可靠度分析與應用(Reliability Analysis and Applications)
2018/01/17
[期末報告]

建築結構可靠度的發展與方法

R05546030 **彭新翔**

一、前言

本文主要內容將根據目前針對建築結構可靠度的發展方法進行介紹與討論。能夠引入可靠度進行分析的物件小至以奈米為單位生產的半導體元件，大至橫跨數公里的橋樑、高聳入雲的摩天大樓比比皆是，題材的選擇一來是大學部來接觸了四年的土木工程，配合這學期修習的可靠度能夠以不同的角度去看待；而另一方面老師提供過往學長姊的報告中有一篇便以建築可靠度為方向進行報告，然而內容閱覽下來似乎並不能夠瞭解這兩個學科間的聯繫關係。茲以為報告必須能夠展現在這一學期所學的內容，因此本篇報告的內容將會涵蓋一些上課內容。

二、簡介

針對一個零組件或是結構體，所謂的可靠度是指在規定的條件和時間下，正常工作的<u>**機率**</u>。由於涉及到許多不確定性事件，通常會引入機率模型進行處理，而常見用以描述系統可靠度的數學模型有：可靠度函數(reliability function)、累積分布函數(cumulative distribution function)、機率密度函數(probability density function)與故障率函數(hazard rate function)。

1. 可靠度函數

$$R(t) = \Pr\{T \geq t\}$$

2. 累積分布函數

$$F(t) = 1 - R(t) = \Pr\{T < t\}$$

3. 機率密度函數

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

4. 故障率函數

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-[R(t+\Delta t) - R(t)]}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

除此之外將其平均期望值定義為平均故障前時間(MTTF, mean time to failure)作為故障分布集中趨勢度量指標：

$$\text{MTTF} = E(T) = \int_0^\infty t f(t)\,dt = \int_0^\infty R(t)\,dt$$

簡單來說，對於結構組件來說可靠度越高則有較長的工作時間，在工程設計中，不論機械材料還是結構零組件，常常因為受到外在荷載（可能是受力、溫度變化…等）因素而有應變、撓曲…等現象，而在結構分析與設計時最常見的做法是引入**安全係數(factor of safety)**來計算與查核容許值：

$$\text{F.S} = \frac{\text{Failure Load}}{\text{Allowable Load}}$$

結構體在受到外力荷載作用下，根據牛頓第三運動定律可以知道結構體內部會因應產生應力(stress)，根據應力作用面與方向可以再分為：正向應力、剪硬力，當應力超出桿件材料所能承受時將會產生破壞。

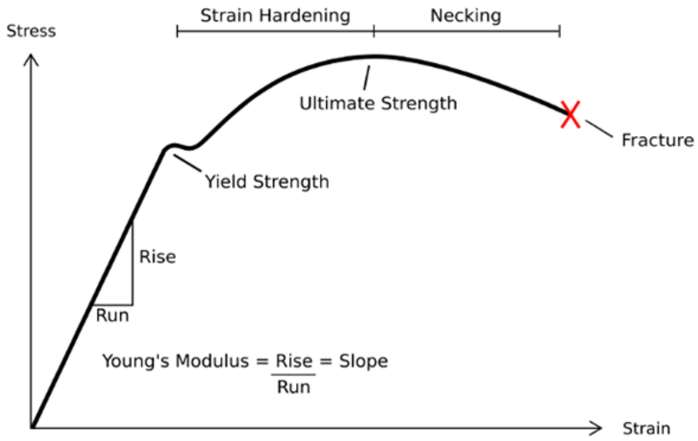

Figure 1 Stress-Strain Figure

近三十年各國學者致力於利用統計方法，將可靠度理論應用於結構分析與設計上。

三、結構設計與可靠度間的發展狀況

1. 容許應力法

要求結構組件在受到荷載的作用下，其內部產生的應力值不應超過容許應力：

$$[\sigma] = \frac{R}{\text{F.S}}$$

- R 為材料強度
- F.S 為安全係數

2. 破壞階段設計法

考慮了材料的塑性性值，計算截面甚至整個構件的承載力。如抗彎構件的承載力為 M_p，要求其所承受彎距 M 與安全係數 F.S 的乘積不超過 M_p，即：

$$(\mathrm{F.S})M \leq M_p$$

3. 多係數極限狀態設計法

指對於不同材料（比如混凝土與鋼筋)、不同荷載（如靜載重和活載重）以及其他影響結構安全的因素，分別利用材料強度係數、荷載係數係數和工作條件係數…等來考慮具體情況。

4. 單係數極限狀態設計法

表達式與與破壞階段設計法類似，但含意有所不同。具體表現為單係數極限狀態設計法的安全係數所對應的材料強度為設計強度而非平均強度。

5. 可靠度理論設計法

依據單係數極限狀態設計法的定義，額外引入設計變量和設計參數的不確定性，根據機率論計算結構在不同極限狀態或失效模式的失效機率和與之對應的可靠指標，進而在設計規範當中採用分項係數的辦法實現設計結構的目標可靠指標。

四、可靠度理論設計法

考慮結構系統容量 R 與需求 S 定義結構功能函數 $Z = R - S$，則對於任一設計結構而言：

$Z = R - S > 0$	結構可靠
$Z = R - S < 0$	結構失效
$Z = R - S = 0$	結構極限狀態

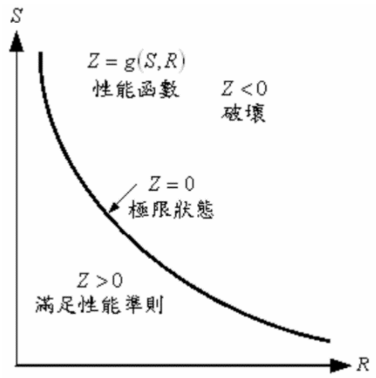

Figure 2 性能基準

其中 $Z = R - S = 0$ 稱為結構極限狀態方程式，並依此定義其失效機率與可靠機率：

$$\mathrm{P}_f = p\{Z < 0\} = p\{R - S < 0\}$$
$$\mathrm{P}_s = p\{Z \geq 0\} = p\{R - S \leq 0\}$$

其中 S 與 R 均為連續隨機變數，兩者具有統計獨立性，分別以此二參數之平均值 μ_S 和 μ_R、標準差 σ_S 與 σ_R，以及機率密度函數 $f_s(s)$ 和 $f_R(r)$ 模擬不確定性；k_S 與 k_R 均為正整數，S_N 和 R_N 分別表示標稱需求(Nominal Demand)與標稱容量(Nominal Capacity)：

$$S_N = \mu_S + k_S\sigma_S$$
$$R_N = \mu_R - k_R\sigma_R$$

下圖陰影區域顯示機率密度函數 $f_s(s)$ 和 $f_R(r)$ 的重疊範圍，若此區域面積愈大則結構破壞機率愈高。

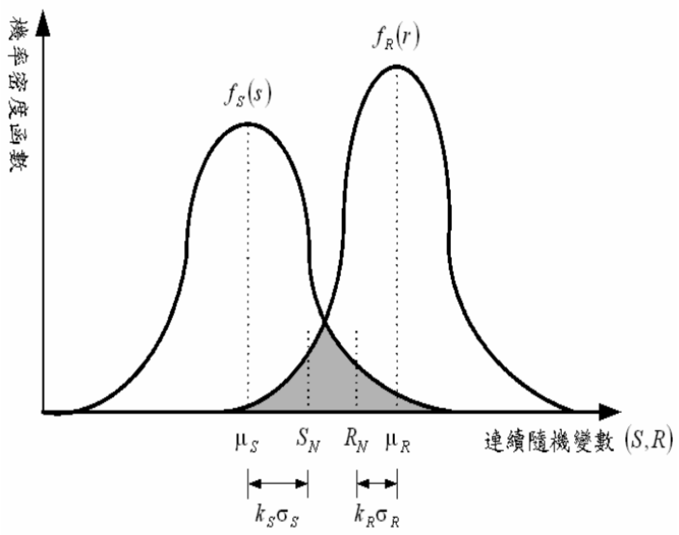

Figure 3 需求與容量之機率密度函數

傳統材料力學與結構分析教科書中常使用標稱安全係數(Nominal Safety Factor)，雖然可以藉由放大與縮小分子分母中至包含上述係數，但僅能夠描述上圖中重疊範圍的相對位置與離散程度，但仍缺乏 $f_s(s)$ 與 $f_R(r)$ 兩項資訊不足以模擬樣本的機率分布，引入上面所提及的失效機率：

$$\mathrm{P}_f = p\{Z < 0\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_s(s)\, ds$$

雖然工程實務上，不易進行上式積分運算，但此式即為可靠度理論之基礎，後續結構可靠度分析方法皆為此式之延伸。

五、常見結構可靠度分析方法

1. 平均值一階二次矩法

以各個基本變數平均值為基準的一階泰勒級數近似地模擬性能函數，配合這些基本變數之二次矩—亦即平均值和共變異數(covariance)，即可估計性能函數的平均值與標準差，進而預測結構破壞機率。

2. Hasofer-Lind 法

假設獨立變數 X_i 表示彼此間具有統計獨立性之常態變數，且結構功能函數 Z 為非線性性能函數，此一般式可合理地反映實際工程案例的特性。計算結構極限狀態 $Z = g(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0$ 並轉換至另一座標系統中得到 $Z = g(X_1', X_2', \cdots, X_n') = 0$，其中：

$$X_i' = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$$

經過座標變換後，可將變數組成空間劃分為結構滿足結構可靠與結構失效兩個區域的極限狀態，定義設計點 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ 為位於非線性方程式 $Z = 0$ 上且距離原點最近之點，則設計點和原點的最近距離即為所定義的 Hasofer-Lind 可靠度指標：

$$\beta = \sqrt{(x_1', x_2', \cdots, x_n')^t (x_1', x_2', \cdots, x_n')}$$

此指標可近似地估算結構破壞機率。

3. Rackwitz 法

假設獨立變數 X_i 且結構功能函數 Z 為非線性性能函數，若這些基本變數存在非常態變數則無法使用 Hasofer-Lind 法，此時可利用 Rackwitz 法估算可靠度指標並預測結構破壞機率。主要分為兩部分，首先依據 Rackwitz-Fiessler 轉換法將非常態變數轉換成等值標準常態變數(Equivalent Standard Normal Variable)，接著將這些分析結果融入 Rackwitz 演算法，經由反覆疊代運算即可估計設計點與可靠度指標。

4. Rackwitz-Fiessler 法

承上述方法，但若 Z 的形式極為複雜，為無法利用解析函數模擬其趨勢之隱性性能函數，此時以 Rackwitz-Fiessler 法取代 Rackwitz 法即可估算可靠度指標，進而預測結構破壞機率。Rackwitz-Fiessler 法以 Newton-Raphson 法為基礎，將隱性性能函數的導數融入 x_i^* 之遞迴公式，經由反覆疊代運算即可估計 x_i^* 並計算 β。

5. Monte-Carlo 法

就工程應用觀點而言由於性能函數極為複雜，因此，在大多數情況下皆屬於無法以解析函數模擬其趨勢的隱性性能函數，此時必須使用數值計算方法。

當所求解問題可以轉化為某種隨機分布的特徵數時，比如隨機事件出現的機率，或者隨機變數的期望值。通過隨機抽樣的方法，以隨機事件出現的頻率估計其機率，或者以抽樣的數字特徵估算隨機變數的數字特徵，並將其作為問題的解。

蒙地卡羅模擬為十分耗時之工具，針對破壞機率甚低即可靠度甚高之系統，模擬試驗總數將非常可觀，計算量也將更為龐大。

六、心得與討論

總結撰寫過程中所閱讀的論文與介紹，綜觀下來可靠度方法在土木建築上的發展還並不是那麼長遠，猶如岩土力學也僅只是過去不到百年的時間所創建的學科，畢竟涉及到實務上要建立機率模型將會即為複雜，且要長時間的數據累積，目前以臺灣工程業界的狀況似乎並沒有這麼樂觀。此外原本想要額外尋找目前建築規範法條是否有引入結構可靠度的概念，但幾乎沒有在文中有所提及…

近年隨著電腦計算機越來越發達的趨勢，加上 BIM 技術正在被推廣，未來可靠度工程在建築的實務上應該會越來越有重要性，但仍有需要克服的方向，其中我認為關於失效模式與失效指標的認定將會是個較大且急迫需要處理的問題。