時頻分析與小波轉換(Time-Frequency Analysis and Wavelet Transform)
Homework 05 – 2016/01/19

R05546030 **彭新翔**

1. What are the vanish moments of
   (a) The Haar wavelet
   (b) The continuous wavelet with the mother wavelet of $\frac{d^5}{dt^5}\exp(-\pi t^2)$
   (c) The 12-point Daubechies wavelet transform
   (d) $H(f) = (1-\exp(-j2\pi f))^3/8$

(a) **The Haar wavelet**

其中 $\psi(t)=\begin{cases}1 & ,\ 0<t<0.5\\ -1 & ,\ 0.5<t<1\\ 0 & ,\ \text{otherwise}\end{cases}$，$m_0=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,dt=0$ 且 $m_1=\int_{-\infty}^{\infty}t\psi(t)\,dt\neq 0$

因此，消失動量(Vanishing Moments)為 1

(b) **The continuous wavelet with the mother wavelet of $\frac{d^5}{dt^5}\exp(-\pi t^2)$**

$$m_k=\int_{-\infty}^{\infty}t^k\psi(t)\,dt=\mathscr{F}\{t^k\psi(t)\}\Big|_{t=0}=\frac{1}{(-2\pi j)}\frac{d^k}{df^k}(\mathscr{F}\{\psi(t)\})\Big|_{f=0}$$

$$=\frac{1}{(-2\pi j)}\frac{d^k}{df^k}(-2\pi jf)^5(\mathscr{F}\{e^{-\pi t^2}\})\Big|_{f=0}=\frac{(2\pi j)^5}{(-2\pi j)^k}\frac{d^k}{df^k}f^5e^{-\pi t^2}\Big|_{f=0}=0\text{ for }k<5$$

因此，消失動量(Vanishing Moments)為 5

(c) **The 12-point Daubechies Wavelet Transform**

已知對於 2k-point Daubechies Wavelet Transform 而言，其消失動量(Vanishing Moments)即為 k

因此可知對於 12-point Daubechies Wavelet Transform 的消失動量(Vanishing Moments)應為 6

(d) $H(f) = (1-\exp(-j2\pi f))^3/8$

$$H(f)=\frac{(1-e^{-2\pi jf})^3}{8}=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}e^{-2\pi jf}+\frac{3}{8}e^{-4\pi jf}-\frac{1}{8}e^{-6\pi jf}\Longrightarrow H(f)\Big|_{f=0}=0$$

$$\frac{d}{df}H(f)\Big|_{f=0}=-\frac{3}{8}(-2\pi j)+\frac{3}{8}(-4\pi j)-\frac{1}{8}(-6\pi j)=0$$

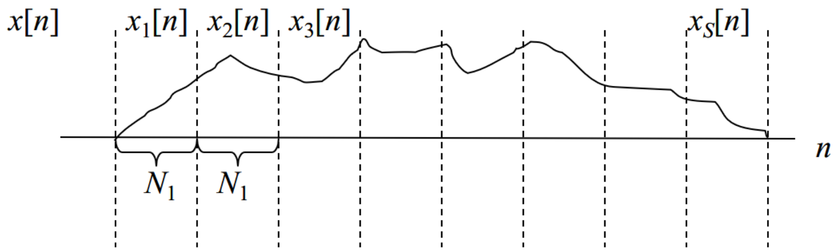
$$\frac{d^2}{df^2}H(f)\Big|_{f=0}=-\frac{3}{8}(-2\pi j)^2+\frac{3}{8}(-4\pi j)^2-\frac{1}{8}(-6\pi j)^2=0$$

$$\frac{d^3}{df^3}H(f)\Big|_{f=0}=-\frac{3}{8}(-2\pi j)^3+\frac{3}{8}(-4\pi j)^3-\frac{1}{8}(-6\pi j)^3\neq 0$$

因此，消失動量(Vanishing Moments)為 3

2. Why the complexity of the 1-D discrete wavelet transform is $O(N)$?

一般來說由於輸入資料的長度 N 會遠大於低通或高通濾波器的濾波範圍 L，因此我們可以利用分段摺積 (sectioned convolution)來簡化一維離散小波轉換：



如上圖所示，將 $x[n]$ 切成很多段，其中每段長度為 N_1（其中 $N \gg N_1 \gg L$），總共有 $S = \frac{N}{N_1}$ 段。

- 在尚未利用分段摺積方式處理時，其複雜度為：

$$(N+L-1)\log_2(N+L-1) \approx N\log_2 N$$

- 當 $N \gg L$ 時，可得以下近似結果

$$(N_1+L-1)\log_2(N_1+L-1) \approx SN_1\log_2(N_1+L-1) = N\log_2(N_1+L-1) \approx N\log_2 N_1$$

亦即其複雜度與 N 之間具有線性關係：$O(N)$

3. Why the wavelet transform can be used for

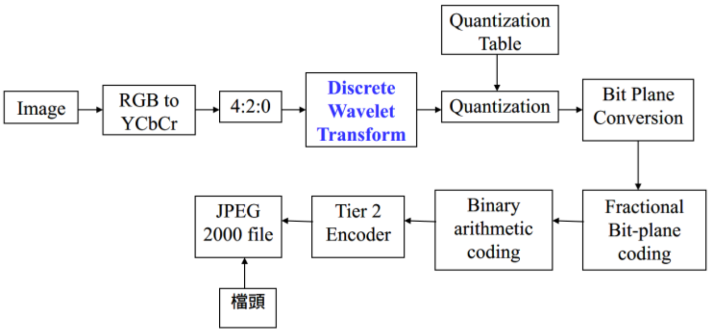
(a) image compression

(b) pattern recognition

(c) filter design

(a) **Image Compression**

目前的影像壓縮技術，通常是將原始影像進行轉換後，先將數據量化儲存，最後再將轉換所得到的數據進行編碼。其中轉換的步驟可以使用不同的處理方式進行，目的在於去除訊號取樣的相關性，目前的壓縮規格 JPEG2000 就是利用離散小波轉換進行影像的轉換，使其壓縮後影像可以兼顧失真與無失真兩種壓縮，其整體架構如下：



小波轉換將原本若使用傅立葉轉換時的三角函數基底改為使用有限長度且會衰減的小波基底，除了可以獲取頻率的同時也能定位到時間，此外也沒有 Gibb's Effect 並且可以實現正交化。由於常見的影像訊號中包含了不規則性的訊號，因此採用小波進行影像壓縮是十分有利的。

(b) **Pattern Recognition**

藉由小波轉換的性質將訊號經小波轉換後，雜訊會成為較小的訊號(low scale)，將此類訊號進行去除即可有效去除雜訊。而影像辨識的一個重要內容在於進行特徵萃取(Feature Extraction)，利用不同的特徵（如：位置、幾何形狀、色彩、對比、成份及表面紋路…等），經由小波轉換進行去除雜訊的訊號可以較容易分離出特徵已進行萃取的動作，達到辨識的目的，此外也大大減少運算所需的時間。

(c) **Filter Design**

小波轉換在時域與頻域上皆具有局部性的處理功能，因此根據小波所設計的濾波器可以有效地做邊緣偵測，使得能夠既不破壞訊號邊緣又能夠將雜訊去除（若採用傅立葉轉換，則最常見的就是可能在邊緣部分存在突然且劇烈的信號時，三角基底擬合造成的 Gibbs Effect）。此外若使用越多階層的小波濾波器，其保留邊緣並去除雜訊的效果也將越好。

4. For a two-point wavelet filter, if $g[0] = a$, $g[1] = b$, and $g[n] = 0$ otherwise

(a) What are the constraints of a, b if $g[n]$ is a quadratic mirror filter?

(b) What are the constraints of a, b if $g[n]$ is an orthonormal filter?

已知：

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]z^{-n} = a + bz^{-1}$$

(a) **A Quadratic Mirror Filter**

考慮 $G(z)$ 必須滿足 $G^2(z) - G^2(-z) = 2z^k$ 其中 k 為奇數

因此

$$(a + bz^{-1})^2 - (a - bz^{-1})^2 = 4abz^{-1} \Longrightarrow ab = \frac{1}{2}$$

(b) **An Orthonormal Filter**

考慮 $G_1(z)$ 必須滿足 $G_1(z)G_1(z^{-1}) + G_1(-z)G_1(-z^{-1}) = 2$ 其中 $G_1(z) = G(z^{-1}) = a + bz$

因此

$$(a + bz)(a + bz^{-1}) + (a - bz)(a - bz^{-1}) = 2(a^2 + b^2)\, a^2 + b^2 = 1$$

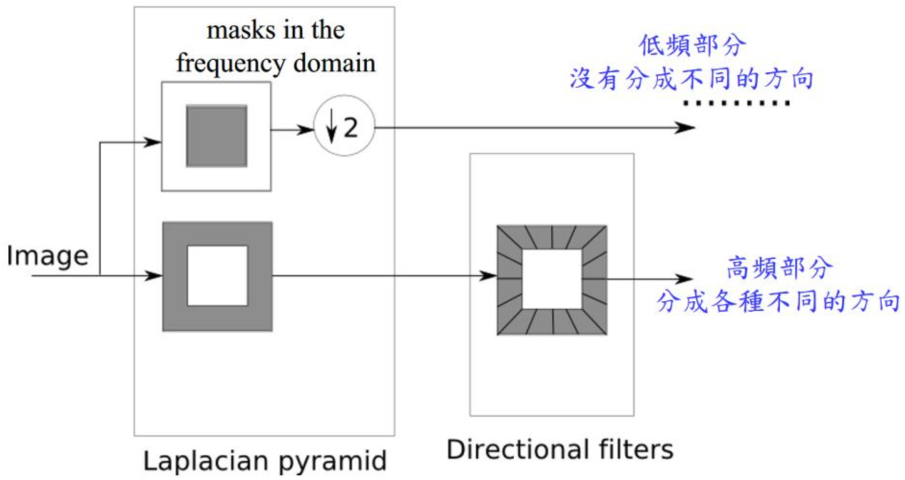
5. What are the advantages of the symlet and contourlet when compared to the original 2-D wavelet?

(a) **Symlet**

Symlet Wavelet 具有和 Daubechies Wavelet 相同的消失動量(vanish moment)，因此同樣具備有 Orthonormal Filter 性質，並且一般而言多用於設計輸入資料的長度 N 為二倍數的濾波器。除此之外還更具有對稱性，因此更容易經由快速小波轉換(Fast Wavelet Transform)來實現。

(b) **Contourlet**

原始的二維小波基底僅只有限的方向，因此多數二維小波轉換僅能沿 x 軸和 y 軸來做，並不能夠很好地表示圖像中的方向資訊而使得細節部分的增強明顯不足。而 curvelet, contourlet, bandlet…賦向二維小波轉換改善了這個問題，使其方向不一定要沿 x 軸和 y 軸進行處理，其中 Contourlet 可以在任意尺度上實現不同方向的分解，擅長描述圖像中的輪廓和方向性紋理，如下圖所示：



6. (a) Write a Matlab program for the following 2-D discrete 8-point Daubechies wavelet. The input is an image.

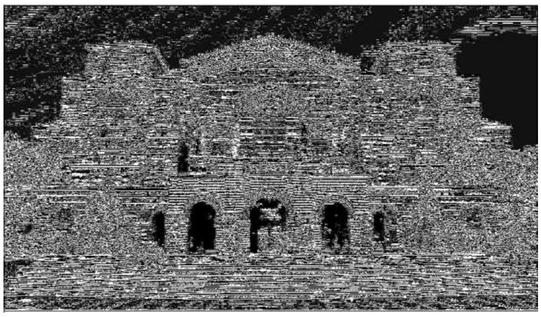
[x1L, x1H1, x1H2, x1H3] = wavedbc8(x)

(b) Also write the program for the inverse 2-D discrete 8-point Daubechies wavelet transform.

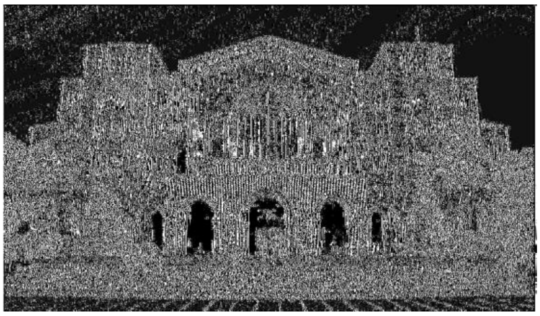
x = iwavedbc8(x1L, x1H1, x1H2, x1H3)

(a) Elapsed time is 0.807676 seconds.

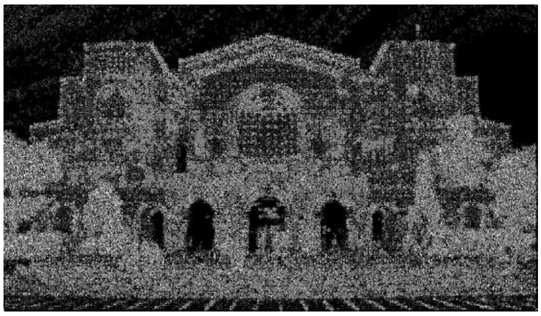
x1L/255



x1H1



x1H2



x1H3

(b) Elapsed time is 0.775582 seconds.

x/255