概率统计第六讲：常用连续分布

史灵生　清华数学系

1、本讲提要

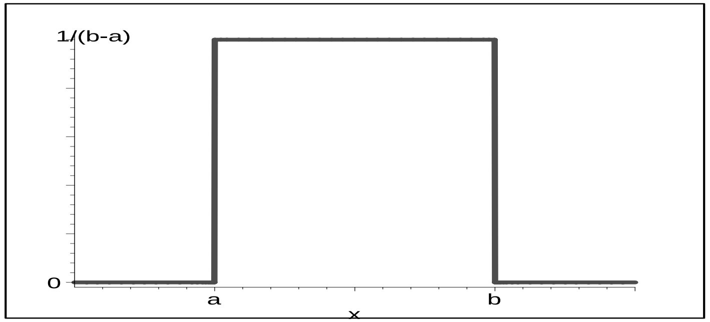
1. 常用连续分布
   - 均匀分布、指数分布
   - 正态分布
   - Γ分布
2. 函数的分布和分位数
   - 随机变量函数的分布
   - 分位数

2、均匀分布

例

服从区间(a,b)上的均匀分布$U(a,b)$的随机变量X，其密度为

$$p(x)=\frac{1}{b-a}I_{(a,b)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$



3、均匀分布的特征数

$X\sim U(a,b)$的密度为$p(x)=\frac{1}{b-a}I_{(a,b)}(x)$。

$$\begin{aligned}EX &= \int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{b-a}I_{a<x<b}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{x}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2},\\ Var(X) &= EX^2-(EX)^2=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\\ &= \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

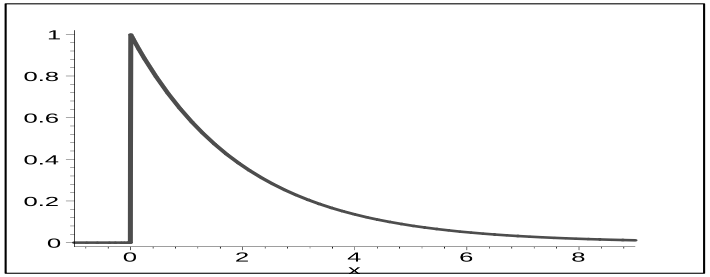
4、指数分布

定义

系统的寿命X的密度为

$$p(x)=\lambda e^{-\lambda x}I_{[0,+\infty)}(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{若}x\ge 0;\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

我们称X服从参数为$\lambda>0$的指数分布，记作$X\sim Exp(\lambda)$。



5、指数分布的特征数

$X\sim Exp(\lambda)$的密度为$p(x)=\lambda e^{-\lambda x}I_{[0,+\infty)}(x)$。

$$\begin{aligned}
EX &= \int_0^{\infty}P(X>x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda},\\
EX^2 &= \int_0^{\infty}P(X^2>x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}P(X>u)2u\mathrm{d}u \qquad (x=u^2)\\
&= 2\int_0^{\infty}ue^{-\lambda u}\mathrm{d}u=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty}u\lambda e^{-\lambda u}\mathrm{d}u=\frac{2EX}{\lambda}=\frac{2}{\lambda^2},\\
Var(X) &= EX^2-(EX)^2=\frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

6、指数分布的无记忆性

定义

设备的寿命X在时刻t处的失效率为：

$$\lim_{h\to 0}P(t<X\le t+h\,|\,X>t)/h=\lambda(t).$$

若失效率$\lambda(t)=\lambda$与时间t无关，则称X为无记忆的。

注：

1. 无记忆性的另一表述是:$P(X>s+t\,|\,X>s)=P(X>t)$. 它等价于：$P(X>s+t)=P(X>s)P(X>t)$, $\quad s,t>0$。
2. 因为指数分布的随机变量X有$P(X>t)=e^{-\lambda t}$，易见它满足(1)和无记忆性。反之，无记忆性的连续型随机变量必是指数分布的。

7、无记忆的指数分布

定理　无记忆性的连续型随机变量必是指数分布的：

$P(X>s+t)=P(X>s)P(X>t)\Rightarrow X\sim Exp(\lambda)$。

证明：

- 记$G(t)=P(X>t)$，则$G(s+t)=G(s)G(t)$。
- $\forall n\in\mathbb{N}$, $\quad G(ns)=G(s)^n$,
- $\forall m\in\mathbb{N}$, $\quad G(s/m)=G(s)^{1/m}$,
- $\forall q=n/m\in\mathbb{Q}^+$, $\quad G(qs)=G(ns/m)=G(s)^{n/m}=G(s)^q$,
- 由$G(t)$的单调性可得，$\forall s,t\in\mathbb{R}^+$, $\quad G(st)=G(s)^t$,
- 取$s=1$，则$G(t)=G(1)^t=e^{t\ln G(1)}$。
- 于是$F(x)=P(X\le x)=1-G(x)=1-e^{x\ln G(1)}$。
- 所以$p(x)=F'(x)=-\ln G(1)e^{x\ln G(1)}$。
- 令$\lambda=-\ln G(1)$，则$X\sim Exp(\lambda)$。

8、Possion分布与指数分布的关系

例

在保险公司理赔问题中，将第一次理赔发生的时刻记为T，问它的概率分布如何？

解：（回忆：保险理赔次数$N(0,t] \sim P(\lambda t)$。）

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \le t) = 1 - P(T > t) \\ &= 1 - P(N(0,t] = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \\ p(t) &= \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \\ T &\sim Exp(\lambda). \end{aligned}$$

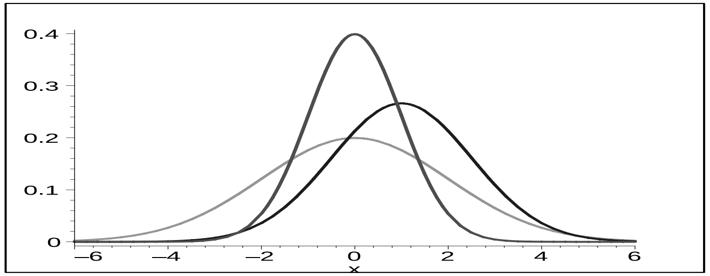
9、一维正态分布

定义

服从一维正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的随机变量X，其密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

称$N(0,1)$为一维标准正态分布。



10、一维正态分布

设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，记$U = (X-\mu)/\sigma$（为X的标准化），则

$$P(U \le u) = P(X \le \mu+\sigma u) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma u} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t,$$

即$U \sim N(0,1)$。下面验证$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$是概率密度：

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

利用极坐标变换$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$可求得上述二重积分为

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}r = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}(r^2/2) = 1.$$

以后记Φ为一维标准正态分布函数，即$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$。

11、正态分布的特征数

设$U \sim N(0,1)$，则

$$\begin{aligned} EU &= \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = 0. \quad \text{(利用对称性。期望存在吗?)} \\ Var(U) &= EU^2 - (EU)^2 = EU^2 = 2\int_0^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}\frac{u^2}{2} = -2\int_0^{\infty} u \mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\right) \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = 1. \end{aligned}$$

对一般的正态分布$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$，因此

$$EX = \mu, \qquad Var(X) = \sigma^2.$$

12、正态分布的3σ原则

- 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则
$P(|X-\mu| < k\sigma) = P(|(X-\mu)/\sigma| < k) = \Phi(k) - \Phi(-k)$

$$= 2\Phi(k) - 1 = \begin{cases} 0.6826, & k = 1; \\ 0.9545, & k = 2; \\ 0.9973, & k = 3. \end{cases}$$

（习题2.1，19）

注： $\Phi(x)$的图像关于（0，1/2）点中心对称！

- 尽管正态变量的取值范围是所有实数，但它的99.73%的值落在$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$内。此为“$3\sigma$ 原则”。

13、Γ分布

定义

定义域为$(0,\infty)$的Γ函数为$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$。

性质

1. $\Gamma(1) = 1$，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$；
2. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$，$\quad \alpha \in \mathbb{R}^+$；
3. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$，$\quad n \in \mathbb{N}$。

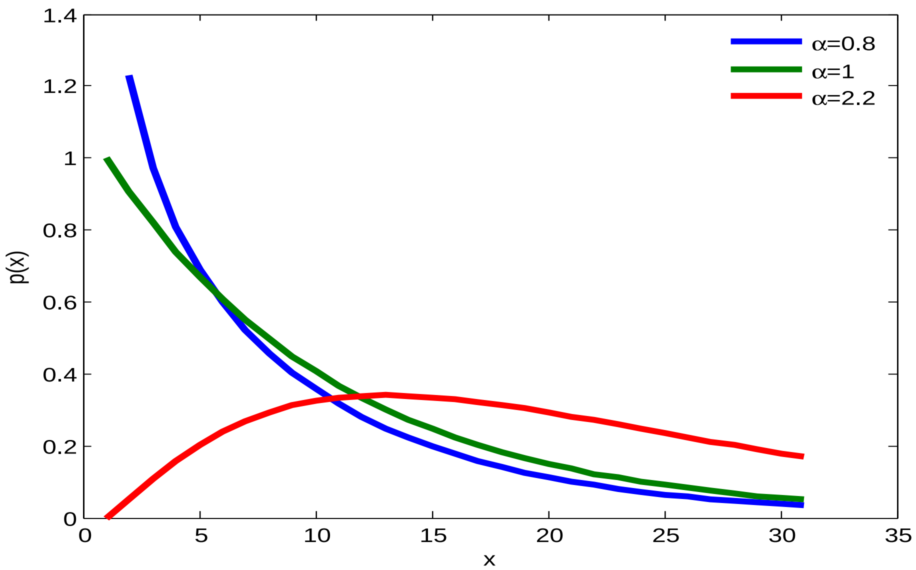
定义

若随机变量X的密度函数为

$$p(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}I_{[0,\infty)}(x),$$

则称X服从Γ分布，记作$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$或$Ga(\alpha, \lambda)$，其中$\alpha > 0$为形状参数，$\lambda > 0$为尺度参数。

14、Γ分布：$p(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}I_{[0,\infty)}(x)$



15、Γ分布的特征数

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$的密度函数为$p(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}I_{[0,\infty)}(x)$。

$$\begin{aligned} EX &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^\alpha e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \alpha/\lambda, \\ EX^2 &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2, \\ Var(X) &= EX^2 - (EX)^2 = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2 - \alpha^2/\lambda^2 = \alpha/\lambda^2. \end{aligned}$$

Γ分布的特例：

1. $\Gamma(1, \lambda) = Exp(\lambda)$；
2. $\Gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$是自由度为$n$的$\chi^2$分布。

若$X \sim \chi^2(n)$，则$EX = n$，$Var(X) = 2n$。

16、一般情形

已知X的概率密度为$p(x)$，求$Y=g(X)$的密度。

解： 先求Y的分布$F_Y(y)$再对其求导得密度$p_Y(y)$，其中

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P[g(X)\le y]=P(g(X)\in(-\infty,y])$$
$$=P(X\in g^{-1}(-\infty,y])=\int_{g^{-1}(-\infty,y]}p(x)\mathrm{d}x。$$

例：设$X\sim N(0,1)$，$Y=X^2$，则$Y\sim\chi^2(1)$分布。

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})\\ &= \Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})=2\Phi(\sqrt{y})-1 \quad (y\ge 0);\\ p_Y(y) &= F_Y'=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Phi(\sqrt{y})=y^{-1/2}\Phi'(\sqrt{y})=\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} \quad (y>0).\end{aligned}$$

17、单调函数的密度公式

定理

- 若$y=g(x)$为单调连续函数且其逆函数$x=h(y)$连续可微，则$Y=g(X)$是连续型随机变量且密度函数为

$$p_Y(y)=p_X[h(y)]|h'(y)|,\quad y\in g(\mathbb{R}).$$

- 特别地,若$y=ax+b$，$a\ne 0$，则$p_Y(y)=p_X((y-b)/a)/|a|$.

证明：

$$F_Y(y)=\int_{g^{-1}(-\infty,y]}p_X(x)\mathrm{d}x=\int_{h(-\infty,y]}p_X(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{y}p_X[h(z)]|h'(z)|\mathrm{d}z。\qquad (x=h(z))$$

18、密度公式的错误应用

例（χ^2分布）

若$X\sim N(0,1)$，$Y=X^2$，则$p_Y(y)=\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}\quad(y>0)$。

“证明”：

$$p_Y(y)=p_X(\sqrt{y})|(\sqrt{y})'|\quad(\text{密度公式})$$
$$=\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}(2\sqrt{y})^{-1}$$
$$=\frac{e^{-y/2}}{2\sqrt{2\pi y}}\qquad(y>0)。$$

X

错在哪？

19、密度公式的正确应用

例

由统计物理知分子运动速度的绝对值X服从Maxwell 分布，其密度为

$$p(x)=\frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-x^2/a^2}I_{(0,\infty)},\quad a>0,$$

求分子动能$Y=\frac{1}{2}mX^2$（m为分子质量）的概率密度。

解：（利用密度公式）

- $y=\frac{1}{2}mx^2\Rightarrow x=\sqrt{2y/m}.$
- $p_Y(y)=p(\sqrt{2y/m})|(\sqrt{2y/m})'|=\frac{4\sqrt{2y}}{m^{3/2}a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{2y}{ma^2}}\quad(y>0).$

20、密度公式的应用

定理

1. 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$。
2. 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Y = e^X \sim LN(\mu,\sigma^2)$对数正态分布，
$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} y\sigma} e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0。$$
3. 若$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$，则$Y = kX \sim \Gamma(\alpha,\lambda/k)$，其中$k > 0$；特别的，$2\lambda X \sim \chi^2(2\alpha)$。
4. 若X的分布函数$F(x)$为严格单调增的连续函数，则$Y = F(X) \sim U(0,1)$。

4） $F_Y(y) = P(Y \le y) = P[F(X) \le y] = P[X \le F^{-1}(y)]$
$= F(F^{-1}(y)) = y, \quad y \in (0,1)$。

问： 若$F(x)$非严格单调增，则情况又如何？

21、分位数

定义

对连续随机变量X和任意$p \in (0,1)$，称满足条件
$$F(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} p(x)\mathrm{d}x = p$$
的x_p为此分布的（下侧）p分位数；$x'_p := x_{1-p}$为此分布的上侧p分位数；$x_{0.5}$为此分布的中位数。

性质

1. $x_p = x'_{1-p}$；
2. 若$N(0,1)$的p分位数为u_p，则$N(\mu,\sigma^2)$的p分位数
$$x_p = \mu + \sigma u_p。$$

证明（2）：$F(x_p) = \Phi((x_p - \mu)/\sigma) = p \Rightarrow (x_p - \mu)/\sigma = u_p$。