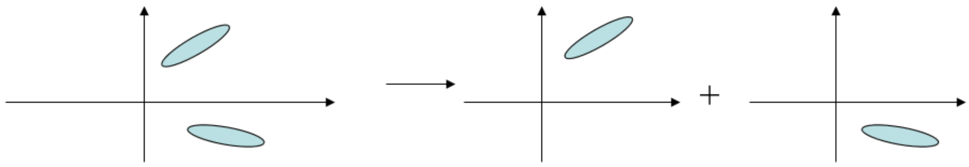
時頻分析與小波轉換(Time-Frequency Analysis and Wavelet Transform)
Homework 04 – 2016/12/29

R05546030 **彭新翔**

1. Illustrate why (a) the multiplication of chirp and (b) analytic signal conversion are helpful for improving the efficiency of signal sampling.

(a) **The Multiplication of Chirp**

根據取樣定理可知取樣的點相當於時頻分佈的面積（Number of Sampling Points = Area of time frequency distribution），常見的作法在於縮小面積來降低所需取樣的點數，以增進訊號取樣效率。比如將訊號分割成各個小部份，進行 Chirp Multiplications、Chirp Convolutions、Fractional Fourier Transforms…等，示意圖如下所示：



其中 Chirp Multiplications 的行為即為對分割後的部分作 Shearing 藉以減少面積來降低取樣點數。

(b) **Analytic Signal Conversion**

訊號可以包含實數值與複數值，所謂解析訊號(analytic signal)即為沒有負頻率分量的複值函數，由於頻譜的對稱性，實值函數傅立葉轉換中的負頻率成分是多餘的，因此可以捨去而不損失資訊。一般來說解析函數具有以下特性或用途：

- 單邊帶(Single Sided Banded, SSB)
- 邊緣探測(Edge Detected)
- 計算瞬時頻率(Instantaneous Frequency)

由於解析訊號並不包含負頻率的部分，因此相應地來說他的採樣頻率也可以降低至一半而不至於混疊。

2. (a) What are the similarities and differences between the sinusoid function and the intrinsic mode function?

(b) Which of the following signals are IMFs?

(i) $0.5 + \mathrm{sinc}(t)$

(ii) $\sin(t^3)$

(a) 只要滿足以下條件，即為所謂的本質模態函數(Intrinsic Mode Functions, IMF)：

I. 局部極大值(local maxima)及局部極小值(local minima)數目之和必須與零交點(zero crossing)的數目相等或是至多只能差一，亦即極值點後必須馬上接著零交點。

II. 在任何時間點，局部最大值所定義的上包絡線與局部極小值所定義的下包絡線，取平均要接近為零。

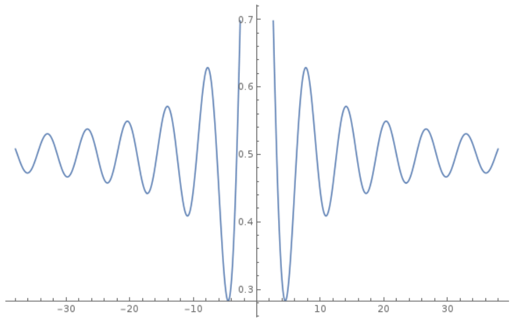
與弦函數(sinusoid function)有以下異同：

Similarities	**Differences**
1. 皆具有在零軸上下振盪性質，即其局部極大值與局部極小值數目之和與零交點的數目相等或差一。 2. 在任何時間點內，局部極值與局部極小所定義之包絡線，取其平均接近零。	1. IMF 之頻率(Frequency)和週期(Period)可以不為固定值。 2. IMF 之振福(Amplitude)可以不為固定值。

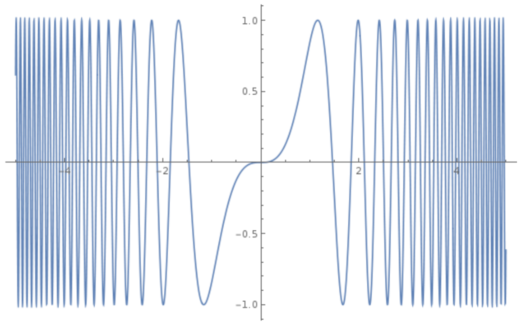
因此，IMF 可視為是廣義的傅立葉轉換，隨時間變化的振幅和瞬時頻率可以得到訊號中非線性和非穩態的特性。計算 IMF 時，由於振幅資訊和頻率資訊將被分離開來，因而克服了傅立葉轉換中固定振幅和固定頻率的限制，得到隨時間變化的振幅和頻率關係。

(b)

(i) 如圖所示，$0.5 + \mathrm{sinc}(t)$ 由於其振盪頻率遞減且並未與零軸產生交點，因此並非 IMF。



(ii) 如圖所示，$\sin(t^3)$ 會在零軸上下振盪，且其上下包絡線平均值接近為 0，故屬於 IMF。



3. What are the roles of (a) the vanish moment and (b) the scaling function for the continuous wavelet transform design?

(a) 所謂消失動量(Vanishing Moments)，在連續小波轉換(Continuous Wavelet Transform)中是一項非常重要的參數，用以判斷一個函數如何遞減的指標，因此可用來查看母小波(Mother wavelet)是否為高頻率之函數，此外小波消失動量數目的大小也反映了小波的平滑度(smoothness)和集中性(concentration)。

對小波施加消失動量條件，可以使盡量多的小波係數為零或者產生盡量少的非零小波係數，這樣有利於數據壓縮和消除雜訊。在一般情況下，有以下特性：

- 消失動量越大，經過內積後被過濾掉的低頻成分越多
- 消失動量越大，小波函數越光滑、壓縮率越高

(b) 小波轉換中，對母小波進行縮放和平移是為了計算小波的係數，藉以獲得小波和信號之間的相互關係，其中透過縮放小波的寬度可以獲得訊號的頻率特性。在連續小波轉換中，定義尺度函數(scaling function)為：

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi ft}\, df$$

小波函數和尺度函數描敘一個小波，其中尺度函數最重要的功能是提高小波頻譜的範圍，由於週期與頻率互為反比關係‧當要讓時域的頻譜範圍加倍時，必須犧牲一半的頻域頻寬。與其用無限數目的階層來覆蓋頻譜，我們可以用有限的尺度函數組合來覆蓋頻譜。這樣的結果會使得需要用來覆蓋整個頻譜大大的減少。

4. Write at least two important concepts that you learned from the presentation on 12/16.

(1) 壓縮感知(Compressed Sensing, CS) 可以透過對訊號的高度不完備線性測量進行高精確度的重建，可以使用用比傳統條件下更少的測量值重建原訊號，因此可以有效降低取樣時間，可應用於核磁共振成像(Magnetic Resonance Imaging, MRI)之優化，因其影像具有稀疏性且目前耗時長費用高。

其理論指出：「只要信號是可壓縮的或在某個變換域是稀疏的，便可用一個與變換基不相關的觀測矩陣將變換所得高維度信號投影到一個低維度空間上，在透過求解一個最佳化問題來從這些少量的投影中以高機率重建出原訊號」，其中成功進行壓縮感知的關鍵在於稀疏性(Sparsity)和非相關性(Incoherence)。

- Sparsity: Few nonzero components in the transformed domain.
- Incoherence: Each sampled data should involve the basis as evenly as possible in the transformed domain

(2) 由於影像經過部分壓縮後，肉眼對其誤差並不敏感，但可以有效地減少儲存空間與傳輸時間，因此 Joint Photographic Experts Group 於 1994 年推出以離散餘弦變換為基礎的 JPEG。而 JPEG2000 是基於小波轉換的圖像壓縮標準，其壓縮比更高且不會產生原先的基於離散餘弦變換的 JPEG 標準產生的塊狀模糊瑕疵，由於在非破壞性壓縮下仍然能有比較好的壓縮率，因而在圖像品質要求比較高的醫學圖像的分析和處理中已經有了一定程度的廣泛應用。

在前處理的部分：

- 先利用區塊化(Tiling) 對影像作分割，把完整的影像分割為數個相同大小（邊界的區塊除外）、彼此間沒有重疊且為長方形的區塊，作為小波轉換的基本單位。
- 再對區塊中的資料平移其數值，使區塊內的資料（如色彩數值）成為以 0 為中心，帶有正負號的數值資料，稱為零頻位移(DC shifting)
- 最後進行色彩空間轉換(Color Transformation)將傳統的 RGB 色域轉換至其他色彩空間，如：YCbCr。

接著進行離散小波轉換(Discrete Wavelet Transform)將不同區塊切成子頻，減少 PIXEL 相關，最後經由量化表和兩段式編碼，減少在壓縮過程中的失真現象。

5. (a) What is the most important advantage of the Haar transform nowadays?
(b) How many entries of the 2^k-point Haar transform are equal to 0, 1, and -1? Express the solutions in term of k.

(a) Harr Transform 有以下特性：

- 只需要基本加法減法即可運算，不需要乘法
- 輸入與輸出個數相同
- 頻率只分為低頻（直流值）與高頻（一半為 1 和一半為-1）部分
- **可以分析一個訊號的 Localized feature（局部區域中的高頻部分）**
- 運算速度極快，但不適合用於訊號分析（因為精確度較低）
- 大部分運算為 0，不用計算
- 維度小，使用的 memory 少

早期由於處理器運算能力尚有進步空間，因此 Harr Transform 的運算速度為其最大之優點，在一些不追求精確度的情況下可以使用 Harr Transform 來達到一定效率。而這幾年由於處理器運算能力發展迅速，其運算速度快速之優勢已不明顯，然而由於可以分析一個訊號中的 Localized Feature 而仍有其重要性。

(b) 考慮如下 $2^3 = 8$ 的 Haar Transform，根據其規律可由上至下依序拆解為 $2^k = 1 + 2^0 + 2^1 + \cdot + 2^{k-1}$ 個列 (Row)來觀察其個數：

$$\mathbf{H}_{2^k} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}^{2^k} \left\{ \begin{array}{l} 1\ \text{Row} \\ 2^0\ \text{Row} \\ 2^{\cdots}\ \text{Group} \\ 2^{\cdots}\ \text{Group} \\ 2^{k-1}\ \text{Group} \\ 2^{k-1}\ \text{Group} \\ 2^{k-1}\ \text{Group} \\ 2^{k-1}\ \text{Group} \end{array} \right.$$

故可得各元素之數目：

- $\underline{N(All) = 2^k \times 2^k = 2^{2k}}$

  所有元素個數為矩陣行數與列數相乘

- $\underline{N(1) = 2^k + k2^{k-1}}$

  第一列共 2^k 個，逐列依不同分組，按一定規律減少，但每組個數相同，至第二列起到最後列共有 $2^0 \times 2^{k-1} + 2^1 \times k2^{k-2} + \cdots + \times 2^{k-1} \times 2^0 = k2^{k-1}$ 個。

- $\underline{N(-1) = k2^{k-1}}$

  承上，第一列共 0 個，逐列依不同分組，按一定規律減少，但每組個數相同，至第二列起到最後列共有 $2^0 \times 2^{k-1} + 2^1 \times k2^{k-2} + \cdots + \times 2^{k-1} \times 2^0 = k2^{k-1}$ 個。或者可視為除第一列外，其他列數量皆與 $N(1)$ 相同，故亦可由 $N(-1) = N(1) - 2^k$ 得。

- $\underline{N(0) = 2^{2k} - (2^k + k2^{k-1}) - (k2^{k-1}) = 2^{2k} - (k+1)2^k}$

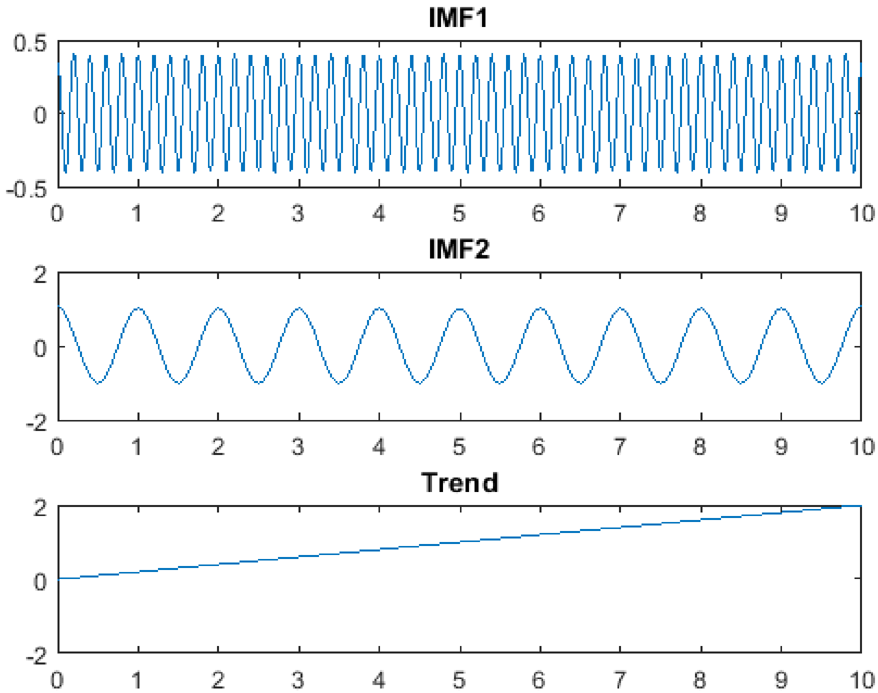
  即為所有元素個數減去 $N(1)$ 和 $N(-1)$ 之數目。

6. Write a Matlab program of the Hilbert-Huang transform.

$$y = \mathrm{hht}(x, t, thr)$$

x: input, y: output (each row of y is one of the IMFs of x), t: samples on the t-axis, thr: the threshold used in Step 7.

In Step 8, the number of non-boundary extremes can be no more than 3.



Elapsed time is 0.031869 seconds.