2016年秋季学期概率统计试题解答

填空题答案

1	$\frac{1}{3}$
2	$p_Y(y)=\begin{cases}\varphi\left(\frac{y}{2}\right), & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$ ， 或 $p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$
3	e^{-1} 或 $\frac{1}{e}$
4	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{38}{7}$
6	$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1\\ \frac{z+1}{3}, & -1\leq z<0\\ \frac{1}{3}, & 0\leq z<1\\ \frac{2z-1}{3}, & 1\leq z<2\\ 1, & z\geq 2\end{cases}$
7	$\dfrac{\frac{(x+1)(x+2y)}{1+4x}}{\int_0^1\frac{(x+1)(x+2y)}{1+4x}dx},\quad 0<x,y<1$
8	$\begin{pmatrix}1 & 1+\frac{1}{p}\\ p & 1-p\end{pmatrix}$
9	$\frac{7}{12}$
10	$\left[20-\frac{t_{0.95}(15)}{4},20+\frac{t_{0.95}(15)}{4}\right]$

二．解：（1） 设掌握为事件A，答对为事件B

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.8\times\frac{7}{8}+0.2\times0.25=0.75$$

（2） $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{70}{75}=\dfrac{14}{15}$

（3）设答对的题目数为随机变量 X，则分数为 $Y=5X$

$X\sim b(20,0.75)$， $E(X)=15$， $Var(X)=np(1-p)=\dfrac{15}{4}$

$E(Y)=75$， $Var(X)=\dfrac{25\times15}{4}$， 由中心极限定理， $Y\sim N\left(75,\dfrac{375}{4}\right)$

$$P(Y<60)\approx P\left(\frac{Y-75}{5\sqrt{15}/2}<\frac{60-75}{5\sqrt{15}/2}\right)=\Phi\left(-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)=1-\Phi\left(\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$$

利用切比雪夫不等式

$$P(Y<60)=P(Y-E(Y)<-15)\approx\frac{1}{2}P(|Y-E(Y)|>15)\le\frac{1}{2}\frac{375/4}{225}=\frac{5}{24}$$

三． 解： $(X,Y)\sim N\left(1,0,3^2,4^2,-\dfrac{1}{2}\right)$

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

（1） $X\sim N(1,9),Y\sim N(0,16)$

$$E\left(Z\right)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{E\left(X\right)}{3}+\frac{E\left(Y\right)}{2}=\frac{1}{3}$$

$$Var\left(Z\right)=Var\left(\frac{X}{3}\right)+Var\left(\frac{Y}{2}\right)+2Cov\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)=1+4+\frac{1}{3}\rho\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y=5-\frac{1}{6}\cdot 12=3$$

（2）$Cov\left(X,Z\right)=E\left(\frac{X^2}{3}+\frac{XY}{2}\right)-E\left(X\right)E\left(Z\right)=\frac{Var\left(X\right)+E\left(X\right)^2}{3}+\frac{E\left(XY\right)}{2}-\frac{1}{3}$

$$=\frac{Var\left(X\right)+E\left(X\right)^2}{3}+\frac{Cov\left(X,Y\right)}{2}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{9+1}{3}+\frac{-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4}{2}-\frac{1}{3}=3-3=0$$

因为 X,Z 为二元正态随机变量，且不相关，所以 X,Z 相互独立。

（3）因为$Y=2Z-\frac{2}{3}X$，且X、Z 相互独立，所以

$$E\left(Y^2\middle|X=1\right)=E\left(\left(2Z-\frac{2X}{3}\right)^2\middle|X=1\right)=E\left(4Z^2-\frac{8X}{3}Z+\frac{4X^2}{9}\middle|X=1\right)$$

$$=E\left(4Z^2\right)-E\left(\frac{8}{3}Z\right)+\frac{4}{9}=4\left(Var\left(Z\right)+E\left(Z\right)^2\right)-\frac{8}{3}E\left(Z\right)+\frac{4}{9}=12$$

四.（1） 证明：

$$E\left(g\left(X\right)\left(X-\mu\right)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(x\right)\left(x-\mu\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(x\right)de^{-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}g'\left(x\right)dx$$

$$=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}g'(x)dx=\sigma^2E\left(g'(X)\right)$$

（2） 因为 S^2 是总体方差的无偏估计，$E\left(S^2\right)=\sigma^2$

又因为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

$$Var\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}Var\left(S^2\right)=Var\left(\chi^2(n-1)\right)$$

假设 $Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的标准正态分布

$$Var(Y)=Var\left(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\right)=nVar\left(X_1^2\right)=n\left[E\left(X_1^4\right)-E\left(X_1^2\right)^2\right]$$

由递推式 $E\left(g(X)(X-\mu)\right)=\sigma^2E\left(g'(X)\right)$，取 $\mu=0$，$\sigma^2=1$，$g(x)=x^3$，

得 $E\left(X^4\right)=E\left(X^3\cdot X\right)=E\left(3X^2\right)=3$， 从而 $Var(Y)=2n$

$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}Var\left(S^2\right)=2(n-1)$，所以 $Var\left(S^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$。

如果直接用 $Y\sim\chi^2(n)$，$Var(Y)=2n$，没有第一问证明，最多给 5 分。

五．解：（1） $X\sim b(n,p)$， 有 $E(X)=np$， $Var(X)=np(1-p)$

对样本均值和样本方差有 $E\left(\bar{X}\right)=np$， $E\left(S^2\right)=np(1-p)$

因为 $E\left(\bar{X}-S^2\right)=np^2$， 所以 $\frac{\bar{X}-S^2}{n}$ 是参数 p^2 的无偏估计量。

解法二： $E(X)=np$， $E\left(X^2\right)=np-np^2+n^2p^2=np+n(n-1)p^2$

$E\left(X^2-X\right)=n\left(n-1\right)p^2$， 设 $A_2=\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}{n}$ 为二阶样本原点矩

可得参数 p^2 的无偏估计量 $\dfrac{A_2-\overline{X}}{n\left(n-1\right)}$。

（2）似然函数 $p\left(x_1,x_2,\cdots,x_m;p\right)=\prod_{k=1}^{m}\binom{m}{x_k}p^{x_k}\left(1-p\right)^{n-x_k}$

对数似然函数 $\ln p\left(x_1,x_2,\cdots,x_m;p\right)=\sum_{k=1}^{m}\left\{\ln\binom{n}{x_k}+x_k\ln p+\left(n-x_k\right)\ln\left(1-p\right)\right\}$

$$\frac{d\ln p\left(x_1,x_2,\cdots,x_m;p\right)}{dp}=\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{x_k}{p}-\frac{\left(n-x_k\right)}{1-p}\right\}=\sum_{k=1}^{m}\frac{x_k}{p}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(n-x_k\right)}{1-p}=0$$

$\dfrac{m\overline{x}}{p}=\dfrac{mn-m\overline{x}}{1-p}$ 解得 $p=\dfrac{\overline{x}}{n}$， 所以参数 p 的极大似然估计量 $\hat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}$。

（3） $E\left(X\right)=np,\qquad Var\left(X\right)=np\left(1-p\right)$

$\begin{cases}\overline{X}=np\\ S^2=np\left(1-p\right)\end{cases}\Rightarrow\ \hat{p}=1-\dfrac{S^2}{\overline{X}},\ \ \hat{n}=\dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X}-S^2}$， 其中 $\begin{cases}\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_m}{m}\\ S^2=\dfrac{\sum_{k=1}^{m}X_k}{m-1}\end{cases}$

一般情况下 $\hat{p}=1-\dfrac{S^2}{\overline{X}}$ 不是参数 p 的无偏估计

$E\left(\hat{p}\cdot\overline{X}\right)=E\left(\overline{X}-S^2\right)=np^2$，所以只有当 $E\left(\hat{p}\cdot\overline{X}\right)=E\left(\hat{p}\right)\cdot E\left(\overline{X}\right)$时，$E\left(\hat{p}\right)=p$，

也就是只有当 $\dfrac{S^2}{\overline{X}}$ 与 $\overline{X}$ 不相关时，$\hat{p}=1-\dfrac{S^2}{\overline{X}}$ 是参数 p 的无偏估计。

六． 解：（1） $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{9}{n}\right)$， 当 $\mu=10$，$n=36$ 时， $\overline{X}\sim N\left(10,\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$

$2\left(\overline{X}-10\right)\sim N\left(0,1\right)$，$P\left(2\left(\overline{X}-10\right)>u_{0.95}\right)=0.05$，

拒绝域为 $\left\{\overline{X}\,\middle|\,\overline{X}>10+\dfrac{u_{0.95}}{2}\right\}$， $u_{0.95}=1.645$， 所以拒绝域为 $\left\{\overline{X}\,\middle|\,\overline{X}>10.82\right\}$。

$\mu=11$时为备择假设成立，所以所犯错误未第二类错误， 此时 $\bar{X}\sim N\left(11,\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

第二类错误的概率

$$P=P\left(\bar{X}\le 10.82\middle|\mu=11\right)=P\left(2\left(\bar{X}-11\right)\le 2\left(10.82-11\right)\right)=\Phi\left(-0.36\right)$$

（2）样本容量为n时，原假设成立，即$\mu=10$时，0.05 显著性水平的拒绝域为

满足$\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-10\right)}{3}>u_{0.95}$，即$\left\{\bar{X}\middle|\bar{X}>10+\frac{3u_{0.95}}{\sqrt{n}}\right\}$

$\mu=11$时， $\bar{X}\sim N\left(11,\frac{9}{n}\right)$， $\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-11\right)}{3}\sim N\left(0,1\right)$

第二类错误的概率

$$P=P\left(\bar{X}\le 10+\frac{3u_{0.95}}{\sqrt{n}}\middle|\mu=11\right)=P\left(\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-11\right)}{3}\le\frac{\sqrt{n}\left(10+\frac{3u_{0.95}}{\sqrt{n}}-11\right)}{3}\right)=0.01$$

$$\frac{\sqrt{n}\left(10+\frac{3u_{0.95}}{\sqrt{n}}-11\right)}{3}=u_{0.95}-\frac{\sqrt{n}}{3}<u_{0.01}，\quad \sqrt{n}>3\left(u_{0.95}-u_{0.01}\right)=12.2，\quad n>144。$$

七．解： 设Y_k是$\{1,2,\cdots,k\}$随机排列的逆序数，则$\left(X_1,X_2,\cdots,X_{k+1}\right)$的前$k$个数逆序数随机变量仍然$Y_k$（对任意不同的$k$个数都是同样的情况），考虑$X_{k+1}$取值为$1,2,\cdots,k,k+1$的情况，利用全期望公式

$$E\left(Y_{k+1}\right)=E\left(Y_k\right)+\sum_{i=1}^{k+1}E\left(X_1,\cdots,X_k\text{中大于}i\text{的个数}\middle|X_{k+1}=i\right)P\left(X_k=i\right)$$

$$=E\left(Y_k\right)+\sum_{i=1}^{k+1}\left(k+1-i\right)\frac{1}{k+1}=E\left(Y_k\right)+\frac{k}{2}。\quad E\left(Y_2\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow E\left(Y_n\right)=\frac{n\left(n-1\right)}{4}。$$