

## 数据结构 第三次 OJ 作业

徐浩博 2020010108

### ● 无线广播

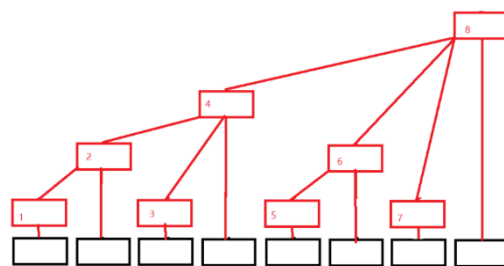
这道题实际上就是二染色问题，距离小于 20km 的小镇必须要染不同颜色；总颜色数为 2。题目实际上就是求二染色是否能够成功。我采用链式前向星的数据结构存图，然后 dfs 遍历每个连通块，尝试给每个节点染与父节点不同的颜色。如果有一点在遍历过程中出现矛盾，则说明二染色不成立，输出 -1；反之输出 1。

### ● 旅行商

这道题是一道比较裸的拓扑排序题。有向图的每个节点有一个入度和出度，由于无环，则必然有入度为 0 的节点，我们称这些节点为源。我们令  $dp[i]$  为目前所有源到编号  $i$  的道路中最长的那条的距离，那么如果编号  $i$  到编号  $j$  的节点有道路，则状态转移方程可以写作  $dp[j] = \max(dp[j], dp[i] + 1)$ ；更新时每个节点只与它的前驱节点有关，因此如果被更新它的入度次，则该节点就已经更新完毕， $dp[j]$  就已经是所有源到编号  $j$  的道路中最长的那条的距离，它就可以继续更新下一个后继节点。因此，我们可以用 bfs，每当入度用尽，则可以将其加入队列更新别的节点。考虑到初始有源，因此初始条件具备。最终将每个节点的  $dp$  值取  $\max$  即可。

### ● 平均气温

我们采用树状数组套平衡树的方法来做。首先我们先将每个节点  $x, y$  的范围排序，并将坐标按照排出的顺序更改为  $1 \sim n$ （收缩范围）。其次，我们按  $x$  轴坐标建立树状数组，将原树状数组的每个节点都作为一个平衡树。建树时首先要按照  $x$  的坐标，在树状数组更新对应的节点（节点是平衡树树根）上插入  $y$  值。举例来说， $(3, 10)$  的点就需要在编号为 3、4、8、16……的树根对应的平衡树上均插入  $y$  坐标为 10 的节点。



以上为建树过程，查询时，我们先将  $(x1', y1', x2', y2')$  的范围拆解为  $require(-inf, -inf, x2', y2') - require(-inf, -inf, x1' - 1, y2') - require(-inf, -inf, x2', y1' - 1) + require(-inf, -inf, x1' - 1, y1' - 1)$ ，其中  $-inf$  代表坐标范围的可能最小值， $require$  代表查询一个区间的点个数/温度之和。对于每个  $require(-inf, -inf, x', y')$ ，通过  $x, y$  方向二分搜索更改为  $1 \sim n$  的坐标（收缩范围），假设获得  $(0, 0, x0, y0)$ ，那么我们对树状数组查询  $x0$ ，获得的即是  $x$  方向坐标小于等于  $x0$  的所有平衡森林。对于每棵平衡树，我们再查询  $y$  方向坐标小于等于  $y0$  的节点，获得节点个数和/温度和；每次查询树状数组复杂度  $O(\log n)$ ，平衡树  $O(\log n)$ ，则单次查询复杂度  $O(\log^2 n)$ 。

我们选取无旋 treap 作为平衡树（因为它容易实现），然后对于每个节点维护它和左儿子、右儿子的节点个数以及温度之和。这样就实现了整个题目要求。