概率统计第一讲：
概率空间

史灵生　清华数学系

1、本讲提要

1. 随机试验的数学描述
   - 随机现象
   - 样本和样本空间
   - 事件（域）
2. 概率
   - 概率的确定方法
   - 概率的公理化定义
   - 概率的性质

2、随机何处？

广泛。例如：

1. 体育彩票数据需检验
   (a) 每个数字被选中的机会是等可能的
   (b) 每个数字被选中是相互独立的
2. 自动生产线的控制：抽样、检验、调试
3. 金融、债券与风险管理（金融工程师、精算师）
4. 保险
5. 企业管理等等。

3、上帝玩骰子？

我们时刻面临着不确定性（随机性）。

- 从扔硬币、掷骰子和玩扑克等简单的机会游戏，到复杂的社会现象；
- 从婴儿的诞生，到世间万物的繁衍生息；
- 从流星坠落，到大自然的千变万化……。

从Aristotle时代开始，哲学家们就已经认识到随机性在生活中的作用，他们把随机性看作为破坏生活规律、超越了人们理解能力范围的东西。他们没有认识到有可能去研究随机性，或者是去测量不定性。

4、样本和样本空间

我们的哲学：

对象：在给定条件下进行的一个**随机试验**。
试验结果不唯一，而且无法预知试验结果
原则：不关心过程，只关注结果。

术语：

样本（ω）：一次随机试验产生的一个结果；
样本空间（Ω）：一个随机试验的所有可能的结果的全体；
因此，

$$\Omega = \{\text{所有}\omega\}.$$

5、事件和事件运算

- **事件**（A）：某类结果，$A \subset \Omega$。
  - **事件A发生**：一次试验，结果$\omega \in A$。
  - **事件A未发生**：一次试验，结果$\omega \notin A$。
  - **基本事件**$\{\omega\}$，**必然事件**Ω，**不可能事件**$\emptyset$
- 事件关系：
  - $A \subset B$：只要A发生，B就会发生；
  - $A = B$：$A \subset B$且$B \subset A$；
  - $AB = \emptyset$：A和B不会同时发生，A和B**互不相容**；多个事件互不相容：他们两两互不相容。
- 事件的基本运算：
  - **并**：$A \cup B$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，一次试验多个事件中至少一个发生
  - **交**：$AB := A \cap B$，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$，一次试验多个事件同时发生
  - **对立**：$\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$是$A$的对立事件
  - **差**：$A - B := A\bar{B}$，事件A发生且事件B不发生

6、事件基本运算的性质

交换律：

$$AB = BA, \qquad A \cup B = B \cup A;$$

结合律：

$$A(BC) = (AB)C, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

分配律：

$$A(B_1 \cup B_2 \cup \cdots) = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots,$$
$$A \cup B_1 B_2 \cdots = (A \cup B_1)(A \cup B_2) \cdots;$$

对偶律：

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots,$$
$$\overline{A_1 A_2 \cdots} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots。$$

7、事件的极限运算

单调事件列的极限

定义

$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$时，极限 $\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1} A_n$；

$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$时，极限 $\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} A_n$。

请与实数列的极限比较。

8*、事件的极限运算

定义（事件列的上下极限）

一般的，$A_1, A_2, \ldots$的上、下极限

$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$，无穷多个$A_n$同时发生；

$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k$，除有限个$A_n$以外，其他的$A_n$同时发生。

定义（事件列的极限）

若上下极限相等，则称$A_1, A_2, \ldots$有极限，

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

请与实数列的极限、上下极限比较。

9、事件域

定义

事件域$\mathcal{F}$：[illegible]件的全体，由Ω的一些子集组成，满足：

- $\Omega \in \mathcal{F}$，$\emptyset \in \mathcal{F}$；
- $\mathcal{F}$对可列并[illegible]列交、对立运算封闭。

数学上称这样的$\mathcal{F}$是Ω上的一个σ域；$(\Omega, \mathcal{F})$为可测空间。

例

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$；
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$；
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega} = \{\Omega\text{的所有子集}\}$；
- Borel事件域：包含所有开集的最小事件域。其域中的每个事件对应一Borel集。

10、事件域

对随机试验的观察方式决定事件域的选取：

同时抛掷两枚同样的但被分别涂成红色、绿色的硬币。

- 样本空间为
  $\Omega=\{(\text{正，正}),(\text{正，反}),(\text{反，正}),(\text{反，反})\}$
- 对视力正常的观测者，事件域为$\mathcal{F}=2^{\Omega}=\{\Omega\text{的所有子集}\}$
- 对存在辨色障碍的观测者，事件域为

$$\left\{\begin{array}{c}\Omega,\varnothing,\underline{\{(\text{正，正})\}},\{(\text{正，反}),(\text{反，正})\},\underline{\{(\text{反，反})\}},\\ \{(\text{正，反}),(\text{反，正}),(\text{反，反})\},\underline{\{(\text{正，正}),(\text{反，反})\}},\\ \{(\text{正，正}),(\text{正，反}),(\text{反，正})\}\end{array}\right\}$$

11、概率的确定方法

1. 频率方法（大量重复试验下，频率的极限）：

$$\frac{n\text{次试验中}A\text{发生的次数}}{n\text{（试验次数）}} =: f_n(A) \to P(A), \qquad n \to \infty$$

   优点：容易计算；
   缺点：要求试验可以被无限制地重复；频率本身是随机的，上述极限不是数列极限

2. 主观方法（根据经验，主观判断）：

   优点：试验不必重复进行
   缺点：缺乏客观依据

3. 古典方法

4. 几何方法

12、等可能概率模型

古典概型：

- Ω由有限个样本组成，Ω的元素个数$|\Omega| < +\infty$
- 各样本等可能，$P(\{\omega\}) = C$，C是与ω无关的常数
- 则对任何$A \subset \Omega$，

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}。$$

几何概型：

- 样本空间Ω是一个几何对象，则事件A的概率：

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega};$$

- A的概率值只依赖于A的几何度量大小（长度、面积、体积、角度等）S_A，与A在Ω中的位置无关。

13、古典概型例：生日问题

例

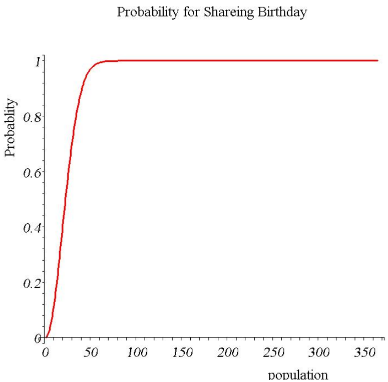
随机找$n(<365)$个人，求至少有两个人在同一天过生日的概率。

解：

- $\Omega=\{(d_1,d_2,\ldots,d_n):d_i\text{是第}i\text{个人的生日}\}$
- A：有人在同一天过生日。
- $\bar{A}$：n个人生日彼此不同。
- $|\Omega|=365^n$（不考虑闰年），等可能（假设）。
- $|\bar{A}|=365\times364\times\cdots\times(365-n+1)$。$|A|=|\Omega|-|\bar{A}|$，
- $$P(A)=\frac{365^n-365\times364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}$$
  $$=1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{n-1}{365}\right)。$$

14、生日问题（续）

n	2	10	22	23	70	200
$p_n(\%)$	0.27	11.69	47.57	50.73	99.92	$100 - 1.61 \times 10^{-28}$



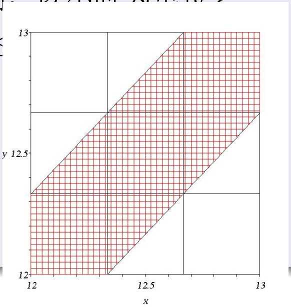
15、几何概型例1：会面问题

例

甲乙两人约定在中午12时到13时之间在某处会面，并约定先到者应等候20分钟，过时即可离去。求两人能会面的概率。

解：

- $\Omega = \{(x, y) : x, y$各为甲乙到达的时刻，以小时为单位$\}$
- 两人会面：$A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq$



$P(A) = S_A/S_\Omega = 1 - (2/3)^2 = 5/9$。

16、几何概型例2：Buffon投针问题

18世纪的法国学者Buffon[1]设计了一个随机试验用来确定圆周率π的近似值的办法。具体做法是：

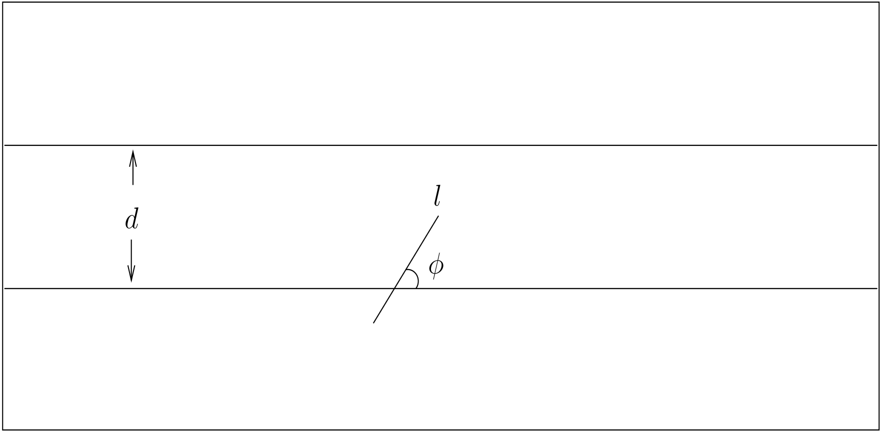
- 将一根针投掷在铺着木地板的地面上，假设所有的地板都是宽度一致的长条木板，则

$$\pi \approx \frac{2\ell}{d} \cdot \frac{N}{n},$$

- 其中N是投针次数，n是针压在相邻两排地板的接缝线上的次数，ℓ是针长，d是木地板宽度，$\ell < d$（这是为了保证针最多只压中一条接缝线）。
- 1901年意大利数学家Mario Lazzarini投掷了$N = 3408$次针，得到$n = 1808$次压线，而$\ell/d = 5/6$，这样得到$\pi \approx 3.1415$.

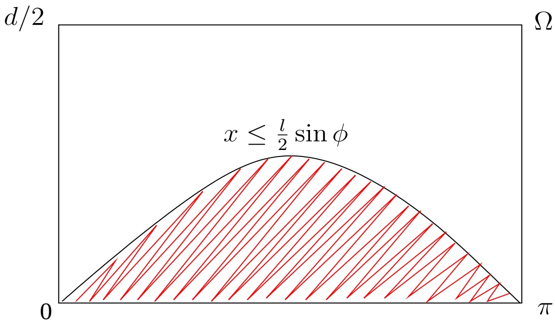
[1] Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707年9月7日-1788年4月16日)法国自然学家、数学家、生物学家、宇宙学家和作家。见http://en.wikipedia.org/wiki/Buffon

17、Buffon投针试验



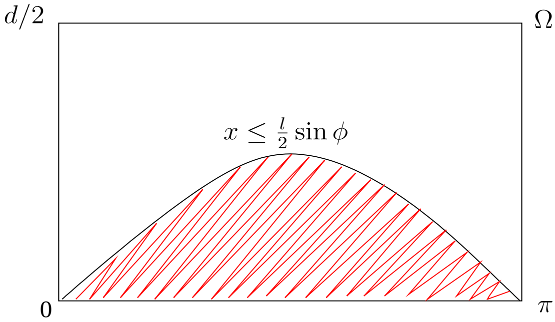
18、Buffon投针试验

- 为了描述Buffon试验的投针结果，我们用x表示针的中点到距离最近的接缝线的距离，用ϕ表示针与接缝线的夹角，则
$$\Omega = \{(\phi, x) \mid 0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le x \le \frac{d}{2}\},$$
- 针压线（记为事件A）当且仅当$x \le \frac{\ell}{2}\sin\phi$。如下图所示：



19、Buffon投针试验

- 我们假设(ϕ, x)落在矩形区域的样本空间$\Omega = [0, \pi] \times [0, \frac{d}{2}]$中是等可能的，即问题是几何概型。
- 则$P(A) = S_A/S_\Omega = \frac{2}{d\pi}\int_0^\pi \frac{\ell}{2}\sin\phi \mathrm{d}\phi = \frac{2\ell}{d\pi}$。
- 概率的近似值为针压线的频率$\frac{n}{N}$（此为Bernoulli大数定律，以后给出严格证明），就得到Buffon的公式$\pi \approx \frac{2\ell}{d} \cdot \frac{N}{n}$。



20、Kolmogorov的概率公理（1933）

概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- 样本空间Ω：一个集合
- 事件域$\mathcal{F}$：Ω上的一个σ域，
  $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$；
  对可列交、可列并、补运算封闭；
- 概率测度$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$
  非负性：$P(A) \geq 0$，$\forall A \in \mathcal{F}$；
  正则性：$P(\Omega) = 1$；
  可列可加性：$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$互不相容$\Rightarrow$
  $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$。

21、概率的性质

- $P(\emptyset)=0$；
  对$\Omega,\emptyset,\emptyset,\ldots$用可列可加性
- 有限可加性：$A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$互不相容$\Rightarrow$
  $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$；
  对$A_1,A_2,\ldots,A_n,\emptyset,\emptyset,\ldots$用可列可加性
- $P(\bar{A})=1-P(A)$；
- $P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$；
- 单调性：$A\supset B\Rightarrow P(A)=P(B)+P(A-B)\geq P(B)$；
- $0\leq P(A)\leq 1$；
- 容斥原理：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；
- $P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=p_1-p_2+p_3+\cdots+(-1)^{n-1}p_n$，
  其中$p_k=\sum\limits_{i_1<i_2<\cdots<i_k}P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})$；
- 半可加性：$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)\leq\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$。

22、概率的连续性

性质

$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$。 P 与lim可交换

证明：（下连续性）

- 设$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$，
- 令$A_0 = \emptyset$，$B_n = A_n\overline{A_{n-1}}$，$n \geq 1$；
- 则$A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$，$P(A_n) = P(B_1) + \cdots + P(B_n)$，
- $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$，
- $P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$。

注: 可列可加性$\Leftrightarrow$有限可加性+下连续性。