R05546030 **彭新翔**

一、簡介

維諾圖(Voronoi Diagram)又稱為泰森多邊形或 Dirichlet 圖。在平面中散布許多點，兩兩點之間連線並繪製中垂線作為交界，這些交界線所組成的集合將會以凸多邊形的方式將平面進行分割。維諾圖在計算幾何學中有舉足輕重的定位，由於其根據點集劃分區域到點最短距離的特性，在地理、氣象、結晶、航太、機器人甚至通訊…等領域皆具有廣泛的應用。

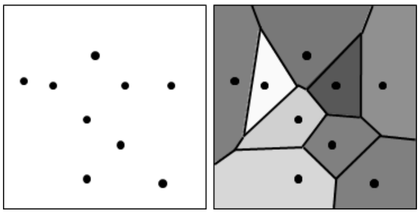

Figure 1 Voronoi Diagram

二、問題定義

其實這篇論文中並沒有針對一個實際的問題來做處理，而是將原本在歐氏幾何(Euclidean Geometry)所討論的維諾圖，拓展至拉氏幾何(Laguerre Geometry)中，並提出了拓展後的應用層面。

文中的演算法著眼於給定維諾圖在拉氏幾何(Laguerre Geometry)下的定義，該如何去構建維諾圖？與歐氏幾何(Euclidean Geometry)下構建維諾圖的差異？並給出了一個空間複雜度 $O(n)$ 且時間複雜度 $O(n \log n)$ 的演算法可以處理以下應用問題：

【問題一】

平面上有 n 個圓心座標 $Q_i(x_i, y_i)$ 且半徑 r_i 圓 $C_i = C_i(Q_i; r_i)$。給定任意一點 $P(x, y)$ 判斷此點是否包含於其交集中。

【問題二】

將 n 個圓所組成的集合分成相連的子部份；亦即求解這些圓交集部分所形成的圖形的連通分量。

【問題三】

求解給定平面上 n 個圓的交集輪廓。

由於必須將維諾圖的概念進行拓展，在此必須先針對拉氏幾何(Laguerre Geometry)和維諾圖在其下的定義、性質與引理進行描述，而原文中對於許多引理有給出證明便不贅述：

A. 拉氏幾何(Laguerre Geometry)

對於三維向量空間 $\mathbb{R}^3$ 中，拉氏幾何定義任意兩點 $P = (x_1, y_1, z_1)$ 與 $Q = (x_2, y_2, z_2)$ 的距離為：

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}$$

此一定義在此並不是很直觀，但在拉氏幾何下的點 (x, y, z) 可以視為在歐氏幾何下一個圓心 (x, y) 且半徑為 $|z|$ 的賦向圓(directed circle)，此時兩點距離即可視為兩圓公切線到圓的距離。也就是說給定圓外任意一點 $P = (x, y)$ 和一圓 $C_i = C_i(Q_i; r_i)$，則其距離 $d_L(C_i, P)$ 為：

$$d_L(C_i, P) = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 - r_i^2}$$

此處距離的定義為點到該圓的切線線段距離而非到圓心距離，如右圖所示。而若將平面上到兩圓 C_i 和 C_j 距離相等的點軌跡所蒐集出來將會是一條直線，此即高中數學中所學過的根軸(radical axis)或稱等冪軸。若三相異圓 C_i、C_j 和 C_k 圓心不共線，則三條根軸會交於一點，稱為根心(radical center)。

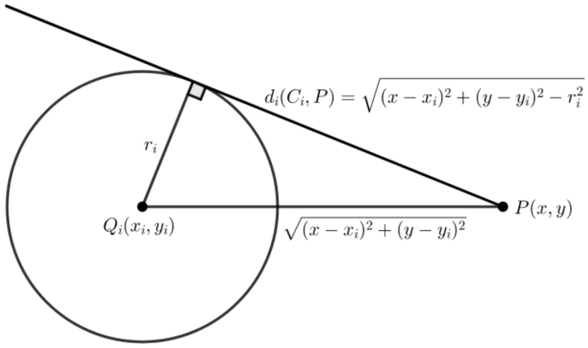

Figure 2 Definition of the distance.

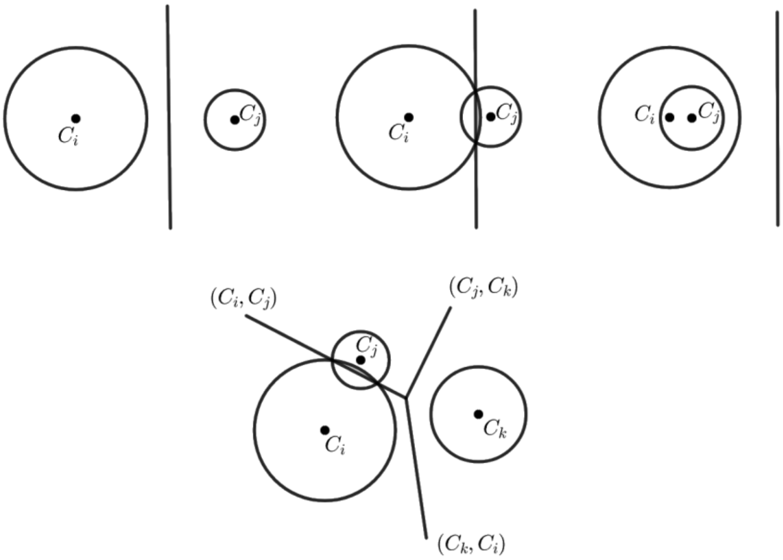

Figure 3 Radical Axis and Radical Centers

B. **維諾圖在 Laguerre 幾何下的定義**

給定 n 個平面上的圓 $C_i = C_i(Q_i; r_i)$ 及上述的距離 $d_L(C_i, P)$ 後，可以定義圓 C_i 的維諾多邊形(Voronoi Polygon) $V(C_i)$ 為：

$$V(C_i) = \bigcap_j \{P \in \mathbb{R}^2 | d_L^2(C_i, P) \le d_L^2(C_j, P)\}$$

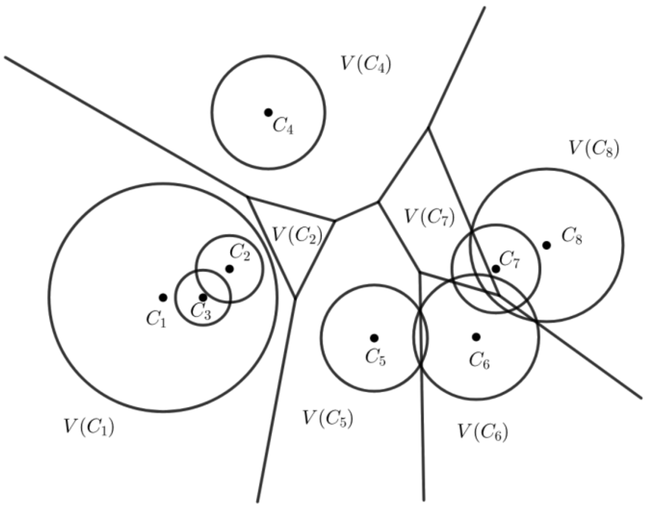

Figure 4 Voronoi Diagram in the Laguerre Geometry

其中：

- 不等式 $d_L^2(C_i, P) \le d_L^2(C_j, P)$ 將平面切割為一半，可知 $V(C_i)$ 必為凸多邊形。
- 維諾多邊形中的角點稱為維諾點(Voronoi point)；維諾多邊形中的邊界稱為維諾邊(Voronoi edge)。
- 可能存在圓 C_i 的維諾多邊形 $V(C_i)$ 為空(empty)，此種圓稱為 trivial circle；反之，若其維諾多邊形 $V(C_i)$ 非空(nonempty)，稱為 substantial circle。
- 若圓 C_i 與其維諾多邊形 $V(C_i)$ 相交，稱為 proper；反之，若其維諾多邊形 $V(C_i)$ 與其不相交，稱為 improper。

而根據上述定義，可以得到以下引理和性質：

Lemma 1
(i) 若一圓為 trivial circle 則其必為 improper circle。
(ii) 任一 improper circle 必包含於 proper circles 的聯集裡。

Lemma 2
給定 n 個圓，在 Laguerre 幾何下的維諾圖，其維諾邊(Voronoi edge)與維諾點(Voronoi point)的空間複雜度為 $O(n)$。

Lemma 3
在 Laguerre 幾何下的維諾圖中，若一圓 C_i 圓心 Q_i 位在圓心 $Q_i, \cdots, Q_n$ 所組成凸包(convex hull)的角點上，則其維諾多邊形必定非空(nonempty)且無界(unbounded)；若其圓心落在凸包上但非角點上，則其維諾多邊形可能為無界(unbounded)或空(empty)；若圓心並未落在凸包上，則其維諾多邊形可能為有界(bounded)或空(empty)。

三、解法敘述

對於在 Laguerre 幾何下建構維諾圖的演算法與 Euclidean 幾何下建構維諾圖的演算法有許多相似的地方，主要基於分治法(divide and conquer)，在此有必要先簡述 Shamos 和 Hoey 所提出的演算法，再針對差異進行描述。

在 Euclidean 幾何下，給定 n 個相異點所形成的點集 $S = \{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$，首先針對 x 座標值進行重新排序，排序後重新給定下標值，並依此將原點集分為兩個子集 $L = \{P_1, P_2, \cdots, P_{[n/2]}\}$ 和 $R = \{P_{[n/2]+1}, P_{[n/2]+2}, \cdots, P_n\}$，再分別對兩個子集 L 和 R 中的點構建其維諾圖 $V(L)$ 和 $V(R)$，其中存在一條分界線(dividing line)使得在分別構建兩個子集的維諾圖時，得以不用考慮位於分界線另一側的點，據此可以在 $O(n)$ 時間內構建完成。這條分界線具有以下性質：

Lemma 4
分界線由延伸至無窮的兩條射線和有限的線段所組成，這些組成分界線的射線或線段會處於一組 $V(L)$ 中 $V(P_i)$ 和 $V(R)$ 中 $V(P_j)$ 的相交處，其中 $P_i \in L$ 和 $P_j \in R$，並且會是 P_i 和 P_j 的垂直平分線。

<u>Lemma 5</u>
兩條射線必為點集 $S=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$ 所形成的凸包 $\mathrm{CH}(S)$ 邊界上連續兩點的垂直平分線，其中一條位於子集 $L=\{P_1,P_2,\cdots,P_{\lceil n/2\rceil}\}$ 中，另一條位於子集 $R=\{P_{\lceil n/2\rceil+1},P_{\lceil n/2\rceil+2},\cdots,P_n\}$ 中。

其中 **<u>Lemma 4</u>** 代表我們可以在 $O(n)$ 的時間內找到分界線；而 **<u>Lemma 5</u>** 則代表可以在 $O(n)$ 的時間內在凸包 $\mathrm{CH}(S)$ 上找到所述射線，亦即可以在 $O(n)$ 時間內分別自 $\mathrm{CH}(L)$ 和 $\mathrm{CH}(R)$ 中找到一條射線。上述內容即為在 Euclidean 幾何中建構維諾圖的主要概念，透過一些更動可以提供我們在給定 n 個圓 $C_i(Q_i;r_i)$ 的 Laguerre 幾何中建構維諾圖之方法：

(1) 將 n 個圓 $C_i(Q_i;r_i)$ 分為兩個子集

根據每一圓 $C_i(Q_i;r_i)$ 的圓心 $Q_i(x_i,y_i)$ 將圓進行排序，並分為兩個子集 $L=\{C_1,C_2,\cdots,C_{\lceil n/2\rceil}\}$ 和 $R=\{C_{\lceil n/2\rceil+1},C_{\lceil n/2\rceil+2},\cdots,C_n\}$。則兩個子集中的等距點所形成的軌跡即為分界線，且與 Euclidean 幾何下的分界線具有相同的性質。

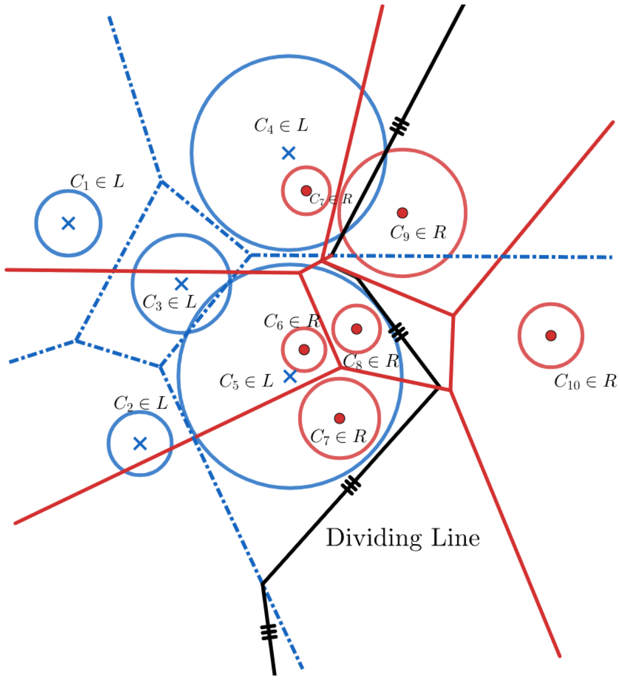

Figure 5 Merging the Voronoi diagrams in the Laguerre geometry.

此處本文中給出了一個關於分界線性質的 **<u>Lemma 6</u>** 並給予證明，但其實敘述與在 Euclidean 幾何下的分界線並沒有太大的差異，此處便不予以敘述。

(2) 如何在線性時間內自一射線至另一射線間找到分界線

由於在 Laguerre 幾何下的維諾圖與 Euclidean 幾何下十分相似，且 **<u>Lemma 4</u>** 的特性仍然成立，因此只需要利用維諾邊(Voronoi Edge)皆為直線的性質，便可以簡單地以順時針方向掃描的方式在線性時間內找到分界線。

(3) 在 $O(n)$ 時間內找到射線

由於在凸包邊緣可能退化至一直線，而在 Laguerre 幾何下在某些狀況下會使得原本在 Euclidean 幾何下的特性有些成立而有些不成立…

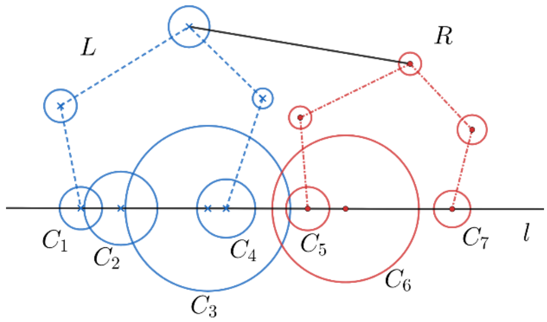

Figure 6 Degenerate new hell edge l $(L_l=\{C_1,C_2,C_3,C_4\},R_l=\{C_5,C_6,C_7\})$

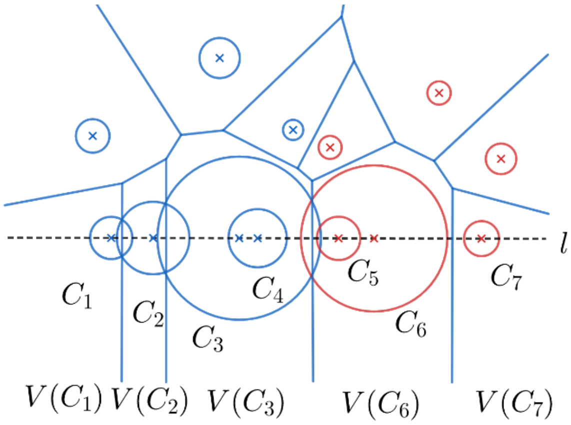

Figure 7 $V(L \cap R)$

如上二圖所示，即使圓心 Q_4 和 Q_5 是凸包退化後所形成直線 l 上最靠近中心的一對點（其中 $C_4 \in L$ 且 $C_5 \in R$），但圓 C_3 和 C_4 的根軸並未出現在維諾圖中，因此原本 **Lemma 5** 中的內容必須修正：

Lemma 7
考慮退化狀態下由凸包所退化所得的直線 l，並將 L 和 R 中圓心位處於此直線上的圓所形成的集合記為 L_l 和 R_l，而將維諾圖 $V(L_l \cap R_l)$ 中有著對應維諾邊 e^* 的圓分別記為 $C_{i*} \in L_l \subseteq L$ 和 $C_{j*} \in R_l \subseteq R$。則此維諾邊 e^* 即為 C_{i*} 和 C_{j*} 的根軸，便是所要求的射線。

由於在維諾圖 $V(L_l)$ 和 $V(R_l)$ 中的所有維諾邊都與直線 l 垂直，我們可以在線性時間內合併 $V(L_l)$ 和 $V(R_l)$ 來得到 $V(L_l \cap R_l)$。在合併的圖形中存在一對圓 $C_i \in L_l$ 和 $C_j \in R_l$，只需要檢查在 C_i 和 C_j 間的區域是否存在一 Laguerre 幾何下所定義的等距點，若存在則 C_i 和 C_j 的根軸便是所要求的射線 e^*，由於在維諾圖中區域數量的複雜度為 $O(n)$，因此可以在 $O(n)$ 的時間內找到分界線。

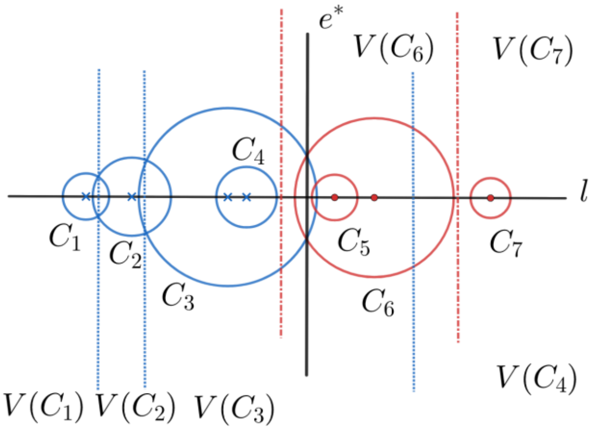

Figure 8 Find the ray e^*

綜合上述，在 Laguerre 幾何下要構建 n 個圓的維諾圖，可以在 $O(n \log n)$ 的時間內完成。

R05546030 **彭新翔**

四、閱讀心得

這次的作業要讀起來並不是那麼輕鬆⋯因為數學證明比起之前的幾篇來說要更多了，其實在原文的最後部份，還有將如何把問題一擴展到所提出的其他問題使用，以及討論兩種幾何定義下的相同處與相異處。而除此之外，在撰寫作業的過程中，發現常見的 Online Judge 網站上也有一種題型（SPOJ CIRU, VCIRCLE, BZOJ2178⋯）可以使用這篇文章所提到的演算法進行求解：

Description

You are given N circles and expected to calculate the area of the union of the circles!

Input

The first line is one integer n indicates the number of the circles. $(1 \leq n \leq 1000)$. Then follows n lines every line has three integers X_i, Y_i and R_i indicates the coordinate of the center of the circle, and the radius. $(|X_i|, |Y_i| \leq 1000, R_i \leq 1000)$. Note that in this problem R_i may be 0 and it just means one point!

Output

The total area that these N circles with 3 digits after decimal point.

簡單來說就是要求解平面上多個圓的交集面積，目前多數人採用的求解方式皆為利用辛普森法這樣的數值積分方式進行求解，但複雜度稍高（約 $O(n^2 \log n)$），而在引入 Laguerre 幾何下的維諾圖後，很顯然地有：

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(S_j \cap V(S_j))$$

也就是說要求解的圓交集面積，就相當於是與其對應的維諾圖區域交集面積的和，又由於維諾圖為多邊形所組成，可以簡單地將其切分成多個三角形的組合，顯然可以在 $O(1)$ 的時間複雜度內求解一個三角形與一個圓的交集面積。根據此篇由分治法想法求解維諾圖的複雜度為 $O(n \log n)$ 而其餘步驟可以在 $O(n)$ 內完成，便可以大大地加速求解的速度。甚至在 Kokichi Sugihara 所撰寫的論文《Laguerre Voronoi Diagram on the Sphere》指出在三維球體的狀況亦可以在 $O(n \log n)$ 的時間內完成。雖然說很有趣也大開眼界，不過有時候真的很訝異到底是怎麼想出來的，光是構思可能性還不夠，其中還必須輔以證明⋯能夠創造（這裡用這個詞不知道適不適當，或者說是發現）一種演算法比起學習之後再套用，感覺還有許多路要走⋯

最後到了期末對於課程其實有些問題是想知道老師的看法是如何？尤其最近又在寫期末考試，當然也有其他課程是需要進行編程。在許多開源社群和 Github 上都有一句話是「不要重複造輪子（Stop Trying to Reinvent the Wheel）」，甚至是很多使用者打趣地將暢銷出版社書籍名稱與封面進行惡搞，像是《Copying and Pasting from Stack Overflow》、《Googling the Error Message》和《Writing Code that Nobody Else Can Read》⋯等。

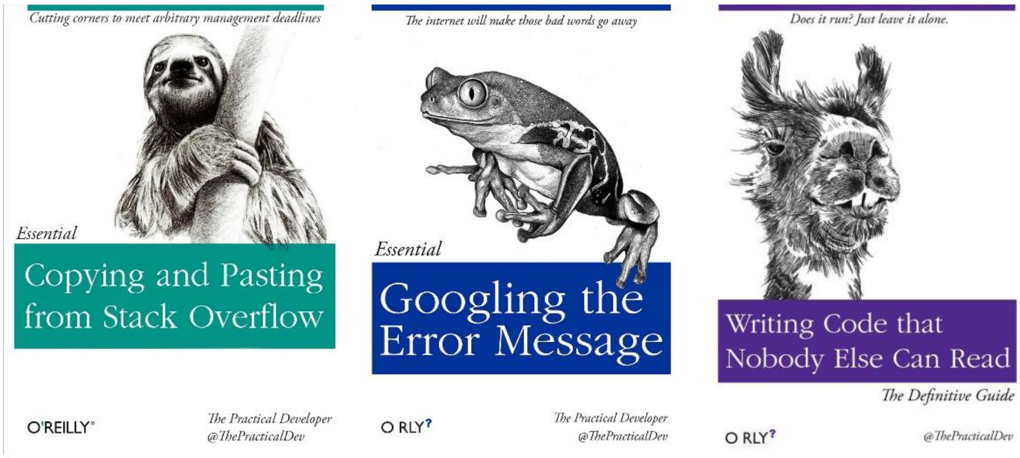

Figure 9 Some interesting picture for developer

在這樣的過程中我們勢必會一而再再而三地去尋找並優化自己的程式碼，可是在這世界上優秀的開發者並不在少數，那麼是否可以說在這個資訊爆炸的世代下，獲取並整理資訊的能力遠比其它要來的重要呢？（應該說這階段或許是讓我們得以了解到要怎麼去判斷一個輪子的好壞，一個演算法的優缺性）另外老師會不會建議在所有階段中，不斷地去模仿是一種對於能力的培養？可是常常捫心自問要能夠像是這些論文作者能夠想到這些並不是一件容易的事情，就好比在撰寫論文的過程中，常常會在找題目的過程中發現早已有人已經做過了，甚至是想到了更佳的做法…這幾年越來越多面試導向的 Online Judge 應運而生（最為人熟知的大概就是 Leetcode 了），而很多求職者為了找工作不斷地在刷題，當然不否認同一題可能有著許多的解法，可是這樣近乎於給出了題庫然後又能在網路上找到其他人寫的解答時，彙整並反覆訓練的用意真的是有幫助的嗎？這算是越接近畢業開始尋找求職面試心得，會想要提出的一點疑問。