高等數位訊號處理
期末報告

Advanced Digital Signal Processing

Short-Time Fractional Fourier Transform (STFRFT)

介紹與應用

學號：R05546030

姓名：彭新翔

Content Table

圖目錄

一、摘要

分數傅立葉轉換(FRFT, Fractional Fourier transform)對於分析啁啾訊號(Chirp Signal)是一個強而有力的工具。然而在一些應用中卻無法單靠 Fractional Fourier domain (FRFD)-Frequency Contents 來解決，因此 Short-Time Fractional Fourier Transform (STFRFT) 便應運而生，他扮演著將 Time Information 及 FRFD-Frequency Information 聯繫的重要角色。其中有兩點關於 STFRFT 的性能必須考慮：

(1) 2-D Resolution
(2) STFRFD Support

為了量測 Resolvable area 及 STFRFD Support，吾人定義 Time-FRFD-bandwidth product (TFBP)。而為了使 STFRFT 達到最佳化，採用了以下準則，其一是使 2-D Resolution 最大，其二則是使 STFRFD Support 最小，本文將單就 STFRFT 的逆轉換、各種性質及其運算複雜度進行介紹。

二、簡介

1. <u>**Fractional Fourier transform (FRFT)**</u>

Fractional Fourier Transform (FRFT)是一種廣義的 Fourier Transform (FT)，它被應用在量子力學、光學和訊號處理…等。可以被視為在時頻平面上作旋轉，也就是說 FRFT 是訊號沿著 u 軸或是在 Fractional Fourier Domain (FRFD)上的一種表述，如下圖所示：

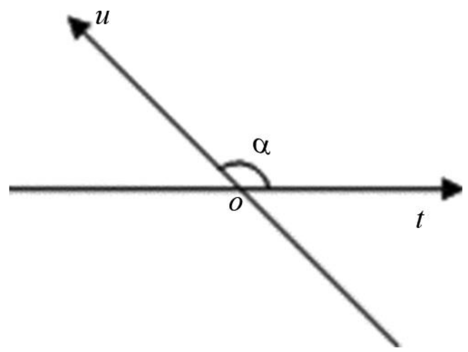

Figure 1 The time-FRFD-Frequency Plane

將頻率的觀念延伸至 FRFD，參數 u 可被視為 FRFD-Frequency，從這個觀點來看，FRFT 可以被當作是 FRFD-Spectrum。由於 FRFT 也可被當

作是多項啁啾訊號(Chirp Signals)的分解，因此 Chirp Signal 的 Matched-Order FRFD-Spectrum 比起它的 Fourier domain (FD)-Spectrum 來得更為重要。而且 FRFD 取樣定理保證 Chirp Signal 的取樣率可以在比傳統的 Shannon 取樣定理的取樣率還要低的情況下被取樣，較高的集中度以及較低的取樣率使得 FRFT 在分析啁啾訊號具備一定的優勢。

然而由於使用的是 Global Kernel，因此只展現了整個 FRFD-Frequency Contents。有時候我們不僅僅只想知道 FRFD-Frequency Contents 還想知道他們如何隨時間而改變，故必須發展一套表述方式有效地將時域資料與頻域資料進行結合，即所謂的 Time-FRFD-Frequency Representation (TFFR)。-而本文中要介紹的 Short-Time Fractional Fourier Transform (STFRFT)便是其中一種 TFFR，他扮演將時域資料(Time Information)與頻域資料(FRFD-Frequency Information)共同聯繫在 Time-FRFD-Frequency Plane 上的重要角色，並提供訊號的二維支援，此稱之為 Short-Time Fractional Fourier Domain (STFRFD) Support。若是採用 Matched-Order STFRFT 進行 Chrip Signal 的處理，將會產生緊實的 STFRFD Support，此一現象也表示了 STFRFT 在對 Chirp Signal 進行二維分析時扮演了非常強而有力的角色。另外也具備旋轉相加的性質，提供了 Chirp Signal 水平方向的 Support 非常利於對 Chirp Signals 做分析及訊號處理

2. **Fractional Fourier Transform**

一個訊號 $x(t) \in L^2(R)$ 的 $p(p = \frac{2\alpha}{\pi})$ 階 FRFT 被定義為：

$$X_p(u) = F^p\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_p(t,u)\, dt$$

$$K_p(t,u) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1 - j\cot\alpha}{2\pi}} \exp\left(j\dfrac{t^2+u^2}{2}\cot\alpha - jut\csc\alpha \right) & \text{for } \alpha \neq k\pi \\ \sigma(u-t) & \text{for } \alpha = 2k\pi \\ \sigma(u+t) & \text{for } \alpha = (2k+1)\pi \end{cases}$$

其中 Kernel 具備下列性質將幫助我們建構 STFRFT：

$$K_p^*(t,u) = K_{-p}(t,u)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{p1}^*(t,u) K_{p2}(u,z)\, du = K_{p_1+p_2}(t,z)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_p^*(u,t) K_p^*(t,u')\, dt = \sigma u - u'$$

而 FRFT 的逆轉換為：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_p(u) K_p^*(t,u) du$$

此定義說明 FRFT 以 Chirp 為基底 $\{K_p^*(t,u)\}$ 將訊號做分解，所以一個 Chirp Signal 的適當階數 FRFT 是一個脈衝函數。事實上如果 Chirp Rate 等於 μ_0，其適當的階數是 $p_0 = \frac{2\alpha_0}{\pi}$ ，此稱為 Matched-Order，其中 $\alpha_0 = \cot^{-1}(-\mu_0)$。

Matched-Order 是一個非常重要的參數，舉例來說：當 FRFD 對 Chirp Signals 進行濾波時，必須操作 Matched-Order FRFDs。若已知 Chirp Rate 則可以迅速獲得 Matched-Order，因為它們彼此之間是一對一的映射關係；如果未知 Chirp Rate，則需要對其進行估計，現今已有許多種估計 Chirp Rate 的演算法，這些演算法也可用來估計 Matched-Rrder。參數 u 所表示的是一個從頻率觀念所延伸出來的新物理量稱為 FRFD-Frequency，因此 FRFT 也可以被視為 FRFD-Spectrum，我們透過一個以給定初始頻率 Chirp Signal 的 Matched-Order FRFT，可得到一個位於 $u_0 = \Omega_0 \sin\alpha_0$ 的脈衝函數。因此 FRFD-frequency 與 Initial Frequency 之間具有關聯性，基於 FRFT 與 FT 之間的關係，可以用以下來闡述 FRFD-Spectrum：

- 一個有限能量的訊號可以被分解成一些 Chirp Signals；
- 呈上述，其 FRFD-Spectrum 會是包含 Initial Frequency 之 Chirp Signals 的 FD-Spectrum 乘上 Chirp 及其尺度縮放。

關於 Discrete FRFT 或它的近似數位運算有相當多的版本，此篇報告所使用的演算法必須要有因次正規化的性質，模擬時亦使用了此性質。

3. <u>A Useful Formula</u>

下述公式在此文中被廣泛使用以幫助化簡：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-At^2 \pm 2Bt + C) dt = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(\frac{B^2}{A} + C\right)$$

其中，$A, B, C \in \mathbb{C}, A \neq 0,$ and $\mathrm{Re}(A) \geq 0$，此公式可由柯西積分定理推導得出。

三、理論

Definition and 2-D Resolution

將訊號乘上一個 Window Function 並對其取 FRFT，即可得到 STFRFT，如下所示：

$$\mathrm{STFRFT}_{x,p}(t,u)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)g(\tau-t)K_p(\tau,u)d\tau$$

為了區分相同 Window 但不同階數的 FRFT Kernels，稱此為 p 階 STFRFT，此處的視窗函數必須是從訊號所擷取下來的一小段是在以 t 為中心的附近並滿足 Short-Time Support、實數，並具有對稱性的。擷取下來的一小段訊號之 FRFT 可以被視為訊號在時間 t 的 Instantaneous FRFD-Spectrum，藉由沿著 t 軸移動窗格便可以得到在每個瞬間的 FRFD-Spectrum。由此二維轉換，吾人不僅僅可以看得到 FRFD-Frequency Contents，還能夠知道它們如何隨著時間改變。

STFRFT 之基底可以表示成：

$$h(\tau|t,u)=g(\tau-t)K_p^*(\tau,u)$$

透過一連串地變數代換，吾人還可將 STFRFT 之定義轉換成一與 FRFD 相關之型式：

$$\mathrm{STFRFT}_{x,p}(t,u)=\int_{-\infty}^{\infty}X_p(\xi)H_p^*(\xi|t,u)d\xi$$

其中

$$\begin{aligned}H_p(\xi|t,u)&=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau|t,u)K_p(\tau,\xi)d\tau\\&=\sqrt{2\pi}G((\xi-u)\csc\alpha)K_p(t,\xi)K_{-p}(t,u)\end{aligned}$$

其中，$G((\xi-u)\csc\alpha)$ 是窗格函數 $g(t)$ 之 FT 經尺度縮放後的結果及其頻移。

Time-FRFD-Frequency Plane 被分成多個 STFRFT 的平行四邊形，稱為 Time-FRFD-Frequency Cells，如下圖所示。其中 Time-FRFD-frequency cell 的兩邊分別代表 STFRFT 可解析的時間寬度和頻帶寬度。事實上，它們就是基底的 Time-width 和 FRFD-Bandwidth，可定義為：

$$T_h^2=\frac{1}{\|h(\tau|t,u)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}(\tau-\bar{\tau}_h)^2|h(\tau|t,u)|^2d\tau$$

$$B_{h,p}^2 = \frac{1}{\|H_p(\xi|t,u)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\bar{\xi}_h)^2|H_p(\xi|t,u)|^2 d\xi$$

其中，基底的 Mean Time 和 Mean FRFD-Frequency 可定義為：

$$\bar{\tau}_h = \frac{1}{\|h(\tau|t,u)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\tau|h(\tau|t,u)|^2 d\tau$$

$$\bar{\xi}_h = \frac{1}{\|H_p(\xi|t,u)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\xi|H_p(\xi|t,u)|^2 d\xi$$

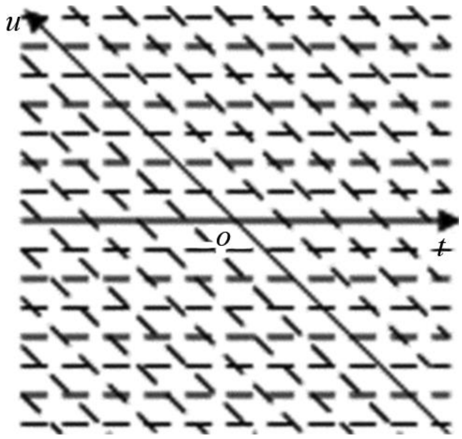

Figure 2 The Time-FRFD-Frequency Plane Divided by Time-FRFD-Frequency Cells

此外，我們將基底 Time-FRFD-Bandwidth Product (TFBP) 的倒數定義為 STFRFT 的 2-D Resolution，因此：

$$R = \frac{1}{T_h B_{h,p}}$$

Theorem

STFRFT 的 2-D Resolution 之上界為$\frac{2}{|\sin\alpha|}$，此上界能達到的充分且必要條件為使用 Gaussian Window。

1. **STFRFD Support**

Chirp Signal 在相對應的時間軸上有斜的 STFD Support，其邊界可以用一個四方形框住，如下圖所示。這個四方形的中心點座標即為 Mean Time 和 Mean Frequency，而兩邊則是 STFT 的 Time-Width 和 Bandwidth，此兩邊長的乘積也就是 Time-Frequency Product (TBP)，其值經常被用來量測 STFD

Support。

同理可知 p 階 STFRFT 的 Mean Time、Mean FRFD-Frequency、Time-Width 與 FRFD-Bandwidth 可定義如下：

$$\bar{t}_S = \frac{1}{\|\text{STFRFT}_{x,p}(t,u)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t|\text{STFRFT}_{x,p}(t,u)|^2 dtdu$$

$$\bar{u}_S = \frac{1}{\|\text{STFRFT}_{x,p}(t,u)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u|\text{STFRFT}_{x,p}(t,u)|^2 dtdu$$

$$T_S^2 = \frac{1}{\|\text{STFRFT}_{x,p}(t,u)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (t-\bar{t}_S)^2|\text{STFRFT}_{x,p}(t,u)|^2 dtdu$$

$$B_{S,p}^2 = \frac{1}{\|\text{STFRFT}_{x,p}(t,u)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (u-\bar{u}_S)^2|\text{STFRFT}_{x,p}(t,u)|^2 dtdu$$

其中

$$\bar{t}_S = \bar{t}_x - \bar{t}_g$$

$$\bar{u}_S = \bar{u}_x + \bar{\Omega}_g \sin\alpha$$

$$T_S^2 = T_x^2 + T_g^2$$

$$B_{S,p}^2 = B_{x,p}^2 + B_g^2 \sin^2\alpha$$

$\bar{\Omega}_g$ 和 B_g^2 分別為窗框函數的 Mean Frequency 和 Bandwidth 平方。STFRFT 的 Mean Time 和 Time-Width 與 STFT 的 Mean Time 和 Time-Width 相同，故兩者的 Support 會落在相同的時間區間內。若採用 Matched-Order STFRFT，啁啾函數 Chirp Signal 將有平行於時間軸且可用平行四邊形框住的 STFRFD Support，如下圖所示。我們將平行四邊形兩邊長的乘積，也就是 TBFP 當作是量測 STFRFD 的依據。當 STFRFD support 較 STFD support 邊界內的面積比高時，TBFP 則會比 TBP 更具有緊實的量測能力。

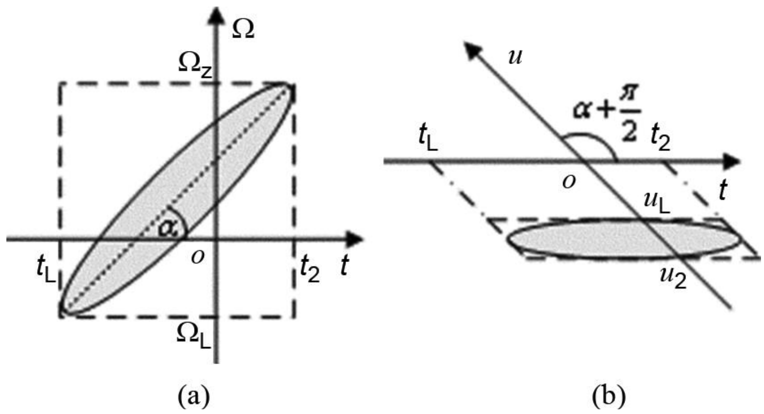

Figure 3 (a) The STFD support bounded by a rectangular. (b) The STFRFD support bounded by a parallelogram.

2. **Optimal STFRFT**

特定階數之 STFRFT 的效能會受窗框的形狀及長度所影響，其中關於如何選擇一個好的窗框有以下兩個準則：

(1) High 2-D Resolution
(2) Compact STFRFT Support

所以最佳化的窗框應該使 STFRFT 有最大的 2-D Resolution 和最小的 STFRFD Support。根據前述對於 Chirp Signal 而言，TBFP 比 TBP 更具有緊實的量測能力，所以討論 Optimal STFRFT 比討論 Optimal STFT 更具合理性。

根據前述所提到的定理，Gaussian Window 可以使 2-D Resolution 達到最大。為了方便起見考慮一個具有單位能量的 Gaussian Window，如下：

$$g(\tau) = \left(\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}$$

其 Time-Width 的平方和 Bandwidth 的平方分別為：

$$T_g^2 = \frac{\sigma^2}{2} \; B_g^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$$

故 STFRFT 的 TFBP 平方為：

$$\mathrm{TFBP}_{S,p}^2 = T_S^2 B_{S,p}^2$$

經整理可得：

$$\mathrm{TFBP}_{S,p}^2 = T_x^2 B_{x,p}^2 + \frac{1}{2\sigma^2} T_x^2 \sin^2\alpha + \frac{\sigma^2}{2} B_{x,p}^2 + \frac{1}{4}\sin^2\alpha$$

從上式可證得：

$$\begin{aligned}\mathrm{TFBP}_{S,p}^2 &\geq T_x^2 B_{x,p}^2 + \frac{1}{4}\sin^2\alpha + 2\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2} T_x^2 \sin^2\alpha \cdot \frac{\sigma^2}{2} B_{x,p}^2} \\ &= \left(T_x B_{x,p} + \frac{1}{2}\left|\sin\alpha\right|\right)^2\end{aligned}$$

上述等號成立之充分且必要條件為：

$$\sigma^2 = \frac{T_x \left|\sin\alpha\right|}{B_{x,p}}$$

$\boxed{\textbf{Theorem}}$

有了最大化 2-D Resolution 和最小化 STFRFD Support 之兩點準則，要達到 Optimal STFRFT 必須是使用 Gaussian Window，即：

$$g(\tau) = \left(\pi \frac{T_x \left|\sin\alpha\right|}{B_{x,p}}\right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{B_{x,p}\tau^2}{2T_x \left|\sin\alpha\right|}\right)$$

其中，$\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3. Inverse STFRFT

(i) 1-D Inverse STFRFT

假設逆轉換公式為：

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= C\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{STFRFT}_{x,p}(t,u) K_{-p}(t,u)\,du \\ &= C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(\tau - t) K_p(\tau,u) K_{-p}(t,u)\,d\tau\,du\end{aligned}$$

化簡上式可得：

$$\tilde{x}(t) = Cg(0)x(t)$$

為了得到完美的逆轉換公式，也就是 $\tilde{x}(\rho) = x(\rho)$，其係數必須為：

$$C = \frac{1}{g(0)}$$

其中 $g(0) \neq 0$。因此，1-D Inverse STFRFT 為：

$$x(t) = \frac{1}{g(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{STFRFT}_{x,p}(t,u) K_{-p}(t,u) du$$

(ii) 2-D Inverse STFRFT

假設逆轉換公式為：

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\rho) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{STFRFT}_{x,p}(t,u)\tilde{g}(\rho-t)K_{-p}(\rho,u)dtdu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(\tau-t)K_p(\tau,u)\tilde{g}(\rho-t)K_{-p}(\rho,u)d\tau dtdu\end{aligned}$$

化簡上式可得：

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\rho) &= x(\rho)\int_{-\infty}^{\infty} g(\rho-t)\tilde{g}(\rho-t)dt \\ &= x(\rho)\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\tilde{g}(t)dt\end{aligned}$$

為了得到完美的逆轉換公式，也就是 $\tilde{x}(\rho) = x(\rho)$ 必須滿足：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\tilde{g}(t)dt = 1$$

事實上為了方便，一般會選擇 $\tilde{g}(t) = g(t)$ 且 $\|g(t)\| = 1$，因此，2-D Inverse STFRFT 為：

$$x(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{STFRFT}_{x,p}(t,u)g(\rho-t)K_{-p}(\rho,u)dtdu$$

4. **Properties**

(i) Linearity

考慮：

$$\mathrm{STFRFT}_{ax_1+bx_2,p}(t,u) = a\cdot\mathrm{STFRFT}_{x_1,p}(t,u) + b\cdot\mathrm{STFRFT}_{x_2,p}(t,u)$$

此性質說明 STFRFT 滿足疊加原理，因此它適合用來分析多成分的訊號。

(ii) Time Marginal Constraint

考慮：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{STFRFT}_{x,p}(t,u)dt = C \cdot X_p(u)$$

此式與

$$\mathrm{STFRFT}_{x,p}(t,u) = \int_{-\infty}^{\infty} X_p(\xi) H_p^*(\xi|t,u)d\xi$$

可以清楚描述出 FRFT 與 STFRFT 之間的關係。

(iii) Time Delay and Frequency Shift Properties

考慮：

$$\mathrm{STFRFT}_{x(t-t_0)e^{j\Omega_0 t},p}(t,u) = e^{j\Phi(u)} \cdot \mathrm{STFRFT}_{x(t),p}(t-t_0, u-(t_0\cos\alpha + \Omega_0 \sin\alpha))$$

其中：

$$\Phi(u) = (\Omega_0 \cos\alpha - t_0 \sin\alpha)u + \frac{t_0^2 - \Omega_0^2}{2} \sin\alpha\cos\alpha + t_0\Omega_0 \sin^2\alpha$$

(iv) Additivity of Rotation

考慮：

$$F^{p_2}\{\mathrm{STFRFT}_{x,p_1}(t,u_1)\}(t,u_2) = \mathrm{STFRFT}_{x,p_1+p_2}(t,u_2)$$

此性質說明如何在不同階數 STFRFTs 之間轉換。此性質亦可幫助我們改善運算效率。

(v) Convolution Property

讓 $g(t)$ 為 STFRFT Window 且 $g(0) \neq 0$，$p(t)$ 和 $s(t)$ 為任意訊號。考慮一函數：

$$y(t) = \frac{p(t)}{g(0)} \left\{ x(t) \overset{p}{*} [s(t)g(-t)] \right\}$$

此稱為 p^{th} Order Fractional Convolution 則：

$$\mathrm{STFRFT}_{y,p}(t,u) = \mathrm{STFRFT}_{x,p}(t,u) \cdot H(t,u)e^{-j\frac{u^2}{2\cot\alpha}}$$

其中：

$$H(t,u) = p(t)S_p(u)$$

$S_p(u)$ 是 $s(t)$ 的 p 階 FRFT。此性質說明短暫時變 FRFD 濾波可以在 STFRFD 完成，只要將 STFRFT 乘上一個遮罩函數即可。

5. **Computational Complexity**

因為 STFRFT 是一種窗式的 FRFT，所以它的運算複雜度與該 FRFT 有關。STFRFT 由 $O(N\log_2 N)$ FRFTs 組成，當移動窗格時 Step Size 為 $\frac{N}{\lambda}$，所以 STFRFT 的運算複雜度為 $O(N^2\log_2 N)$。

四、結論

STFRFT 的理論部分已經在此篇報告被大致介紹完畢，由於 STFRFT 在分析 Chirp Signal 具有高集中性並且沒有相交項產生，因此在對 Chirp Signal 進行二維分析時，扮演了十分強而有力的角色，而為了達到最佳效能，有兩點準則應該遵守：

(1) 最大化 2-D Resolution。
(2) 最小化 STFRFD Support。

五、參考文獻

[1] R. Tao, Y. L. Li, and Y. Wang, "Short-Time Fractional Fourier Transform and Its Applications," IEEE Trans. Signal Process., vol. 58, no. 5, pp. 2568–2580, May 2010.

[2] S. C. Pei, M. H. Yeh, and C. C. Tseng, "Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections," IEEE Trans. Signal Process., vol. 47, no. 5, pp. 1335–1348, May 1999.

[3] S. C. Pei and J. J. Ding, "Closed-form discrete fractional and affine Fourier transforms," IEEE Trans. Signal Process., vol. 48, no. 5, pp. 1338–1353, May 2000.