高代选讲 第十五周作业

1. (a) T^1_2 的维数为 $n^{p+q} = 2^3 = 8$

T^1_2 一组基为 $e^1\otimes e^1\otimes e_1$, $e^1\otimes e^1\otimes e_2$, $e^1\otimes e^2\otimes e_1$, $e^1\otimes e^2\otimes e_2$,
$e^2\otimes e^1\otimes e_1$, $e^2\otimes e^1\otimes e_2$, $e^2\otimes e^2\otimes e_1$, $e^2\otimes e^2\otimes e_2$

(b) $T^1_{11}=1$ $T^2_{11}=2$ $T^1_{12}=3$ $T^2_{12}=4$

$T^1_{21}=1$ $T^2_{21}=0$ $T^1_{22}=0$ $T^2_{22}=2$

2、(a) $F(v,f) = F(e_1+5e_2+4e_3,\ e^1+e^2+e^3)$

$= F(e_1,e^2)+F(5e_2,e^1)+F(5e_2,e^3)+0$

$= e^1\otimes e_2(e_1,e^2)+e^2\otimes e_1(5e_2,e^1)+3e^2\otimes e_3(5e_2,e^3)$

$= 1+5+15=21$

(b) $F(v,v,f,f) = F(e_1+2e_2+3e_3,\ e_1+2e_2+3e_3,\ e^1,\ e^1)$

$= F(e_1,e_1,e^1,e^1)+F(e_1,2e_2,e^1,e^1)+F(e_1,3e_3,e^1,e^1)+$
$F(2e_2,e_1,e^1,e^1)+F(2e_2,2e_2,e^1,e^1)+F(2e_2,3e_3,e^1,e^1)+$
$F(3e_3,e_1,e^1,e^1)+F(3e_3,2e_2,e^1,e^1)+F(3e_3,3e_3,e^1,e^1)$

$= (1+2+3)\times(1+2+3)\times 3 = 108$

3、$T^{j_1'\cdots j_q'}_{i_1'\cdots i_p'} = T(t_{i_1'},\cdots,t_{i_p'},t^{j_1'},\cdots,t^{j_q'})$

$= T(\sum_{i_1}(A)^{i_1}{}_{i_1'}e_{i_1},\cdots \sum_{i_p}(A)^{i_p}{}_{i_p'}e_{i_p},\sum_{j_1}(A^{-1})^{j_1'}{}_{j_1}e^{j_1},\cdots,\sum_{j_q}(A^{-1})^{j_q'}{}_{j_q}e^{j_q})$

$= \sum_{\substack{i_1\cdots i_p\\ j_1\cdots j_q}}(A)^{i_1}{}_{i_1'}\cdots(A)^{i_p}{}_{i_p'}(A^{-1})^{j_1'}{}_{j_1}\cdots(A^{-1})^{j_q'}{}_{j_q}\ T(e_{i_1}\cdots e_{i_p},e^{j_1}\cdots e^{j_q})$

$= \sum_{\substack{i_1\cdots i_p\\ j_1\cdots j_q}}(A^{-1})^{j_1'}{}_{j_1}(A^{-1})^{j_2'}{}_{j_1}\cdots(A^{-1})^{j_q'}{}_{j_q}\ T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}(A)^{i_1}{}_{i_1'}\cdots(A)^{i_p}{}_{i_p'}$

4、设 U.V.W 的一组基分别为 $\{e_1\cdots e_p\}\{f_1\cdots f_q\}\{g_1\cdots g_r\}$.

(1) 设 $V\otimes W$ 的基为 $f_i\otimes g_j$ ($\tau(f_i,g_j)=f_i\otimes g_j$) $1\le i\le q$, $1\le j\le r$

同理 $W\otimes V$ 的基为 $g_j\otimes f_i$

考虑线性映射 $\phi: V\otimes W\to W\otimes V$ 使 $\phi(f_i\otimes g_j)=g_j\otimes f_i$ $\forall i,j$

ϕ 显然是映射, 因为 $Dom(\phi)=V\otimes W$ 且 $\forall x\in V\otimes W$ $\phi(x)$ 唯一

则 ① ϕ 是满射, 因为 $\forall y\in W\otimes V$, 设 $y=\sum_i\sum_j t_{ij}\ g_j\otimes f_i$

则 $\exists x\in V\otimes W$, $x=\sum_i\sum_j t_{ij} f_i\otimes g_j$

$\phi(x)=\phi(\sum_i\sum_j t_{ij} f_i\otimes g_j)=\sum_i\sum_j t_{ij}\phi(f_i\otimes g_j)$

$=\sum_i\sum_j t_{ij}\ g_j\otimes f_i = y$

② ϕ 是单射, 因为 $\forall \phi(x)=\phi(y)$ 设 $x=\sum x_{ij}f_i\otimes g_j$ $y=\sum y_{ij}f_i\otimes g_j$

$\phi(x)=\phi(\sum x_{ij}f_i\otimes g_j)=\sum x_{ij}\phi(f_i\otimes g_j)=\sum x_{ij}g_j\otimes f_i$

同理 $\phi(y)=\sum y_{ij}\ g_j\otimes f_i$, $\phi(x)=\phi(y)\Rightarrow x_{ij}=y_{ij}$ $\forall i,j$ $\Rightarrow x=y$

综上：ϕ 是双射，因此 $V\otimes W$ 与 $W\otimes V$ 同构

(2) 设 $(U\otimes V)\otimes W$ 的基为 $(e_i\otimes f_j)\otimes g_k$，$U\otimes(V\otimes W)$ 的基为 $e_i\otimes(f_j\otimes g_k)$

构造线性映射 $\phi((e_i\otimes f_j)\otimes g_k) = e_i\otimes(f_j\otimes g_k)$ $\forall i,j,k$.

ϕ 是映射因为 $Dom(\phi)=(U\otimes V)\otimes W$ 且 $\forall x\in(U\otimes V)\otimes W$，$\phi(x)$ 唯一

则① ϕ 是满射，因为 $\forall y\in U\otimes(V\otimes W)$ 设 $y=\sum t_{ijk}\, e_i\otimes(f_j\otimes g_k)$

$\exists\, x=\sum t_{ijk}(e_i\otimes f_j)\otimes g_k$

$\phi(x) = \phi(\sum t_{ijk}\,(e_i\otimes f_j)\otimes g_k) = \sum t_{ijk}\,\phi((e_i\otimes f_j)\otimes g_k)$

$= \sum t_{ijk}\, e_i\otimes(f_j\otimes g_k) = y$

② ϕ 是单射，因为 $\forall \phi(x)=\phi(y)$，设 $x=\sum x_{ijk}(e_i\otimes f_j)\otimes g_k$

设 $y=\sum y_{ijk}\, e_i\otimes(f_j\otimes g_k)$

$\phi(x)=\phi(\sum x_{ijk}\,(e_i\otimes f_j)\otimes g_k) = \sum x_{ijk}\,\phi((e_i\otimes f_j)\otimes g_k)$

$= \sum x_{ijk}\, e_i\otimes(f_j\otimes g_k)$

同理 $\phi(y)=\sum y_{ijk}\, e_i\otimes(f_j\otimes g_k)$

$\phi(x)=\phi(y) \Rightarrow x_{ijk}=y_{ijk}\ \forall i,j,k \Rightarrow x=y$

综上：ϕ 是双射，因此 $(U\otimes V)\otimes W$ 与 $U\otimes(V\otimes W)$ 同构.

(3) 由① 令 $W=F$，$\exists$ 双射 ϕ s.t ϕ 是 $V\otimes F$ 到 $F\otimes V$ 的同构映射，$V\otimes F\cong F\otimes V$

下面再构造 $F\otimes V\to V$ 的双射

下面 $\lambda\otimes v$ 表示在 $F\otimes V$ 的基 $1\otimes f_i$ 下坐标为 $(\lambda v_1 \dots \lambda v_n)$ 的元素 $(v=\sum v_i f_i)$

则构造线性 ϕ: $F\otimes V\to V$ 使 $\phi(\lambda\otimes v)=\lambda v$ (易知 $Dom(\phi)=F\otimes V$)

则 ① ϕ 是满射，因为 $\forall y\in V$，设 $y=\sum y_i f_i$

则 $\exists\, x=\sum y_i\otimes f_i$ 使 $\phi(x)=\phi(\sum y_i\otimes f_i)=\sum\phi(y_i\otimes f_i)$

$=\sum y_i f_i = y$

② ϕ 是单射，因为 $\forall \phi(x)=\phi(y)$ 设 $x=\sum x_i\otimes f_i$，$y=\sum y_i\otimes f_i$

$\phi(x)=\phi(\sum x_i\otimes f_i)=\sum\phi(x_i\otimes f_i)=\sum x_i f_i$

同理 $\phi(y)=\sum y_i f_i$

则 $\phi(x)=\phi(y)\Rightarrow x_i=y_i\ \forall i \Rightarrow x=y$

综上：ϕ 是双射 $F\otimes V\cong V$

而 $V\otimes F\cong F\otimes V$

故 $V\otimes F\cong F\otimes V\cong V$