-1)}]^{-1}$ получим, что для любого $k\geqslant 1$ матрицы $C^{(k-1)}$ не вырождены. Напомним, что это предположение использовалось при получении формул (10).

§ 3. Алгоритм метода. Полученные выше формулы (18), (19) служат основой для первого алгоритма метода. Рассмотрим прежде всего, какие промежуточные величины и на каком этапе должны вычисляться и запоминаться для последующего использования.

Анализ формул (19) показывает, что при фиксированном k для вычисления Y_j используются векторы $p_j^{(k-1)}$ с номерами $j=2^{k-1},\ 3\cdot 2^{k-1},\ \ldots,\ N-2^{k-1}$. Любой вектор $p_j^{(l)}$ с тем же номером j, но меньшим, чем $k-1$, номером l, является вспомогательным и запоминается временно. Поэтому определяемые на k-м шаге по (18) векторы $p_j^{(k)}$ могут размещаться на месте $p_j^{(k-1)}$, равно как и неизвестные Y_j, вычисляемые по (19). Метод не требует дополнительной памяти ЭВМ — все векторы $p_j^{(k)}$ размещаются на том месте, где затем будут размещаться Y_j.

Проиллюстрируем организацию вычислений в рассматриваемом алгоритме на примере. Пусть $N=16\,(n=4)$. На рис. 1 показана последовательность вычисления и запоминания векторов $p_j^{(k)}$. Заштрихованный квадрат означает, что для указанного

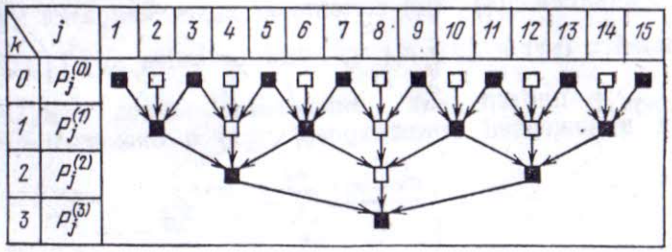

Рис. 1.

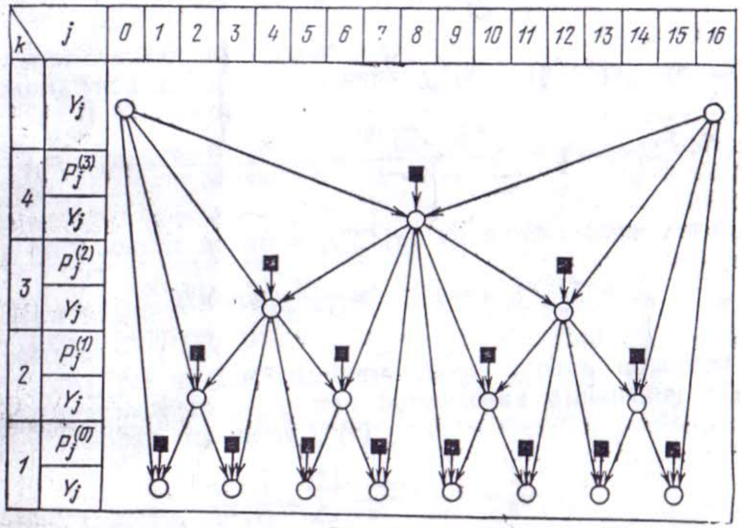

Рис. 2.

значения индекса k запоминается для последующего использования вектор $p_j^{(k)}$ с соответствующим номером j. Соответственно, незаштрихованный квадрат означает, что $p_j^{(k)}$ является вспомогательным и запоминается на указанном месте временно. Стрелки указывают, какие векторы $p_i^{(k-1)}$ используются при вычислении $p_j^{(k)}$.

В результате прямого хода метода будут запомнены следующие векторы $p_j^{(k)}$:

$$p_1^{(0)},\ p_2^{(1)},\ p_3^{(0)},\ p_4^{(2)},\ p_5^{(0)},\ p_6^{(1)},\ p_7^{(0)},\ p_8^{(3)},\ p_9^{(0)},\ p_{10}^{(1)},\ p_{11}^{(0)},\ p_{12}^{(2)},\ p_{13}^{(0)},\ p_{14}^{(1)},\ p_{15}^{(0)}.$$

Они используются для вычисления Y_j на обратном ходе метода.

На рис. 2 показана последовательность вычисления неизвестных Y_j (символическое обозначение ○). Стрелками указано, какие $\boldsymbol{Y}_j$, найденные на предыдущих шагах, и какие $\boldsymbol{p}_j^{(k-1)}$ (символическое обозначение ■) используются для вычисления $\boldsymbol{Y}_j$ при заданном k.

Переходим теперь к описанию алгоритма метода полной редукции. Прямой ход метода, согласно (18), реализуется следующим образом:

1) Задаются значения для $\boldsymbol{p}_j^{(0)}=\boldsymbol{F}_j$, $j=1, 2, \ldots, N-1$.

2) Для каждого фиксированного $k=1, 2, \ldots, n-1$ при фиксированном $j=2^k, 2\cdot 2^k, \ldots, N-2^k$ сначала вычисляются и запоминаются векторы

$$\varphi=\boldsymbol{p}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)}+\boldsymbol{p}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}. \tag{21}$$

Затем для $l=1, 2, \ldots, 2^{k-1}$ решаются уравнения

$$C_{l,\,k-1}\boldsymbol{v}_l=\alpha_{l,\,k-1}\varphi. \tag{22}$$

В результате постепенным накоплением результата на месте $\boldsymbol{p}_j^{(k-1)}$ находится $\boldsymbol{p}_j^{(k)}$

$$\boldsymbol{p}_j^{(k)}=0{,}5\,(\boldsymbol{p}_j^{(k-1)}+\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\ldots+\boldsymbol{v}_{2^{k-1}}). \tag{23}$$

Обратный ход метода, согласно (19), реализуется следующим образом:

1) Задаются значения для $\boldsymbol{Y}_0$ и $\boldsymbol{Y}_N$: $\boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{F}_0$, $\boldsymbol{Y}_N=\boldsymbol{F}_N$.

2) Для каждого фиксированного $k=n, n-1, \ldots, 1$ при фиксированном $j=2^{k-1}, 3\cdot 2^{k-1}, 5\cdot 2^{k-1}, \ldots, N-2^{k-1}$ вычисляются и запоминаются векторы

$$\varphi=\boldsymbol{Y}_{j-2^{k-1}}+\boldsymbol{Y}_{j+2^{k-1}}, \qquad \psi=\boldsymbol{p}_j^{(k-1)}. \tag{24}$$

Затем для $l=1, 2, \ldots, 2^{k-1}$ решаются уравнения

$$C_{l,\,k-1}\boldsymbol{v}_l=\psi+\alpha_{l,\,k-1}\varphi. \tag{25}$$

В результате постепенным накоплением значений на месте $\boldsymbol{p}_j^{(k-1)}$ находится вектор неизвестных $\boldsymbol{Y}_j$

$$\boldsymbol{Y}_j=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\ldots+\boldsymbol{v}_{2^{k-1}}. \tag{26}$$

Подсчитаем теперь число арифметических действий, затрачиваемых на реализацию описанного алгоритма. Пусть размерность вектора неизвестных $\boldsymbol{Y}_j$ есть M, а через $\mathring{q}$ обозначено число действий, требуемых для решения уравнения вида (22) или (25) при заданной правой части. Будем считать, что величины $\alpha_{l,\,k}$ заранее найдены.

Подсчитаем сначала число действий Q_1, затрачиваемых на прямом ходе. При фиксированных k и j на вычисление вектора φ по формулам (21) потребуется M операций. Далее, для каждого l на вычисление правой части в (22) и на решение уравнения (22) потребуется $M+\mathring{q}$ операций. Поэтому на нахождение всех $\boldsymbol{v}_l$ потребуется $2^{k-1}(M+\mathring{q})$ действий. Вычисление $\boldsymbol{p}_j^{(k)}$ по формуле (23) осуществляется с затратой $2^{k-1}M+M$ действий.

Итак, для вычисления $\boldsymbol{p}_j^{(k)}$ для одного k и j нужно затратить $M+2^{k-1}(2M+\mathring{q})$ операций.

Далее, при каждом фиксированном k нужно вычислять $N/2^k-1$ различных $\boldsymbol{p}_j^{(k)}$. Следовательно, общее количество действий Q_1, затрачиваемых на реализацию прямого хода, равно

$$Q_1=\sum_{k=1}^{n-1}[M+(2M+\mathring{q})\,2^{k-1}]\left(\frac{N}{2^k}-1\right)=$$

$$=(M+0{,}5\mathring{q})\,Nn-(M+\mathring{q})\,N-M\,(n-1)+\mathring{q}. \tag{27}$$

Подсчитаем теперь число действий Q_2, затрачиваемых на обратном ходе. При фиксированных k и j на вычисление по формулам (24) потребуется M действий, на нахождение всех v_l в (25) — $(2M+\mathring{q})\,2^{k-1}$ действий и на вычисление $\boldsymbol{Y}_j$ по формуле (26) — $(2^{k-1}-1)\,M$ действий. Так как число различных значений j, для которых при фиксированном k проводятся указанные вычисления, равно $N/2^k$, то Q_2 равно

$$Q_2=\sum_{k=1}^{n}[M+(2M+\mathring{q})\,2^{k-1}+(2^{k-1}-1)\,M]\,\frac{N}{2^k}=$$

$$=(1{,}5M+0{,}5\mathring{q})\,Nn. \tag{28}$$

Складывая (27) и (28) и учитывая, что $n=\log_2 N$, получим следующую оценку для числа действий метода полной редукции, реализуемого по приведенному выше алгоритму

$$Q=Q_1+Q_2=(2{,}5M+\mathring{q})\,N\log_2 N-(M+\mathring{q})\,N-M\,(n-1)+\mathring{q}. \tag{29}$$

Из (29) следует, что если $\mathring{q}=O\,(M)$, то $Q=O\,(MN\log_2 N)$.

4. Второй алгоритм метода. Главным достоинством построенного алгоритма является минимальное требование к памяти ЭВМ — он не требует дополнительной памяти для хранения вспомогательной информации. Это качество достигается ценой некоторого увеличения объема вычислительной работы, которая затрачивается на повторное вычисление промежуточных величин. Рассмотрим еще один алгоритм метода, который характеризуется меньшим объемом вычислительной работы, но который требует дополнительную память, сравнимую по величине с общим числом неизвестных в задаче.

Для построения второго алгоритма вернемся к формулам (6), (7), описывающим метод полной редукции:

$$\begin{gathered} C^{(k)}=[C^{(k-1)}]^2-2E,\\ \boldsymbol{F}_j^{(k)}=\boldsymbol{F}_{j-2^{k-1}}^{(k-1)}+C^{(k-1)}\boldsymbol{F}_j^{(k-1)}+\boldsymbol{F}_{j+2^{k-1}}^{(k-1)},\\ j=2^k, 2\cdot 2^k, 3\cdot 2^k, \ldots, N-2^k,\ k=1, 2, \ldots, n-1, \end{gathered} \tag{6'}$$

$$\begin{gathered} C^{(k-1)}\boldsymbol{Y}_j=\boldsymbol{F}_j^{(k-1)}+\boldsymbol{Y}_{j-2^{k-1}}+\boldsymbol{Y}_{j+2^{k-1}},\\ \boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{F}_0, \quad \boldsymbol{Y}_N=\boldsymbol{Y}_N,\\ j=2^{k-1}, 3\cdot 2^{k-1}, 5\cdot 2^{k-1}, \ldots, N-2^{k-1},\ k=n, n-1, \ldots, 1. \end{gathered} \tag{7'}$$