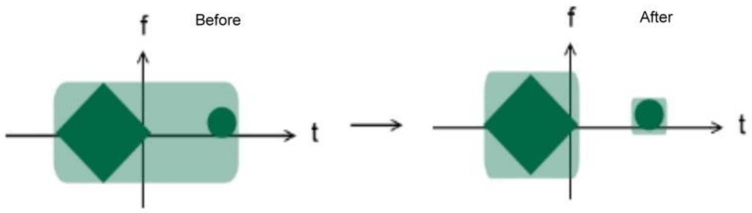
時頻分析與小波轉換(Time-Frequency Analysis and Wavelet Transform)

Homework 01 – 2016/10/27

R05546030 **彭新翔**

1. Which of the following applications are the proper applications of time frequency analysis? Also illustrate the reasons.
   (a) Signal sampling.
   (b) Music analysis.
   (c) Chinese tone analysis.
   (d) Image analysis

(a) <u>適合</u>。Signal Sampling 中，若其訊號頻率會隨時間而改變，採用時頻分析可以有效減少所需取樣的點而加快運算。



(b) <u>適合</u>。正常來說一段樂曲中的頻率會隨時間而改變，適合使用時頻分析。

(c) <u>適合</u>。由於中文發音具有抑揚頓挫之腔調，使得其聲音頻率會隨時間而改變。

(d) <u>不適合</u>。單純之影像，其訊號並不會隨時間而改變，因而不適合以時頻分析。

2. Suppose that: $\mathbf{x(t)} = \exp\left[\mathbf{j(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3} + \cdots)\right]$. In what condition the instantaneous frequency of $\mathbf{x(t)}$ is invariant with time?

設 $x(t) = \exp\left[j(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots)\right]$
則其瞬時頻率為：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \times \frac{d}{dt}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots) = \frac{a_1 + 2a_2 t + \cdots}{2\pi}$$

故當取 $a_2 = a_3 = \cdots = 0$ 時，其瞬時頻率與時間無關。

3. (a) Why the rectangular windowed STFT may has the side-lobe problem?
   (b) Why using the triangular window can reduce the side lobe problem?

(a) 由於矩形視窗的頻譜是 sinc 函數，而 $\forall x \notin \mathbb{N}, y = \operatorname{sinc} x \neq 0$ 為發生 The side-lobe Problem 之主因，因此原訊號頻譜會被模糊化，此現象亦可以用測不準原理說明：當時域訊號的成分減少，解析出的頻譜自然較不準確。

(b) 由於矩形視窗和矩形視窗做旋積(Convolution)之結果為三角形窗，其頻譜即為 sinc^2 使得在上述狀況產生時，衰減速度倍增而減少 The side-lobe Problem。

4. Why sometimes it is better to use an asymmetric window instead of a symmetric window for the STFT?

根據不同訊號的特性，有時候必須設計不同的視窗來有效抽取訊號的時頻特徵。舉例來說在地震波的時頻分析中，我們習慣會使用非對稱視窗，主要目的在於：由於地震瞬間的特性，我們希望能夠增加時間的解析以準確並即時反應地震能量瞬間變化的特性，藉此達到準確反映地震到達時的時間準確度，但相對地也犧牲了一些頻率解析度（然而在地震波的時頻分析中他並不是重點）。

5. Does $\mathbf{A}\exp\left(-\mathbf{Bt^2}-\mathbf{Ct}-\mathbf{D}+\mathbf{jEt}\right)$ satisfy the lower bound of the uncertainty principle? Why? (A, B, C, D, E are real)

配方整理如下

$$
\begin{aligned}
&A\exp\left(-Bt^2-Ct-D+jEt\right)\\
&=A\exp\left(\frac{C^2}{4B}-D\right)\cdot\exp\left[j2\pi t\left(\frac{E}{2\pi}\right)\right]\cdot\exp\left\{\frac{-B}{\pi}\left[\pi\left(t+\frac{C}{2B}\right)^2\right]\right\}\\
&=A\exp\left(\frac{C^2}{4B}-D\right)\cdot\exp\left[j2\pi t\left(\frac{E}{2\pi}\right)\right]\cdot\exp\left\{-B\left[\pi\left(t+\frac{C}{2B}\right)^2\right]\right\}
\end{aligned}
$$

上式滿足 $a\exp\left(j2\pi tb\right)\cdot\exp\left[\frac{-\pi}{c}\left(t-d\right)^2\right]$ 型，又已知其滿足測不準原理之下限，因此原式 $A\exp\left(-Bt^2-Ct-D+jEt\right)$ 亦滿足測不準原理之下限。

6. Write a program for the rectangular short time Fourier transform.

$$y = \text{recSTFT}(x, t, f, B)$$

x: input, t: samples on t-axis, f: samples on f-axis,

[-B, B]: interval of integration, y: output

Graph: