

1. What are the advantages and the disadvantages of the recursive method for implementing the STFT?

優點

Method	Complexity
Direct implementation	$O(TFQ)$
FFT-based	$O(TN \log_2 N)$
Recursive	$O(TF)$
Chirp Z transform	$O(TN \log_2 N)$

如上所表示，由於必須滿足一定限制條件(Nyquist Criterion)，簡化後可以有效降低其時間複雜度，因此較具有效率。

缺點

並不適合用於 unbalance case，僅適用於矩形窗(rectangular window)，並且會導致誤差傳播累積。

2. Calculate the WDF of $\sin(\pi(4t+1))$

此題若以一般初等微積分運算，可以先將三角函數以倍半角公式合併，再由棣美弗定理合併複數求解，但可能仍有脈衝函數無法處理。可藉由摺積運算，將所求簡化如下：

$$x(\tau)y(\tau) \longleftrightarrow F(f) * G(f) \text{ [* means convolution operator]}$$

$$\sin(2\pi f_c \tau) \longleftrightarrow \frac{1}{2j} [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]$$

$$x(\tau) = \sin \left\{ \pi \left[4 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + 1 \right] \right\} \longleftrightarrow F(f) = \frac{1}{2j} \exp(j\pi f(4t+1)) (\delta(f-1) - \delta(f+1))$$

$$y(\tau) = \sin \left\{ \pi \left[4 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + 1 \right] \right\} \longleftrightarrow G(f) = \frac{1}{2j} \exp(-j\pi f(4t+1)) (\delta(f+1) - \delta(f-1))$$

故得

$$F(f) * G(f)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2j} \exp(j\pi u(4t+1)) (\delta(u-1) - \delta(u+1)) \frac{1}{2j} \exp(-j\pi(f-u)(4t+1)) (\delta((f-u)+1) - \delta((f-u)-1)) du$$

$$= \frac{-1}{4} [(\exp(j2\pi(4t+1)) + \exp(-j2\pi(4t+1))) \delta(f) - \delta(f-2) - \delta(f+2)]$$

$$= \frac{1}{4} \delta(f-2) + \frac{1}{4} \delta(f+2) - \frac{1}{2} \cos(2\pi(4t+1)) \delta(f) = W_x(t, f)$$

3. How do we make Cohen's class distribution for any function always be real (show the constraint for the mask function $\Phi(\tau, \eta)$)

$$C_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_x(\eta, \tau) \Phi(\eta, \tau) e^{j2\pi(\eta t - \tau f)} d\eta d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} A_x(\eta, \tau) \Phi(\eta, \tau) e^{j2\pi\eta t} d\eta \right] e^{-j2\pi\tau f} d\tau$$

其中 $A_x(\eta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\eta t} dt$

令 $x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A_x(\eta, \tau) \Phi(\eta, \tau) e^{j2\pi\eta t} d\eta$, $C_x(t, f) = \mathcal{F}\{x(\tau)\}$

若 $x(\tau) \longleftrightarrow F(f)$ 則有 $x^*(-\tau) \longleftrightarrow F^*(f)$

當其中 $F^*(f) = F(f)$ 時 (即 $F(f)$ 為 **Real**) , 有 $x^*(\tau) = x(-\tau)$

可得：

$$\begin{aligned} x^*(\tau) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} A_x(\eta, \tau) \Phi(\eta, \tau) e^{j2\pi\eta t} d\eta \right)^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A_x^*(\eta, \tau) \Phi^*(\eta, \tau) e^{-j2\pi\eta t} d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} A_x^*(-\eta, \tau) \Phi^*(-\eta, \tau) e^{-j2\pi(-\eta)t} d(-\eta) \\ A_x^*(-\eta, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi(-\eta)t} dt = A_x(-\eta, -\tau) \end{aligned}$$

故知：

$$\begin{aligned} x^*(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_x^*(-\eta, \tau) \Phi^*(-\eta, \tau) e^{j2\pi(-\eta)t} d(-\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} A_x(\eta, -\tau) \Phi^* e^{j2\pi\eta t} d\eta \\ x(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_x(\eta, -\tau) \Phi(\eta, -\tau) e^{j2\pi\eta t} d\eta \end{aligned}$$

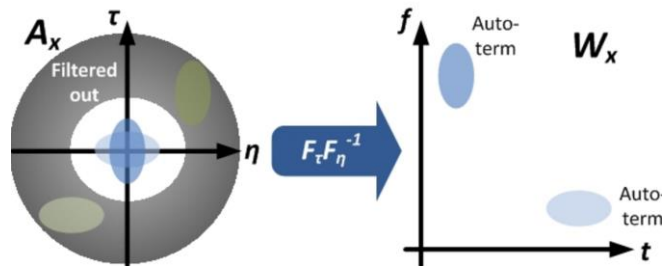
因為 $x^*(\tau) = x(-\tau)$ 所以 $\Phi^*(\eta, \tau) = \Phi(\eta, -\tau)$

綜合上述可得：

\implies 若滿足 $\Phi^*(\eta, \tau) = \Phi(\eta, -\tau)$ 時 , 則有 $C_x(t, f)$ 恆為 **Real** 。

4. Why (a) the windowed Wigner distribution function, (b) Cohen's class distribution, (c) the Gabor-Wigner transform, and (d) the polynomial Wigner distribution function can avoid the cross term problem in some cases?

- (a) 倘若今天選取的訊號函數 $x(t)$ 寬度很小，考慮遮罩函數 mask function $w(\tau)$ 其中只有在 $|\tau| \leq B$ 時 $w(\tau)$ 才有值，藉由兩者相乘即可過濾掉 cross-term 而只保留 auto-term。但倘若訊號函數寬度不如預期來得小，則仍無法完全過濾掉 cross-term。
- (b) Cohen's Class Distribution 實際上並不能完全消去 cross-term 問題，但根據其 Kernel Properties 可以藉由選擇適當的遮罩函數(mask function / low-pass kernel function)來將其濾除以降低影響，如下圖所示。但同時也增加了計算上的複雜度與時間，且缺乏良好之數學特性。



- (c) 在 Wigner Transform 的過程中，由於 Wigner Transform 並非線性轉換，若當被轉換之訊號函數有兩個以上物件(component)或其因次(order)大於三次時，可能造成訊號間彼此互相干擾而產生 Cross-Talk 而影響其時頻分析的表現。相較之下，Gabor-Wigner Transform 利用線性的 Gabor Transform 對非線性的 Wigner Transform 做乘積，藉此消去 cross-term 而避免了 cross-term problem，但同時卻增加了計算複雜度。
- (d) 其定義如下：

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{l=1}^{1/2} x(t + d_l \tau) x^*(t - d_{-l} \tau) \right] e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

藉由挑選適當的 d_l 來處理，當其指數函數的 phase 次數不高時（不大於 $\frac{q}{2} + 1$ ）可以避免 cross-term。然而其物件之間的 cross-term 仍無法被去除。

5. Compared to the STFT, what are the advantages of

- (a) the S transform and
- (b) the generalized spectrogram

(a) **The S Transform**

S Transform 與 Gabor Transform 十分類似，但其差異在於前者的 Gaussian Windows 寬度會隨著 f 而改變，因而有以下特性：

- 當 f 在高頻時，Gaussian Windows 寬度變小，時域解析度佳（頻域解析度差）。
- 當 f 在低頻時，Gaussian Windows 寬度變寬，頻域解析度佳（時域解析度差）。
- 當 $f \rightarrow 0$ 時，Gaussian Window 會無窮地變寬而喪失時頻分析。

如上所述，S Transform 相較於由固定寬度 Windows 所組成的 STFT，具備更高的解析度；此外，由於 S Transform 具備頻率相關分辨率，因此可以檢測頻率的突發(burst)現象，而 STFT 則可能由於高頻的突發現象導致 cross-term。

(b) **The Generalized Spectrogram**

主要的優點有三：

- (1) The Generalized Spectrogram 可以提供優於測不準原理的時域解析度和頻域解析度。
- (2) 由於 $G_{x,w_1}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(t - \tau)x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$ 和 $G_{x,w_2}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(t - \tau)x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$ 並沒有 cross-term，因此亦沒有 cross-term 問題。
- (3) 若其中一組 Gabor Transform 的數值為零時，由於不論另外一組之數值為何，兩者乘積皆為零，因而可以不用計算另外一組之數值。

6. Write a Matlab program for the scaled Gabor transform (unbalanced form).

$$y = \text{Gabor}(x, \tau, t, f, \text{sgm})$$

x: input, τ : samples on t-axis for the input, t: samples on t-axis for the output

f: samples on f-axis, sgm: scaling parameter, y: output

- (a) 由於經取樣後所得音檔(Chord.wav)之頻率為 44100，而取樣點共有 70902 個點則：

$$\frac{70902}{44100} = 1.607755\dots$$

故 τ 的選取可為「0 : 1/44100 : 1.6077」

- (b) Elapsed time is 0.171699 seconds.

