

Time Frequency Analysis and Wavelet Transforms

時頻分析與小波轉換

授課者： 丁 建 均

Office：明達館723室，TEL：33669652

E-mail: jjding@ntu.edu.tw

課程網頁：<http://djj.ee.ntu.edu.tw/TFW.htm>

歡迎大家來修課，也歡迎有問題時隨時聯絡！

- 評分方式：

平時分數: 15 scores

基本分11.8分，各位同學皆可拿到(除非缺席狀況嚴重)

另外再根據上課回答問題加分，每回答一次(無論答對否)加 0.8 分

Homework: 60 scores

5 times, 每 3 週一次

請自己寫，和同學內容相同，將扣 60% 的分數，就算寫錯但好好寫也會給 40~95% 的分數，遲交分數打 8 折，不交不給分。

不知道如何寫，可用 E-mail 和我聯絡，或於下課時和老師討論

Term paper 25 scores

Term paper 25 scores

方式有四種，可任選其中一種

(1) 書面報告

(10頁以上(不含封面)，中英文皆可，11或12的字體，題目可選擇和課程有關的任何一個主題。

格式和一般寫期刊論文或碩博士論文相同，包括 abstract, conclusion, 及 references，並且要分 sections，必要時有 subsections。References 的寫法，可參照一般 IEEE 的論文的寫法)

鼓勵**多做實驗及模擬**，**有創新更好**。

嚴禁剪刀漿糊 (Ctrl-C, Ctrl-V) 的情形，否則扣 60% 的分數

(2) Tutorial

限十二個名額，和書面報告格式相同，但 18頁以上(若為加強前人的 tutorial，則頁數為 $(2/3)N + 13$ 以上， N 為前人 tutorial 之頁數)，題目由老師指定，以**清楚且有系統**的介紹一個主題的基本概念和應用為要求，為上課內容的進一步探討和補充，[交Word檔](#)。

選擇這個項目的同學，學期成績加 3分

(3) 口頭報告

限四個名額，每個人 40分鐘，題目可選擇和課程有關的任何一個主題。口頭報告將於 12月14日(第 12 週)進行。有意願的同學，請於12月1日之前告知，並附上報告題目。

口頭報告時，鼓勵大家提問（包括口頭報告的同學，也可針對其他同學的報告內容提問）。曾經提問的同學，期末報告皆加 2 分。

選擇這個項目的同學，學期成績加 2分

(4) 編輯 Wikipedia

中文或英文網頁皆可，至少 2 個條目，但不可同一個條目翻成中文和英文。總計80行以上。限和課程相關者，自由發揮，越有條理、有系統的越好

選擇編輯 Wikipedia 的同學，請於明年1月4日(本學期最後一次上課)前，向我登記並告知我要編輯的條目(2 個以上)，若有和其他同學選擇相同條目的情形，則較晚向我登記的同學將更換要編輯的條目

書面報告和編輯 Wikipedia，期限是 1月18日

上課時間：17 週

9/14,

9/21,

9/28

10/5, 出 HW1

10/12,

10/19, 交 HW1

10/26, 出 HW2

11/2,

11/9, 交 HW2

11/16, 出 HW3

11/23,

11/30, 交 HW3

12/7, 出 HW4

12/14, Oral

12/2`,

12/28, 交 HW4,

1/4, 出 HW5

1/18, 交 HW5 及 term paper

課程大綱：

- (1) Introduction
- (2) Short-Time Fourier Transform
- (3) Gabor Transform
- (4) Implementation of Time-Frequency Analysis
- (5) Wigner Distribution Function
- (6) Cohen's Class Time-Frequency Distribution
- (7) S Transforms, Gabor-Wigner Transforms, Matching Pursuit, and Other Time Frequency Analysis Methods
- (8) Movement in the Time-Frequency Plane and Fractional Fourier Transforms
- (9) Filter Design by Time-Frequency Analysis
- (10) Modulation, Multiplexing, Sampling, and Other Applications

(續)

課程大綱：

- (11) Hilbert Huang Transform
- (12) From Haar Transforms to Wavelet Transforms
- (13) Continuous Wavelet Transforms
- (14) Continuous Wavelet Transform with Discrete Coefficients
- (15) Discrete Wavelet Transform
- (16) Applications of the Wavelet Transform

- 上課資料：

(1) 講義 (將放在網頁上，請大家每次上課前先印好)

(2) S. Qian and D. Chen, *Joint Time-Frequency Analysis: Methods and Applications*, Prentice-Hall, 1996.

(3) L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*, Prentice-Hall, New York, 1995.

(4) K. Grochenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhauser, Boston, 2001.

(5) L. Debnath, *Wavelet Transforms and Time-Frequency Signal Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2001.

(6) S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*, Academic Press, 3rd ed., 2009.

(7) Others

Matlab Program

Download: 請洽台大電信所

<http://comm.ntu.edu.tw/matlab/request.php>

參考書目

洪維恩，Matlab 7 程式設計，旗標，台北市，2010..（合適的入門書）

張智星，Matlab 程式設計入門篇，第三版，碁峰，2011.

蒙以正，數位信號處理：應用 Matlab，旗標，台北市，2007.

繆紹綱譯，數位影像處理：運用-Matlab，東華，2005.

預計看書學習所花時間：3~5 天

Tutorial 可供選擇的題目(可以略做修改)

有加 * 號的是學長寫過的，但鼓勵同學再加強

- (1) Time-Frequency Reassignment
- (2) Sparse Time-Frequency Representation
- (3) Fast Algorithm for Time-Frequency Analysis
- (4) Time-Frequency Analysis for Machine Fault Detection
- (5) Orthogonal Matching Pursuit
- (6) Compressive Sensing for Signal Reconstruction
- (7) Compressive Sensing for Radar Imaging
- (8) Compressive Sensing for Communication
- (9) Compressive Sensing for Denoising
- (10) Hilbert-Huang Transform for EMG Signal Processing
- (11) Wavelet Transforms for Image Feature Extraction
- (12) Wavelet Transforms for Watermarking

I. Introduction

Fourier transform (FT)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \text{Time-Domain} \rightarrow \text{Frequency Domain}$$

↑ t varies from $-\infty \sim \infty$

Laplace Transform

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Cosine Transform, Sine Transform, Z Transform.

Some things make these operations not practical:

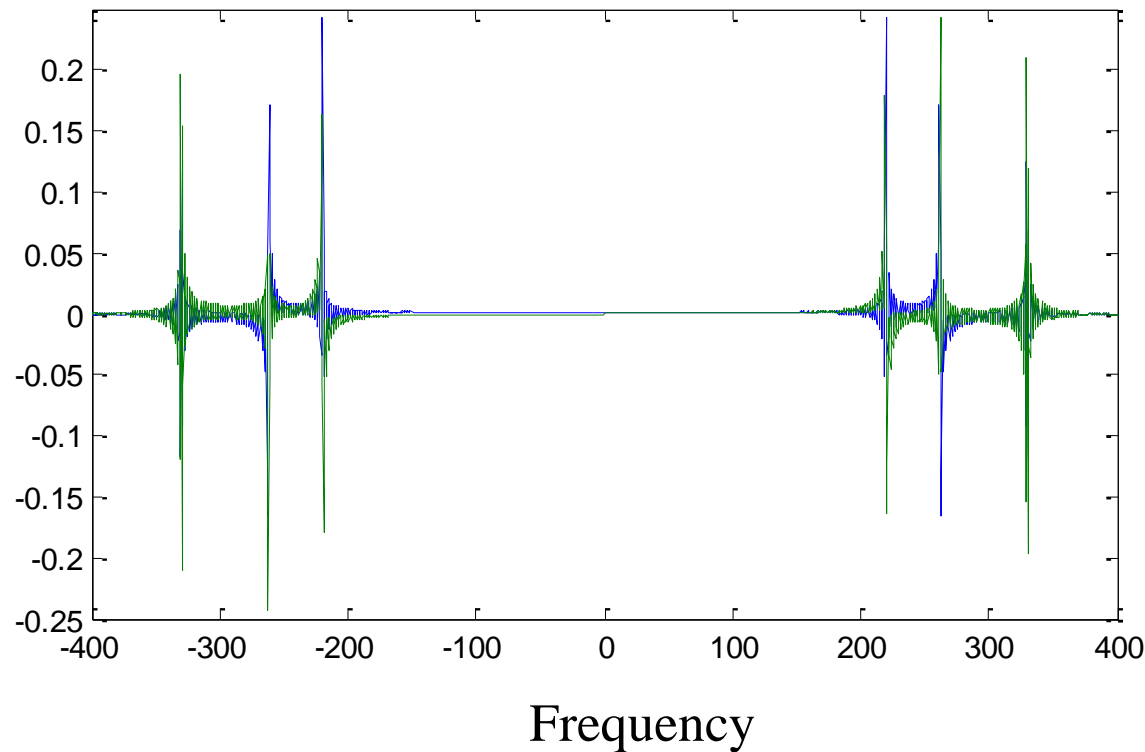
- (1) Only the case where $t_0 \leq t \leq t_1$ is interested.
- (2) Not all the signals are suitable for analyzing in the frequency domain.

It is hard to observe the variation of spectrum with time by these operations

Example 1: $x(t) = \cos(440\pi t)$ when $t < 0.5$,
 $x(t) = \cos(660\pi t)$ when $0.5 \leq t < 1$,
 $x(t) = \cos(524\pi t)$ when $t \geq 1$



The Fourier transform of $x(t)$



(A) Finite-Supporting Fourier Transform

$$X(f) = \int_{t_0-B}^{t_0+B} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

(B) Short-Time Fourier Transform (STFT)

$$X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$w(t)$: window function 或 mask function

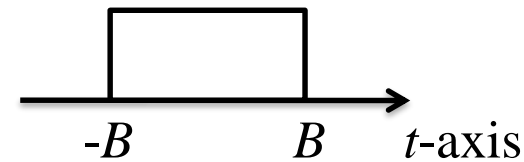
STFT 也稱作 windowed Fourier transform 或

time-dependent Fourier transform

[Ref] L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*, Prentice-Hall, New York, 1995.

[Ref] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*,
London: Prentice-Hall, 3rd ed., 2010.

最簡單的例子： $w(t) = 1$ for $|t| \leq B$,
 $w(t) = 0$ otherwise

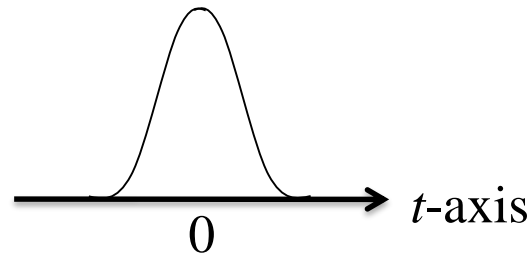


此時 Short-time Fourier transform 可以改寫

$$X(t, f) = \int_{t-B}^{t+B} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

其他的例子：

$$w(t) = \exp(-\sigma t^2)$$



一般我們把 $\exp(-\sigma t^2)$ 稱作為 Gaussian function 或 Gabor function

此時的 Short-Time Fourier Transform 亦稱作 Gabor Transform

(C) Gabor Transform

$$G_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\sigma(\tau-t)^2} e^{-j2\pi f\tau} x(\tau) d\tau$$

$$G_x(t, \omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma(\tau-t)^2}{2}} e^{-j\omega\tau} x(\tau) d\tau$$

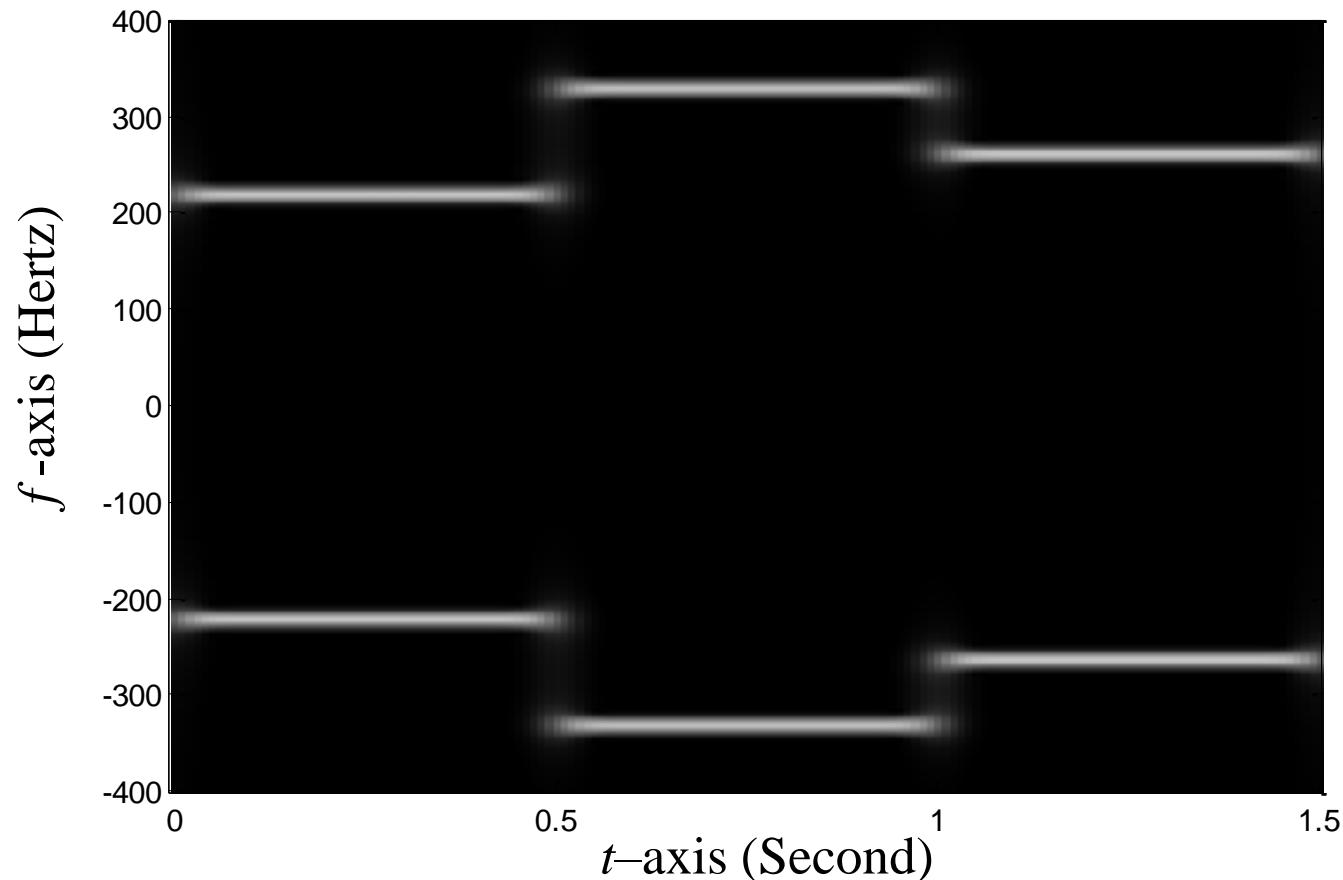
- S. Qian and D. Chen, *Joint Time-Frequency Analysis: Methods and Applications*,
Prentice Hall, N.J., 1996.
- R. L. Allen and D. W. Mills, *Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure*, Wiley- Interscience.

Common Features for short-time Fourier transforms and Gabor transforms

- (1) The instantaneous frequency can be observed
- (2) Without Cross Term
- (3) Poor clarity

Example: $x(t) = \cos(440\pi t)$ when $t < 0.5$,
 $x(t) = \cos(660\pi t)$ when $0.5 \leq t < 1$,
 $x(t) = \cos(524\pi t)$ when $t \geq 1$

The Gabor transform of $x(t)$ ($\sigma = 200$)



用 Gray level 來表示 $X(t, f)$ 的 amplitude

Instantaneous Frequency 瞬時頻率

If $x(t) = \sum_{k=1}^N a_k \cdot \exp(j \cdot \phi_k(t))$ around t_0

then the instantaneous frequency of $x(t)$ at t_0 are

$$\frac{\phi_1'(t_0)}{2\pi}, \frac{\phi_2'(t_0)}{2\pi}, \frac{\phi_3'(t_0)}{2\pi}, \dots, \frac{\phi_N'(t_0)}{2\pi} \quad (\text{以頻率 frequency 表示})$$

$$\phi_1'(t_0), \phi_2'(t_0), \phi_3'(t_0), \dots, \phi_N'(t_0) \quad (\text{以角頻率 angular frequency 表示}) :$$

If the order of $\phi_k(t) > 1$, then instantaneous frequency varies with time

自然界中，頻率會隨著時間而改變的例子

Frequency Modulation

Music

Speech

Others (Animal voice, Doppler effect, seismic waves, radar system, optics, rectangular function)

In fact, in addition to **sinusoid-like functions**, the instantaneous frequencies of other functions will inevitably vary with time.

- Sinusoid Function

- Chirp function

$$\exp\left[j(\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0)\right] \quad \text{Instantaneous frequency} = \frac{\alpha_2}{\pi} t + \frac{\alpha_1}{2\pi}$$

acoustics, wireless communication, radar system, optics

例： Υ ($F_1 = 900\text{Hz}$, $F_2 = 1200\text{Hz}$), $-$ ($F_1 = 300\text{Hz}$, $F_2 = 2300\text{Hz}$)

F_1 由嘴唇的大小決定, $F_2 - F_1$ 由如面的高低決定

- Higher order exponential function

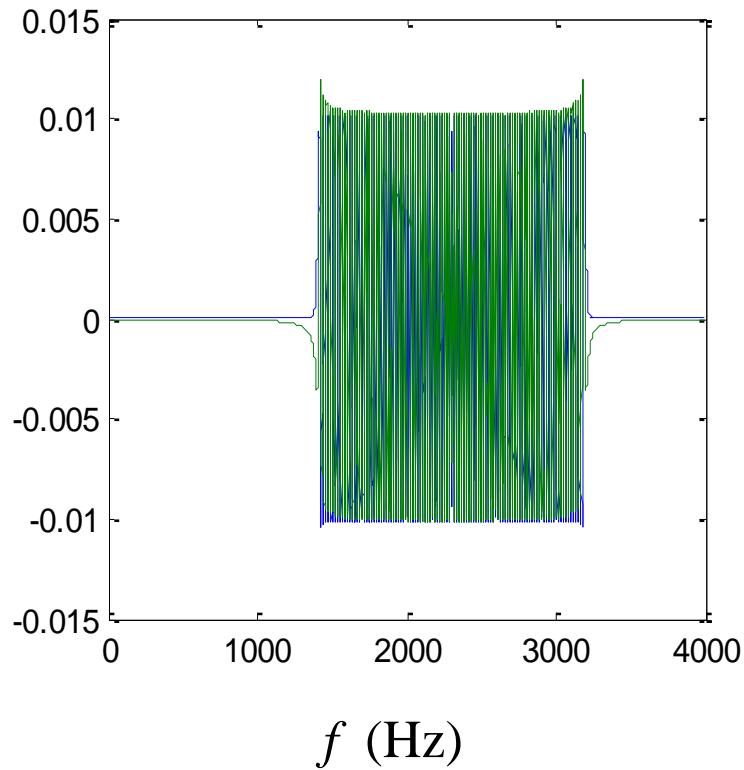
Example 2

$$(1) \quad x(t) = 0.5 \cos(6400\pi t - 600\pi t^2) \quad t \in [0, 3]$$

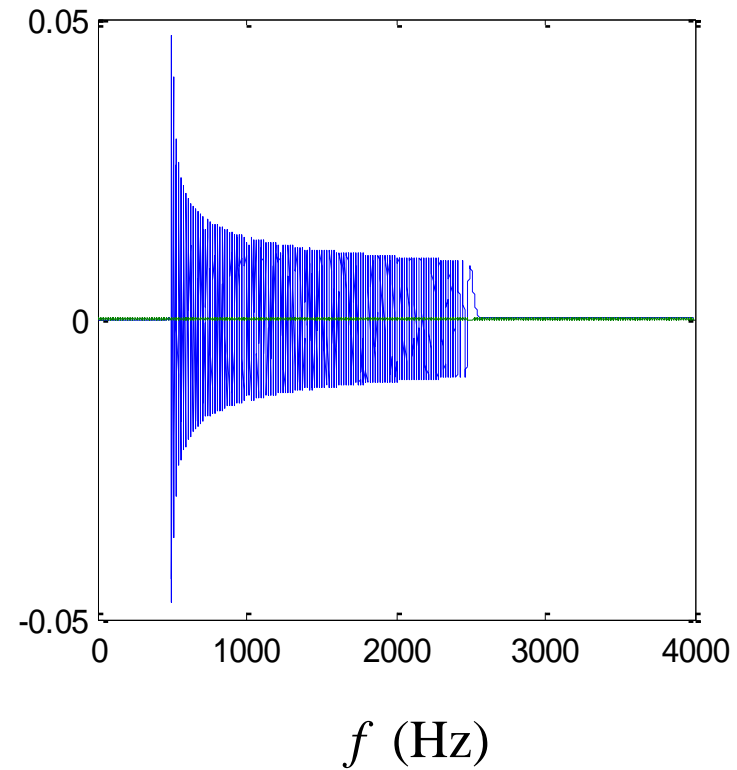
$$(2) \quad x(t) = 0.5 \cos(600\pi t^3 - 2700\pi t^2 + 5050\pi t) \quad t \in [0, 3]$$

Fourier transform

$$x(t) = 0.5 \cos(6400\pi t - 600\pi t^2)$$

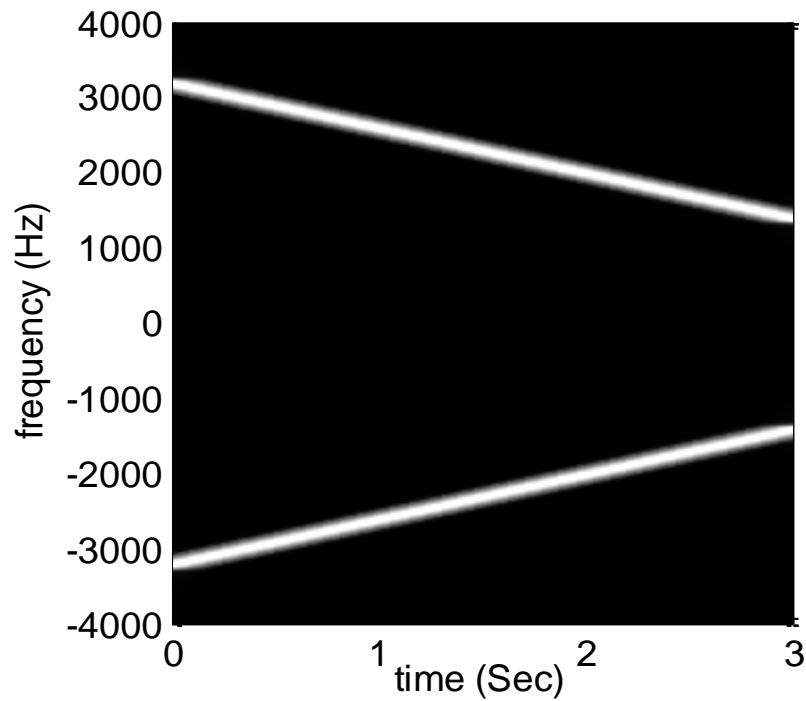


$$x(t) = 0.5 \cos(600\pi t^3 - 2700\pi t^2 + 5050\pi t)$$



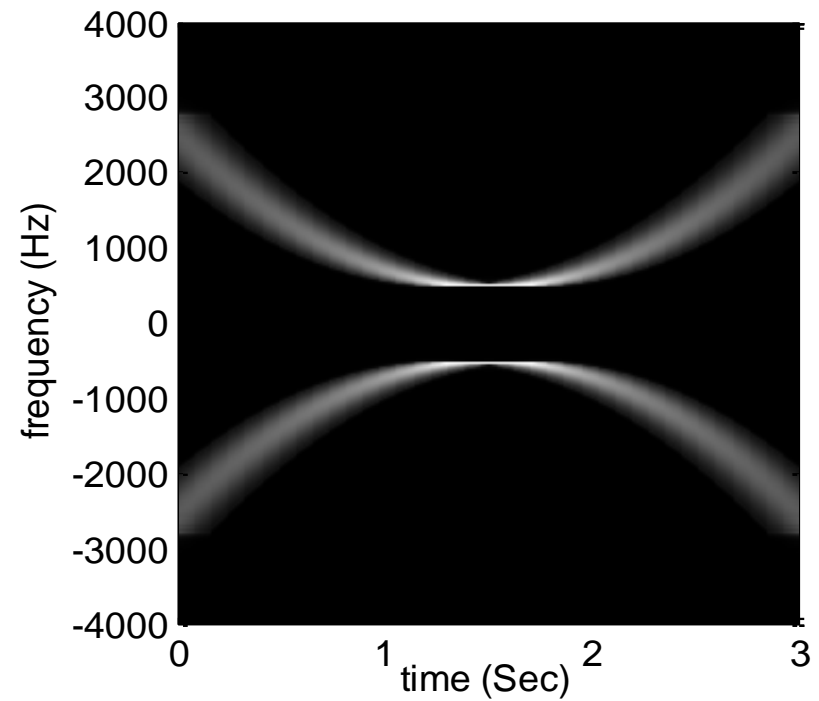
(1)

$$x(t) = 0.5 \cos(6400\pi t - 600\pi t^2)$$



(2)

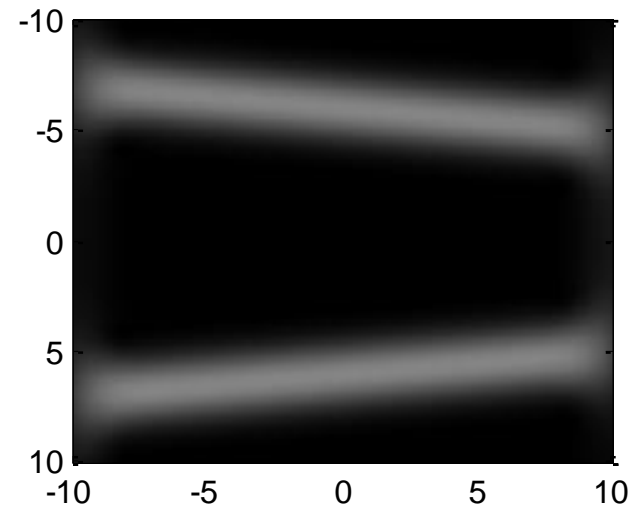
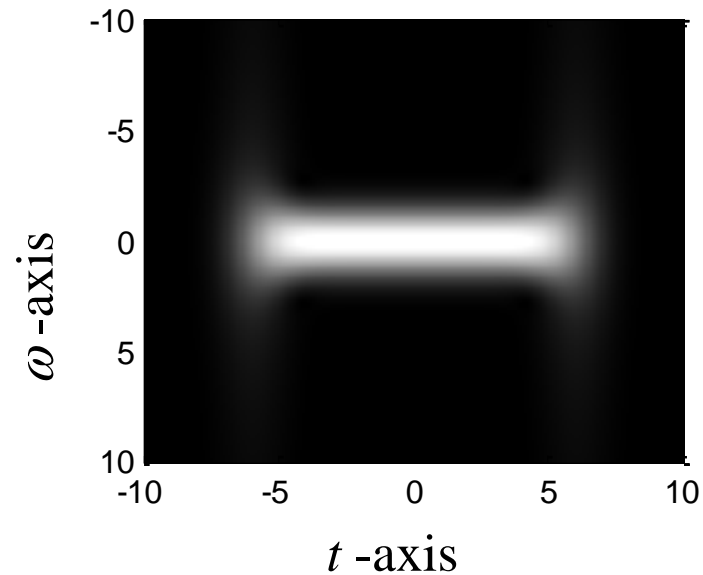
$$x(t) = 0.5 \cos(600\pi t^3 - 2700\pi t^2 + 5050\pi t)$$



Example 3

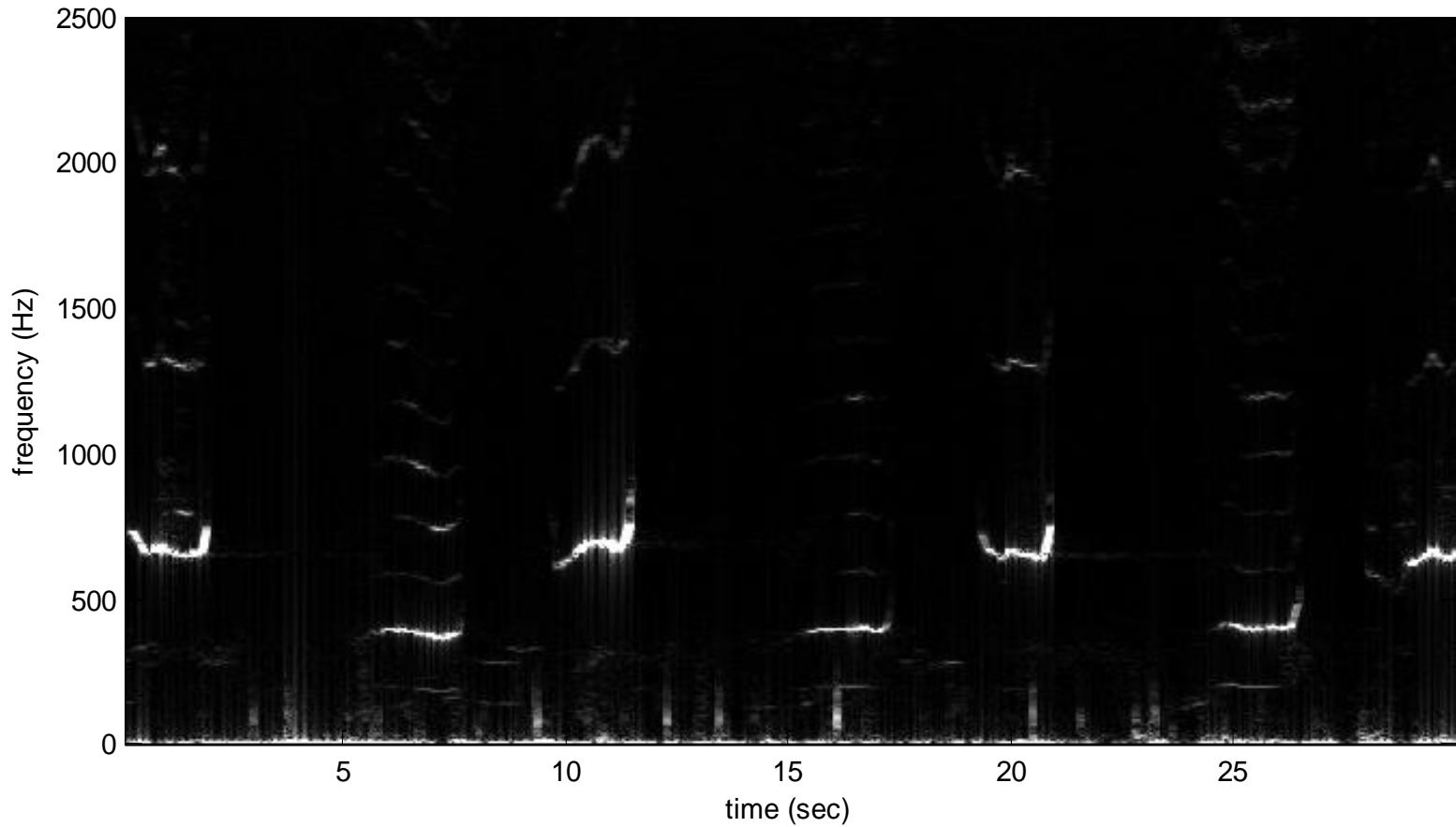
left: $x_1(t) = 1$ for $|t| \leq 6$, $x_1(t) = 0$ otherwise, right: $x_2(t) = \cos(6t - 0.05t^2)$

Gabor transform



Example 4

Data source: <http://oalib.hlsresearch.com/Whales/index.html>



Why Time-Frequency Analysis is Important?

- Many digital signal processing applications are related to the **spectrum** or the **bandwidth** of a signal.
 - If the spectrum and the bandwidth can be determined adaptive, the performance can be improved.
-
- | | |
|---------------------|--------------------------|
| • modulation, | • signal identification, |
| • multiplexing, | • acoustics, |
| • filter design, | • system modeling, |
| • data compression, | • radar system analysis |
| • signal analysis, | • sampling |

Example: Generalization for sampling theory

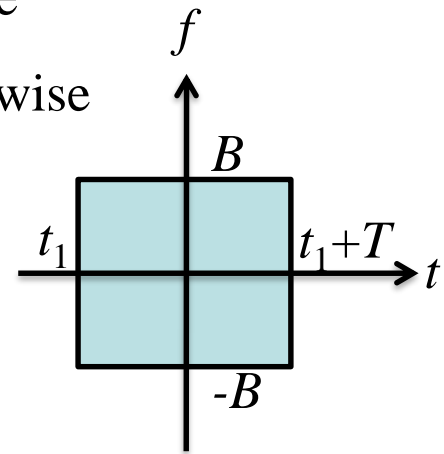
假設有一個信號，

- ① The supporting of $x(t)$ is $t_1 \leq t \leq t_1 + T$, $x(t) \approx 0$ otherwise
- ② The supporting of $X(f) \neq 0$ is $-B \leq f \leq B$, $X(f) \approx 0$ otherwise

根據取樣定理， $\Delta_t \leq 1/F$, $F = 2B$, B : 頻寬

所以，取樣點數 N 的範圍是

$$N = T/\Delta_t \geq TF$$



重要定理： 一個信號所需要的取樣點數的下限，等於它時頻分佈的面積

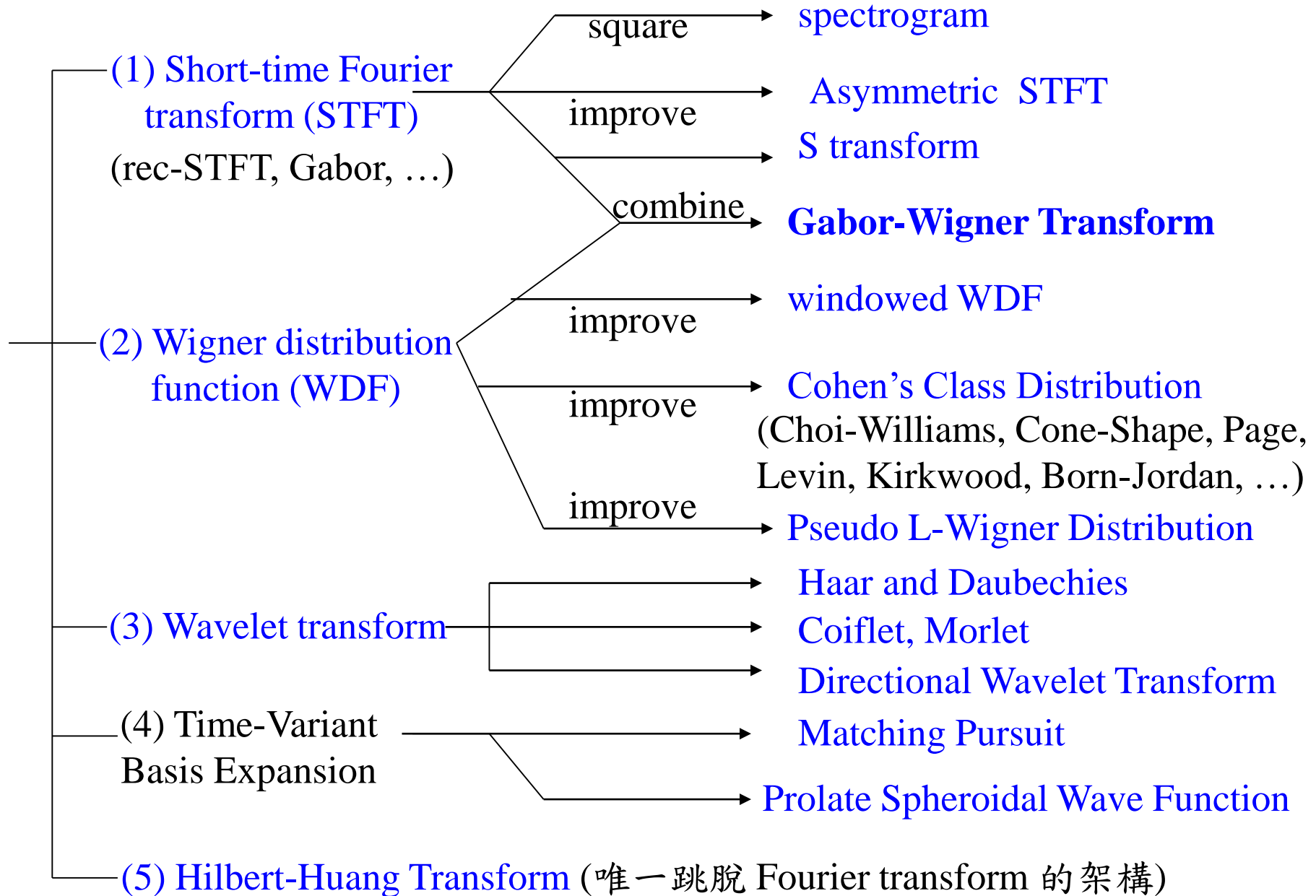
Q1 : Scaling 對於一個信號的取樣點數有沒有影響？

Hint:

$$g(\sigma t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{|\sigma|} G\left(\frac{f}{\sigma}\right)$$

Q2: How to use time-frequency analysis to reduce the number of sampling points?

Time-frequency analysis is an efficient tool for **adaptive signal processing**.



• Continuous Wavelet Transform

forward wavelet transform:

$$X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-a}{b}\right) dt$$

$\psi(t)$: mother wavelet, a : location, b : scaling,

inverse wavelet transform:

$$x(t) = \sum_a \sum_b X(a, b) \varphi_{a,b}(t)$$

$\varphi_{a,b}(t)$ is dual orthogonal to $\psi(t)$.

	output
Fourier transform	$X(f)$, f : frequency
time-frequency analysis	$X(t, f)$, t : time, f : frequency
wavelet transform	$X(a, b)$, a : time, b : scaling

限制：

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a_1, b_1}(t) \psi\left(\frac{t-a}{b}\right) dt = 1 \quad \text{when } a_1 = a \text{ and } b_1 = b,$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a_1, b_1}(t) \psi\left(\frac{t-a}{b}\right) dt = 0 \quad \text{otherwise}$$

(2) $\psi(t)$ has a finite time interval

Two parameters, a : 調整位置, b : 調整寬度

應用：adaptive signal analysis

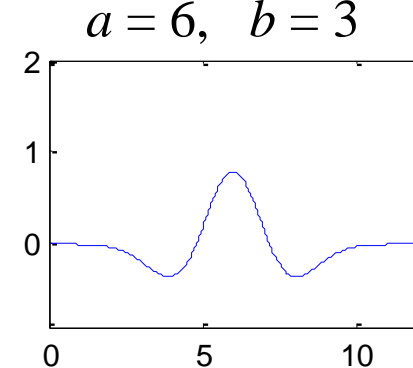
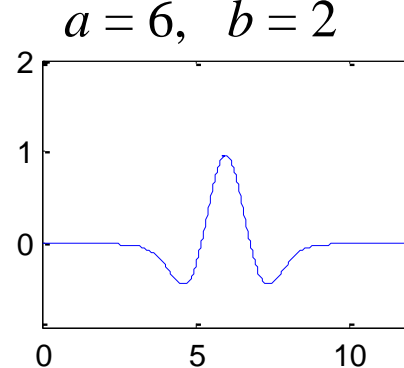
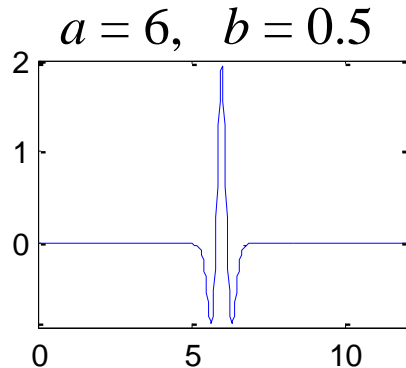
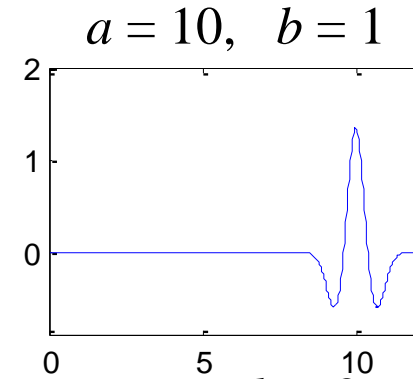
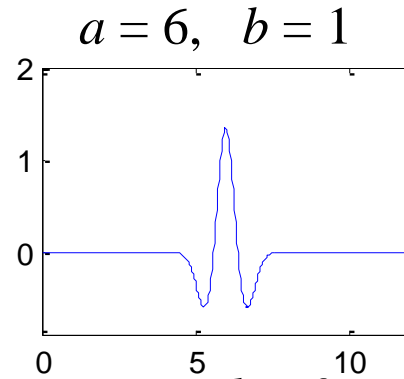
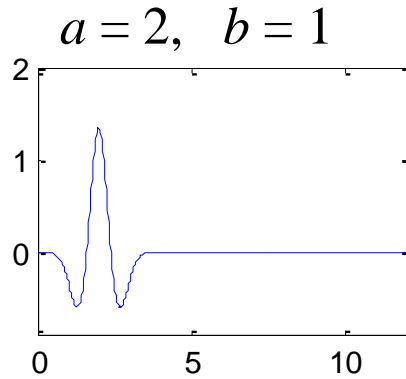
思考：需要較高解析度的地方， b 的值應該如何？

Wavelet 的種類甚多

Mexican hat wavelet, Haar Wavelet, Daubechies wavelet, triangular wavelet,

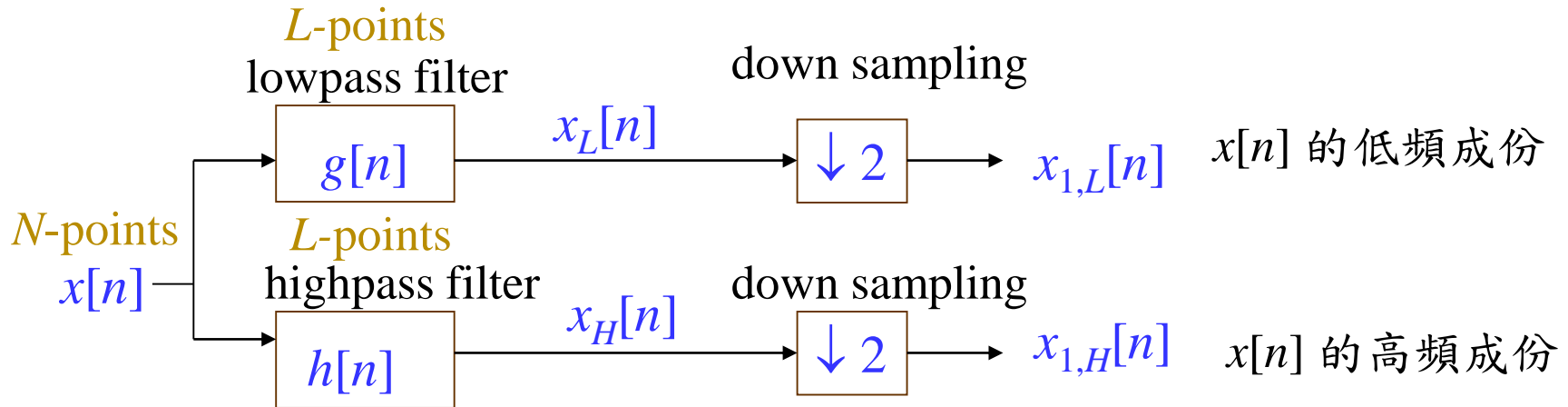
例子：Mexican hat wavelet 隨 a and b 變化之情形

$$\psi(t) = \frac{2^{5/4}}{\sqrt{3}} (1 - 2\pi t^2) e^{-\pi t^2} \quad \frac{1}{\sqrt{b}} \psi\left(\frac{t-a}{b}\right)$$



• Discrete Wavelet Transform (DWT)

The discrete wavelet transform is **very different** from the continuous wavelet transform. It is **simpler** and **more useful** than the continuous one.



$$x_L[n] = \sum_k x[n-k]g[k]$$

$$x_{1,L}[n] = \sum_k x[2n-k]g[k]$$

$$x_H[n] = \sum_k x[n-k]h[k]$$

$$x_{1,H}[n] = \sum_k x[2n-k]h[k]$$

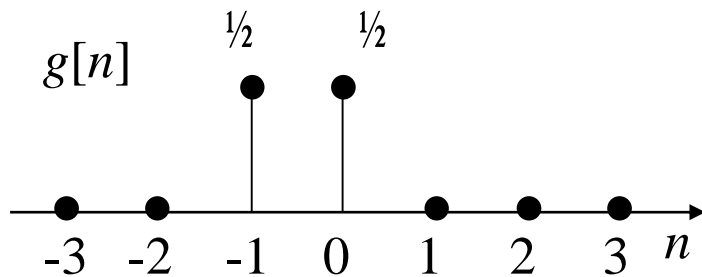
$$x_{1,L}[n] = \sum_k x[2n-k]g[k]$$

$$x_{1,H}[n] = \sum_k x[2n-k]h[k]$$

例子：2-point Haar wavelet

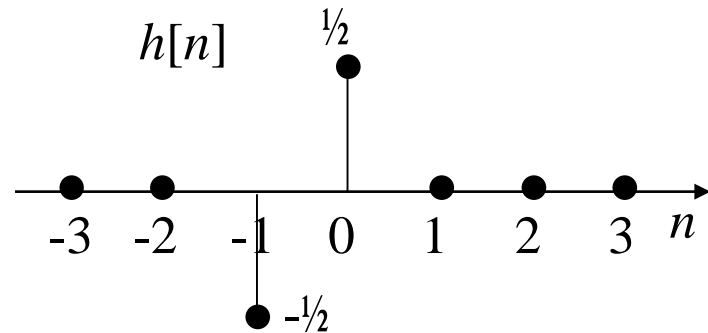
$$g[n] = 1/2 \text{ for } n = -1, 0$$

$$g[n] = 0 \text{ otherwise}$$



$$h[0] = 1/2, \quad h[-1] = -1/2,$$

$$h[n] = 0 \text{ otherwise}$$



then

$$x_{1,L}[n] = \frac{x[2n] + x[2n+1]}{2}$$

(兩點平均)

$$x_{1,H}[n] = \frac{x[2n] - x[2n+1]}{2}$$

(兩點之差)

Discrete wavelet transform 有很多種

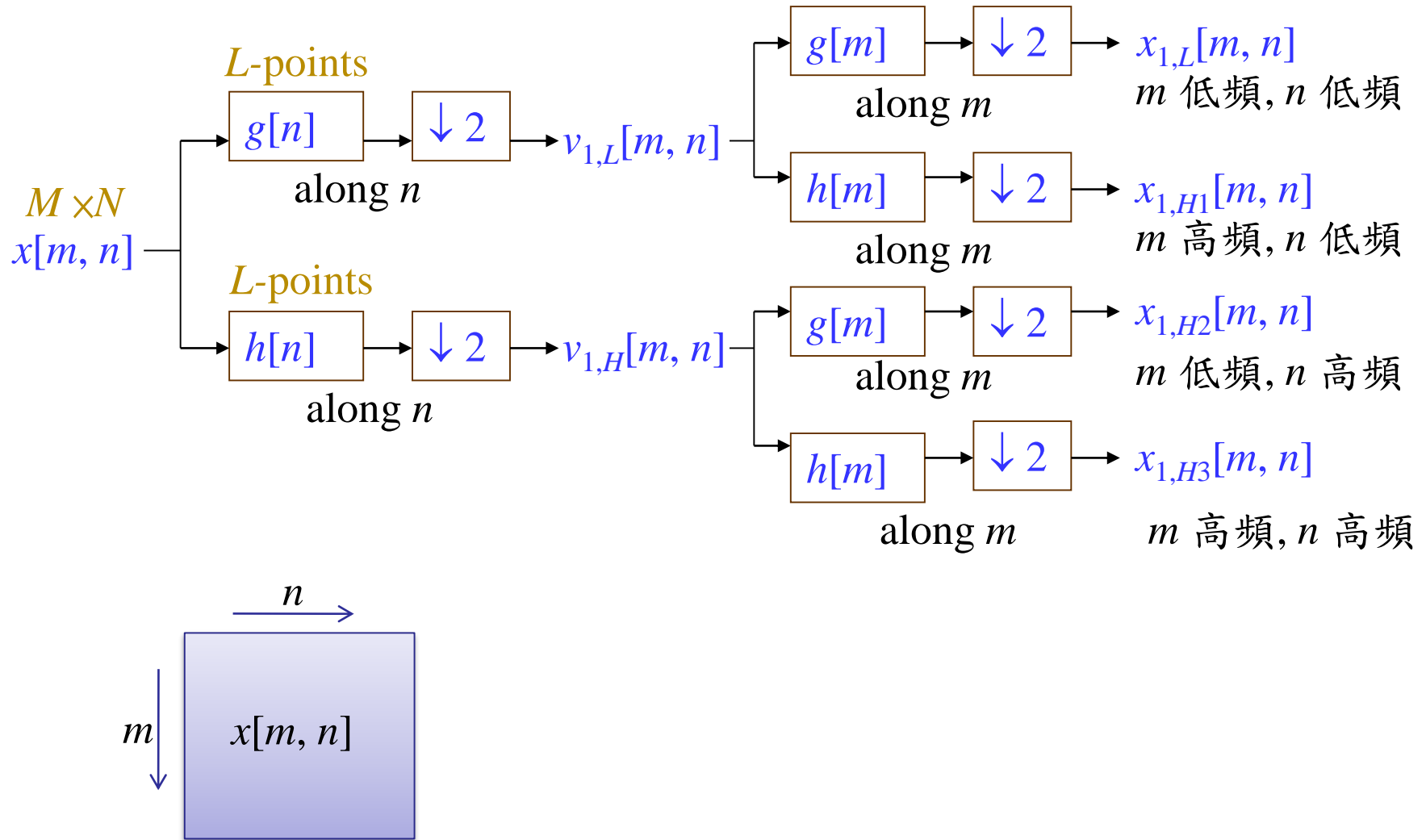
(discrete Haar wavelet, discrete Daubechies wavelet, B-spline DWT, symlet, coilet,)

一般的 wavelet, $g[n]$ 和 $h[n]$ 點數會多於 2 點

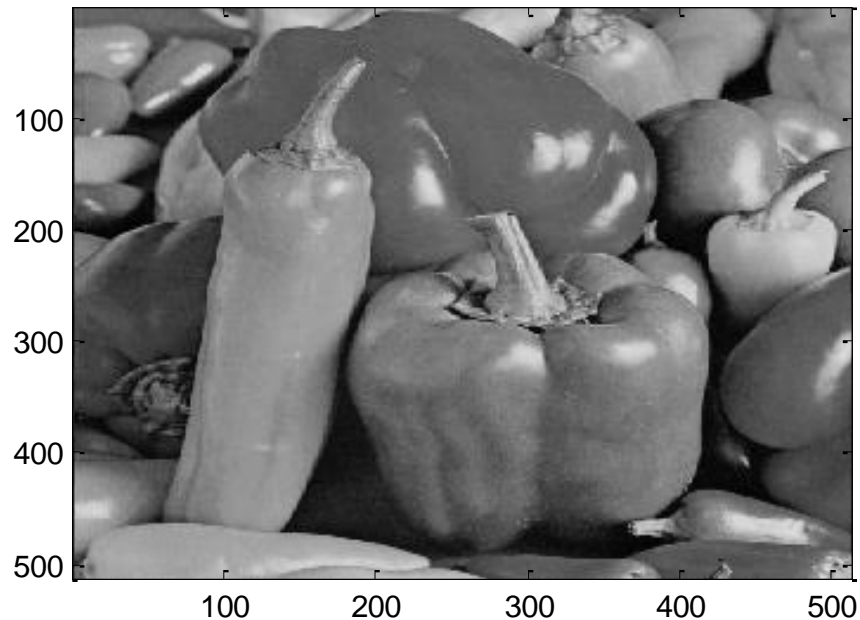
但是 $g[n]$ 通常都是 lowpass filter 的型態

$h[n]$ 通常都是 highpass filter 的型態

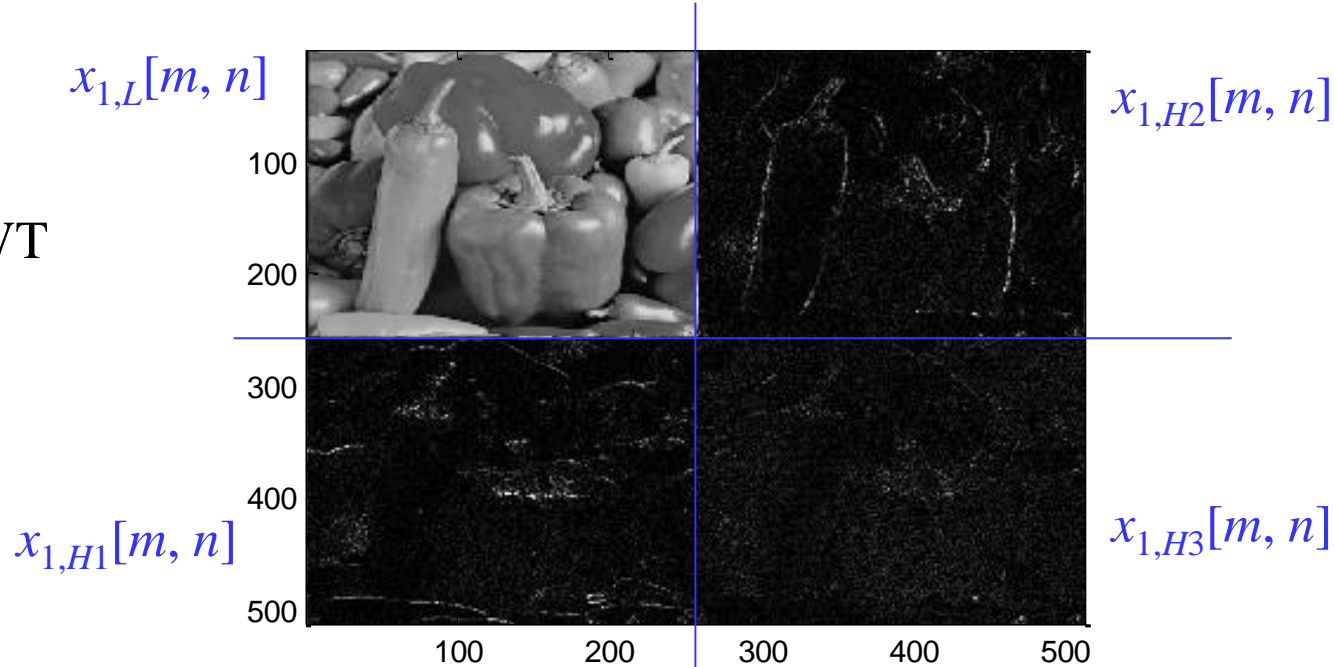
2-D 的情形



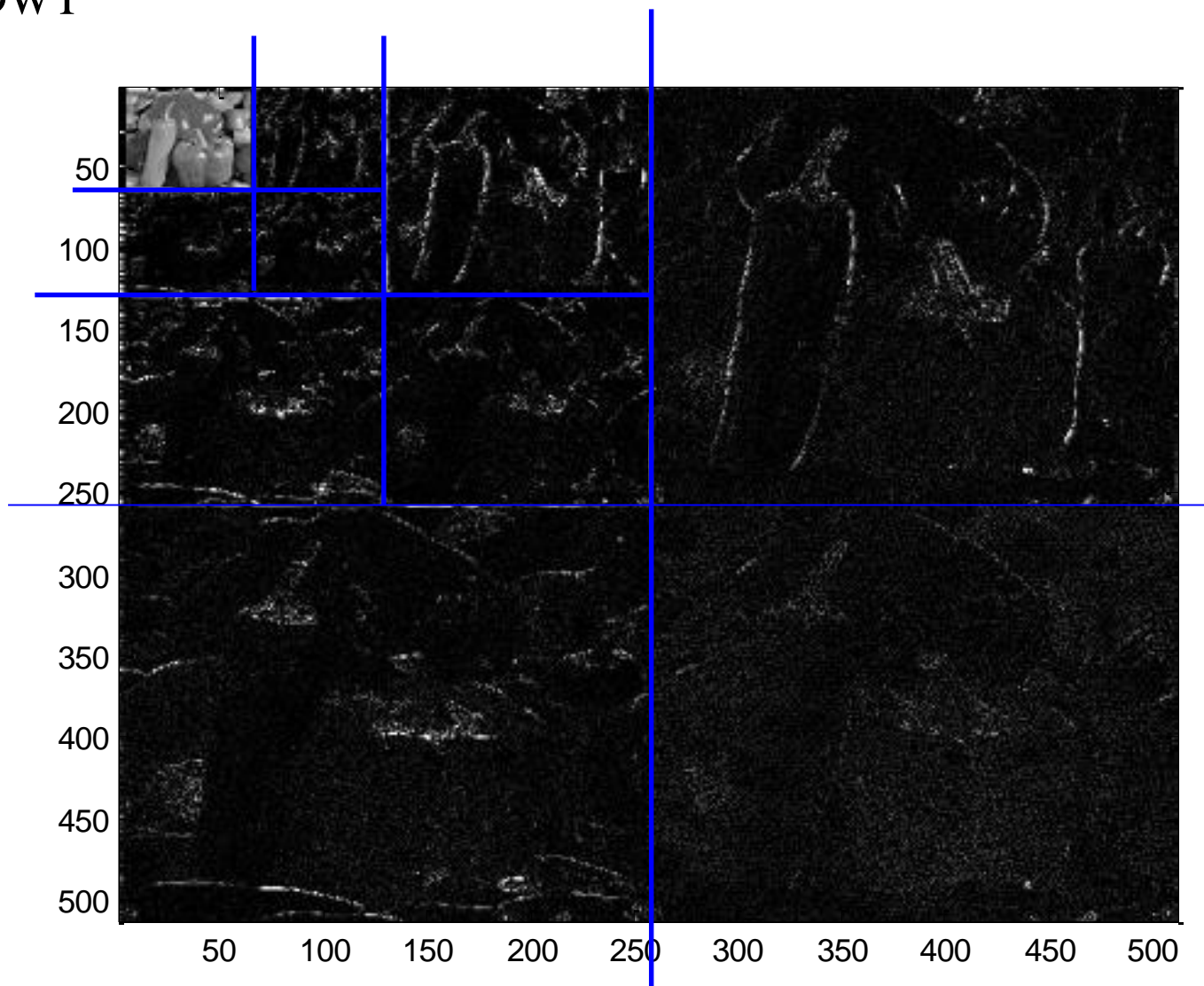
原影像
Pepper.bmp



2-D DWT
的結果



3次2-D DWT 的結果



應用：影像壓縮 (JPEG 2000)

其他應用：edge detection

corner detection

filter design

pattern recognition

music signal processing

economical data

temperature analysis

feature extraction

biomedical signal processing

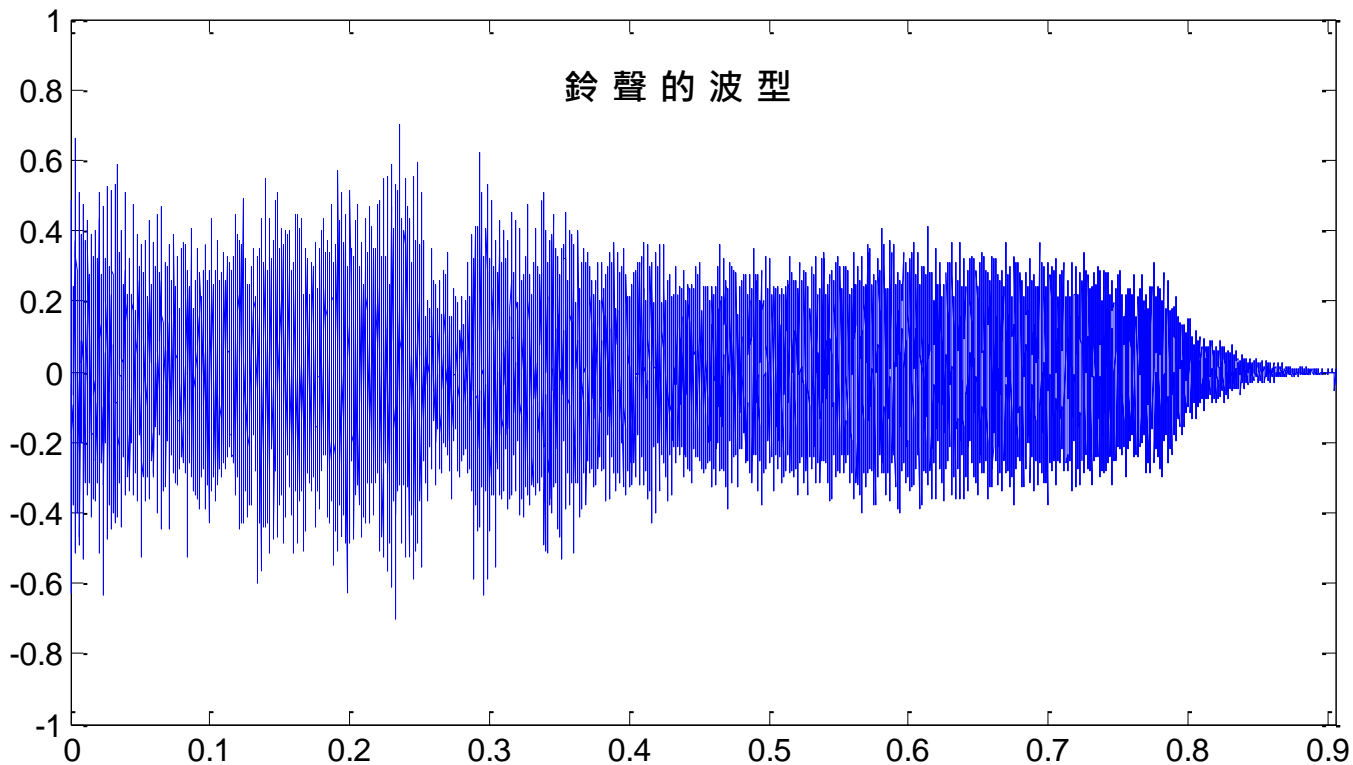
附錄一：聲音檔的處理 (by Matlab)

A. 讀取聲音檔

- 電腦中，沒有經過壓縮的聲音檔都是 *.wav 的型態
- 讀取：**wavread** (2015以後的版本改成 **audioread**)
- 例：`[x, fs] = wavread('C:\WINDOWS\Media\ringin.wav');`
可以將 ringin.wav 以數字向量 **x** 來呈現。 **fs**: sampling frequency
這個例子當中 `size(x) = 9981 1` `fs = 11025`
- 思考: 所以，取樣間隔多大?
- 這個聲音檔有多少秒?

畫出聲音的波型

```
time = [0:length(x)-1]/fs; % x 是前頁用 wavread 所讀出的向量  
plot(time, x)
```



注意：*.wav 檔中所讀取的資料，值都在 -1 和 $+1$ 之間

一個聲音檔如果太大，我們也可以只讀取它部分的點

```
[x, fs]=wavread('C:\WINDOWS\Media\ringin.wav', [4001 5000]);
```

% 讀取第4001至5000點

```
[x, fs, nbits] = wavread('C:\WINDOWS\Media\ringin.wav');
```

nbits: $x(n)$ 的bit 數

第一個bit : 正負號，第二個bit : 2^{-1} ，第三個bit : 2^{-2} ，.....，

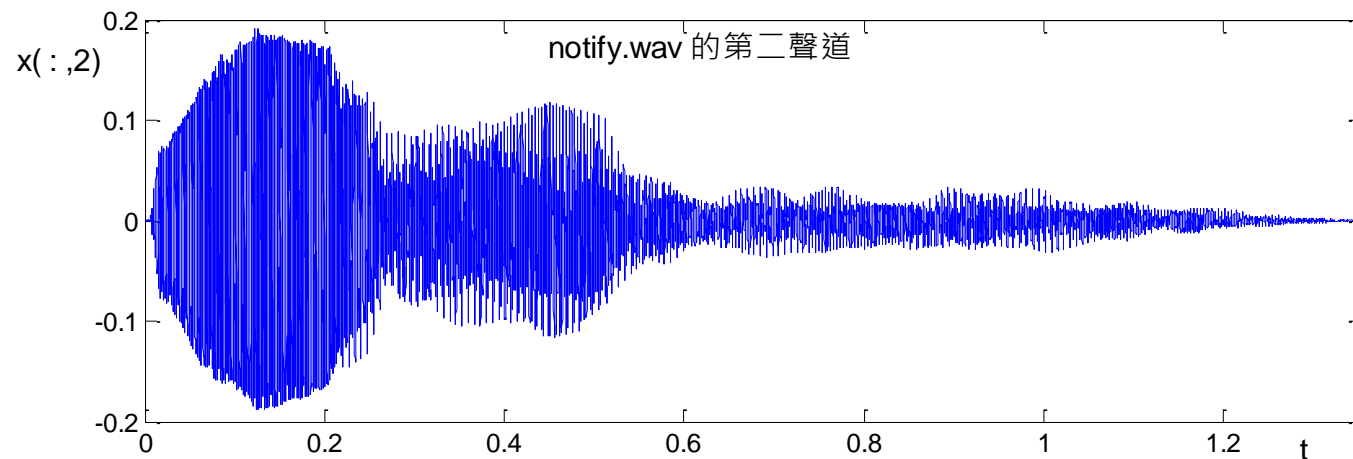
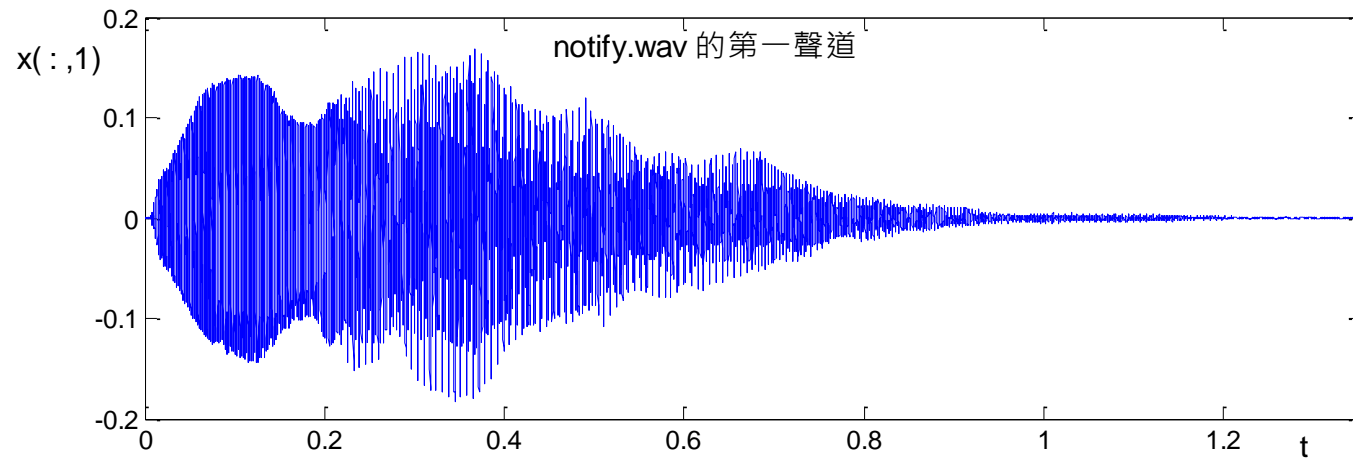
第 n 個bit : $2^{-nbits+1}$ ，所以 \mathbf{x} 乘上 $2^{nbits-1}$ 是一個整數

以鈴聲的例子， $nbits = 8$ ，所以 \mathbf{x} 乘上 128是個整數

- 有些聲音檔是 **雙聲道** (**Stereo**) 的型態 (俗稱**立體聲**)

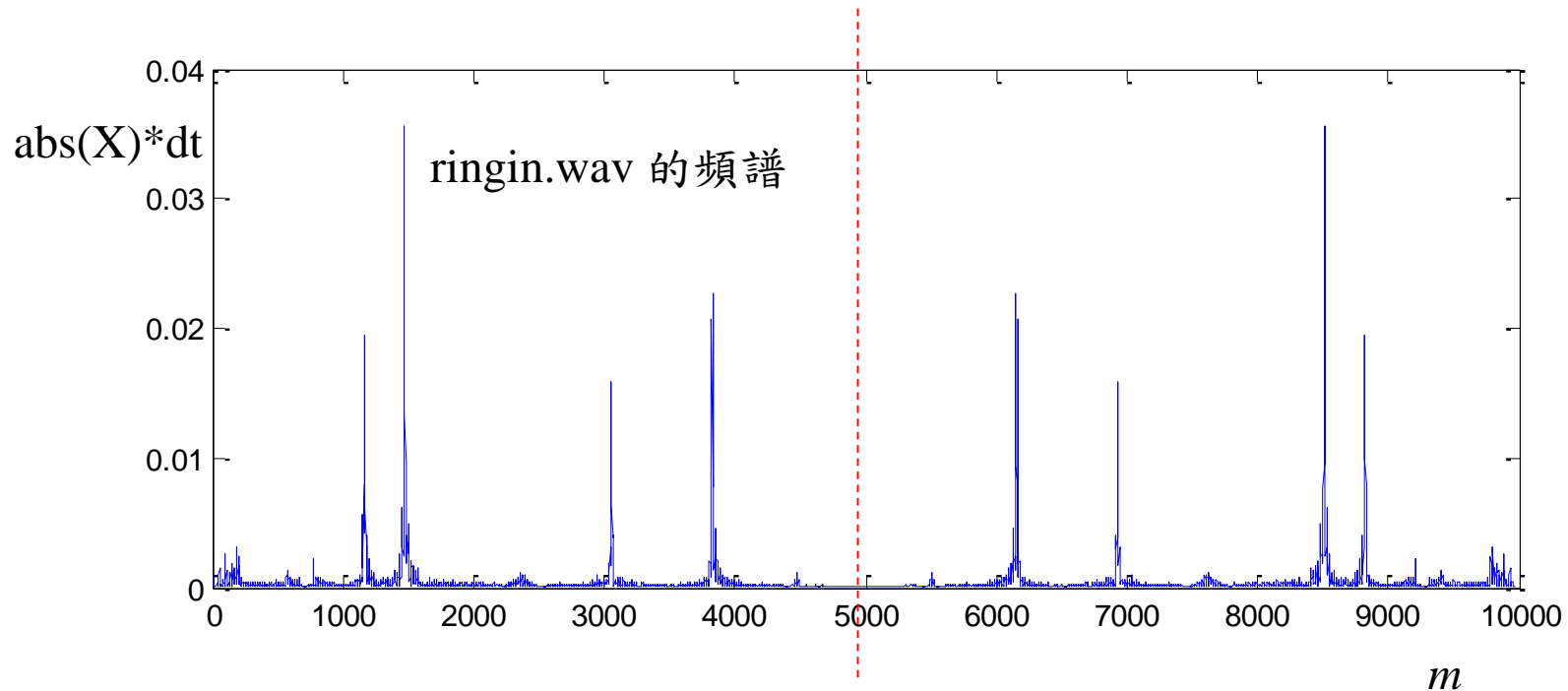
例： `[x, fs]=wavread('C:\WINDOWS\Media\notify.wav');`

`size(x) = 29823 2 fs = 22050`



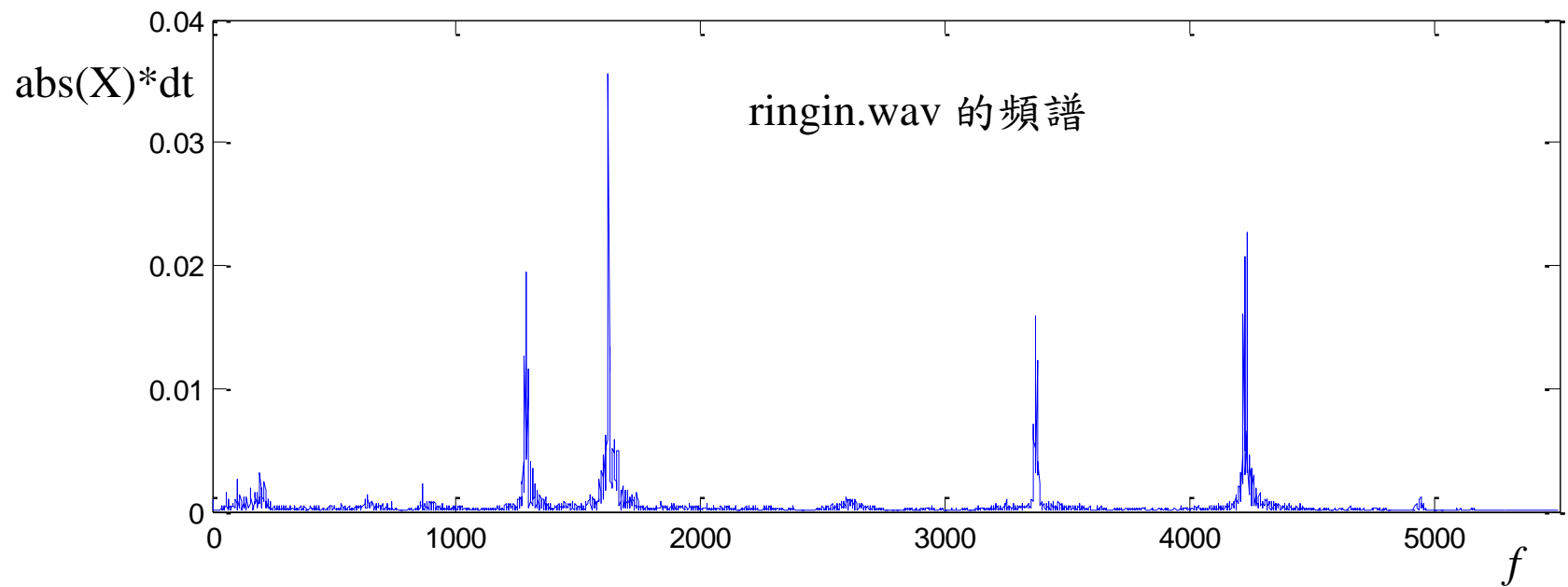
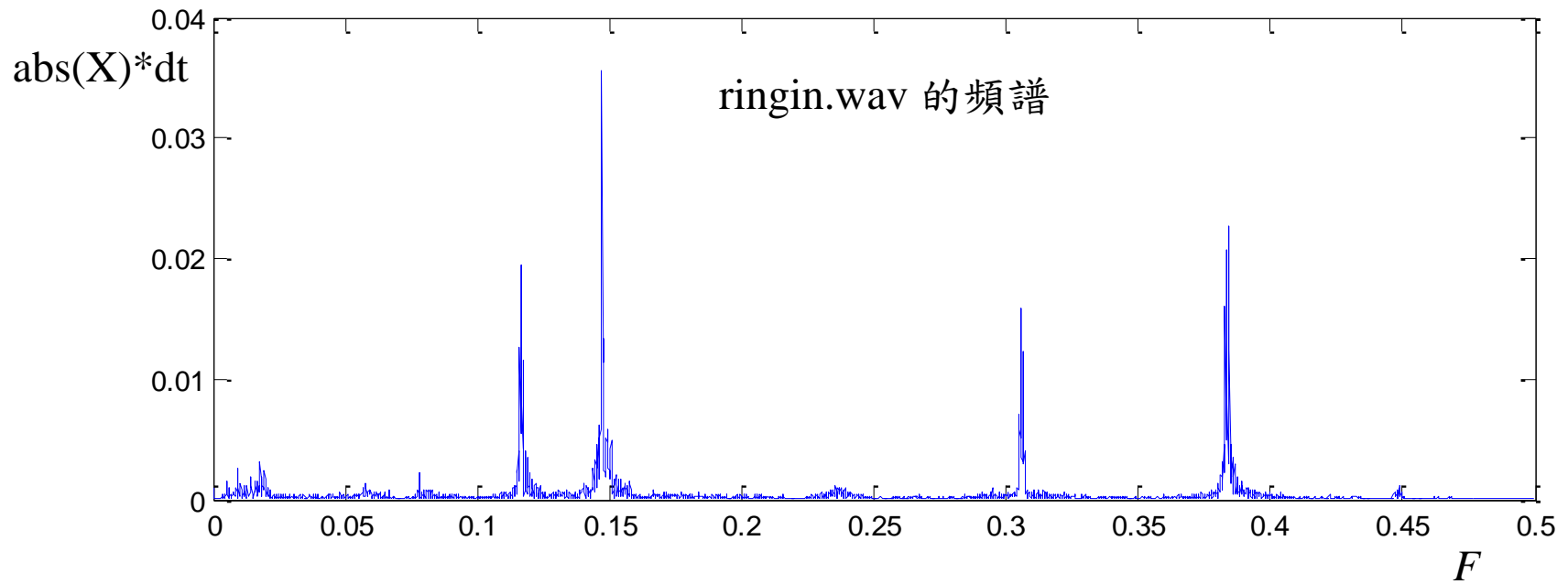
B. 繪出頻譜

```
X = fft(x);          plot(abs(X)*dt); % dt = 1/fs
```



fft 橫軸 轉換的方法

- (1) Using normalized frequency F : $F = m / N$.
- (2) Using frequency f , $f = F \times f_s = m \times (f_s / N)$.



C. 聲音的播放

(1) `wavplay(x)`: 將 **x** 以 11025Hz 的頻率播放
(時間間隔 = $1/11025 = 9.07 \times 10^{-5}$ 秒)

(2) `sound(x)`: 將 **x** 以 8192Hz 的頻率播放

(3) `wavplay(x, fs)` 或 `sound(x, fs)`: 將 **x** 以 **fs** Hz 的頻率播放

Note: (1)~(3) 中 **x** 必需是1個column (或2個 columns)，且 **x** 的值應該介於 -1 和 +1 之間

(4) `soundsc(x, fs)`: 自動把 **x** 的值調到 -1 和 +1 之間再播放

D. 用 Matlab 製作 *.wav 檔：wavwrite

wavwrite(x, fs, waveFile)

將數據 **x** 變成一個 *.wav 檔，取樣速率為 **fs** Hz

- ① **x** 必需是1 個column (或2個 columns) ② **x** 值應該 介於 -1 和 +1 之間
- ③ 若沒有設定fs，則預設的fs 為 8000Hz

(2015以後的版本改成 **audiowrite**)

E. 用 Matlab 錄音的方法

錄音之前，要先將電腦接上麥克風，且確定電腦有音效卡
(部分的 notebooks 不需裝麥克風即可錄音)

範例程式：

```
Sec = 3;  
Fs = 8000;  
recorder = audiorecorder(Fs, 16, 1);  
recordblocking(recorder, Sec);  
audioarray = getaudiodata(recorder);
```

執行以上的程式，即可錄音。

錄音的時間為三秒，sampling frequency 為 8000 Hz

錄音結果為 audioarray，是一個 column vector (如果是雙聲道，則是兩個 column vectors)

範例程式 (續) :

```
wavplay(audioarray, Fs);           % 播放錄音的結果  
t = [0:length(audioarray)-1]./Fs;  
plot(t, audioarray);              % 將錄音的結果用圖畫出來  
xlabel('sec','FontSize',16);  
wavwrite(audioarray, Fs, 'test.wav') % 將錄音的結果存成 *.wav 檔
```


指令說明：

`recorder = audiorecorder(Fs, nb, nch);` (提供錄音相關的參數)

Fs: sampling frequency,

nb: using nb bits to record each data

nch: number of channels (1 or 2)

`recordblocking(recorder, Sec);` (錄音的指令)

recorder: the parameters obtained by the command “audiorecorder”

Sec: the time length for recording

`audioarray = getaudiodata(recorder);`

(將錄音的結果，變成 audioarray 這個 column vector，如果是雙聲道，則 audioarray 是兩個 column vectors)

以上這三個指令，要並用，才可以錄音

F、MP3 檔的讀和寫

要先去這個網站下載 mp3read.m, mp3write.m 的程式

<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13852-mp3read-and-mp3write>

程式原作者：Dan Ellis

mp3read.m : 讀取 mp3 的檔案

mp3write.m : 製作 mp3 的檔案

不同於 *.wav 檔 (未壓縮過的聲音檔)，*.mp3 是經過 MPEG-2 Audio Layer III 的技術壓縮過的聲音檔

範例：

%% Write an MP3 file by Matlab

```
fs=8000;           % sampling frequency
t = [1:fs*3]/3;
filename = 'test';
Nbit=32;           % number of bits per sample
x= 0.2*cos(2*pi*(500*t+300*(t-1.5).^3));
mp3write(x, fs, Nbit, filename); % make an MP3 file test.mp3
```

%% Read an MP3 file by Matlab

```
[x1, fs1]=mp3read('phase33.mp3');
x2=x1(577:end); % delete the head
sound(x2, fs1)
```