《高等微积分 2》第七周作业

1 设 x, y, z 满足方程 $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 4$.

(1) 证明: 在点 $(1,1,1)$ 附近, z 可以表示成 x, y 的隐函数.

(2) 把上述隐函数记作 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)}, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1)}$.

(3) 求 $z(x, y)$ 在 $(1,1)$ 附近带皮亚诺余项的泰勒公式, 要求展开至二次项, 即要求余项形如 $o\big((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\big)$.

2 设 $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 的各个 2 阶偏导函数都存在且连续, $g(x_0, y_0) = 0, g_y(x_0, y_0) \neq 0$. 设方程 $g(x, y) = 0$ 在 (x_0, y_0) 附近确定 C^2 光滑的隐函数 $y = y(x)$. 定义函数 $h : U \to \mathbf{R}$ 如下:

$$h(x) = f(x, y(x)),$$

其中 U 是 x_0 的某个邻域, $y = y(x)$ 在 U 中有定义.

(1) 求导函数 $h'(x)$.

(2) 求 2 阶导函数 $h''(x)$.

3 设 $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是给定的 C^2 光滑函数. 定义映射 $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 为:

$$\phi(x, v) = (x, \frac{\partial L(x, v)}{\partial v}).$$

(1) 求 ϕ 的 *Jacobi* 矩阵 $J(\phi)_{(x,v)}$.

(2) 证明: 如果 $\frac{\partial^2 L(x,v)}{\partial v^2} \neq 0$, 则 ϕ 在 (x, v) 附近有 C^1 光滑的逆映射. 以下我们假定 ϕ 有整体的 C^1 光滑的逆 ϕ^{-1}, 并把它记作:

$$\phi^{-1}(q, p) = (x(q, p), v(q, p)),$$

显然 $x(q, p) = q$.

(3) 定义函数 $H(q,p)=p\cdot v(q,p)-L(x(q,p),v(q,p))$, 计算

$$\frac{\partial H}{\partial q},\quad \frac{\partial H}{\partial p}.$$

(4) 对于 C^1 光滑映射 $\gamma:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2,\gamma(t)=(x(t),v(t))$, 把复合映射 $\phi\circ\gamma:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ 记作:

$$\phi\circ\gamma(t)=(q(t),p(t)).$$

证明: $(x(t),v(t)$ 满足 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{cases} v(t)=\frac{dx(t)}{dt}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L(x(t),v(t))}{\partial v}=\frac{\partial L(x(t),v(t))}{\partial x}. \end{cases}$$

的充分必要条件是 $q(t),p(t)$ 满足 Hamilton 方程

$$\begin{cases} \frac{dq(t)}{dt}=\frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial p}, \\ \frac{dp(t)}{dt}=-\frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial q}. \end{cases}$$

4 设 U,V 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集. 已知 $f:U\to V$ 是 C^1 光滑的双射, 且其逆映射 $f^{-1}:V\to U$ 是连续的.

(1) 证明: 如果在 $\mathbf{x}_0\in U$ 处 f 的雅可比矩阵 $J_f(\mathbf{x}_0)$ 是可逆矩阵. 证明: f^{-1} 在 $f(\mathbf{x}_0)$ 处可微.

(2) 假设对任何 $\mathbf{x}\in U$, f 的雅可比矩阵 $J_f(\mathbf{x})$ 都是可逆矩阵. 证明: $f^{-1}:V\to U$ 是 C^1 光滑映射.