

## 一、簡介

指派問題(assignment problem)不論是在企業管理、工業發展或是學術研究上都佔有一席之地，所謂指派問題泛指供應與需求形成一對一關係的限制下，求解利潤極大或是成本最小的問題。近年來有許多相關研究發展，包括但不限於婚姻配對、器官捐贈…等。

## 二、問題定義

此節內容所要處理的問題為：

給定一個線性有序集合(Linearly Ordered Set)，用以描述根據不同身高、體重和輩分…等特徵排序的人們：

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}, P_1 < P_2 < \dots < P_n$$

以及一部分排序的工作集合：

$$J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$$

以函數  $f(P_i)$  表示人員  $P_i$  所被分配到的工作，則：

- (1) 人員與工作的對應必須兩兩映射，亦即當  $i \neq j$  時，必有  $f(P_i) \neq f(P_j)$
- (2) 當  $f(P_i) \leq f(P_j)$  時，必須滿足  $P_i \leq P_j$ 。

此外，每一人員  $P_i$  被映射至工作  $J_j$  將會產生  $C_{ij}$  的成本，引入  $X_{ij}$  作為 0-1 變數（當  $X_{ij} = 1$  時，表示兩者匹配，否則  $X_{ij} = 0$ ），欲使所耗費的成本最小，可將目標函數表示為：

$$\min \sum_{i,j} C_{ij} X_{ij}$$

所要求解的問題為一個最佳化問題，並且已經被證明是 NP-Hard 問題。

## 三、解法敘述

這個問題藉由分支定界法(Branch and Bound Strategy)可以較有效率地處理，由於部分排序的工作集合是一個有向無環圖(DAG, Directed Acyclic Graph)，在此我們可以考慮使用拓樸排序(Topological Sorting)來進行描述。

考慮以下  $n = 4$  的狀況，下圖左方為一個部分排序後的工作集合，右方則為所有可能的拓樸排序：

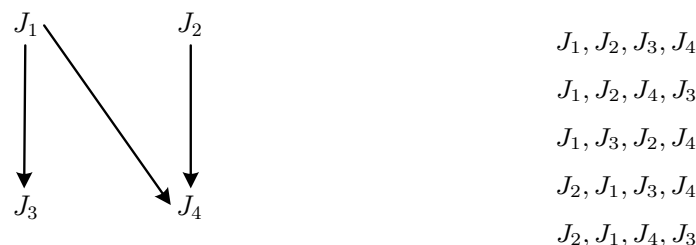


Figure 1 A Partial Ordering of Jobs

列出所有可能的拓樸排序之後，考慮以下步驟：

- (1) 選取一個沒有父節點的節點，亦即在部分排序的工作集合中，他沒有前繼的工作
- (2) 將此節點選為所有拓樸排序結果的元素
- (3) 自部分排序的工作集合中將此元素刪去，剩下的工作集合依然為部分排序狀態

經過以上步驟後可以將所有的拓撲排序表示如下圖中的樹狀結構：

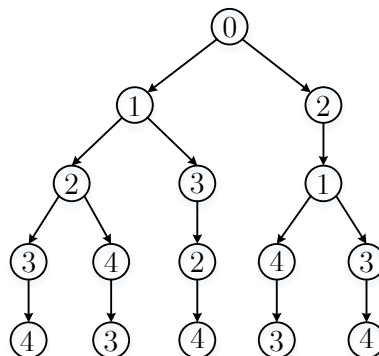


Figure 2 A Tree Representation of All Topologically Sorted Sequences

將已知的分配成本以表格形式儲存得到成本矩陣(Cost Matrix)，並將每一行和列中每一數同時減去該行和列中的最小值，使得每一行或列至少有一個 0 來得到約化成本矩陣(Reduced Cost Matrix)，並將矩陣中所有元素進行加總：

	1	2	3	4
1	29	19	17	12
2	32	30	26	28
3	3	21	7	9
4	18	13	10	15

	1	2	3	4
1	17	4	5	0
2	6	1	0	2
3	0	15	4	6
4	8	0	0	5

Total = 54

上述所得到的加總值 54 即為當前給定工作排序的下界(Lower Bound)，並根據上述的約化成本矩陣，將樹狀結構中補上各個節點所需的累計花費：

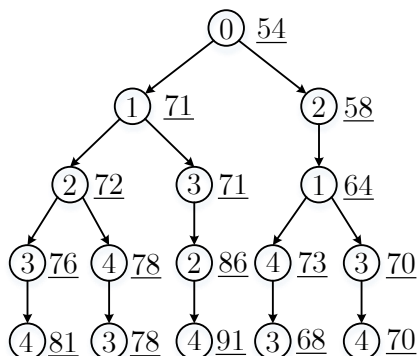


Figure 3 An Enumeration Tree with the Cost

當我們根據其中一個可行解，比如說  $J_2, J_1, J_3, J_4$  最後所得到的成本為 70，觀察可知另外一條分支，不論是  $J_1, J_2, J_3, J_4$ 、 $J_1, J_2, J_4, J_3$  和  $J_1, J_3, J_2, J_4$  在最先開始選擇  $J_1$  時的成本 71 便超過，代表此分支可以被刪去。

#### 四、閱讀心得

這類的指派問題，其實在工業工程領域中十分常見。或許可以進一步地說對於分支定界法(Branch and Bound)而言，本身就算是作業研究領域中用於求解混合整數規劃的一種系統性演算法，上學期剛修畢所上開設的整數與組合最佳化，對於這部分內容十分記憶猶新。

值得一提的是，我並不是很認同教科書中將這種方式歸類到分支定界法中，因為實際上這一小節所描述的內容，包括題目的定義方式，其實可以使用匈牙利演算法(Hungarian method)進行求解，其中在將成本矩陣進行處理，執行各行與各列減去最小值的運算時，便是匈牙利演算法在求解同樣的  $n$  對  $n$  指派問題中的第一步驟。而這個小節所敘述的部分，在我看來似乎僅是建立在要求的條件下（當  $f(P_i) \leq f(P_j)$  時，必須滿足  $P_i \leq P_j$ ），再額外使用匈牙利演算法的概念進行求解，而這個限制條件其實相當於只需要考慮部分排序工作集合的所有可能拓撲排序即可…相較於教科書 5.6 節中這部分的内容，我認為我們這組所被安排到的 5.9 小節似乎更適合用來闡述分支定界法的發想。

這麼多次作業以來，有時候常常發現收穫最大的内容未必來自課堂上或是作業考試中，而是在自己額外找資料得到的那種充實感，像是期末報告的内容我們便有額外找到課文中引述的論文内容（來自於現在凌華科技總經理楊正義當時就讀清華大學在李家同教授指導下所撰寫的碩士論文），再進步閱讀又發現其他篇論文是採用了動態規劃的想法來去求解…等。