离散数学 第十二周作业

28、A上给出最多等价类的是恒等关系 I_A，最少等价类是全关系 E_A

29. 证明：先证T自反： $\forall x\in A$ R自反 $\Rightarrow xRx \Rightarrow xRx\wedge xRx \Rightarrow xTx$

故T自反

再证T对称 $\forall x,y\in A$ $xTy \Leftrightarrow xRy\wedge yRx \Leftrightarrow yRx\wedge xRy \Leftrightarrow yTx$

故T对称

再证T传递 $\forall x,y,z\in A$ $xTy\wedge yTz \Leftrightarrow xRy\wedge yRx\wedge yRz\wedge zRy$

$\Leftrightarrow (xRy\wedge yRz)\wedge(zRy\wedge yRx)$

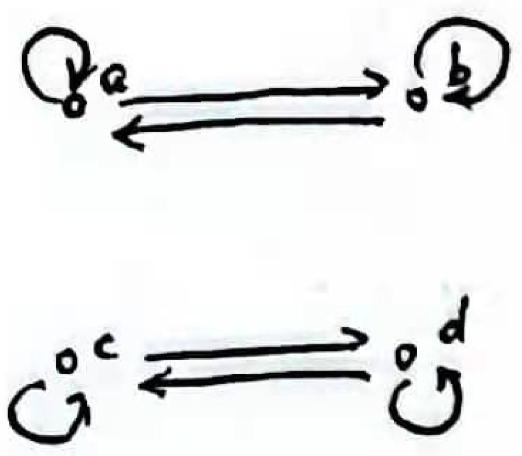
$\Leftrightarrow xRz\wedge zRx$

$\Leftrightarrow xTz$

故T传递

A非空，故T是等价关系

30、



$[a]_R=\{a,b\}$

$[b]_R=\{a,b\}$

$[c]_R=\{c,d\}$

$[d]_R=\{c,d\}$

31. (1) 是，① $S_1\subseteq \mathbb{Z}_+$ $S_2\subseteq \mathbb{Z}_+$

② $\phi\notin\pi$

③ $\cup\pi=S_1\cup S_2=S_1\cup(\mathbb{Z}_+-S_1)=\mathbb{Z}_+$

④ $S_1\cap S_2=\phi$

故π是$\mathbb{Z}_+$划分

(2) 是 ① $\forall y$ $y\in\pi \Rightarrow (\exists x)(x\in\mathbb{Z}_+\wedge\{x\}=y)\Rightarrow(\exists x)(\{x\}\subseteq\mathbb{Z}_+\wedge\{x\}=y)$

$\Rightarrow y\subseteq\mathbb{Z}_+$

② $\phi\notin\pi$

③ $\cup\pi=\{x\mid x\in\mathbb{Z}_+\}=\mathbb{Z}_+$

④ $\forall x,y$ $x\in\pi\wedge y\in\pi\wedge x\neq y \Rightarrow (\exists a)(a\in\mathbb{Z}_+\wedge\{a\}=x)\wedge(\exists b)(b\in\mathbb{Z}_+\wedge\{b\}=y)\wedge x\neq y$

$\Rightarrow (\exists a)(\exists b)(a\in\mathbb{Z}_+\wedge b\in\mathbb{Z}_+\wedge\{a\}=x\wedge\{b\}=y\wedge x\neq y)$

$\Rightarrow (\exists a)(\exists b)(a\in\mathbb{Z}_+\wedge b\in\mathbb{Z}_+\wedge\{a\}=x\wedge\{b\}=y\wedge\{a\}\cap\{b\}=\phi)$

$\Rightarrow x\cap y=\phi$

故π是$\mathbb{Z}_+$划分

32、不构成

反例 $A=\{1,2\}$ $P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$P(A)-\{\phi\}=\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

令 $x=\{1\}$，$y=\{1,2\}$ 有 $x\in P(A)-\{\phi\}$，$y\in P(A)-\{\phi\}$ 但 $x\cap y=\{1\}\neq\phi$

所以$P(A)-\{\phi\}$不为划分

33、数目是 $S(4,4)+S(4,3)+S(4,2)+S(4,1)$ （S为第二类斯特林数）

$=1+C_4^2+(2^3-1)+1=6+8+1=15$

34、证明：自反性 $a\in A\Rightarrow aRa\Rightarrow aRa\wedge aRa\Rightarrow\langle a,a\rangle\in S\Rightarrow aSa$

对称性 $aSb\Leftrightarrow(\exists c)(aRc\wedge cRb)\Leftrightarrow(\exists c)(cRa\wedge bRc)\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in S\Leftrightarrow bSa$

传递性 $aSb\wedge bSc\Leftrightarrow(\exists x)(aRx\wedge xRb)\wedge(\exists y)(bRy\wedge yRc)$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(aRx\wedge xRb\wedge bRy\wedge yRc)$

$\Leftrightarrow(\exists y)(aRb\wedge bRy\wedge yRc)\Leftrightarrow(\exists y)(aRy\wedge yRc)\Rightarrow aSc$

A非空，故S是等价关系

35、证明: 自反性: $x,y\in \mathbb{Z}_+$, $xy=yx \Rightarrow \langle\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle\rangle \in R \Rightarrow \langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$

传递性 $\forall \langle a,b\rangle, \langle x,y\rangle, \langle u,v\rangle \in A$

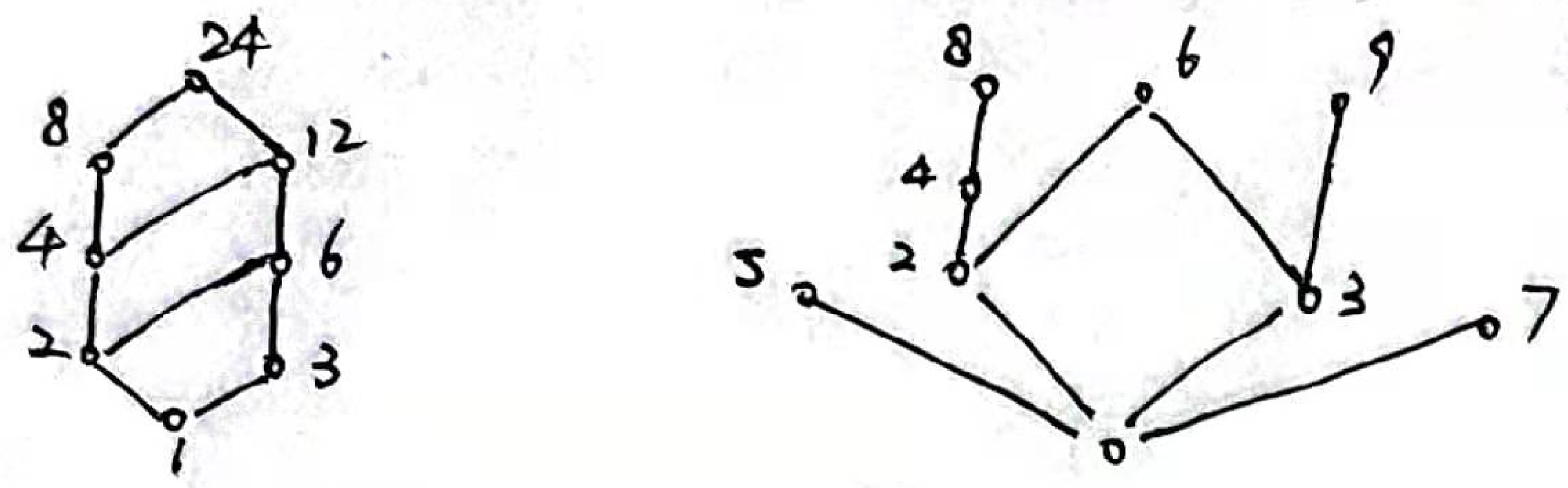
$$\begin{aligned}&\langle a,b\rangle R\langle x,y\rangle \wedge \langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle\\ \Leftrightarrow\ & ay=bx \wedge xv=yu\\ \Rightarrow\ & axyv=bxyu\\ \Rightarrow\ & av=bu\\ \Leftrightarrow\ & \langle a,b\rangle R\langle u,v\rangle\end{aligned}$$

对称性 $\forall \langle x,y\rangle, \langle u,v\rangle \in A$

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle &\Leftrightarrow xv=yu\\ &\Leftrightarrow uy=vx\\ &\Leftrightarrow \langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

A非空. 故R是等价关系

37、



40. (a) $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

$\mathrm{cov}A=\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle a,g\rangle,\langle a,f\rangle,\langle c,g\rangle,\langle c,f\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$

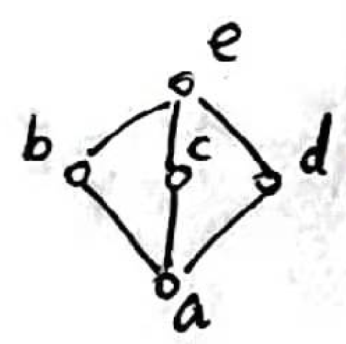
$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle,\langle g,g\rangle,$
$\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle a,g\rangle,\langle a,f\rangle,\langle c,g\rangle,\langle c,f\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$

(b) $A=\{a,b,c,d,e,f\}$

$\mathrm{cov}A=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle\}$

$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle,$
$\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle\}$

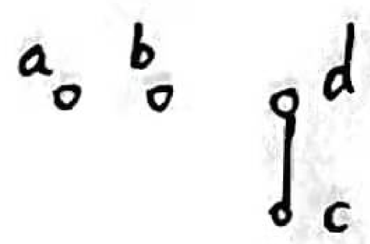
41. (1)



最大元: e　最小元: a

极大元: e　极小元: a

(2)



最大元: 无　最小元: 无

极大元: a, b, d　极小元: a, b, c

42. 下界: 1, 下确界: 1

上界: 考虑到 $\mathrm{lcm}\{1,2,\dots,10\}=2520$.

故上界为 $2520k$ $(k\in \mathbb{Z}_+)$.

上确界: 2520.

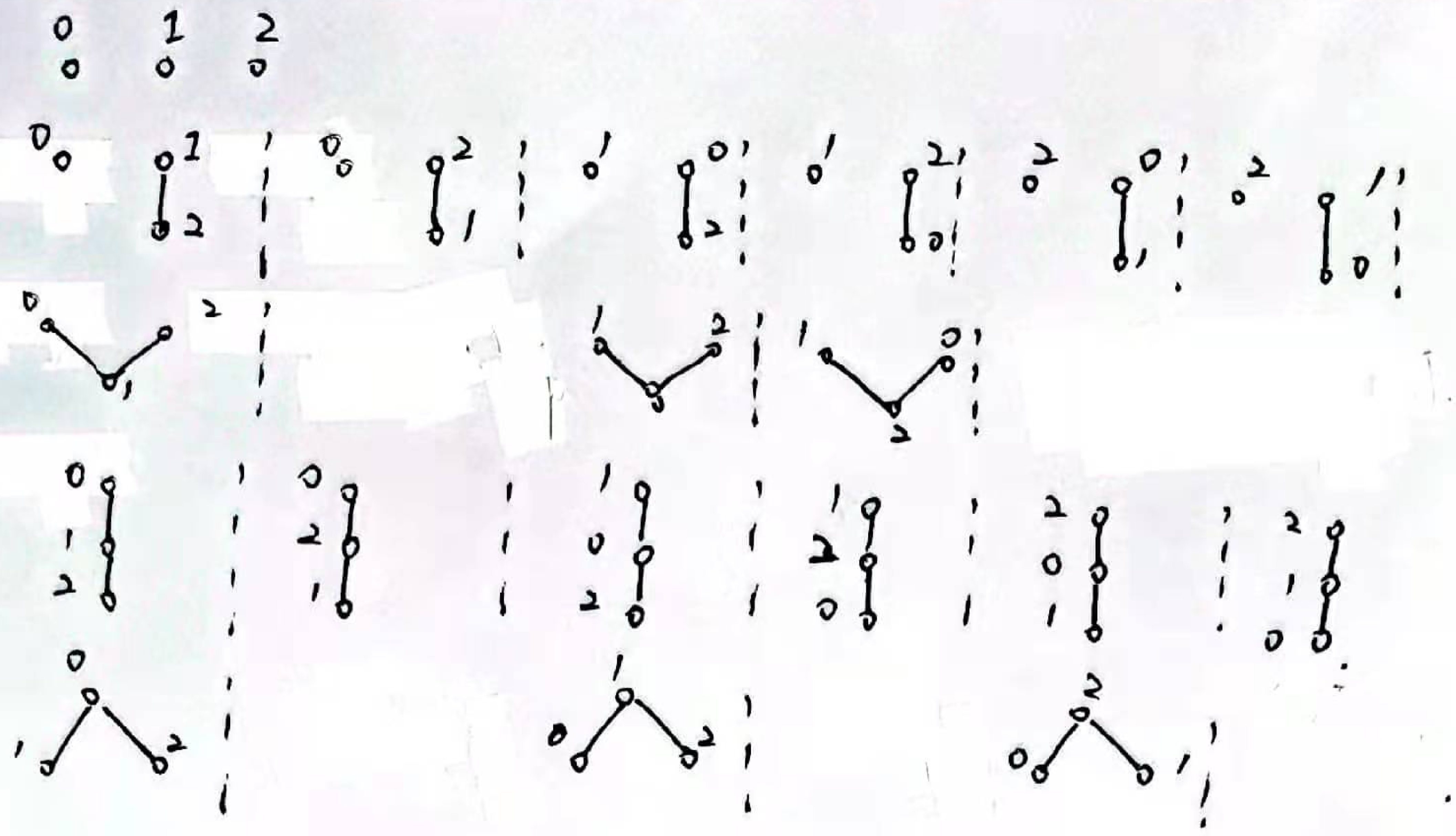
43、证明: 自反性 $\forall x$ $\quad x\in B \Rightarrow x\in A \wedge \langle x,x\rangle \in (B\times B)$
$\Rightarrow \langle x,x\rangle\in R \wedge \langle x,x\rangle \in (B\times B)$
$\Rightarrow \langle x,x\rangle \in R\cap(B\times B)$

反对称. $\forall x\neq y$ $\quad \langle x,y\rangle\in R\cap(B\times B) \Rightarrow \langle x,y\rangle\in R$
$\Rightarrow \langle y,x\rangle\notin R$
$\Rightarrow \langle y,x\rangle\notin R\cap(B\times B)$

传递性 $\forall x,y,z$ $\quad \langle x,y\rangle\in R\cap(B\times B)\wedge\langle y,z\rangle\in R\cap(B\times B)$
$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in(B\times B)\wedge\langle y,z\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in(B\times B)$
$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R \wedge x\in B\wedge y\in B\wedge z\in B$
$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R\wedge\langle x,z\rangle\in(B\times B)$
$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R\cap(B\times B)$

故 $R\cap(B\times B)$ 是B上偏序关系.

45.



共 1+6+3+6+3=19种