理科线性代数第三次作业

1. 矩阵的秩

1.

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1&4\\ \lambda&4&10&1\\ 1&7&17&3\\ 2&2&4&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\ \lambda&4&10&1\\ 3&1&1&4\\ 2&2&4&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\ 0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\\ 0&-20&-50&-5\\ 0&-12&-30&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\ 0&4&10&1\\ 0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\\ 0&4&10&1\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&7&17&3\\ 0&4&10&1\\ 0&0&\frac{1}{2}\lambda&-\frac{5}{4}\lambda\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&0&\frac{91}{2}\\ 0&4&0&26\\ 0&0&\frac{1}{2}\lambda&-\frac{5}{4}\lambda\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&0&\frac{91}{2}\\ 0&1&0&\frac{31}{2}\\ 0&0&\frac{1}{2}\lambda&-\frac{5}{4}\lambda\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-63\\ 0&1&0&\frac{31}{2}\\ 0&0&\frac{1}{2}\lambda&-\frac{5}{4}\lambda\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}$$

① $\lambda=0$ 时　A的约化行阶梯形式为 $\begin{bmatrix}1&0&0&-63\\ 0&1&0&\frac{31}{2}\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}$　$\text{rank}\,A=2$

② $\lambda\neq0$ 时　A的约化行阶梯形式为 $\begin{bmatrix}1&0&0&-63\\ 0&1&0&\frac{31}{2}\\ 0&0&1&-\frac{5}{2}\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}$　$\text{rank}\,A=3$

综上：$\lambda=0$ 时 rank 最小

2.

$$A=\begin{bmatrix}1&\lambda&-1&2\\ 2&-1&\lambda&5\\ 1&10&-6&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&10&-6&1\\ 2&-1&\lambda&5\\ 1&\lambda&-1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&10&-6&1\\ 0&21&-12-\lambda&-3\\ 0&10-\lambda&-5&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&10&-6&1\\ 0&21&-12-\lambda&-3\\ 0&0&\frac{-\lambda^2-2\lambda+15}{21}&\frac{3-\lambda}{7}\end{bmatrix}$$

① $\lambda=3$ 时

$$A\sim\begin{bmatrix}1&10&-6&1\\ 0&21&-15&-3\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&10&-6&1\\ 0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{1}{7}\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&\frac{8}{7}&\frac{17}{7}\\ 0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{1}{7}\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \text{rank}\,A=2$$

② $\lambda=5$ 时

$$A\sim\begin{bmatrix}1&10&-6&1\\ 0&21&-12-\lambda&-3\\ 0&0&\lambda+5&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&10&-6&1\\ 0&1&-\frac{12+\lambda}{21}&-\frac{1}{7}\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&\frac{10\lambda-6}{21}&0\\ 0&1&-\frac{12+\lambda}{21}&0\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}\quad \text{rank}A=3$$

③ $\lambda\neq3$ 且 $\lambda\neq5$ 时

$$A\sim\begin{bmatrix}1&10&-6&1\\ 0&21&-12-\lambda&-3\\ 0&0&\lambda+5&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&10&0&\frac{\lambda+23}{\lambda+5}\\ 0&21&0&\frac{21}{\lambda+5}\\ 0&0&\lambda+5&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{\lambda+13}{\lambda+5}\\ 0&1&0&\frac{1}{\lambda+5}\\ 0&0&1&\frac{3}{\lambda+5}\end{bmatrix}\quad \text{rank}A=3$$

3. 证明：由秩定理：$\text{rank}\,A+\dim \text{Nul}\,A=n$

$\text{rank}\,BA+\dim\text{Nul}\,BA=n$

则欲证　$\text{rank}\,BA\leq\text{rank}\,A$

只需说明　$\dim\text{Nul}\,A\leq\dim\text{Nul}\,BA$

考虑到 $\dim\text{Nul}\,A$、$\dim\text{Nul}\,BA$ 表示 $Ax=0$ 与 $BAx=0$ 非平凡解 解集的维数

而 $Ax=0\Rightarrow BAx=B(Ax)=0$　即 $Ax=0$ 则 $BAx=0$ 必成立

$\therefore \text{Nul}\,A\subseteq\text{Nul}\,BA$

则　$\dim\text{Nul}\,A\leq\dim\text{Nul}\,BA$ 得证

因此　$\text{rank}\,BA\leq\text{rank}\,A$ 得证

4. 证明：设某矩阵为A，其两个行约化阶梯形式分别表示为B、C且 $EB=C$

则 $\{x\mid Cx=0\}=\{x\mid EBx=0\}=\{x\mid Bx=E^{-1}\cdot0\}=\{x\mid Bx=0\}$ 即 $Bx=0$ 与 $Cx=0$ 有相同解集

B、C 的各列具有相同的线性关系，因此 $\dim\text{Col}\,B=\dim\text{Col}\,C$

若B的第i列不是主元列则该列与前面(i-1)列线性相关，则C第i列也与前面(i-1)列线性相关，因此C的第i列也不是主元列；若B第i列是主元列则同理亦有C第i列是主元列

i从1到n则B主元列与非主元列和C相同，二者具有相同主元位置，即B、C主元列相同 #

由于非主元列 w_i 可以表示为主元列的线性组合，且主元列中主元位置数字为1

在B、C中均有 $w_i=c_1w_{a_1}+\cdots+c_jw_{a_j}$，则B、C中非主元列相同 #，综上：B=C，矩阵行约化阶梯形唯一

2、线性相关，线性无关，基.

1、证明： 欲证 $e_1、e_2、e_3$ 是 R^3 下一组基，只需证 e_1,e_2,e_3 线性无关

即证 $x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=0$ 无非零解

即证 $[e_1\ e_2\ e_3]x=0$ 无非零解

由可逆矩阵定理，只需证明 $A=[e_1\ e_2\ e_3]$ 有3个主元位置 (rank=3)

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&1\\0&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&\frac{5}{3}\\0&0&\frac{7}{3}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

即A有3个主元位置得证，则 $e_1、e_2、e_3$ 是 R^3 下一组基得证

解： $Ax=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 采用Euler消元法，取增广矩阵 $[A|b]\sim[I|x]$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&a\\2&1&1&b\\0&2&1&c\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&a\\0&3&5&2a-b\\0&2&1&c\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&a\\0&1&\frac{5}{3}&\frac{2a-b}{3}\\0&0&\frac{7}{3}&\frac{4a-2b-3c}{3}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&a\\0&3&5&2a-b\\0&0&1&\frac{4a-2b-3c}{7}\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&0&\frac{-5a+6b+9c}{7}\\0&3&0&\frac{-6a+3b+15c}{7}\\0&0&1&\frac{4a-2b-3c}{7}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{-a+4b-c}{7}\\0&1&0&\frac{-2a+b+5c}{7}\\0&0&1&\frac{4a-2b-3c}{7}\end{bmatrix}$$

则 $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ 在这组基下坐标为 $\begin{bmatrix}\frac{-a+4b-c}{7}\\\frac{-2a+b+5c}{7}\\\frac{4a-2b-3c}{7}\end{bmatrix}$

2、证明：设向量组为 $w_0,w_1,w_2\dots w_{n-1}$ 其中 w_0 为零向量

则 $cw_0+0w_1+0w_2+\cdots+0w_{n-1}=0$ $(c\neq0)$

即 $x_0w_0+x_1w_1+\cdots+x_{n-1}w_{n-1}=0$ 存在非零解

则该向量组线性相关，即包含零向量的向量组线性相关、

3、证明：反证法，假设 $r>s$

则 $\begin{cases}a_1=c_{11}b_1+c_{12}b_2+\cdots+c_{1s}b_s\\ \quad\vdots\\ a_r=c_{r1}b_1+c_{r2}b_2+\cdots+c_{rs}b_s\end{cases}$ 设 $A=[a_1\cdots a_r]$ $B=[b_1\cdots b_s]$ $C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{21}&\cdots&c_{r1}\\c_{12}&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&\\c_{1s}&\cdots&\cdots&c_{rs}\end{bmatrix}$

则 $A=BC$

对C由秩定理 $\operatorname{rank}C+\dim\operatorname{Nul}C=r$ 而 $\operatorname{rank}C\leq s$ 则 $\dim\operatorname{Nul}C\geq r-s>0$

即 $Cx=0$ 有非零解

则 $Ax=BCx=B(Cx)=0$ 一定有非零解 $\Rightarrow$ A中各列线性相关（矛盾）

综上：$r\leq s$

4、证明：① 先证 $s<r$ 时可以找到一个向量 a_{s+1} 使 $a_1,\dots a_{s+1}$ 均线性无关，设 $A=[a_1\dots a_s]$

A不可能在每一行都有一个主元位置，$\Rightarrow\exists b\in R^r$ 使 $Ax=b$ 无解

则令 $a_{s+1}=b$，$a_1,\dots a_{s+1}$ 线性无关

② 按照①的方法，可以将 $a_1,\dots a_s$ 扩充到 $a_1,\dots a_r$ 且 $a_1,\dots a_r$ 均线性无关

③ 再证 $\langle a_1,\dots a_r\rangle$ 可作为 R^r 的一组基

设 $A'=[a_1\dots a_r]$，各列线性无关 $\Rightarrow$ 主元位置数目是n

$\Rightarrow\forall b\in R^r$ $A'x=b$ 均有解

$\therefore\langle a_1,\dots a_r\rangle$ 可作为 R^r 的一组基

综上：可以往向量组中添加向量来构造一组基.

5、证明： 反证法，假设 $(e_1,\dots,e_n)$ 线性相关，有 $c_1e_1+c_2e_2+\cdots+c_ne_n=0$，设其中某数 $c_k\neq0$

则 $(c_1\vec{e_1}+c_2\vec{e_2}+\cdots+c_n\vec{e_n})\cdot\vec{e_k}=c_1\vec{e_1}\cdot\vec{e_k}+\cdots+c_k\vec{e_k}\cdot\vec{e_k}+\cdots+c_n\vec{e_n}\cdot\vec{e_k}=c_k\neq0$

而 $(c_1\vec{e_1}+c_2\vec{e_2}+\cdots+c_n\vec{e_n})\cdot\vec{e_k}=(c_1e_1+c_2e_2+\cdots+c_ne_n)^T\cdot e_k=0^T\cdot e_k=0$

$\therefore$ 有矛盾，则假设不成立

$(e_1,e_2,\dots e_n)$ 必然线性无关

6、证明：反证法，假设 $(e, Ae, \dots A^k e)$ 线性相关

则有 $(C_0+C_1A+C_2A^2+\dots+C_kA^k)e=0$ （C_i 不全为 0）

设 C_n 是 $C_0, C_1 \dots C_k$ 序列中第一个不为 0 的数，$0\le i<n$ 时 $C_i=0$

则 $A^{k-n}(C_0+C_1A+C_2A^2+\dots+C_kA^k)e$

$= A^{k-n}(C_nA^n+C_{n+1}A^{n+1}+\dots+C_kA^k)e$

$= C_nA^ke+A^{k-n}(C_nA^n+C_{n+1}A^{n+1}+\dots+C_kA^k)e$

$= C_nA^ke+(C_{n+1}A^{k+1}+C_{n+2}A^{k+2}+\dots+C_kA^{2k-n})e$

$= C_nA^ke+(C_{n+1}+C_{n+2}A+\dots+C_kA^{k-n-1})A^{k+1}e$

而 $A^{k+1}e=0$，$A^ke\ne 0$

则 $A^{k-n}(C_0+C_1A+C_2A^2+\dots+C_kA^k)e = C_nA^ke\ne 0$

而 $A^{k-n}[(C_0+C_1A+C_2A^2+\dots+C_kA^k)e]=0$ 显然成立

∴ 前后矛盾，假设不成立

∴ $(e, Ae, \dots A^ke)$ 线性独立

3 线性方程的解

1、解：将 A 扩展为增广矩阵

$$[A|b]=\begin{bmatrix}2&7&3&1&6\\3&5&2&2&4\\9&4&1&7&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&7&3&1&6\\0&\frac{11}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&5\\0&\frac{55}{2}&\frac{25}{2}&-\frac{5}{2}&25\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&7&3&1&6\\0&11&5&-1&10\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{11}&\frac{9}{11}&-\frac{2}{11}\\0&1&\frac{5}{11}&-\frac{1}{11}&\frac{10}{11}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则特解 $x_p=\begin{bmatrix}-\frac{2}{11}\\\frac{10}{11}\\0\\0\end{bmatrix}$

$Rx=0$ 的一般解

$$\begin{cases}x_1-\frac{1}{11}x_3+\frac{9}{11}x_4=0\\x_2+\frac{5}{11}x_3+\frac{10}{11}x_4=0\end{cases}$$

① $x_3=1\ x_4=0$ 时 $x_1=\frac{1}{11}\ x_2=-\frac{5}{11}$　② $x_3=0\ x_4=1$ 时 $x_1=-\frac{9}{11}\ x_2=-\frac{10}{11}$

$S_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{11}\\-\frac{5}{11}\\1\\0\end{bmatrix}$　$S_2=\begin{bmatrix}-\frac{9}{11}\\-\frac{10}{11}\\0\\1\end{bmatrix}$

则 $Rx=0$ 一般解为 $x_n=C_1\begin{bmatrix}\frac{1}{11}\\-\frac{5}{11}\\1\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}-\frac{9}{11}\\-\frac{10}{11}\\0\\1\end{bmatrix}$ （C_1、C_2 为常数）

∴ $Ax=b$ 的解为

$$x=x_p+x_n=\begin{bmatrix}-\frac{2}{11}\\\frac{10}{11}\\0\\0\end{bmatrix}+C_1\begin{bmatrix}\frac{1}{11}\\-\frac{5}{11}\\1\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}-\frac{9}{11}\\-\frac{10}{11}\\0\\1\end{bmatrix}$$ （C_1、C_2 为常数）

2、解：将 A 扩展为增广矩阵

$$[A|b]=\begin{bmatrix}3&-2&5&4&2\\6&-4&4&3&3\\9&-6&3&-2&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&-2&5&4&2\\0&0&6&5&1\\0&0&12&14&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&-2&5&4&2\\0&0&1&\frac{5}{6}&\frac{1}{6}\\0&0&0&4&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-\frac{2}{3}&0&0&\frac{7}{18}\\0&0&1&0&\frac{1}{6}\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

则特解 $x_p=\begin{bmatrix}\frac{7}{18}\\0\\\frac{1}{6}\\0\end{bmatrix}$

$Rx=0$ 的一般解

$$\begin{cases}x_1-\frac{2}{3}x_2=0\\x_3=0\\x_4=0\end{cases}$$

$x_2=1$ 时 $x_1=\frac{2}{3}\ x_3=0\ x_4=0$

$S=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

∴ $Ax=b$ 的解为 $x=x_p+x_n=\begin{bmatrix}\frac{7}{18}\\0\\\frac{1}{6}\\0\end{bmatrix}+C\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ （C 为常数）

3、解：将A扩展为增广矩阵

$$[A|b]=\begin{bmatrix}1&1&3&-2&3&1\\2&2&4&-1&3&2\\3&3&5&-2&3&1\\2&2&8&-3&9&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3&-2&3&1\\0&0&2&-3&3&0\\0&0&4&-4&6&2\\0&0&2&1&3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3&-2&3&1\\0&0&2&-3&3&0\\0&0&4&-4&6&2\\0&0&2&1&3&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&3&-2&3&1\\0&0&2&-3&3&0\\0&0&0&2&0&2\\0&0&0&4&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3&-2&3&1\\0&0&2&-3&3&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&-4\end{bmatrix}$$

观察到最后一行 $0\neq-4$ 则 $Ax=b$ 无解

4. (a) 证明：设 u 为 $Au=b$ 的一个解

$\begin{cases}Au=b\\Ax_p=b\end{cases}\Rightarrow A(u-x_p)=0$ 即 $u-x_p=x_n$

$\therefore u=x_p+x_n$. 即方程的任何一个解都可以写成 $x=x_p+x_n$ 形式

(b) 解：$b=0$ 时 解空间构成一个线性子空间

下说明 $b\neq0$ 时 无法构成一个线性子空间

反证法，假设 $Ax=b$ $(b\neq0)$ 的解可构成一个线性子空间 V

其中 u 为 $Ax=b$ 的一个解，$u\in V$

则 $A(u+u)x=2b\neq b$ 即 $u+u\notin V$ 与线性子空间定义矛盾

$\therefore b\neq0$ 时 解空间无法构成一个线性子空间

综上：$b=0$ 时 解空间构成一个线性子空间

(c) 解：存在唯一解的条件是 $x=x_p+x_n$ 中只存在特解 x_p 不存在 $Ax=0$ 的一般解

$\Leftrightarrow Ax=0$ 无非零解（A中无自由变量，每列均是主元列）

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}A=n$

$\therefore$ 方程组存在唯一解的条件是 $\operatorname{rank}A=n$.