定理2.1.1
设A，B为两个命题公式，A = B的充分必要条件是A□B为一个重言式。

定理2.2.1：
设 Φ(A)是含命题公式A的命题公式， Φ(B)是用命题公式B置换了Φ(A)中的A之后得到的命题公式

定理2.5.1

- $\neg(A^*) = (\neg A)^*$，$\neg(A^-) = (\neg A)^-$
- $\neg A = A^{*-}$（对连结词个数归纳）
- 若$A = B$，则$A^* = B^*$

定理2.5.2（代入规则一般可消去A^-）

- 若A = B，必有A* = B* （对偶原理）
- 若A→B 永真，必有B* →A* 永真
- A与A^-同永真，同可满足；¬A与A* 同永真，同可满足
- A为重言式⇒A^*必为矛盾式（A=T则 A*=F）

定理2.8.1

A⇒B 成立的充分必要条件是A→B为重言式。
定理2.8.2
A⇒B 成立的充分必要条件是A∧¬B为矛盾式。

定理3

- ├ (Q→R) →((P→Q) → (P→R))
- ├ P → P
- ├ ¬ P ∨ P
- ├ P ∨ ¬P
- ├ P → ¬¬P
- ├ (P → Q) → (¬Q → ¬P)
- ├ P→ (Q → P ∧ Q)
- ├ P ∨ ¬P ∨ Q

定理3.1 罗素公理系统是完备的

定理5.1 否定等值式（用有限个体域和语义两种方法证明）

- $\neg\exists x P(x) = \forall x \neg P(x)$
- $\neg\forall x P(x) = \exists x \neg P(x)$

定理5.2.1 量词分配等值式**（解释法证明正反均要说）**

- $(\forall x)(P(x)\vee q)=(\forall x)P(x)\vee q$
- $(\exists x)(P(x)\vee q)=(\exists x)P(x)\vee q$
- $(\forall x)(P(x)\wedge q)=(\forall x)P(x)\wedge q$
- $(\exists x)(P(x)\wedge q)=(\exists x)P(x)\wedge q$

定理5.2.2 量词分配等值式

- $(\forall x)(P(x)\to q)=(\exists x)P(x)\to q$
- $(\exists x)(P(x)\to q)=(\forall x)P(x)\to q$
- $(\forall x)(q\to P(x))=q\to(\forall x)P(x)$
- $(\exists x)(q\to P(x)\wedge q)=q\to(\exists x)P(x)$

定理5.2.3 量词分配等值式

- $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))=(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$
- $(\exists x)(P(x)\vee Q(x))=(\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$
- $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x)\vee Q(x))$
- $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$
- $(\forall x)(P(x)\to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x)\to(\forall x)Q(x)$

定理5.4 推理公式

(1) $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)P(x)\vee Q(x)$
(2) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$
(3) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\to(\forall x)Q(x)$
(4) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$ **(证明)**
(5) $(\forall x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\leftrightarrow(\forall x)Q(x)$

(6) $(\forall x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\leftrightarrow(\exists x)Q(x)$
(7) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))\wedge(\forall x)Q(x)\to R(x))\Rightarrow(\forall x)(P(x)\to R(x))$
(8) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))\wedge P(a)\Rightarrow Q(a)$
(9) $(\forall x)(\forall y)P(x,y)\Rightarrow(\exists x)(\forall y)P(x,y)$
(10) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)\Rightarrow(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

定义9.2.1 $A=B:(\forall x)(x\in A\leftrightarrow x\in B)$

$A\neq B:(\exists x)\neg(x\in A\leftrightarrow x\in B)$

定义9.2.2 $A\subseteq B:(\forall x)(x\in A\to x\in B)$

定理9.2.1 $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$

定理9.2.2 集合间⊆关系是自反、反对称和传递的

定义9.2.3 $A\subset B:A\neq B\wedge A\subseteq B$

定义9.3.1 $A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$.

$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$

$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$

$-A=E-A$

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\{x|x\in A\overline{\vee}x\in B\}$

定义9.3.2 $\bigcup A=\{x|(\exists z)(z\in A\wedge x\in z)\}$

$\bigcap A=\{x|(\forall z)(z\in A\to x\in z)\}$

规定：$\bigcup\varnothing=\varnothing$，$\bigcap\varnothing$无意义

定义9.3.3 $P(A)=\{x|x\subseteq A\}$

定理9.3.1 $\bigcup P(A)=A$

定义9.3.4 $<x,y>=\{\{x\},\{x,y\}\}$ (If $x=y$, then $<x,x>=\{\{x\}\}$)

$<x_1,x_2,\ldots,x_n>=<<x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}>,x_n>$

定义9.3.5 $A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{<x_1,x_2,\ldots,x_n>|x_1\in A_1\wedge\cdots\wedge x_n\in A_n\}$

当$A_1=\cdots=A_n$时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=A_1^n$

定理9.5.1

1)交换律 $A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$

2)分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

3)结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

4)吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$

$A\cap(A\cup B)=A$

5)**摩根律** $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$$-(B\cap C)=-B\cup C,\quad -(B\cup C)=-B\cap C$$

定理9.5.2　差集

1） $A-B=A-(A\cap B)$

2） $A-B=A\cap -B$

3） $A\cup(B-A)=A\cup B$

定理9.5.3　对称差（类似于并集）

1)交换律 $A\oplus B=B\oplus A$

2)结合律 $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

3)分配律 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

4)其他 $A\oplus(A\oplus B)=B$

定理9.5.4　包含关系

1） $A\subseteq B\Rightarrow(A\cup C)\subseteq(B\cup C)$

2） $A\subseteq B\Rightarrow(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$

3） $(A\subseteq B)\wedge(C\subseteq D)\Rightarrow(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$

4） $(A\subseteq B)\wedge(C\subseteq D)\Rightarrow(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$

5） $(A\subseteq B)\wedge(C\subseteq D)\Rightarrow(A-D)\subseteq(B-C)$

6） $C\subseteq D\Rightarrow(A-D)\subseteq(A-C)$

推论9.5.1　包含关系

$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$（囊括三种运算）

定理9.5.5　幂集**（推导）**

1） $A\subseteq B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

2） $A=B\Leftrightarrow P(A)=P(B)$

3） $P(A)\in P(B)\Rightarrow A\in B$

4） $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$ （注意证明写法，不能从一开始预设{x}）

5） $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$ （注意证明写法）

6） $P(A-B)\subseteq(P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$

定义9.5.1

集合的集合A的元素的元素是A的元素，则A为传递集合

传递集合transitive：$(\forall x)(\forall y)((x\in y\wedge y\in A)\to x\in A)$；$\bigcup A\subseteq A$

定理9.5.6　传递集合

1） $x\in A\Rightarrow x\subseteq A$（每个元素都是它的子集，反之不成立）

2） A is transitive $\Leftrightarrow$ $A\subseteq P(A)$ **（推导）**

3） A is transitive $\Leftrightarrow$ P(A) is transitive **（推导）**

定理9.5.7　广义交和广义并

1） $A\subseteq B\Rightarrow\bigcup A\subseteq\bigcup B$

　$A\subseteq B\Rightarrow\bigcap B\subseteq\bigcap A$

2） $\bigcup(A\bigcup B)=(\bigcup A)\bigcup(\bigcup B)$

　$\bigcap(A\bigcap B)=(\bigcap A)\bigcap(\bigcap B)$

3） $\bigcup(P(A))=A$（广义并是幂集的逆运算）

4） A is transitive $\Rightarrow$ $\bigcup$A is transitive

Elements of A is transitive $\Rightarrow \bigcup$A is transitive

5）A is transitive $\wedge$ A $\neq \varnothing$ $\Rightarrow \bigcap$A is transitive $\wedge \bigcap$ A $\neq \varnothing$

Elements of A is transitive $\wedge$ A $\neq \varnothing \Rightarrow \bigcap$A is transitive

定理9.5.8 笛卡尔积

1）$x \in A, y \in A$则$< x, y > \in PP(A)$

2）笛卡尔积没有交换律和结合律：$A \times B \neq B \times A, (A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

3）分配律：$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$(A \cup B) \times C = (A \times B) \cup (A \times C), (A \cap B) \times C = (A \times B) \cap (A \times C)$

4）$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \times C) \subseteq (B \times C) \Leftrightarrow (C \times A) \subseteq (C \times B)$ （$C \neq \varnothing$）

$(A \times B \subseteq C \times D) \Leftrightarrow (A \subseteq C \wedge B \subseteq D)$

ZFC公理系统

1. 两个集合相等的充要条件是集合元素相同(A=B)
2. 存在不含任何元素的集合($\varnothing$)
3. 对任意的集合x,y，存在集合z使得z的元素恰为x和y ($\{x, y\}$)
4. 对任意的集合x，存在集合y使得y的元素恰为x元素的元素 ($\bigcup x$)
5. **子集公理模式**

   对任意的谓词公式P(z)，对任意的集合x，存在（x的子集）y，使得y的元素既是x的元素，又能使P(z)成立

   $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge P(z)))$
6. 对任意的集合x，存在集合y，使得y的元素恰为x的子集 (P(x))
7. 对于任意一个非空集合x，存在x的一个元素y，使得$x \cap y = \varnothing$（**正则**，极小元，不存在以自身为集合的集合）
8. **无穷公理**：存在一个由所有自然数组成的集合

   $(\exists x)(\varnothing \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x))$
9. 对于任意的谓词公式P(x, y)，如果对任意的x 存在唯一的y使得P(x, y)为真，那么对所有的集合t 就存在一个集合s，使s中的元素y恰好是t中元素 x 所对应的那些y
10. 选择公理

    $(\forall 关系R)(\exists 函数F)(F \subseteq R \wedge dom(R) = domF)$

子集公理模式推论

1. 对任意的集合A,B，交集A∩B是集合（$P(z) = z \in B$)
2. 不存在集合A，使任一集合都是 A的元素（$A_0 = \{x | x \in A \wedge x \notin x\}$（$P(z) = z \notin z$，从而构造出矛盾)
3. ∩ Ø不存在，因为根据定义，万有集合属于∩ Ø，而不存在万有集合，故∩ Ø不存在
4. 笛卡尔积存在（<x,y>∈PP(A∪B)，PP(A∪B)显然存在)
5. 广义交存在

正则公理推论

1. $x \in x$不存在，因为{x}不满足正则公理
2. 不存在万有集合（根据推论1）
3. 不存在递降序列$x0 \ni x1 \ni x2 \ni \cdots \ni xn \ni \cdots$（反证，极小元xi和{x1,x2,...,}的交集至少有xi+1）
4. 对任意的集合 A和 B，有 ¬(A∈B∧B∈A)
5. 对任意非空的传递集合 A，有ø∈A

定义9.7.6

三歧性：对集合A，如果对任意的集合A1∈A和A2∈A，使A1∈A2， A1 = A2， A2∈A1三式中恰好有一个成立，就称集合A有三歧性

定义10.1.1 如果一个集合满足以下条件之一：1.集合非空 ，且它的元素都是有序对；2.集合是空；则称该集合为一个二元关系R

定义10.1.2 设A,B为集合，$A\times B$的任一子集所定义的二元关系称为 A到B的二元关系 。 特别当 $A=B$时，$A\times A$的任一子集 任一子集 任一子集 任一子集 称为 A上的一 个二元关系。

定义10.1.3 $dom(R)=\{x|(\exists y)(<x,y>\in R)\}$

$ran(R)=\{y|(\exists x)(<x,y>\in R)\}$

$fld(R)=dom(R)\cup ran(R)$

定理10.1.1 对A到B的关系 R，如果 <x,y>∈R,则 x∈∪∪ R, y∈∪∪ R；对A到B的关系 R，则 fld (R)= ∪∪ R.

定义10.1.4 关系的逆$R^{-1}=\{<x,y>\mid<y,x>\in R\}$ （关系矩阵转置）

关系的合成$S\circ R=\{\langle x,y\rangle|(\exists z)(\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle z,y\rangle\in S)\}$

R在A上的限制$R\upharpoonright A=\{<x,y>\mid<x,y>\in R\wedge x\in A\}$

A在R下的象R[A]为集合$R[A]=\{y|(\exists x)(x\in A\wedge<x,y>\in R)\}$

定理10.3.1

1）$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

2）结合律

$$(R\circ S)\circ Q=R\circ(S\circ Q)$$

3）分配律

$$\begin{aligned}&R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T\\&R\circ(S\cap T)=R\circ S\cap R\circ T\\&(S\cup T)\circ X=S\circ X\cup T\circ X\\&(S\cap T)\circ X=S\circ X\cap T\circ X\end{aligned}$$

4）限制和象

$R\upharpoonright(A\cup B)=R\upharpoonright A\cup R\upharpoonright B$

$R\upharpoonright(A\cap B)=R\upharpoonright A\cap R\upharpoonright B$

$R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$

$R[A\cap B]\subseteq R[A]\cap R[B]$ **易错**

定理10.3.2 $R^m\circ R^n=R^{m+n}$，$(R^m)^n=R^{mn}$

注意：$R^0=I_A$恒等关系

定义10.4.1 以下定义均建立在A上的关系R上

1）自反：$(\forall x)(x\in A\to xRx)$

R自反 $\Leftrightarrow I_A\subseteq R$

2）反自反：$(\forall x)(x\in A\to x\hat{R}x)$

R反自反 $\Leftrightarrow I_A\cap R=\varnothing$

3）对称：$(\forall x)(\forall y)((x\in A\wedge y\in A\wedge xRy)\to yRx)$

R对称 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$

4）反对称：$(\forall x)(\forall y)((x\in A\wedge y\in B\wedge xRy\wedge yRx)\to x=y)$

$(\forall x)(\forall y)((x\in A\wedge y\in B\wedge xRy\wedge x\neq y)\to x\hat{R}y)$

R反对称 $\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

5）传递：$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz)\to xRz)$

R传递 $\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R$

定理10.5.1 设A是有限集合，$|A|=n$，R是A上的关系，则存在自然数s和t, $s\neq t$ 使得 $Rs=Rt$。

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性（先证$R^{s+k}=R^{t+k}$，再归纳法证$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，最后对任意的 $q\in N$，有 $Rq\in\{R_0, R_1\ldots R_{t-1}\}$）

定义10.5.2 X闭包

对于非空集合A上关系R，它的闭包R'是满足如下条件的集合：

1)$R \subseteq R'$ 2) R'满足性质X 3) 对于任何A上满足性质X的集合R''，$R \subseteq R'' \to R' \subseteq R''$

定理10.5.4 对于非空集合A上的关系$R_1 \subseteq R_2$，有

1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$（证明：$R_1 \subseteq r(R_2)$, 故$r(R_1) \subseteq r(R_2)$）

2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$ 3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

定理10.5.5 对于非空集合A上的关系R, R_2，有

1) $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$

（证明：反复用定义，先证$r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$，再反过来证）

2) $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$

3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$（**注意是包含关系**，原因是$t(R_1) \cup t(R_2)$并不是传递集合）

定理10.5.6

1) $r(R) = R \cup I_A$

2) $s(R) = R \cup R^{-1}$（证明依据定义，定义第三条证法，$<x, y> \in R \cup R^{-1}$, 分 $<x, y> \in R$和 $\in R^{-1}$分别论证 $<x, y> \in R''$）

3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

（先证$R \cup R^2 \cup R^3 \cdots \subseteq t(R)$，用归纳法，$<x, y> \in R^{s+1} = R^s \circ R \Rightarrow <x, t> \in R^s \wedge <t, y> \in R$；再证$R \cup R^2 \cup R^3 \cdots$传递，对于<x,t>,<t,y>$\in R \cup R^2 \cup R^3 \cdots$，设<x,t>$\in R^s$,<t,y>$\in R^t$,则<x,y>$\in R^{s+t}$）

定理10.5.7 A为非空有限集合，$|A| = n$，R为A上的关系，则存在正整数k≤n，使得$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^k$

定理10.5.8

1) R自反，则s(R)和t(R)均自反

2) R对称，则r(R)和t(R)均对称（证明t(R)对称时需要数学归纳法证明R^k对称）

3) R传递，则t(R)均自反 （**s(R)不传递**）

定理10.5.9

1) rs(R)=sr(R)

2) rt(R)=tr(R)

3) st(R)⊆ts(R) （**r是万金油**）

定义10.6.1 等价关系：**非空集合**上的自反、对称、传递的关系

定义10.6.2 等价类：设R是非空A集合上的等价关系，对于任何$x \in A$，令：$[x]_R = \{y | y \in A \wedge xRy\}$

定理10.6.1 $\bigcup\{[x]_R | x \in A\} = A$（从两方面的子集关系证）

定义10.6.3 商集：等价类的集合

定义10.6.4 划分π：**非空($\varnothing \notin \pi$)子集（任何元素都是A子集），并为A（广义并为A），不相交（元素彼此不相交）**

定理10.6.2 任一集合上的一个划分可产生一个等价关系$\{<x, y> | (\exists z)(z \in \pi \wedge x \in z \wedge y \in z)\}$

定理10.6.3 对非空集合A的一个划分π和A上的等价关系，π诱导R当且仅当R诱导π

（前推后：设R诱导出π'，对任意的x，设x在π中的划分块B，在π'的划分块B'中；$y \in B \Rightarrow xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R \Rightarrow y \in B'$.

后推前：设π诱导R'，对任意的x, y，$xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R \Rightarrow x \in [x]_R \wedge y \in [y]_R \Rightarrow xR'y$）

定义10.7.1 相容关系：**非空集合**上的自反、对称的关系

定义10.7.2 相容类：非空集合上的相容关系R，若$C \subseteq A$，且C中任意两个元素有xRy，则C就是相容类（点、线或完全图）

最大相容类：不是其他相容类真子集的相容类

定义10.7.4 覆盖Ω：**非空($\varnothing\notin\pi$)子集（任何元素都是A子集），并为A（广义并为A）**

完全覆盖$C_R(A)$：所有元素都是最大相容类

定理10.7.2 完全覆盖唯一

定理10.7.3 覆盖构造相容关系

对非 空集合 A的一个覆 盖Ω={A1,A 2,...An}，由Ω 定 的关系 R=A1×A1∪A2×A2∪ ...∪An×An是A上的相容关系

结论　集合 A上的相容关系R与完全覆盖C_R(A)存在 一对应

定义10.8.1 偏序关系≤：自反、反对称、传递（也称半序、弱偏序）

定义10.8.2 偏序集：集合A和A上的偏序关系R <A,R>

定义10.8.3 拟序关系≤：反自反、传递 **(蕴含反对称)** （也称强偏序）

定理10.8.1 拟序关系反对称（反证法）

定理10.8.2 $拟序关系\cup I_A=偏序关系$；$偏序关系-I_A=拟序关系$

定义10.8.4 盖住关系：偏序关系≤中，x≤y，x≠y且不存在z有x≤z且z≤y，则称y盖住x；盖住关系covA={<x,y>|x,y是A的元素且y盖住x}

定义10.8.5 对于偏序集<A，≤>和A的子集B

(1) 若$(\exists y)(y\in B\wedge(\forall x)(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x))$,则称 y为B的最小元
(2) 若$(\exists y)(y\in B\wedge(\forall x)(x\in B\rightarrow x\leq y))$,则称 y为B的最大元
(3) 若$(\exists y)(y\in B\wedge(\forall x)(x\in B\wedge x\leq y\rightarrow x=y))$,则称 y为B的极小元（极大元不一定和全部元素都可比较）
(4) 若$(\exists y)(y\in B\wedge(\forall x)(x\in B\wedge y\leq x\rightarrow x=y))$则称 y为B的极大元

(5) 如果存在元素 $a\in$A，使得任意 $x\in B$都有 $x\leq a$，则称 a为子集 B的上界

(6) 如果存在元素 $a\in$A，使得任意 $x\in B$都有 $a\leq x$，则称 a为子集 B的下界

(7) 如果存在B的某个上界a，使得对于 B的任意上界x都有$a\leq x$，则称a为子集B的最小上界或上确界，记为sup$(B)=a$

(8) 如果存在子集B的某个下界a，使得 B的任意下界x都有$x\leq a$，则称a为子集 B的最大下界或下确界，记为inf$(B)=a$

推论

① 若b为B的最大元，则 b为B的极大元 、上界 和**上确界**；（原因是b$\in B$，其他上界也和b可比）
② 若b为B的最小元，则 b为B的极小元 、下界 和**下确界**；
③ 若a为B的上界且$a\in B$，则 a为B的最大元；
④ 若a为B的下界且$a\in B$，则 a为B的最小元。

① 若B有最大元，则 B的最大元唯一；
② 若B有最小元，则 B的最小元唯一；
③ 若B有上确界，则 B的上确界唯一；
④ 若B有下确界，则 B的下确界唯一；
⑤ 若B为**有限集**，则 B的极大元、小恒存在。

定义10.8.7 全序关系R：R是A上的偏序关系, 满足：∀a,b∈A, a与b可比

定理10.8.3 **全序关系有上界必然有上确界；偏序关系有上界未必有上确界**

定义10.8.8 对偏序集 < A,≤ >, < A,≤ >, $B\subseteq A$
(1) 如果对任意 的$x,y\in B$, x 和 y 都是可比的，则称B为A上的链，B 中元素个数称为链的长度 。
(2) 如果对任意的 $x,y\in B$, x 和 y 都不是可比的，则称B为A上的反链，B 中元素个数称为反链的长度。

定理10.8.4 对偏序集< A, ≤>，设A中最长链的长度是n，则将A中元素分成不相交的反链，反链个数至少是n **(反链最小划分数=链最长长度)**

（证明：对n归纳，n=k+1时，取M为极大元集合，M不为空且每条最长链的极大元都在M中，M构成一条反链，而A-M最少有k个反链）

定理10.8.5 令（A,≤）是一个有限偏序集，并令m是反链的最大的大小。则A可以被划分成m个但不能再少的链 **(链最小划分数=反链最长长度)**

定理10.8.6 对偏序集< A, ≤>, 若A中元素为mn+1个，则A中或者存在一条长度为m+1的反链，或者存在一条长度为n+1的链

定义10.8.9 良序关系：任意非空子集都有最小元的偏序关系

定理10.8.7 任何一个**有限的全序集**均是良序集；任何一个良序集均是全序集

定理10.8.8 任何集合都可以良序化（如$\mathbb{Z}$的序关系可以为0,1,2,……,-1,-2,……）

定义11.1.1 对集合A到集合B的关系 f，若满足下列条件：

(1) 对任意的 $x\in dom(f)$，存在唯一的$y\in ran(f)$,使xfy成立；
(2) $dom(f)$=A

这两个条件可以表示为

1）$(\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)((xfy_1 \wedge xfy_2) \rightarrow y_1 = y_2)$

2）$(\forall x)(x \in A \rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge xfy))$

定义11.1.2 函数的集合A_B={f|f:$A\rightarrow B$}（特别注意$\varnothing_\varnothing = \{\varnothing\}$）

定义11.1.3 设 f : $A\rightarrow B$,$A_1\subseteq A$，定义 A_1在f下的象 $f[A_1]$为$f[A_1]$={y|($\exists x$)($x\in A_1\wedge y$=$f(x)$)}

设 $B1\subseteq B$，定义 $B1$在f下的完全原象 下的完全原象 $f^{-1}[B_1]$为$f^{-1}[B_1]$={x|$x\in A\wedge f(x)\in B_1$}

定义11.1.4 满射（f是A到B上的）、单射（内射、一对一）、双射（f是一对一A到B上的）

定义11.1.5 n元运算：f：$A^n\rightarrow A$为A上的 n元运算

定义11.1.6 泛函：F:$A\rightarrow B_c$称为一个泛函

定义11.1.7 自然映射/典型映射：

设R是A上的等价关系，令g:$A\rightarrow A/R$，g_a=$[a]_R$，则称 g为从 A到商集A/R的典型映射或自然映射

定理11.2.1 构成函数的关系的合成也即函数的合成：

(1)$f\circ g$是函数 $f\circ g$: $A\rightarrow C$（用函数的两条性质，即dom=A和唯一性证明）
(2)对任意的 $x\in A$，有 $f\circ g(x)$=$f(g(x))$

定理11.2.2 设$g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$

1）若f，g是满射/单射/双射的，则f○g是满射/单射/双射的

2）若$f \circ g$是满射的，则f是满射的；

若$f \circ g$是单射的，则g是单射的；

若$f \circ g$是双射的，则f满，g单；

定义11.3.1 函数的相容：设 f:$A\rightarrow B$,g:$C\rightarrow D$，如果 对任意 对任意 的 $x\in A\cap C$，都有 $f(x)$=$g(x)$，就 说 f和 g是 相容的

定理 11.3.1　设 f:$A\rightarrow B$, g:$C\rightarrow D$，则 f和 g是相容的当且仅当$f\cup g$是函数。
定理 11.3.2　设 f:$A\rightarrow B$, g:$C\rightarrow D$，则 f与 g是相容的当且仅当$f\uparrow(A\cap C)$=$g\uparrow(A\cap C)$

定理 11.3.2　对函数的集合 C，若C是相容的，且 F=$\cup C$，则F是函数 F:$dom(F)\rightarrow ran(F)$，且$domF$=$\cup\{dom(f)|f\in C\}$

定义11.3.2 函数和关系的相容：对任意$x, y \in A$有$< x, y >\in R \Rightarrow < f(x), f(y) >\in R$，则f和R相容

定理11.3.3 设R是A上的等价关系 的等价关系，且 f:$A\rightarrow A$,
• 如果 R与f是相容的 是相容的 是相容的，则 存在唯一的 存在唯一的 存在唯一的 函数 F:$A/R\rightarrow A/R$，使 FxR=$[fx]R$；
• 如果 R与f不相容，则存在这样的函数 不相容，则存在这样的函数 不相容，则存在这样的函数 不相容，则存在这样的函数 不相容，则存在这样的函数 F。（可以理解为f将一个等价类的划分块投射到了另一个划分块中）

定义11.4.1 极限点：在x_0的任一个邻域中都存在不等于x_0的元素x且x$\in A$（极限点可以不在A内）

孤立点：A的非极限点的元素

定理11.4.2 若A是有界无限集，则A具有极限点

定义11.4.2 导集A'：A的所有极限点的集合

闭集：$A' \subseteq A$

开集：A的元素都是A的内点

定理11.4.3 任意个闭集的交集是闭集。有限个闭集的并集是闭集。

任意个开集的并集是闭集。有限个开集的交集是开集。

定义12.1.1 $\mathbb{Z}_+ : \mathbb{N}-\{0\}, \mathbb{Z}_- = \{<0,n>|n \in Z_+\}, \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$

相反数：$n \in \mathbb{Z}_+, -n =<0,n>; -0=0; n \in Z_+, -<0,n>=n$

小于等于关系（分三种情况讨论，用$\leq_{\mathbb{N}}$定义）、小于关系

定义12.1.2 $Q_1 = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}-\{0\})$上的$\simeq$关系为：$a/b \simeq c/d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

$\mathbb{Q} = Q_1/\simeq, \mathbb{Q}$是$Q_1$关于等价关系$\simeq$的商集

小于等于关系（用$\leq_{\mathbb{Z}}$定义）、小于关系

定义12.1.3 基本函数：有界非递减函数（$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$)

基本函数的$\simeq$关系：$f \simeq g \Leftrightarrow f$和$g$的序列极限相同

$\mathbb{R} = B/\simeq$, 其中B是所有基本函数的集合

基本函数的小于等于关系$\leq_B$，以此定义实数集的小于等于关系$\leq_{\mathbb{R}}$

定义12.2.1 等势：如果存在A到B的双射函数，则称A和B等势，记作$A \approx B$

定理12.2.1 $P(A) \approx A_2 (2=\{0,1\})$ （构造函数：$\forall B \in P(A)$，令$f(B) = \chi_B(x), \chi$是特征函数）

$P(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_2$

定理12.2.2 等势≈具有自反、传递和对称性

定理12.2.3 康托定理**（证明极其重要）**

1）$\neg \mathbb{N} \approx \mathbb{R}$　2）$\neg A \approx P(A)$

定义12.3.1 有限集合：存在$n \in \mathbb{N}$使得$n \approx A$；反之为无限集

- 定理12.3.1 不存在与自己的真子集等势的自然数。
- 推论12.3.1 不存在与自己的真子集等势的有限集合。
- 推论12.3.2 任何与自己的真子集等势的集合均为无限集合。N 和R都是无限集合。
- 推论12.3.3 任何有限集合只与唯一的自然数等势。

定义12.4.1 若存在集合K和L，card(K)=k，card(L)=l

1）$K \cap L = \varnothing$，则$k + l = card(K \cup L)$

2）$k \cdot l = card(K \times L)$

3）$k^l = card(L_K)$

定理12.5.1 对任意基数k、l、m

$1)k+l = l+k, k \cdot l = l \cdot k \quad 2)k+(l+m) = (k+l)+m, k \cdot (l \cdot m) = (k \cdot l) \cdot m$

$3)k \cdot (l+m) = k \cdot l + k \cdot m \quad 4)k^{l+m} = k^l \cdot k^m; (k \cdot l)^m = k^m \cdot l^m; (k^l)^m = k^{l \cdot m}$

定义12.6.1 如果存在K到L的单射函数，则称L优势于K，记作K≤L，基数有小于等于关系k≤l

定理12.6.1 对任意的基数k、l、m

1）$k \leq k$

2）若$k \leq l$且$l \leq m$，则$k \leq m$

3）若$k \leq l$且$l \leq k$，则$k = l$

4）$k \leq l$或$l \leq k$

定理12.6.2 对任意的基数k、l 和m，如果$k \leq l$,

(1)　$k + m \leq l + m$

(2)　$k \cdot m \leq l \cdot m$

(3)　$k^m \leq l^m$,

(4) 若$k \neq 0$ 或 $m \neq 0$则$m^k \leq m^l$

定理12.6.3 对基数k和l，如果k≤l且l是无限基数，则

$$k + l = k \cdot l = l = max(k, l)$$

推论 任意无限基数k都有k+k=k·k=k

定理12.6.4 (1)对任意的无限集合K，$\mathbb{N} \leq K$
(2)对任意的无限基数k，$\aleph_0 \leq k$

定义12.7.1 可数集合：若card(K)≤$\aleph_0$则K为可数集合

定理12.7.1 可数集合

(1) 可数集的任何子集是可数集。
(2) 两个可数集的并集和笛卡儿积是可数集。
(3) 若K是无限集合，则$P(K)$是不可数的。
(4) 可数个可数集的并集是可数集