時頻分析與小波轉換(Time-Frequency Analysis and Wavelet Transform)

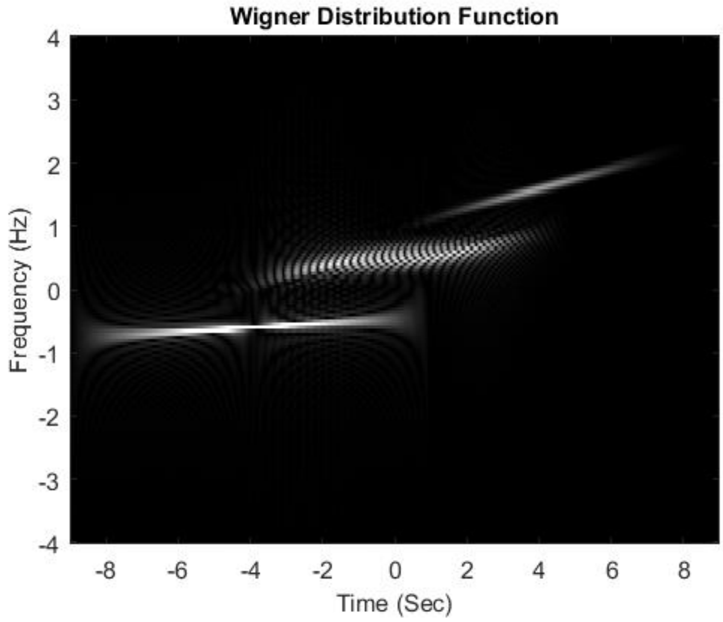
Homework 03 – 2016/12/01

R05546030 **彭新翔**

1. Write a Matlab program for the Wigner distribution function when the input function has a finite duration.

   y = wdf(x, t, f)

   x: input, t: samples on t-axis, f: samples on f-axis



Elapsed time is 0.070778 seconds.

2. Compared to the Fourier transform, what are the main advantage and the disadvantage of the 3 or 4 parameters atom?

優點

傳統的訊號分析方法並不能刻畫與描述訊號局部時變結構，而 3-parameter atom 將信號分解為由比例、旋轉、平移所表示之線性組合（基底與 central time、central frequency 和 scaling factor 三參數有關），與傳立葉轉換相比，其展開基底被限制在某時間區段（時間位置與長度可以透過其參數控制）內，因此可以描述僅在短時間內才有值且頻率不隨時間改變之訊號，並對其作疊加原理，具有較高的時頻聚集性與分辨率，且沒有傳立葉轉換中測不準原理之限制。而 4-parameter atom 額外考慮了 Chirp Rate 參數，因此可以描述時頻作一次線性變化的訊號。（除此之外，也不受 Wigner-Vile Distribution 中交叉項之影響）

缺點

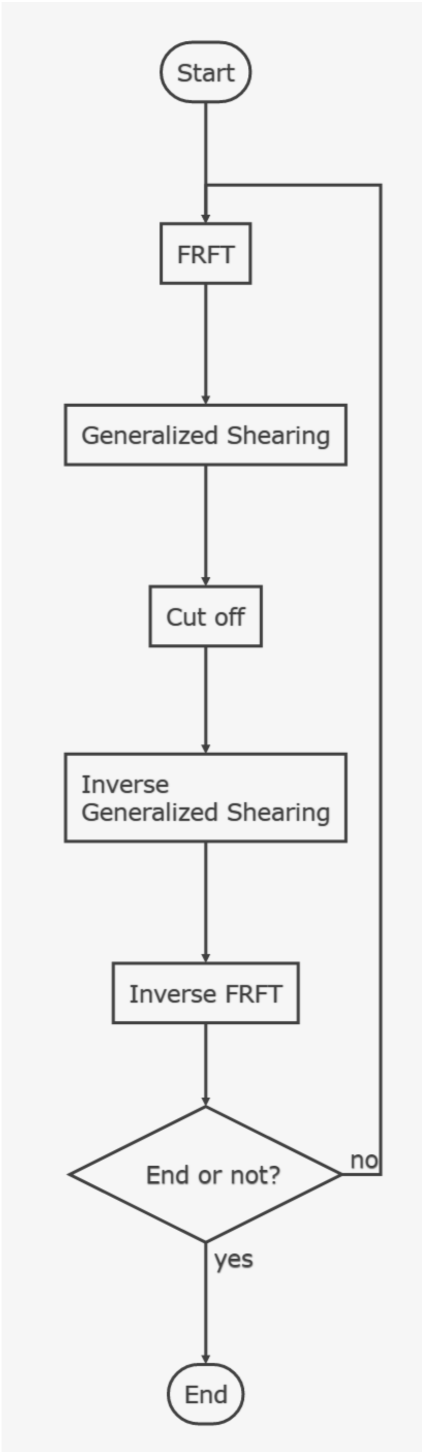
由於傳立葉轉換的展開基底互為正交(orthogonal)，亦即訊號若經傳立葉轉換後，其頻域分量的內積具有正交之性質。相較之下，3-parameter atom 與 4-parameter atom 由於展開基底並不一定具有正交性，因此在對信號的每一次分解中，都需要進行大量的內積計算，可能致使計算複雜度變高。

3. What are the roles of (a) the vanish moment and (b) the scaling function for the continuous wavelet transform design?

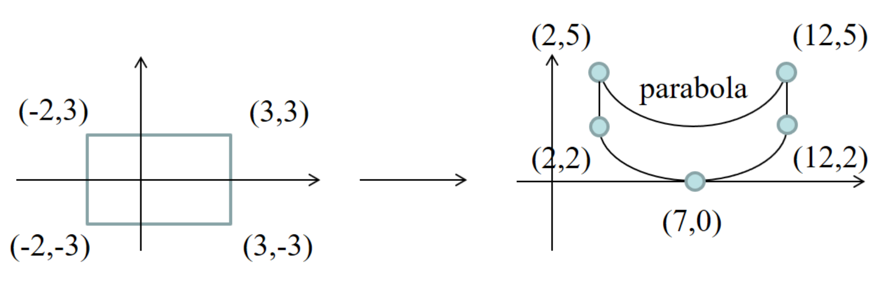
(a) 分數傅立葉轉換(Fractional Fourier Transform, FRFT)：可以將時頻圖以任意角度進行旋轉。

(b) Generalized Shearing：可以將時頻圖上之曲線段轉換變為斜直線段。

考慮以下流程，即可完成濾波器之設計：



4. Suppose that the WDFs of $x(t)$ and $\exp(j(at^3+bt^2+ct))x(dt+e)$ are the left and the right figures, respectively. Determine the values of a, b, c, d , e.



i. Horizontal and Vertical Shifting

$$W(t,f) = X\left(t-\frac{13}{2}, f-\frac{3}{2}\right)$$

$$x(t) = \exp(j\pi 3t)x\left(t-\frac{13}{2}\right)$$

ii、 Dilation

$$Y(t,f) = W\left(\frac{t}{2}, 2f\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}w\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(j\pi\frac{3t}{2}\right)\left(\frac{t}{2}-\frac{13}{2}\right)$$

iii、 Inverse Generalized Shifting

$$\theta(t) = \frac{2}{25}(t-7)^2+\frac{3}{2}$$

$$\phi(t) = -2\pi\int\theta(t)\,dt = -\left(\frac{4\pi}{75}t^3-\frac{28\pi}{25}t^2+\frac{271\pi}{25}t\right)$$

$$z(t) = \exp(-j\phi(t))y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[j\left(\frac{4\pi}{75}t^3-\frac{28\pi}{25}t^2+\frac{617\pi}{50}t\right)\right]x\left(\frac{t}{2}-\frac{13}{2}\right)$$

比較係數可得：$a=\frac{4\pi}{75}$, $b=\frac{-28\pi}{25}$, $c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{-13}{2}$

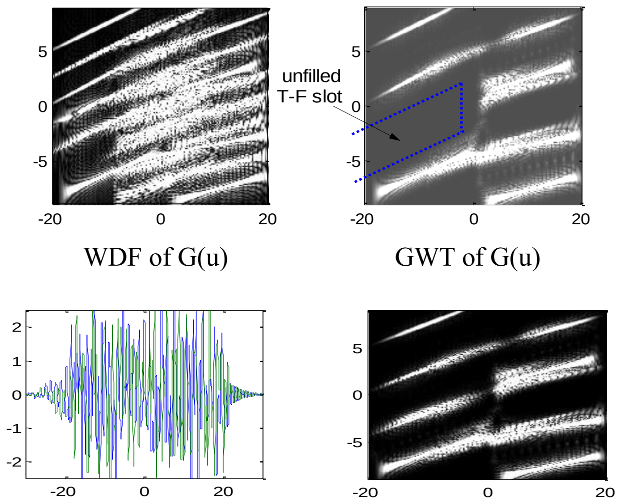
5. Among the Gabor transform and the WDF, which one is better for the applications of (a) signal sampling, (b) multiplexing, (c) optical system analysis, (d) random process analysis? Also illustrate the reasons.

(a) **Signal Sampling**

並不容易分辨何者較有利，但若可以分離各分量(Separating of the components are acceptable)，採用 Gabor Transform 較佳。使用 Wigner Distribution Functions 時，可能會產生 cross-term；而使用 Gabor Transform 也可能因為清晰度不佳而使所需取樣面積變大（根據 Sampling Theory 有：Number of Sampling Points=Area of time frequency distribution）。因此在允許分離各分量的狀況下，採用 Gabor Transform 具有最小的面積和最少的取樣點。

(b) **Multiplexing**

選擇採用 Gabor Transform 較佳。因為多工(Multiplexing)時，為了達到有效的使用會儘量充斥整個時頻區域，但由於使用 Wigner Distribution Functions 會產生 cross-term 而不利多工之作業；借助 Gabor Transform、水平位移、垂直位移、膨脹、傾斜和旋轉，我們可以有效地利用時頻分佈空間來存放更多的訊息來傳輸相同的取樣點，如下圖所示：



WDF of G(u)   GWT of G(u)

Multiplexing f(t) into G(u)   GWT of Figure left

(c) **Optical System Analysis**

選擇採用 Wigner Distribution Function 較佳。藉由 Linear Canonical Transform 分析一個近軸區的光學系統，可以僅使用 的矩陣運算，免除複雜的物理理論，其效果等同於對 Wigner Distribution Function 作 twisting。

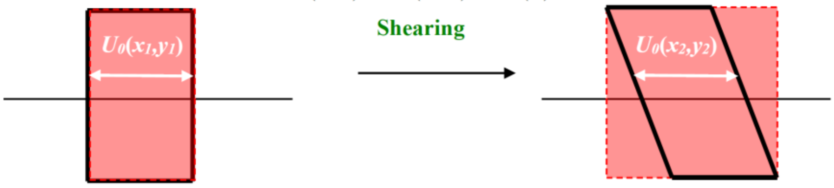
(d) **Random Process Analysis**

選擇採用 Wigner Distribution Function 較佳。對 Wigner Distribution Function 取期望值等效於成對訊號的自相關項(autocorrelation)作傅立葉轉換，即可得到 Power Spectral Density (PSD)函數，由於 PSD 在隨機過程的分析中扮演了重要角色，故採 Wigner Distribution Function。

6. (a) Why the Fresnel transform of a stationary random process is still a stationary one?
(b) Why the linear canonical transform of a white noise is still a white one?
(illustration by the WDF instead of mathematical analysis)

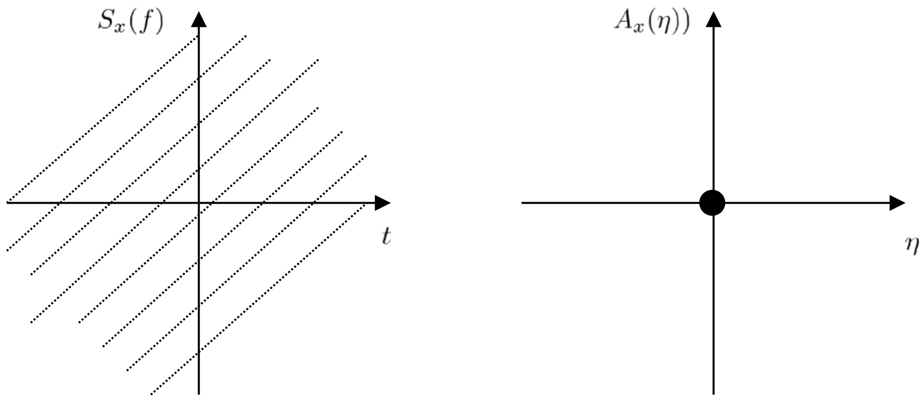
(a) Fresnel Transform 可以等效為訊號先與 Chirp 作摺積運算，再加上 Shearing 效應，可視為訊號通過一個 impulse response 為 Chirp 的 Linear Time-Invariant 系統，再對其輸出作 Wigner Distribution Function：

$$R_x(t_1,\tau)=R_x(t_2,\tau)=R_x(\tau)$$



由於對一個穩態隨機過程而言，其統計性質並不會隨時間而變，只跟時間變化量有關，在經過 shearing 後，其時間差依然不會改變，因此仍為一個穩態隨機過程。(或者說 Chirp 不具有隨機性，因此不會影響系統輸出結果之隨機性，即輸入前後保有相同的隨機性，因此仍為一穩態隨機過程)

(b) 對於一個 White Noise 而言，其 PSD 和 Ambiguity Function 的時頻分布如下：



也就是說，由於 Linear Canonical Transform 效果等同於對 Wigner Distribution Function 作 twisting， 且其 Power Spectral Density 即為對 Wigner Distribution Function 取期望值。對 White Noise 而言，如上圖所示在時域和頻域中均匀分佈，並且在 τ 和 η 域中以原點為中心。因此，若對 White Noise 進行 Linear Canonical Transform (LCT)，我們並不會改變其分佈特性，因此仍然是白色的。