离散数学(1)
Discrete Mathematics

第九章 集合

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

主观题 10分

Setting

上节课有什么疑问吗？欢迎投稿。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

第九章 集合

内容回顾

- 集合：
  - 把满足一定性质的事物概括成一个整体就做成了一个**集合**(set)，组成集合的事物成为集合的**元素**(element)，若某一事物是一个集合的元素，则称这个事物**属于**这个集合，否则就称这个事物**不属于**这个集合。
  - 集合的元素可以是任何事物
  - 各个元素可以区分，不重复(互异性)
  - 各个元素之间无次序(无序性)
  - 任何事物是否属于一个集合，结论是确定的。
  - B={5，8，8，9}？？

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\bar{\vee}\, x \in B\}$$

元素x $\in$ 集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\mathrm{A} = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$E = x \mid x = x$$

对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cup\emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\cap\emptyset$无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

单选题 1分

设置

$<x, x> = ?$

A $\{\{x\}\}$

B $\{\{x\},\{x,x\}\}$

C $\{\{x\},\{x\}\}$

D 都不是

提交

9. 5 集合运算的性质和证明

定理9.5.1 集合恒等式

- 对任意的集合 A, B, C，下列恒等式成立：

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) 幂等律 $A \cap A = A$ $A \cup A = A$

定理9.5.1 集合恒等式(续)

(5) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

(6) 狄摩根律 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$-(B \cup C) = -B \cap -C$

$-(B \cap C) = -B \cup -C$

(7) 同一律 $A \cup \emptyset = A$

$A \cap E = A$

定理9.5.1 集合恒等式(续)

(8) 零律 $A \cup E = E$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

(9) 补余律 $A \cup -A = E$ (排中律)

$A \cap -A = \emptyset$ (矛盾律)

(10) 补律 $-\emptyset = E$

$-E = \emptyset$

(11) 双补律 $-(-A) = A$

De Morgan定律的推广

- 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是U的子集，则：

$$(1)\ -(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = -A_1 \cap -A_2 \cap \cdots \cap -A_n$$

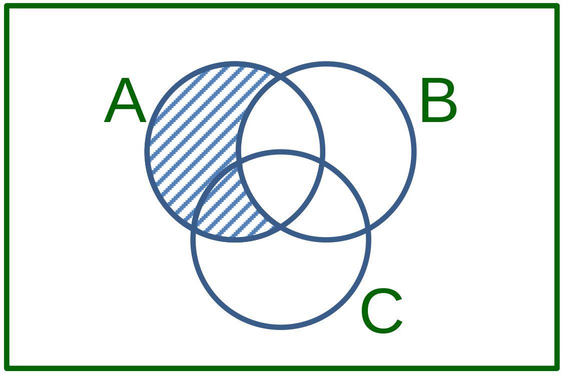
$$(2)\ -(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = -A_1 \cup -A_2 \cup \cdots \cup -A_n$$

- 证明：对(1)式，采用数学归纳法
- 若$-(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = -A_1 \cap -A_2 \cap \cdots \cap -A_n$正确，则：

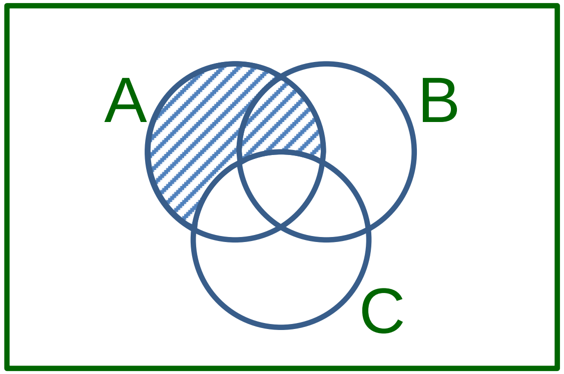
$$\begin{aligned}
&-(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}) \\
&= -\left((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}\right) \\
&= -(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap -A_{n+1} \\
&= -A_1 \cap -A_2 \cap \cdots \cap -A_n \cap -A_{n+1}
\end{aligned}$$

即定理对于$n+1$也是正确的，（2）式同理。

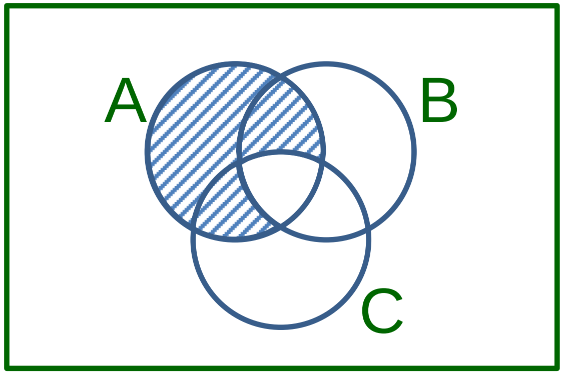
举例：$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$



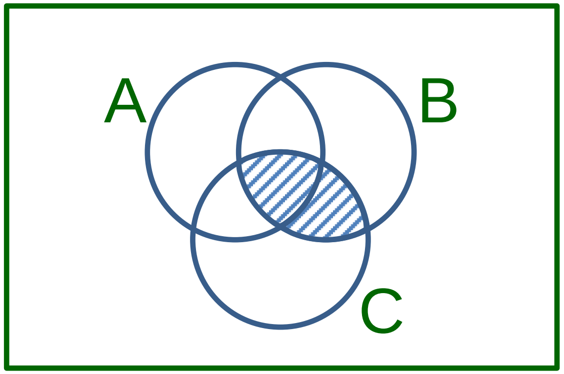
$A-B$



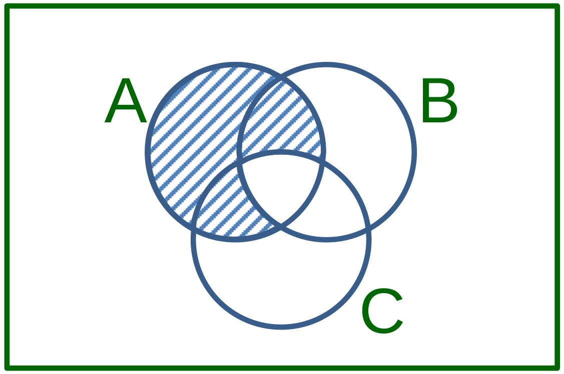
$A-C$



$(A-B)\cup(A-C)$



$B\cap C$



$A-(B\cap C)$

定理9.5.2 差集的性质

- 对任意的集合 A, B, C

$$(1)\ A - B = A - (A \cap B)$$

$$(2)\ A - B = A \cap -B$$

$$(3)\ A \cup (B - A) = A \cup B$$

$$(4)\ A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

- 上面公式(2)和(3)推导时经常使用

证(1) $A-B = A-(A\cap B)$

证 $A-(A\cap B)$　　　由摩根律$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$= (A-A)\cup(A-B)$

$= \emptyset \cup(A-B)$

$= A-B$

证 (2) $A-B = A\cap -B$

证　$x \in (A-B)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in -B$

$\Leftrightarrow x\in (A\cap -B)$

证(3) $A \cup (B-A) = (A \cup B)$

证 $A \cup (B-A)$

$= A \cup (B \cap -A)$

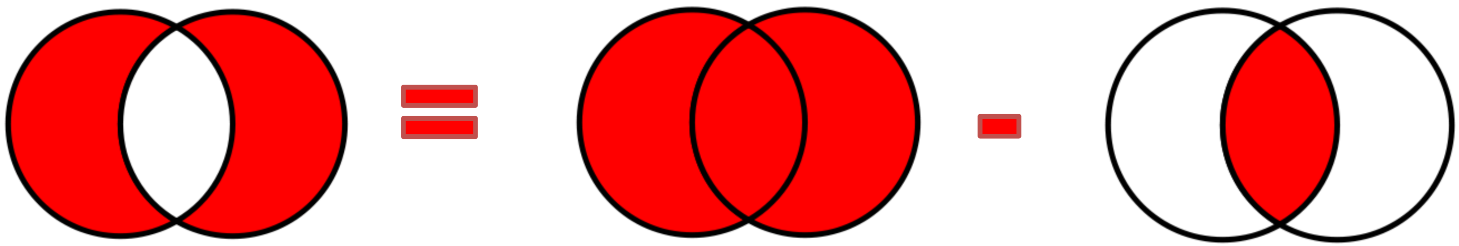
$= (A \cup B) \cap (A \cup -A)$

$= (A \cup B) \cap E$

$= A \cup B$

后面会用到该结果。

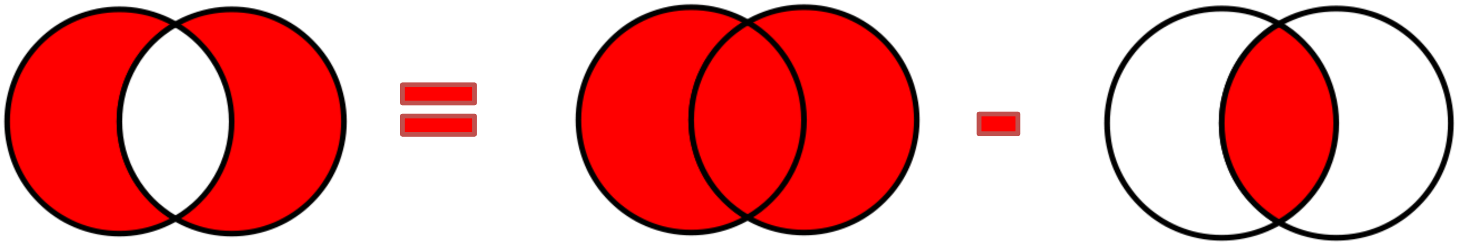
对称差



$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$$

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (B - A) &= (A \cap -B) \cup (B \cap -A) \\ &= ((A \cap -B) \cup B) \cap ((A \cap -B) \cup -A) \\ &= (A \cup \mathrm{B}) \cap (-B \cup -A) \\ &= (A \cup \mathrm{B}) - (A \cap B)\end{aligned}$$

对称差



$A \oplus B = =(A\ \ \cup \mathrm{B}) - (A \cap B)$

- 对任意的集合 A, B, C

(1) 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$

(2) 结合律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

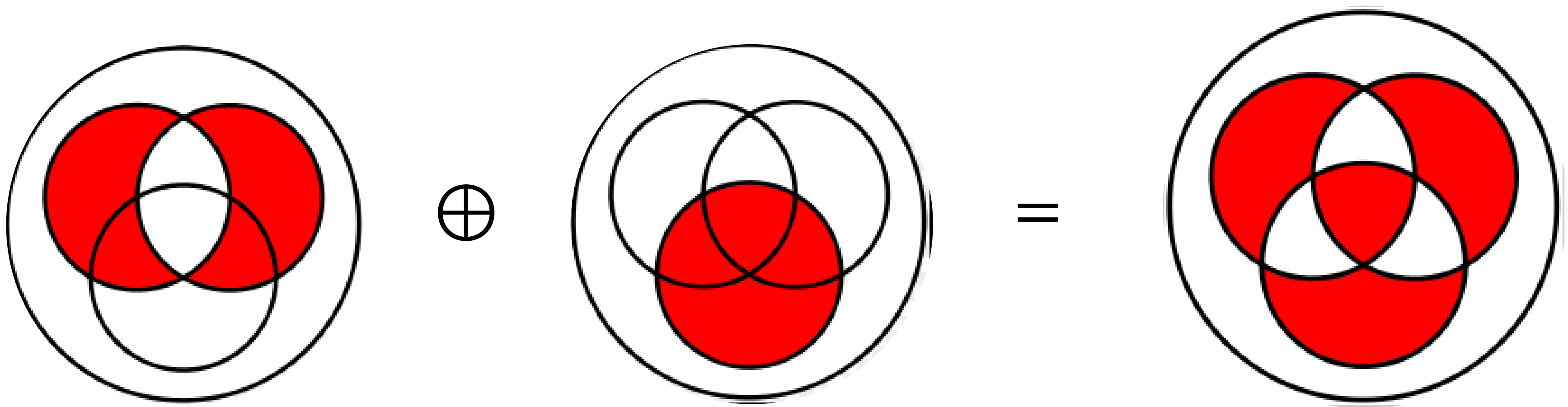
(3) 分配律 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

(4) 同一律 $A \oplus \emptyset = A$

(5) 零律 $A \oplus A = \emptyset$

(6) 吸收律 $A \oplus (A \oplus B) = B$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$



$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

证明:

$$\boxed{A \oplus B = =(A \cup \mathrm{B}) - (A \cap B)}$$

$$
\begin{aligned}
& A \cap (B \oplus C) \\
&= A \cap \big((B - C) \cup (C - B)\big) \\
&= A \cap \big((B \cap -C) \cup (C \cap -B)\big) \\
&= (A \cap B \cap -C) \cup (A \cap C \cap -B) \\
&= (A \cap B \cap -C) \cup \underbrace{(A \cap B \cap -A)}_{\emptyset} \\
&\quad \cup (A \cap C \cap -B) \cup \underbrace{(A \cap C \cap -A)}_{\emptyset} \\
&= \big((A \cap B) \cap (-C \cup -A)\big) \cup \big((A \cap C) \cap (-B \cup -A)\big) \\
&= \big((A \cap B) \cap -(A \cap C)\big) \cup \big((A \cap C) \cap -(A \cap B)\big) \\
&= (A \cap B) \oplus (A \cap C)
\end{aligned}
$$

定理9.5.4 集合间的$\subseteq$关系的性质

对任意的集合 A, B, C 和 D

(1) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$

(2) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

类比$\leq$

(3) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

(4) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

(5) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A - D) \subseteq (B - C)$

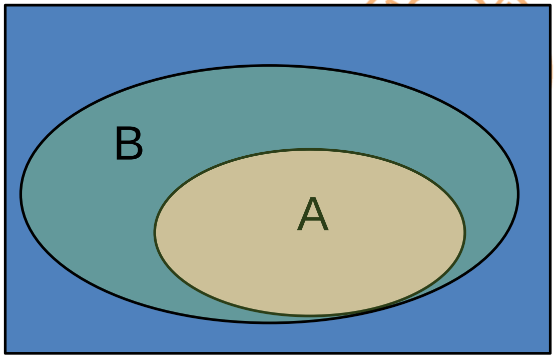
(6) $C \subseteq D \Rightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$

求证 $A \cup B = B$ (1)

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ (2)

$\Leftrightarrow A \cap B = A$ (3)

$\Leftrightarrow A - B = \Phi$ (4)



证 四个命题相互等价?

$(1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3)$， $(3) \Rightarrow (4), (4) \Rightarrow (1)$

$(1) \Rightarrow (2)$, 已知$A \cup B = B$, 证$A \subseteq B$

对于任意的x, $x \in A \Rightarrow (x \in A \cup B) \Leftrightarrow x \in B$

因此$A \subseteq B$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

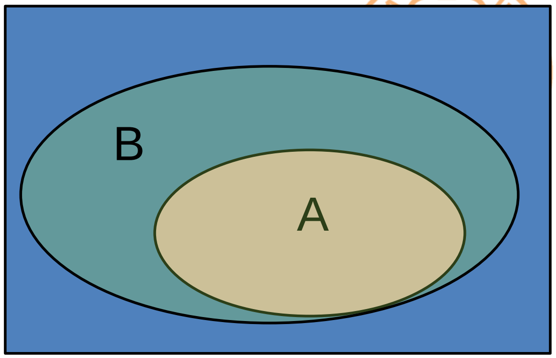
单向证明

求证 $A \cup B = B \quad (1)$

$\Leftrightarrow A \subseteq B \quad (2)$

$\Leftrightarrow A \cap B = A \quad (3)$

$\Leftrightarrow A - B = \Phi \quad (4)$



证 (2) $\Rightarrow$ (3) 已知$A \subseteq B$，证$A \cap B = A$

$\rightarrow$

对于任意的x, $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$\leftarrow$

$x \in A$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$

因此$A \cap B = A$

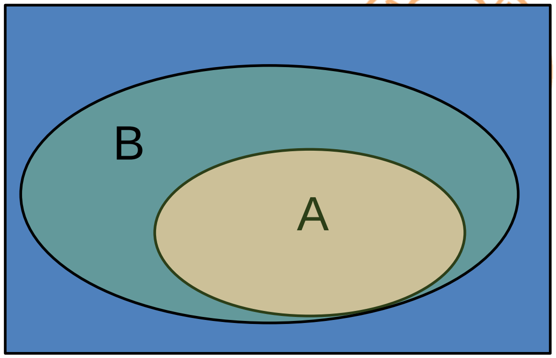
双向证明

求证 $A \cup B = B$ (1)

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ (2)

$\Leftrightarrow A \cap B = A$ (3)

$\Leftrightarrow A - B = \Phi$ (4)



证 (3) $\Rightarrow$ (4) 已知$A \cap B = A$， 证$A - B = \Phi$

$A - B = A \cap -B$

$= A \cap B \cap -B$

$= \Phi$

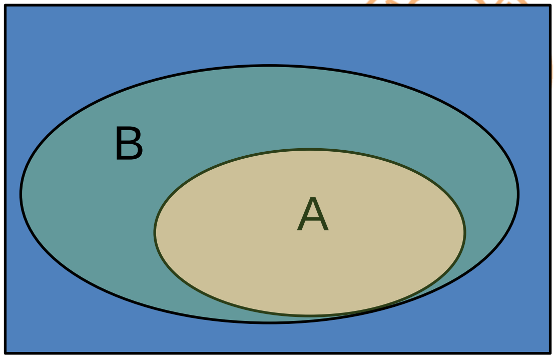
因此$A - B = \Phi$

求证 $A \cup B = B$ (1)

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ (2)

$\Leftrightarrow A \cap B = A$ (3)

$\Leftrightarrow A - B = \Phi$ (4)



证 (4) $\Rightarrow$ (1)，已知 $A - B = \Phi$，求证 $A \cup B = B$

$A \cup B$

$= B \cup A$

$= B \cup (A - B)$

$= B \cup \Phi$

$= B$

因此 $A \cup B = B$

由差集的性质(3) $A \cup (B - A) = A \cup B$

$B \cup (A - B) = B \cup A$

- 例2 对任意的集合A, B和C, 有

$$A\cup B = A\cup C,\ A\cap B = A\cap C \Rightarrow B=C$$

证明 方法1:集合恒等式

$B = B\cap (A\cup B)$	吸收律
$= B\cap (A\cup C)$	已知前提
$= (B\cap A) \cup (B\cap C)$	分配律
$= (A\cap C) \cup (B\cap C)$	已知前提
$= (A\cup B) \cap C$	分配律
$= (A\cup C) \cap C$	已知前提
$= C$	吸收律

$A\cup B = A\cup C,\ A\cap B = A\cap C \Rightarrow B=C$

证明 方法2，谓词逻辑

由定义并利用反证法

假设$B\neq C$，不妨设存在x，使$(x\in B \wedge x\notin C)$

若$x\in A \Rightarrow (x\in A\cap B) \wedge (x\notin A\cap C)$

若$x\notin A \Rightarrow (x\in A\cup B) \wedge (x\notin A\cup C)$

均与已知条件$A\cup B = A\cup C, A\cap B = A\cap C$矛盾

因此只有 $B=C$。

问题：

仅由$A \cup B = A \cup C$ 是否可推出 $B = C$？

或仅由$A \cap B = A \cap C$是否可推出 $B = C$？

答案显然是否定的。

- 例 $A \cup A = A \cup \Phi \Rightarrow A = \Phi$

  $A \cap -A = A \cap \Phi \Rightarrow -A = \Phi$

可见必须同时满足两个条件

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

幂集合的性质

- 定理9.5.5 幂集合的性质1

  对任意的集合 A和B

$$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

$$A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$$

- 定理9.5.6 幂集合的性质2

  对任意的集合 A和B

$$P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$$

$$P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$$

$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$

证：$P(A) \in P(B) \Leftrightarrow P(A) \subseteq B$

$\Leftrightarrow P(A) \subseteq B \wedge (A \in P(A))$

$\Rightarrow A \in B$

$A=\{\Phi\}$ $B=\{\{\Phi\}\}$

$\mathrm{P(A)}=\{\Phi,\{\Phi\}\}$

$\mathrm{P(B)} = \{\Phi,\{\{\Phi\}\}\}$

$P(A) \in P(B)$??

$\mathrm{A}= \Phi$, $P(A)=\{\Phi\}$

$\mathrm{P(B)}=\{\Phi, \{\Phi\}\}$ $\mathrm{B}=\{\Phi\}$

该定理的逆定理不成立

幂集合的性质(续)

- 定理9.5.7　幂集合的性质3

  对任意的集合 A和B

  $$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

  $$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

  A={a},B={b},则P(A) ∪P(B)={Φ,{a},{b}}

  P(A ∪B)={Φ,{a},{b},{a, b}}

- 定理9.5.8　幂集合的性质4

  对任意的集合 A和B

  $$P(A - B) \subseteq \big(P(A) - P(B)\big) \cup \{\emptyset\}$$

- 证（2）$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

$x \in P(A) \cup P(B)$

$\Leftrightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B$

$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A) \vee (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in B)$

$\Rightarrow (\forall y)((y \in x \rightarrow y \in A) \vee (y \in x \rightarrow y \in B))$

$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in (A \cup B))$

$\Leftrightarrow x \subseteq A \cup B$

$\Leftrightarrow x \in P(A \cup B)$

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$x \subseteq A \vee x \subseteq B \Rightarrow x \subseteq A \cup B$

但 $x \subseteq A \cup B$ ？ $\Rightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B$

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

$\Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$，$x$为单独一个元素

但当 x 是集合时，由 $x \subseteq A \cup B$ 推不出 $x \subseteq A \vee x \subseteq B$

如 $A=\{1,3\}$ $B=\{2,4\}$ $x=\{1,2\}$

定义9.5.1 传递集合

- 如果集合的集合A的任一元素的元素都是 A的元素，就称 A为传递集合。该定义可写成

- A是传递集合 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A)$

由集合组成的集合A

x_1， x_2

- 例：$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

y_1， y_2， y_3

- 内层括号里的内容，在外层也能找到。

https://en.wikipedia.org/wiki/Transitive_set

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\ \}$$

重要性质：

- 若 A是传递集合，则有 $x\in A \Rightarrow x \subseteq A$
- 即，任一传递集合，它的元素一定是它的子集。
- 反之并不成立， $x \subseteq A \not\Rightarrow x\in A$
- 上例中，$\{\{\Phi,\{\Phi\}\}\} \subseteq A$，

但$\{\{\Phi,\{\Phi\}\}\} \notin A$。

单选题 1分

Setting

$$A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$$

传递集合和幂集关系：

B A是传递集合 $\Leftrightarrow A \subseteq P\ \ A$

C A是传递集合 $\Leftrightarrow A = P\ \ A$

D 传递集合和幂集没啥关系。

E 不能判定。

Submit

传递集合的性质

- 定理9.5.9　传递集合的性质1
  对任意的集合 A
  A是传递集合$\Leftrightarrow A \subseteq P(A)$

- 定理9.5.10　传递集合的性质2
  对任意的集合 A
  A是传递集合$\Leftrightarrow P(A)$是传递集合

$$\mathrm{A} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\ \}$$

广义并和广义交的性质

- 定理9.5.11　广义并和广义交的性质1

  对任意的集合 A和B

  $A \subseteq B \Rightarrow \cup A \subseteq \cup B$

  $A \subseteq B \Rightarrow \cap B \subseteq \cap A$

- 定理9.5.12　广义并和广义交的性质2

  对任意的集合 A和B

  $\cup (A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$

A={{1,2}{1,2,3}} B={{1,2}{1,2,3}{1,3,4}}

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$　$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

定理9.5.13 广义并和幂集运算的关系性质

- 对任意的集合 A

$$\bigcup(P(A)) = A$$

证明：$x\in \bigcup(P(A)) \Leftrightarrow (\exists y)\,(x\in y \wedge y\in P(A))$

$\Leftrightarrow (\exists y)\,(x\in y \wedge y\subseteq A)$

$\Leftrightarrow x\in A$

- 该定理说明，广义并是幂集的逆运算。

传递集合的性质(续)

- 定理9.5.14 传递集合的性质3
  若集合 A是传递集合，则$\cup A$是传递集合。

- 定理9.5.15 传递集合的性质4
  若集合 A的元素都是传递集合，则$\cup A$是传递集合。

$$A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\} \}$$

传递集合的性质(续)

- 定理9.5.16 传递集合的性质5
  若非空集合 A是传递集合，则$\cap A$是传递集合，且$\cap A=\Phi$。
- 定理9.5.17 传递集合的性质6
  若非空集合 A的元素都是传递集合，则$\cap A$是传递集合。

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \}$$

定理9.5.18 幂集的性质

- 若 A是集合，$x \in A$, $y \in A$,

  则 $\langle x, y \rangle \in PP(A)$ 。

  其中 $PP(A)$ 表示 $P(P(A))$。

$$\langle\ x,\ y\ \rangle = \quad x\ ,\quad x,\ y$$

定理9.5.18 幂集的性质

$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$，且

$x \in A \land y \in A \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x, y\} \in P(A)$

由上面两式可得

$x \in A \land y \in A \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq P(A)$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \subseteq P(A) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in PP(A)$

当 $x = y$时， $\langle x, x\rangle = \{\{x\}\} \subseteq P(A)$，定理依旧成立

若 A是集合，$x \in A$, $y \in A$，
则 $<x, y> \in PP(A)$ 。

定理9.5.19 笛卡儿积与∩, ∪运算的性质

- 对任意的集合A, B和C

（1） $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

（2） $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

（3） $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

（4） $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

笛卡儿积与⊆运算的性质

- 定理9.5.20　性质1
  对任意的集合 A, B和C，若$C \neq \Phi$，则

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$$

- 定理9.5.21　性质2
  对任意的集合 A, B, C 和 D

$$(A \times B \subseteq C \times D) \Leftrightarrow (A \subseteq C \wedge B \subseteq D)$$

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

	$-$	$-$
D.M 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$-(-A)=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap-A=\varnothing$	$A\cup-A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$-\varnothing=E$	$-E=\varnothing$

9.6 有限集合的基数

9.6 有限集合的基数

定义9.6.1 有限集合的基数

(cardinal number, potency)

- 如果存在 $n \in N$，使集合 A与集合

$$\{x|x \in N \land x < n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

的元素个数相同，就称集合 A的基数是 n，记作 $|A| = n$ 或 $card(A) = n$。

空集的基数是 0。

定义9.6.2 有限集合

- 如果存在 $n \in N$，使 n 是集合 A的基数，就称 A是有限集合。如果不存在这样的n，就称 A是无限集合。

9.6 有限集合的基数

定理9. 6. 1　幂集的基数

- 对有限集合 A

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

定理9. 6. 2　笛卡儿积的基数

- 对有限集合 A和 B

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

例

$A=\{a, b, c\}$

$P(A) = \{\ \Phi,$

$\{a\}, \{b\}, \{c\},$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},$

$\{a, b, c\}$

$\}$

$|A| = 3 \qquad |P(A)| = 2^3$

定理9.6.1　对有限集合A,

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

证明：设 $|A| = n$，由A中k个元素组成的子集的数目等于从n个元素中取k个元素的组合数

$$|P(A)| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

令 $x = y = 1$,则 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

因此 $|P(A)| = 2^n = 2^{|A|}$

定理9.6.3 基本运算的基数

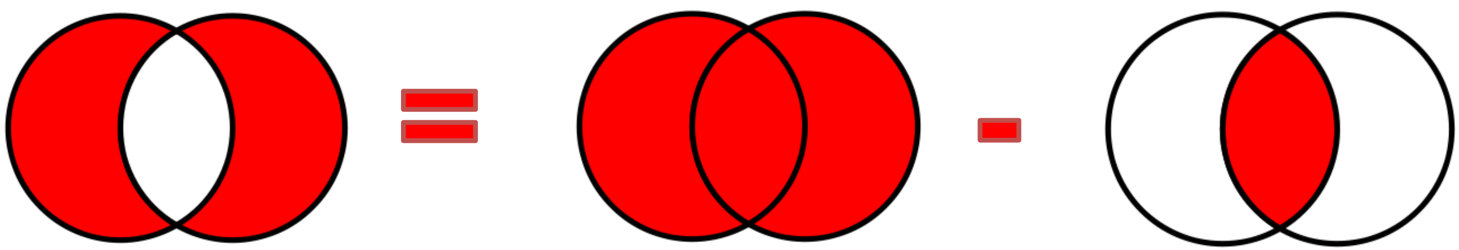
- 对有限集合A和B

(1) $|A \cup B| \leq |A| + |B|$

(2) $|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$

(3) $|A - B| \geq |A| - |B|$

(4) $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$



定理9.6.4 包含排除原理（容斥原理）(Principle of inclusion and exclusion)

- 对有限集合A和B

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- 该定理可推广到n个集合的情形。若 $n \in N$且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是有限集合，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

容斥原理基本思想

- 在日常生活中，人们常常需要统计一些数量。在统计过程中，常常会发现有些数量会重复出现。
- 在计数时，必须注意没有重复，没有遗漏。为了使重叠部分不被重复计算，人们研究出一种新的计数方法，这种方法的基本思想是：先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复，这种计数的方法称为容斥原理。

容斥原理

最简单的计数问题是求有限集合A和B的并的元素数目。

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

证　若$A \cap B = \emptyset$，则$|A \cup B| = |A| + |B|$

$|A| = |A \cap (B \cup -B)| = |(A \cap B) \cup (A \cap -B)| =$

$|A \cap B| + |A \cap -B|$　(1)

同理　$|B| = |B \cap A| + |B \cap -A|$　(2)

$|A| = |A \cap B| + |A \cap -B|$ (1) $|B| = |B \cap A| + |B \cap -A|$ (2)

容斥原理

$$|A \cup B| = |(A \cap (B \cup -B)) \cup (B \cap (A \cup -A))| = |(A \cap B) \cup (A \cap -B) \cup (B \cap A) \cup (B \cap -A)|$$

$$= |A \cap B| + |A \cap -B| + |B \cap -A| \quad (3)$$

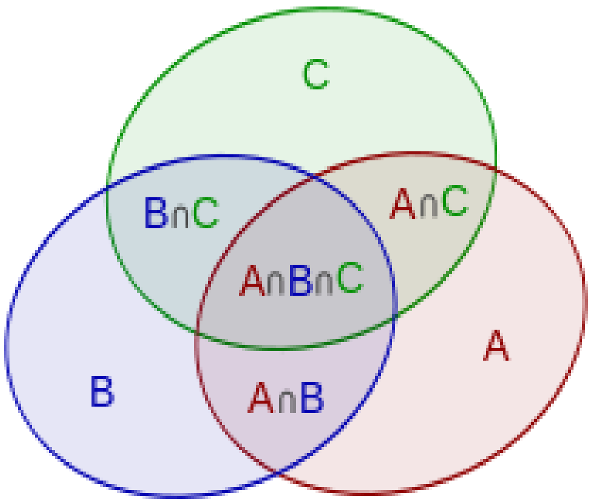
(3)-(2)-(1) 得到$|A \cup B| - |A| - |B|$

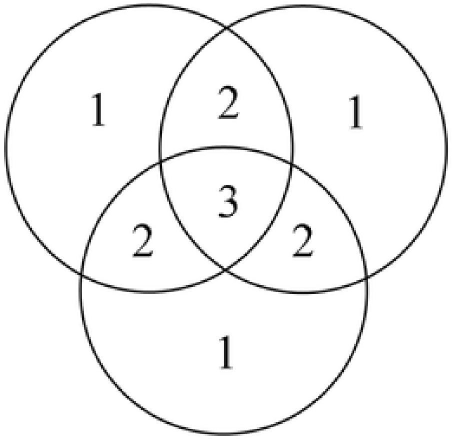
$$= \cancel{|A \cap B|} + \cancel{|A \cap -B|} + \cancel{|B \cap -A|} - (\cancel{|A \cap B|} + \cancel{|A \cap -B|}) - (|B \cap A| + \cancel{|B \cap -A|})$$

$$= -|A \cap B|$$

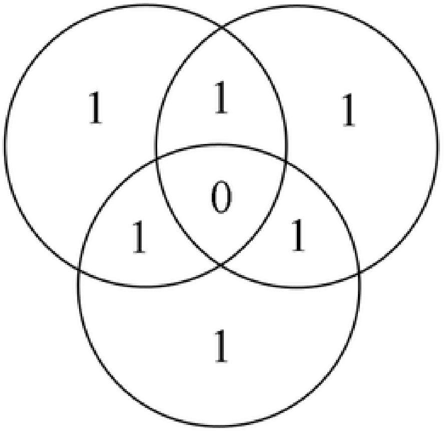
容斥原理

- 定理：$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|$
  $- |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (2)$

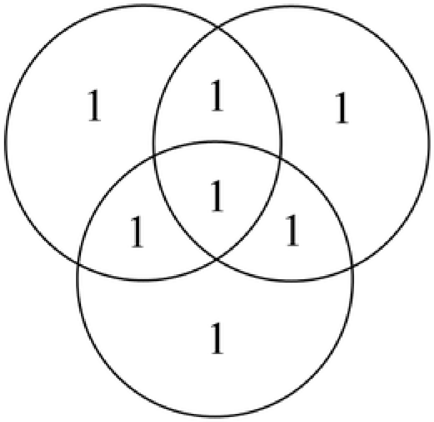




$|A| + |B| + |C|$



$|A| + |B| + |C|$
$-(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$



$|A| + |B| + |C|$
$-(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$
$+|A \cap B \cap C|$

容斥原理

- 又$|-A|=N-|A|$，其中N是集合E的元素个数，即不属于A的元素个数等于集合的全体减去属于A的元素的个数。一般有：

$$|-A_1 \cap -A_2 \cap \ldots \cap -A_n| = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n|$$

$$= N - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \qquad (5)$$

§ 容斥原理

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

$$|-A_1 \cap -A_2 \cap \ldots \cap -A_n| = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n|$$

$$= N - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Setting

[1，50]中4或6的倍数的个数

A 20

E 16

C 4

D 18

Submit

举例

例：求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

	0 0	0 1	1 0	1 1	f(x1,x2)
f1	0	0	0	0	0
f2	0	0	0	1	$x_1 \wedge x_2$
f3	0	0	1	0	$x_1 \wedge \neg x_2$
f4	0	0	1	1	x_1
f5	0	1	0	0	$\neg x_1 \wedge x_2$
f6	0	1	0	1	x_2
f7	0	1	1	0	$x_1 \overline{\vee} x_2$
f8	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$
f9	1	0	0	0	$\neg x_1 \wedge \neg x_2$
f10	1	0	0	1	$x_1 \leftrightarrow x_2$
f11	1	0	1	0	$\neg x_2$
f12	1	0	1	1	$x_2 \rightarrow x_1$
f13	1	1	0	0	$\neg x_1$
f14	1	1	0	1	$x_1 \rightarrow x_2$
f15	1	1	1	0	$\neg x_1 \vee \neg x_2$
f16	1	1	1	1	1

- $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$中n个布尔变量的不同的状态数为2^n
- 每个状态有0，1两种取值，
- 故$f(x_1,x_2,\ldots x_n)$的布尔函数个数为 2^{2^n}

$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 的布尔函数个数为 2^{2^n}

例。求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

解：设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 不依赖于 x_i 的布尔函数类为 $A_i, i = 1,2, \ldots, n$

不依赖于某个布尔变量的布尔函数个数为 $C(n,1)2^{2^{n-1}}$

不依赖于2个布尔变量的布尔函数个数为 $C(n,2)2^{2^{n-2}}$

……

不依赖于k个布尔变量的布尔函数个数为 $C(n,k)2^{2^{n-k}}$

根据容斥原理，满足条件的函数数目为：

$|-A_1 \cap -A_2 \cap \cdots \cap -A_n|$

$= 2^{2^n} - C_n^1 2^{2^{n-1}} + C_n^2 2^{2^{n-2}} - \cdots + (-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}} + \cdots$

$+ (-1)^n C_n^n 2$

定义：不依赖于

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 一个布尔函数，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不依赖于变量 x_i 是指对于每一 $(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ 都有

$$f(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

$$|-A_1 \cap -A_2 \cap \cdots \cap -A_n|$$

$$= 2^{2^n} - C_n^1 2^{2^{n-1}} + C_n^2 2^{2^{n-2}} - \cdots + (-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}} + \cdots + (-1)^n C_n^n 2$$

n=2时，有$|-A_1 \cap -A_2| = 2^{2^2} - C_2^1 2^2 + C_2^2 2 = 16 - 8 + 2 = 10$

举例

例. 求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

	0 0	0 1	1 0	1 1	f(x1,x2)
f1	0	0	0	0	0
f2	0	0	0	1	$x_1 \wedge x_2$
f3	0	0	1	0	$x_1 \wedge \neg x_2$
f4	0	0	1	1	x_1
f5	0	1	0	0	$\neg x_1 \wedge x_2$
f6	0	1	0	1	x_2
f7	0	1	1	0	$(\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$
f8	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$
f9	1	0	0	0	$\neg x_1 \wedge \neg x_2$
f10	1	0	0	1	$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$
f11	1	0	1	0	$\neg x_2$
f12	1	0	1	1	$x_1 \vee \neg x_2$
f13	1	1	0	0	$\neg x_1$
f14	1	1	0	1	$\neg x_1 \vee x_2$
f15	1	1	1	0	$\neg x_1 \vee \neg x_2$
f16	1	1	1	1	1

- f $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 中n个布尔变量的不同的状态数为2^n
- 每个状态有0，1两种取值，
- 故f $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 的布尔函数个数为2^{2^n}

就是在所有比1大的整数中，除了1和它本身以外没有别的约数，这种整数叫做质数，质数又叫做素数。

举例

例4。求不超过120的素数个数。

- 因$11^2=121$，故不超过120的合数必然是2、3、5、7的倍数，而且不超过120的合数的因子不可能都超过11。
- 设A_i为不超过120的数 i的倍数集， i=2，3，5，7。

$$|A_2|=\left\lfloor\frac{120}{2}\right\rfloor=60,|A_3|=\left\lfloor\frac{120}{3}\right\rfloor=40,$$

$$|A_5|=\left\lfloor\frac{120}{5}\right\rfloor=24,|A_7|=\left\lfloor\frac{120}{7}\right\rfloor=17,$$

$$|A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{120}{2\times 3}\right\rfloor=20,|A_2\cap A_5|=\left\lfloor\frac{120}{10}\right\rfloor=12,$$

$$|A_2\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{14}\right\rfloor=8,|A_3\cap A_5|=\left\lfloor\frac{120}{15}\right\rfloor=8,$$

设A_i为不超过120的数 i的倍数集，i=2，3，5，7。

$$|A_3\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{21}\right\rfloor=5, |A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{35}\right\rfloor=3,$$

$$|A_2\cap A_3\cap A_5|=\left\lfloor\frac{120}{2\times3\times5}\right\rfloor=4,$$

$$|A_2\cap A_3\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{2\times3\times7}\right\rfloor=2,$$

$$|A_2\cap A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{2\times5\times7}\right\rfloor=1,$$

$$\begin{aligned}|-A_2\cap -A_3\cap -A_5\cap -A_7|=&120-|A_2|-|A_3|-|A_5|\\&-|A_7|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_5|+|A_2\cap A_7|\\&+|A_3\cap A_5|+|A_3\cap A_7|+|A_5\cap A_7|\\&-|A_2\cap A_3\cap A_5|-|A_2\cap A_3\cap A_7|\\&-|A_2\cap A_5\cap A_7|-|A_3\cap A_5\cap A_7|\\&+|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=120-(60+40+24+17)+(20+12+8\\&\quad+8+5+3)-(4+2+1+1)\\&=27.\end{aligned}$$

注意：因为27个数中排除了2，3，5，7四个素数，又包含了1这个非素数。故所求的不超过120的素数个数为：27+4−1=30

67

在计算机领域中广泛使用的RSA 公钥密码算法是以欧拉函数为基础的

例7。欧拉函数$\Phi(n)$是求小于n且与n互素的数的个数。

- 分析的化身

  欧拉进行计算看起来毫不费劲儿，就像人进行呼吸，像鹰在风中盘旋一样。

- 他是历史上最多产的数学家。
  - 彼得堡学院为了整理他的著作整整花了47年。
  - 欧拉常常在两次叫他吃晚饭的半小时的时间里赶出一篇数学论文
  - 欧拉是史上发表论文数第二多的数学家，全集共计75卷；他的纪录一直到了20世纪才被保羅·埃尔德什打破
  - “读欧拉的著作吧，在任何意义上，他都是我们的大师”

    ------拉普拉斯
- 人生波折：失明，火灾
- 1783年9月18日，他77岁的时候，欧拉写出了他对天王星轨道的计算。他在喝着茶跟孩子玩的时候，中风发作。手中烟斗掉了，只说出一句话“我要死了”，“欧拉便停止了生命和计算。”

举例

例：欧拉函数Φ(n)是求小于n且与n互素的数的个数。

解：若n分解为不同素数的乘积$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$

设1到n的n个数中为p_i倍数的集合为A_i, $|A_i| = \frac{n}{p_i}, i = 1,2,\dots,k$

对于$p_i \neq p_j$, $A_i \cap A_j$既是p_i的倍数也是p_j的倍数

$$\left|A_i \cap A_j\right| = \frac{n}{p_i p_j}, i, j = 1,2,\dots,k, i \neq j$$

$$\Phi(n) = |-A_1 \cap -A_2 \cap \cdots \cap -A_n|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_n}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_1 p_k}\right) - \cdots + \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

$$= \mathrm{n}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{p}_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{p}_2}\right) \dots (1 - \frac{1}{\mathrm{p}_\mathrm{k}})$$

$$\phi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

例续：欧拉函数Φ(n)是求小于n且与n互素的数的个数。

- $8=2^3, \Phi(8)=8\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=4$
  小于8且与8互素的数为1、3、5、7

- $\Phi(60)=60\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=16, 60=2^2\times 3\times 5$，即比60小且与60无公因子的数有16个：
  $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59$

9.7 集合论公理系统

9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统(axiom systems for set theory)是一阶谓词公理系统的扩展，它包括一阶谓词公理系统和几个集合论公理。集合论公理系统可以推出一阶谓词的所有定理，也可以推出集合论的定理。
  - 悖论的发现促使人们借助于公理化方法，以期排除集合论中的已知悖论并系统地整理G.康托的理论和方法

- ZFC公理系统用10组公理描述集合的基本性质和集合实例的定义方式。
- ZFC公理系统已经被普遍接受为现代数学的基础，其基本思想是：
  – 把“集合”当作整个数学的第一概念，没有定义，也不可能定义。
  – 建立一个一阶逻辑语言，用于精确地表达关于集合的命题。
- 设定若干公理，用于指定集合的构造方法和必须具备的性质，以避免出现矛盾。
- 应用一阶逻辑推理系统证明集合定理，即关于集合的永真命题。

(ZF1)外延公理： 一个集合完全由它的元素所决定。如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的。

(ZF2)空集合存在公理： 即存在一集合s，它没有元素。

(ZF3)无序对公理： 也就是说，任给两个集合x、y，存在第三个集合z，而w∈z当且仅当w=x或者w=y。这个公理实际说的是，给定两个集合x和y，我们可以找到一个集合A，它的成员完全是x和y。

(ZF4)并集公理： 也就是说，任给一集合x，我们可以把x的元素的元素汇集到一起，组成一个新集合。

准确的定义："对任意集合x，存在集合y，使w∈y当且仅当存在z使z∈x且w∈z"。

ZF公理系统

(ZF5)幂集公理： 也就是说，任意的集合x，P（x）也是一集合。

准确的定义："对任意集合x，存在集合y，使z∈y当且仅当对z的所有元素w，w∈x"。

(ZF6)无穷公理： 也就是说，存在一集合x，它有无穷多元素。

准确的定义："存在一个集合，使得空集是其元素，且对其任意元素x，x∪{x}也是其元素。"

根据皮亚诺公理系统对自然数的描述，此即：存在一个包含所有自然数的集合。

(ZF7)分离公理模式： "对任意集合x和任意对x的元素有定义的逻辑谓词P(z)，存在集合y，使z∈y当且仅当z∈x而且P(z)为真"。

(ZF8)替换公理模式： 也就是说，对于任意的函数F（x），对于任意的集合t，当x属于t时，F（x）都有定义（ZF中唯一的对象是集合，所以F（x）必然是集合）成立的前提下，就一定存在一集合s，使得对于所有的x属于t，在集合s中都有一元素y，使y=F（x）。也就是说，由F（x）所定义的函数的定义域在t中的时候，那么它的值域可限定在s中。

(ZF9)正则公理： 也叫基础公理。所有集都是良基集。说明一个集合的元素都具有最小性质，例如，不允许出现x属于x的情况。

（AC）选择公理：对任意集c存在以c为定义域的选择函数g，使得对c的每个非空元集x，g(x)∈x。

ZFC公理系统

- 公理集合论是由德国数学家策梅洛(Zermelo)所开创。
  - 1908年他首先 提出了7组集合公理。这些公理是用自然语言和数学语言进行描述的。
  - 1921年弗兰克尔（Frankel）指出这些公理不足以证明某些特定集合的存在性。
  - 1922年弗兰克尔用一阶逻辑语言对策梅洛的公理系统进行完善，形成了ZFC公理系统，其中Z指策梅洛，F指弗兰克尔，C指选择公理（axiom of choice）。
  - 几乎同时斯克莱姆（Skolem）也在做这项工作，并于1922年独立于弗兰克尔提出了ZFC公理系统中的替换公理。
  - 1925年，冯诺依曼在其博士论文中指出这个公理系统不能排除包含自己的集合，并提出正则公理（axiom of regularity）以排除这个现象。目前，ZFC公理系统共有10组公理，被普遍接受为数学的严格基础。

9.7.1 ZFC集合论公理系统

- ZFC公理系统是著名的集合论公理系统
- 其它还有GB(Godel & Bernays)公理系统等
- ZFC公理系统共包含10条集合论公理
- 但并非彼此独立

第(3)无序对集合存在与

第(5)子集公理模式可由其它公理推出

- 公理化是一种数学方法。
- 最早出现在二千多年前的欧几里德几何学中，当时认为“公理’（如两点之间可连一直线）是一种不需要证明的自明之理，而其他所谓“定理”则是需要由公理出发来证明的。
- 18世纪德国哲学家康德认为，欧几里德几何的公理是人们生来就有的先验知识。

- 19世纪末，德国数学家希尔伯特在他的几何基础研究中系统地提出了数学的公理化方法。他认为每一种数学理论都应以“**基本概念——公理——定理**”的模式来建立：这里的公理是作为理论出发点的科学假设，它们要求有完备性(任何定理可由此导出)，独立性(去掉其中之一有的定理就不能成立)和相容性(公理间是无矛盾的)，但公理本身也由人们作各种解释。20世纪以来，整个数学几乎都已按希尔伯特的模式得到公理化处理。

9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统的一个基本思想是“任一集合的所有元素都是集合”。

  集合论研究的对象只是集合。除集合外的其它对象（如有序对、数字、字母）都要用也完全可以用集合来定义。

- 集合论公理系统的主要目的：

  （1）判定集合的存在性；

  （2）由已知集合构造出所有合法的集合（合法性）

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$

元素x $\in$ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$\mathrm{A} = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

$E = \quad x \mid x = x$

对任意的集合A， $\emptyset \subseteq A$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

$\cup\emptyset = \emptyset$

$\cap\emptyset$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

(1) 外延公理

- 两集合相等的充要条件是它们恰好具有同样的元素。$(\forall x)(\forall y)(x=y \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y))$
- 与定理9.2.1形式相同。

=

一个集合由其元素唯一确定

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$

元素x $\in$ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$\mathrm{A} = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$E = \quad x \mid x = x$

$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

对任意的集合A， $\emptyset \subseteq A$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cup\emptyset = \emptyset$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

$\cap\emptyset$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

(2) 空集存在公理

- 存在不含任何元素的集合(空集∅)。

  $(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$

- 该公理定义了集合论中的第一个集合——空集 ∅ 。
- 且由外延公理可知，空集是唯一的。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

(3) 无序对集合存在公理

- 对任意的集合 x 和y，存在一个集合 z, 它的元素恰好为 x 和y。

  $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \leftrightarrow ((u = x) \vee (u = y)))$

- 已知 x 和y 是集合，由该公理可构造

  $z = \{x, y\}$ 也是集合。

  当$x = y$ 时则构造出恰好有一个元素的集合。

  有了该公理，便可无休止地构造许多具体的集合。

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\bar{\vee}\, x \in B\}$

元素x $\in$ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$E = \{x \mid x = x\}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$

对任意的集合A, $\varnothing \subseteq A$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cup\varnothing = \varnothing$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

$\cap\varnothing$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

(4) 并集合存在公理

- 对任意的集合 x，存在一个集合y, 它的元素恰好为 x 的元素的元素。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists u)(z \in u \wedge u \in x))$$

- 任给一集合x，我们可以把x的元素的元素汇集到一起，组成一个新集合。
- 解决了集合的广义并的存在性

（集合的广义并是集合）

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\bar{\vee}\, x \in B\}$

元素x $\in$ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$\mathrm{A} = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$E = \quad x \mid x = x$

$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B)$

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cup\emptyset = \emptyset$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \to x \in z)\}$

$\cap\emptyset$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

(5) 子集公理模式(分离公理模式)

- 对任意的谓词公式 $P(z)$，对任意的集合 x，存在一个集合y，它的元素z恰好既是 x 的元素又使 $P(z)$ 为真。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \land P(z)))$$

- 对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使$P(z)$为真.
- 不只是一条公理，而是无限多条有同样模式的公理，
- 可解决交集、差集、广义交、广义并和笛卡儿积的存在性。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

例：以交集和差集为例

定理9.7.1 对任意的集合A，交集A∩B是集合。

- 对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使$P(z)$为真。
- 对任意的集合A，存在A的子集A∩B，其元素使$z \in B$为真

$$y = \{ z \mid z \in x \ \wedge P(z) \} \qquad y \subseteq x，y是x的子集，$$

$$A \cap B = \{ z \mid z \in A \wedge z \in B \}$$

- 子集公理保证了上述集合的存在性。

$A - B = \{ z \mid z \in A \wedge z \notin B \}$ 差集仅需将$P(z)$ 代为$z \notin B$。

思考题：罗素悖论的解决？

集合的存在性(续)

- 子集公理模式：对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使$P(z)$为真.

  集合不能独立定义，需要从已经存在的集合中分离出来；

  所有集合的集合不存在！

- 定理9.7.5 万有集不存在定理

  不存在集合A，使任一集合都是A的元素。

罗素悖论的解决

- H = { x | x 是一个集合 ∧ $x \notin x$ }
- 子集公理模式(分离公理模式)：对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使$P(z)$为真.
- $P(z)= z \notin z$ -> $H=\{x|P(x)\}$ **是集合吗？**
- **套用**子集公理模式(分离公理模式)

不存在集合A，使任一集合都是A的元素。

- **证明：** 假设存在集合A，使任一集合都是A的元素。选$P(x)$为$x \notin x$, 依据子集公理，存在集合

$$A_0 = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin x \}$$

即$x \in A_0$ 等价于 $x \in A \wedge x \notin x$

取 $x = A_0$，则有

$A_0 \in A_0 (x \in A_0)$等价于$A_0 \in A \wedge A_0 \notin A_0$。这是不可能的

所以，$A_0 \notin A$，与假设矛盾，定理得证。

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

元素x $\in$ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$E = \quad x \mid x = x$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$

对任意的集合A， $\varnothing \subseteq A$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

$\cup \varnothing = \varnothing$

$\cap \varnothing$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

为什么∩∅无意义？

- 假设∩∅为集合，则有广义交的定义，

$$\cap A \ =\{\ x \mid (\forall z)\ z \in A \rightarrow x \in z\ \}$$

$$\cap \varnothing \ =\{\ x \mid (\forall z)\ z \in \varnothing \rightarrow x \in z\ \}$$

$x \in \cap \varnothing$ **永真**

- 则∩∅为所有集合的集合，与上述定理矛盾，因此规定∩∅不存在。

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\bar{\vee}\, x \in B\}$

元素x ∈ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$E = \{x \mid x = x\}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cup\emptyset = \emptyset$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

$\cap\emptyset$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

(6) 幂集合公理（集合的幂集是集合）

- 对任意的集合 x，存在一个集合y, 它的元素恰好是 x 的子集。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\forall u)(u \in z \rightarrow u \in x))$$

$$(\forall A)(\exists P(A))(\forall x)(x \in P(A) \leftrightarrow x \subseteq A))$$

- 对任意的集合A，存在一个集合P(A)，恰好以A的一切子集为元素。故集合的幂集是集合。
- 注：后一写法非正式，仅用于帮助理解。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

(7) 正则公理

- 对任意的非空集合 x，存在 x 的一个元素，它和 x 不相交。

$$(\forall x)(x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge (x \cap y = \emptyset)))$$

- 对任意非空集合x，x至少有一元素y使$x \cap y$为空集
- 此时称该元素为集合 x 的一个极小元。
- 结论：任一非空集合都有极小元。

  不存在以自身为元素的集合

  排除奇异集合

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

例: 设 $B=\{\{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$， $B_1=\{\emptyset\}$,

则 $B_1 \in B$ 且 $B_1 \cap B = \Phi$,

所以B_1是B中的极小元。

设 $B_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$， 尽管 $B_2 \in B$,

但 $B_2 \cap B = \{\{\emptyset\}\}$,

所以B_2不是B中的极小元。

讨论

- 利用正则公理可以证明不存在下列形式的集合：
- 1、x∈x：如果这样的集合x存在，那么{x}只有x一个元素，但{x}∩x={x}非空，不合于正则公理。
- 2、所有集合组成的集合：如果这个集合存在，那么根据第一条必然不是自身的元素，但是与定义矛盾。
- 3.不存在无限递降的集合序列
- 对任何非空的传递集合A，必有∅ ∈A

不存在无穷递降的集合列

证明：

- $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni \cdots$
- 利用正则公理，构造集合 $A=\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$。假设 x_i为最小元，由于$x_{i+1} \in x_i$，故$x_i \cap A \neq \emptyset$ 因此该集合不存在极小元，矛盾。从而不存在无穷递降的集合列。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

(8) 无穷公理

存在一个由所有自然数组成的集合

$$(\exists x)(\phi \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \cup \ y\ ) \in x))$$

$$(\exists N)(\phi \in N \wedge (\forall y)(y \in N \rightarrow y^{+} \in N))$$

9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 自然数的集合表示方法：
  - Zermelo 1908年曾给出一种方法：
  - $0 = \emptyset$ ， $1 = \{\emptyset\}$， $2 = \{\{\emptyset\}\}$， …
  - 满足$0 \in 1 \in 2 \in \ldots$。 但‘$\in$’ 关系不满足传递性。
  - 即由 $A \in B \wedge B \in C$ 成立，却推不出 $A \in C$ 成立。
  - 未能准确刻画自然数本身所固有的良好性质。

9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 需注意每个自然数均包含两方面的信息：

  （1）**序数**（排序）　　order

  （2）**基数**（对应的个数）cardinal

- 1924年，Von Neumann在满足序数与基数两种性质的意义下，通过定义后继，给出了另一种自然数的表示：

后继与自然数

定义9.7.3 前驱与后继

- 对任意的集合A，定义集合

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

A^+ 称为 A的后继， A称为A^+的前驱。

定义9.7.4 用后继定义自然数

- 集合 0 ＝ $\emptyset$ 是一个自然数。若集合n是一个自然数，则集合$n+1 = n^+$也是一个自然数。

9.7.4　无穷公理和自然数集合

按照上述定义，每个自然数可表示为：

$$0=\phi$$

$$1=0^{+}=0\cup\{0\}=\{0\}=\{\phi\}$$

$$2=1^{+}=1\cup\{1\}=\{0,1\}=\{\phi,\{\phi\}\}$$

$$3=2^{+}=2\cup\{2\}=\{0,1,2\}=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$$

$$\dots$$

$$n+1=n^{+}=n\cup\{n\}=\{0,1,\cdots,n\}.$$

9.7.4 无穷公理和自然数集合

定义9.7.5 自然数的性质

- 对任意的自然数 m 和 n

$$m < n \Leftrightarrow m \subset n \Leftrightarrow n > m$$

$$m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n \Leftrightarrow n \geq m$$

9.7.4　无穷公理和自然数集合

定义9. 7. 6　集合的三歧性

- 对集合A，如果对任意的集合$A_1 \in A$和$A_2 \in A$，使

  $A_1 \in A_2$，　$A_1 = A_2$，　$A_2 \in A_1$

  三式中恰好有一个成立，就称集合A有三歧性。

9.7.4 无穷公理和自然数集合

定理9. 7. 11 自然数的三歧性

- 自然数集合N有三歧性。
- 每个自然数都有三歧性。即

$$(\forall m)(\forall n)(m \in N \wedge n \in N \rightarrow m < n \vee m = n \vee m > n)$$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

(9) 替换公理模式

- 对于任意的谓词公式$P(x, y)$，如果对任意的 x **存在唯一**的y使得$P(x, y)$为真，那么对所有的集合t 就存在一个集合s，使 s中的元素 y恰好是 t中元素 x 所对应的那些y。

$$(\forall x)(\exists ! y)P(x,y) \rightarrow (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \land P(z,u)))$$

- 其中$(\forall x)(\exists ! y)P(x,y)$表示$(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \land (\forall z)(P(x,z) \rightarrow z = y))$，符号$(\exists ! y)$表示存在唯一的$y$。
- 替换公理是子集公理模式的二元推广。

用替换公理等的举例证明(P152)

已知u和v是集合,下面证明 {u, v}也是集合。

由空集公理， ∅是集合。

由幂集公理，P(∅)={∅}是集合。

P ({∅})={∅, {∅}}也是集合。

令集合 t ={∅, {∅}}, 定义 $P(x, y)$为P(∅, u)=T

P({∅}, v)=T, 则 t 和 $P(x, y)$满足替换公理的前提，

由替换公理可得，存在由u和v构成的集合s ={u, v}。

$$(\forall x)(\exists!\, y)P(x,y) \to (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \land P(z,u)))$$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

(10) 选择公理

- 对任意的关系R，存在一个函数 F，F 是 R 的子集，而且 F 和 R 的定义域相等
- $(\forall 关系 R)(\exists 函数 F)(F \subseteq R \wedge dom(R) = dom(F))$
- 在第11章函数中还将详细介绍该公理。

- 一般的关系R不一定是函数，$\because R$不保证单值性.
- 对某些$x \in dom(R)$, 有y_1，y_2，…，

  使$y_1 \in ran(R)$, $y_2 \in ran(R)$, …,

  且$< x, y_1 > \in R$, $< x, y_2 > \in R$, … .

  这时x有多个值$y_1, y_2, \ldots$与之对应.
- 为了构造函数f，只要对任意的$x \in dom(R)$, 从$< x, y_1 >, < x, y_2 >, \ldots$中任取一个放入$f$中.
- 则f是单值的, $f \subseteq R$, 且有$dom(f) = dom(R)$.
- F是函数 $f : dom(R) \to ran(R)$.
- 多个有序对可任选其一，所以构造的f可有多个

集合的存在性

- 定理9.7.1 交集存在定理

  对任意的集合 A和 B，交集 $A\cap B$是集合。

- 定理9.7.2 差集存在定理

  对任意的集合 A和 B，差集 $A-B$是集合。

- 定理9.7.3 广义交存在定理

  对任意的非空集合 A，广义交$\cap A$是集合。

集合的存在性

- 定理9.7.4　笛卡儿积存在定理

  对任意的集合 A和 B，笛卡儿积 $A\times B$是集合。

- 定理9.7.5　万有集不存在定理

  不存在集合A，使任一集合都是 A的元素。

- Russell悖论

集合的重要性质

- 定理9.7.6　集合的重要性质1
  对任意的集合A，　$A \notin A$。
- 定理9.7.7　集合的重要性质2
  对任意的集合 A和 B，有 $\neg(A \in B \land B \in A)$
- 定理9.7.8　传递集合的性质7
  对任意非空的传递集合 A，有$\emptyset \in A$。

定理9.7.7 证明

- 定理9.7.7　集合的重要性质2
  对任意的集合 A和 B，有 $\neg(A\in B \wedge B\in A)$
- 证明：反证法，假定存在集合A和B，满足$A \in B \wedge B \in A$。构造集合$\{A, B\}$，由正则公理，该集合存在极小元。
  - 先假定极小元为A。由于$B \in A$，故$A \cap \{A, B\} = B \neq \emptyset$，故$A$非极小元，矛盾。
  - 再假定极小元为B。同上可得矛盾。
- 故定理9.7.7成立。■

第九章 主要内容

- 集合的谓词与图形表示法；
- 幂集、广义并与广义交、笛卡尔积的计算；
- 某些特殊集合（如传递集合）的概念；
- 集合的基本运算、主要证明方法；
- 有限集合的基数；
- 自然数在集合论中的表示（无穷公理）
- 集合论公理系统的一般了解

【第九章小结】

- 本章讨论了集合及其运算，它是后面四章的基础。
- 介绍了外延、内涵和图形等三种不同的表示方法；
- 基于文氏图的图形表示是帮助理解多个集合情形的直观形象的工具。

【第九章小结】（续2）

- 介绍了集合间的关系和特殊集合以及并、交、差、余、对称差、广义并、广义交，笛卡儿积等多种运算；
- 详细介绍了集合运算的性质（11个运算定律）和两种证明方法（谓词逻辑与集合恒等式）。
- 其中部分基本规则只能用谓词逻辑的方法来证明，而其它运算性质则可用两种方法加以证明

【第九章小结】（续3）

- 介绍了集合基数的概念和有限集合基数的计算方法。重点讨论了包含排斥原理及其应用方法；
- 介绍了集合论公理系统的基本思想，并简要介绍了ZF公理系统的10条集合论公理，从而提供了一种由满足存在性的少数集合构造所有合法集合的方法。

谢谢
shixia@tsinghua.edu.cn