高代选讲　第十一周作业

1. pf (1)

$$\frac{d(A(x)B(x))}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{A(x+\Delta x)B(x+\Delta x)-A(x)B(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{A(x+\Delta x)B(x+\Delta x)-A(x)B(x+\Delta x)+A(x)B(x+\Delta x)-A(x)B(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}B(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0} A(x)\frac{B(x+\Delta x)-B(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} B(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0} A(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{B(x+\Delta x)-B(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{dA(x)}{dx}B(x) + A(x)\frac{dB(x)}{dx} \quad \square$$

(2)

$$\frac{d(\mathrm{tr}A(x))}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx}a_{ii}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a'_{ii}(x)$$

$$= \mathrm{tr}\frac{dA(x)}{dx}$$

2. 可导

理由 $\forall x\in[a,b]$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^{-1}(x+\Delta x)-A^{-1}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^{-1}(x+\Delta x)A(x)A^{-1}(x)-A^{-1}(x+\Delta x)A(x+\Delta x)A^{-1}(x)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0} A^{-1}(x+\Delta x)\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}A^{-1}(x)$$

而 $\lim_{\Delta x\to 0} A^{-1}(x+\Delta x) = A^{-1}(x)$　$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} = A'(x)$

$\lim_{\Delta x\to 0} A^{-1}(x) = A^{-1}(x)$ 均存在

故 $-\lim_{\Delta x\to 0} A^{-1}(x+\Delta x)\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}A^{-1}(x)$ 存在

因此 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^{-1}(x+\Delta x)-A^{-1}(x)}{\Delta x}$ 存在

故 $A^{-1}(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 可导 $\square$

3. pf: 设 $C_k = A_kB_k$，则 $(C_k)_{ij} = \sum_{l=1}^{n}(a_k)_{il}(b_k)_{lj}$

考虑到 $\lim_{k\to\infty} A_k = A$，$\lim_{k\to\infty} B_k = B$

故 $\forall i,j,l$　$\lim_{k\to\infty}(a_k)_{il} = a_{il}$，$\lim_{k\to\infty}(b_k)_{lj} = b_{lj}$

因此

$$\lim_{k\to\infty}(C_k)_{ij} = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_l (a_k)_{il}(b_k)_{lj}\right)$$

$$= \sum_l \lim_{k\to\infty}(a_k)_{il}\lim_{k\to\infty}(b_k)_{lj}$$

$$= \sum_l a_{il}b_{lj}$$

$$= (AB)_{ij}$$

即 $\lim_{k\to\infty}(A_kB_k)_{ij} = (AB)_{ij}$　$\forall i,j$

因此 $\lim_{k\to\infty} A_kB_k = AB$ $\square$