《高等微积分 2》第六周习题课

1 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^2 光滑的函数, $u=f(x,y),x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$. 证明:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

2 设 $z=f(x,y),x=x(u,v),y=y(u,v)$ 都是 C^1 光滑的函数.

(1) 求 z 关于 u,v 的偏导数.

(2) 设 f 满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$. 令 $g(u,v)=f(u+v,u-v)$. 证明: $\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}$ 恒等于 0.

(3) 在 (2) 的条件下, 证明: 存在一元函数 $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 使得

$$f(x,y)=h(x+y),\quad \forall(x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

(4) 在 (2) 的条件下, 设 $f(x,0)>0,\forall x\in\mathbf{R}$. 证明:

$$f(x,y)>0,\quad \forall(x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

3 令 S 为平面上的单位圆周

$$S=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}.$$

(1) 设 $x(t),y(t)$ 都是可导函数, 且满足

$$(x(t),y(t))\in S,\quad \forall t.$$

证明: $x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0$.

(2) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数, 且 $f(1,0)=f(0,1)$. 证明: 存在两个不同点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S$, 使得

$$y_i\frac{\partial f(x_i,y_i)}{\partial x}-x_i\frac{\partial f(x_i,y_i)}{\partial y}=0,\quad i=1,2.$$

4 (作业题讲评)(1) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 处是否可微?

(2) 设 f 在 $(0,0)$ 点的某个开球邻域 U 中有定义, 且满足 $|f(x,y)|\leq x^2+y^2, \forall x,y\in U$. 证明: f 在 $(0,0)$ 处可微, 并计算它在 $(0,0)$ 处的微分.

(3) 设 g 在 $(0,0)$ 点的某个开球邻域 U 中有定义, 且满足 $|g(x,y)|\leq \sqrt{x^2+y^2}, \forall x,y\in U$. g 在 $(0,0)$ 处是否一定可微?

5 (作业题讲评) 给定 $n\times n$ 的对称实矩阵 $(A_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$(即对任何 i,j, 有 $A_{ij}=A_{ji}$). 定义二次函数 $Q:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为

$$Q(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}x_ix_j,\quad \forall(x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n.$$

(1) 求 Q 的微分.

(2) 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑的函数. 定义函数

$$g(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)e^{-\frac{1}{2}Q(x_1,...,x_n)}.$$

计算 g 的各个偏导数 $\frac{\partial g}{\partial x_1},...,\frac{\partial g}{\partial x_n}$.

6 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数 (即 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^2 光滑的). 定义函数 $g:\mathbf{R}\backslash\{0\}\to\mathbf{R}$ 为

$$g(h)=f(h,e^{-\frac{1}{h}}),\quad \forall h\neq 0.$$

(1) 求极限 $\lim\limits_{h\to 0^+} g(h)$.

(2) 求 $g'(h)$ 与 $g''(h)$.

(3) 求极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,e^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2}.$$

7 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^2 光滑的.

(1) 给定 y_1,y_2, 定义函数 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为

$$g(x)=f(x,y_2)-f(x,y_1),\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

求 $g'(x)$.

(2) 利用 (1) 中的函数 g, 证明: 对任何 x_1, x_2, y_1, y_2, 存在 x, y, 使得

$$f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_1) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

(3) 设 C^2 光滑函数 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 满足 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 0, \forall (x,y) \in \mathbf{R}$. 证明: 对任何 x_1, x_2, y_1, y_2, 有

$$f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_1) = 0.$$

8 设函数 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且函数值处处不等于零. 设 $u(x,y)$ 满足如下条件:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = u(x,y) \cdot \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

(1) 证明: 对任何 x_1, x_2, y_1, y_2, 有

$$u(x_1, y_1) \cdot u(x_2, y_2) = u(x_1, y_2) \cdot u(x_2, y_1).$$

(提示: 想办法利用第 2 题第 (3) 问的结论.)

(2) 证明: 存在两个一元函数 $p, q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 使得

$$u(x,y) = p(x) \cdot q(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

9 (1) 设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数, 它的 (全) 微分为 $df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. 证明: 如果 $P(x,y), Q(x,y)$ 都有连续的偏导数, 则有

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

(2) 设 $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 是某个二元函数的 (全) 微分, 求 a 的值.

10 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ 是 C^1 光滑映射, 且满足 *Cauchy-Riemann* 方程组:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证明: 极限

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i \cdot v(x+\Delta x, y+\Delta y)) - (u(x,y) + i \cdot v(x,y))}{\Delta x + i \cdot \Delta y}$$

存在, 其中 $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位. 请用 u 或 v 的偏导数表示上述极限.