随机数学方法参考解答 （A 卷）

一．填空题（28 分，每空 4 分，将计算结果直接写在横线上）

(1) $\frac{2}{5}$；**(2)** $\frac{5}{9}$； **(3)** $\frac{1}{2}$； **(4)** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$； **(5)** $\frac{1}{2}$； **(6)** $e^{-i\theta+n(e^{i\frac{\theta}{n}}-1)}$； **(7)** $t(1-t)$ 。

二．（共 12，每小题 4 分）

（1）$EX=2$;

$$P(|X-E(X)|<1)=P(1<X<3)=P(X=2)=\frac{1}{3}$$

（2）$P(X=Y)=\sum_{i=1}^{3}P(X=i,Y=i)=\sum_{i=1}^{3}P(X=i)P(Y=i)=\frac{1}{3}$

$$P(X<Y)+P(X>Y)+P(X=Y)=1$$

$$P(X<Y)=\frac{1}{3}$$

（3）$U_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ 为随机徘徊（ $p=\frac{1}{3}$ ），故

$$P(U_4=1)=0,P(U_4=2)=C_4^3p^3q=\frac{8}{81}..$$

三．（共 15 分，每小题 5 分）

（1） $E(e^{-X})=\int_0^{\infty}2e^{-x}e^{-2x}dx=\frac{2}{3};$

$$E(Xe^{-X})=\int_0^{\infty}2xe^{-x}e^{-2x}dx=\frac{2}{9};\ EX=\frac{1}{2}$$

$$Cov(X,e^{-X})=E[Xe^{-X}]-EXE(e^{-X})=-\frac{1}{9}$$

（2） $P(X>2Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(X>2Y\,|\,Y=y)f_Y(y)dy$

$$=2\int_0^{+\infty}P(X>2y)e^{-2y}dy=2\int_0^{+\infty}e^{-4y}e^{-2y}dy=\frac{1}{3}$$

（3）

$$P(X>\eta Y)=P(X>\eta Y\,|\,\eta=1)P(\eta=1)+P(X>\eta Y\,|\,\eta=2)P(\eta=2)$$

$$=P(X>Y)P(\eta=1)+P(X>2Y)P(\eta=2)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

四.（共 20 分，每小题 5 分）

（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 6ydy=3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

同理 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}6y(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

在 $D=\{(x,y):0<y<x<1\}$ 上，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 和 Y 不独立。

（2）

$$F_Z(z)=\iint_{\{x-y\le z\}\cap D} 6ydxdy=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-(1-z)^3, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$$

（3）当 $0<x<1$ 时，有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{x^2}, & 0<y<x,\\ 0, & otherwise.\end{cases},$$

$E(Y|X=x)=\int_0^x y\frac{2y}{x^2}dy=\frac{2}{3}x$，即 $U=\frac{2}{3}X$

所以 $Cov(X,U)=\frac{2}{3}D(X)$，由于 $EX=\frac{3}{4};E(X^2)=\frac{3}{5}$， $DX=\frac{3}{80}$，

故 $Cov(X,U)=\frac{1}{40}$，

（4） $P(X<\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$，

$$E(X^2|X<\frac{1}{2})=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\bullet 3x^2dx}{P(X<\frac{1}{2})}=\frac{\frac{3}{160}}{\frac{1}{8}}=\frac{3}{20}$$

五.（共 15 分，每小题 5 分）

（1） X_2 与 $(X_1,X_3)^T$ 独立；

（2） $2X_1+3X_2-X_3\sim N(0,4^2)$

$$P(2X_1+3X_2-X_3\le 1)=P(\frac{2X_1+3X_2-X_3}{4}\le\frac{1}{4})=\Phi(\frac{1}{4}),$$

（3） $W=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i\sim N(0,\frac{2}{9})$，故 $E(W^2)=\frac{2}{9}$。

$$E(V)=E[\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i^2-W^2]=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

六.（共 10 分，每小题 5 分） 设 $\{N_t : t \geq 0\}$ 是强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程，

（1） $E[N_{t+s} | N_t] = E[N_{t+s} - N_t + N_t | N_t]$

$$= E[N_{t+s} - N_t] + N_t = \lambda s + N_t$$

（2） $\dfrac{N_1 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 的特征函数为

$$\varphi_{\frac{N_1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}(\theta) = e^{-i\sqrt{\lambda}\cdot\theta}\varphi_{N_1}\left(\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$= e^{-i\sqrt{\lambda}\cdot\theta}\exp(\lambda(e^{i\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}} - 1))$$

$$= e^{-i\sqrt{\lambda}\cdot\theta}\exp(\lambda(i\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2}\frac{\theta^2}{\lambda} + o(\frac{1}{\lambda}))) \qquad (\lambda \to \infty)$$

$$= \exp(-\frac{\theta^2}{2} + o(1)) \to e^{-\frac{\theta^2}{2}}.$$

即：当 $\lambda \to \infty$ 时，其极限是 $N(0,1)$ 的特征函数. 故由唯一性定理和连续性定理可得结论。

，