4.26 作业

1. 求下列矩阵的 Jordan 标准型:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. 计算可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准型:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix};A=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. 证明如果矩阵 A 与 B 满足 $AB-BA=B$，那么矩阵 B 是幂零的。

4. 一个矩阵 A 称为周期矩阵，如果存在自然数 s，使得 $A^s=\mathrm{I}$，这里 I 为单位阵。证明：任一周期复矩阵都相似于一个对角阵。

5. 设 V 是数域 F 上的有限维线性空间。给定一个线性变换 $A:V\to V$，A 称为是半单的，如果它的任一不变子空间有不变补空间。证明：
   - 半单变换限制到一个不变子空间也是半单变换；
   - 一个线性变换 A 是半单的当且仅当这个空间 V 是最小不变子空间的直和；
   - 一个线性变换 A 在全空间 V 是半单的，如果存在这个空间到 A 的不变子空间的直和分解，使得 A 在它们中的每一个子空间的限制都是半单的。