复变函数例题

June 19, 2016

1 第一章：复数与复变函数

单位根 $z^n=1\Rightarrow z=e^{\frac{2k\pi i}{n}},k\in\mathbb{Z}$；$z^n=e^{i\alpha}\Rightarrow z=e^{\frac{\alpha+2k\pi}{n}i},k\in\mathbb{Z}$

1 ：求证$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$
证明：由$z\bar{z}=|z|^2$可知，

$$\begin{cases}|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z_1}+\bar{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z_2}+z_2\bar{z_2}\\|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z_1}-\bar{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar{z_2}-z_2\bar{z_2}\end{cases}$$

将上下两式相加即可得证

2 ：求$\max|z^n+\alpha|$以及取得最大值时z的取值，这里$n\in\mathbb{N}^+,\alpha\in\mathbb{C}$，已知$|z|\leqslant1$
解：首先有$|z^n+\alpha|\leqslant|z|^n+|\alpha|\leqslant1+|\alpha|$
第一个等号成立的条件：若α不为0，则z^n与α同向，即$z^n=k\alpha,k\in\mathbb{R}$；否则，对$z$没有限制
第二个等号成立的条件：$|z|^n=1\Rightarrow|z|=1\Rightarrow k|\alpha|=1(\alpha\neq0)$
因此：(1)若$\alpha=0$，则$\max|z^n+\alpha|=\max|z^n|=1$，此时$z=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi)$
(2)若$\alpha\neq0$，则$k|\alpha|=1\Rightarrow k=\frac{1}{|\alpha|}$，则$z^n=k\alpha=\frac{\alpha}{|\alpha|}$，设$arg(\alpha)=a$，则$z^n=e^{ia}\Rightarrow z=e^{\frac{arg(\alpha)+2t\pi}{n}i},t=0,1,2,\cdots n-1$

3 已知$|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$，且$z_1+z_2+z_3=0$，求证在复平面上z_1,z_2,z_3三点组成正三角形
证明：方法一：考虑多项式$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=$
$z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)z-z_1z_2z_3$
由$z_1+z_2+z_3=0$及$z_i\bar{z_i}=|z_i|^2=r^2(i=1,2,3)$可知
$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1z_2z_3(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3})=\frac{z_1z_2z_3}{r^2}(\bar{z_1}+\bar{z_2}+\bar{z_3})=0$
即$f(z)=z^3-z_1z_2z_3$，可见$f(z)$是分圆多项式，其三个根z_1,z_2,z_3将复平面上的单位圆三等分，因此它们组成正三角形
方法二：利用例1的结论，有$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=|-z_3|^2+|z_1-z_2|^2=r^2+|z_1-z_2|^2=$

$2(|z_1|^2+|z_2|^2)=4r^2$，所以$|z_1-z_2|^2=3r^2 \Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{3}r$，同理可证$|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=|z_1-z_2|=\sqrt{3}r$，因此它们组成正三角形

4 已知$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=r>0$，且$z_1+z_2+z_3+z_4=0$，求证在复平面上$z_1,z_2,z_3,z_4$四点组成矩形
证明：类似例3方法一，令$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)=$
$z^4-(z_1+z_2+z_3+z_4)z^3+(z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4)z^2-(z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4)z+z_1z_2z_3z_4$
且有$z_1+z_2+z_3+z_4=z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4=0$，因此$f(z)=z^4+(z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4)z^2+z_1z_2z_3z_4$，注意到该多项式只有偶次项，是个偶函数，因此如果$f(z_0)=0$，则必有$f(-z_0)=0$，因此不妨设$z_1=-z_2,z_3=-z_4$，因此这四个点组成矩形

2 第二章：复函数的导数

柯西－黎曼条件(C-R条件) 若复函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$(u,v为实值函数)，在点$z_0=(x_0,y_0)$处满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

则函数$f(z)$在点z_0处解析
推广：$f^{(n)}(z_0)=\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+i\frac{\partial^n v}{\partial x^n}(n\in\mathbb{N})$

1 ：$f(z)=|z|^2=x^2+y^2$在何处可导？
解：$u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=0$，由C-R条件，$f(z)$在点z处可导应满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2y=-0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

因此该函数仅在原点处可导

2 ：$f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$在何处可导？
解：$u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, v(x,y)=0$，由C-R条件，$f(z)$在点$z$处可导应满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \Rightarrow x=0, y\neq 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-0 \Rightarrow y=0, x\neq 0 \end{cases}$$

因此该函数处处不可导

3 ：$f(z)=x^2-y^2+2ixy$在何处可导？
解：$u(x,y)=x^2-y^2, v(x,y)=2xy$，由C-R条件，$f(z)$在点$z$处可导应满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow 2x=2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow -2y=-2y \end{cases}$$

因此该函数处处可导

$sin(z), cos(z)$的级数形式

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}=z\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2})$$

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2})$$

4 求$\cos(x+iy)(x,y\in\mathbb{R})$的实部和虚部
解： $\cos(x+iy)=\frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2}=\frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2}=$
$\frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x+i\sin x))+\frac{1}{2}(e^{y}(\cos x-i\sin x))=$
$\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})\cos x-\frac{i}{2}(e^y-e^{-y})\sin x$
所以$Re(\cos(x+iy))=\frac{1}{2}\cos x(e^y+e^{-y})$，$Im(\cos(x+iy))=-\frac{1}{2}\sin x(e^y-e^{-y})$

5 求$Ln(3+4i)$
解：$Ln(3+4i)=ln|3+4i|+iarg(3+4i)+2k\pi i=ln5+iarctan\frac{4}{3}+2k\pi i, k\in\mathbb{Z}$

6 求$Ln(i)$
解：$Ln(i)=ln|i|+iarg(i)+2k\pi i=0+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i=(2k+\frac{1}{2})\pi i, k\in\mathbb{Z}$

7 求$ln(-r), r\in\mathbb{R}^+$
解：$ln(-r)=ln|-r|+iarg(-r)=ln|r|+\pi i$

C-R条件推论 若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在复平面区域D内处处可导，则在区域D内有$u=const\ or\ v=const\Leftrightarrow f(z)=const$

8 证明：若$f(z)$在复平面内处处解析且不为0，$|f(z)|=const$或$arg(f(z))=const$，则$f(z)=const$

证明：设$g(z)=ln(f(z))=ln|f(z)|+arg(f(z))$，则$f(z)=e^{g(z)}$，由上述推论可知$g(z)=const$，从而$f(z)=const$

9 证明：$r^{\sqrt{2}}$有无穷多个值,$r\in\mathbb{C},r\neq 0$

证明：$r^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}Ln(r)}=e^{\sqrt{2}(ln|r|+iarg(r)+2k\pi i)}=|r|^{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}i(arg(r)+2k\pi)},k\in\mathbb{Z}$，令$z_k=e^{\sqrt{2}i(arg(r)+2k\pi)},k\in\mathbb{Z}$。假设$\exists m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z},m\neq n$使得$z_m=z_n$，则有$\frac{z_m}{z_n}=1=e^{\sqrt{2}i(arg(r)+2m\pi-arg(r)-2n\pi)}=e^{2\sqrt{2}(m-n)\pi i}$，即$2\sqrt{2}(m-n)\pi i=2k\pi i,k\in\mathbb{Z}$，则$\sqrt{2}=\frac{k}{m-n}$，与$\sqrt{2}$是无理数矛盾，因此$r^{\sqrt{2}}$有无穷多个值。

10 证明：$\sin z=C,C\in\mathbb{C}$一定有解

证明：设$z=x+iy,C=a+ib$且$x,y,a,b\in\mathbb{R}$，则有$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}=\frac{1}{2i}(e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x))=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x=a+ib$，也即

$$\begin{cases} a=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x \\ b=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x \end{cases}$$

(1).若$b=0$，则可令$\cos x=0$或$e^y=e^{-y}$

$(1)_{(1)}$.若$\cos x=0$，则$\sin x=\pm 1$，此时有$\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\pm a$，由于$\frac{e^y+e^{-y}}{2}$的值域为$[1,+\infty)$，因此当$C\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$时有解

$(1)_{(2)}$.若$e^y=e^{-y}$，即$y=0$，此时有$\sin x=a$，因此当$C\in[-1,1]$时有解

(2).若$b\neq 0$，则可知$\frac{e^y-e^{-y}}{2}\neq 0$，则需满足$(\frac{a}{\frac{e^y+e^{-y}}{2}})^2+(\frac{b}{\frac{e^y-e^{-y}}{2}})^2=1$，考虑函数$g(z)=(\frac{a}{\frac{e^y+e^{-y}}{2}})^2+(\frac{b}{\frac{e^y-e^{-y}}{2}})^2$，该函数为偶函数且有$\lim\limits_{z\to+\infty}g(z)=0,\lim\limits_{z\to+0}g(z)=+\infty$，且该函数在$(0,+\infty)$上连续，因此$g(z)$可取到1，因此当$C\notin\mathbb{R}$时有解

综上：$\sin z=C,C\in\mathbb{C}$总有解

3 第三章：复积分

复积分基础公式

$$\oint_{|z-z_0|=r>0}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases} 2\pi i,\ n=1 \\ 0,\ n\neq 1 \end{cases}$$

柯西积分公式

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

其中C为包含z_0的复平面上的简单闭曲线

1 求积分$\oint_{|z|=r>0}\frac{1-cos(z^3)}{z^m}dz$
解：将被积分式展开成$Taylor$级数，有：

$$\oint_{|z|=r>0}\frac{1-cos(z^3)}{z^m}dz=\oint_{|z|=r>0}\frac{1}{z^m}dz-\oint_{|z|=r>0}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(z^3)^{2k}}{(2k)!z^m}dz=$$

$$\oint_{|z|=r>0}\frac{1}{z^m}dz-\oint_{|z|=r>0}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^kz^{6k-m}}{(2k)!}dz$$

由复积分基础公式，可知

$$\oint_{|z|=r>0}\frac{1}{z^m}dz=\begin{cases}2\pi i,\ m=1\\ 0,\ m\neq 1\end{cases}$$

(1)若$6k\geqslant m$，由柯西－古萨定理可知

$$\oint_{|z|=r>0}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^kz^{6k-m}}{(2k)!}dz=0$$

(2)若$6k<m$，则有

$$\oint_{|z|=r>0}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!z^{m-6k}}dz=\begin{cases}\dfrac{2\pi i(-1)^k}{(2k)!},\ m=6k+1\\ 0,\ m\neq 6k+1,k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

综上所述，

$$\oint_{|z|=r>0}\frac{1-cos(z^3)}{z^m}dz=\begin{cases}-\dfrac{2\pi i(-1)^{\frac{m-1}{6}}}{(\frac{m-1}{3})!},\ m=6k+1,k\in\mathbb{N}^+\\ 0,\ otherwise\end{cases}$$

2 求积分$I_n=\oint_{|z|=r>0}\frac{\sin z}{z^n}dz$
解：方法一：由柯西积分公式$I_n=\oint_{|z|=r>0}\frac{\sin z}{z^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}(\sin z)^{(n-1)}|_0=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\sin(\frac{n-1}{2})\pi$
方法二：

$$I_n=\oint_{|z|=r>0}\frac{\sin z}{z^n}dz=\oint_{|z|=r>0}\frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^kz^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\oint_{|z|=r>0}\frac{dz}{z^{n-2k-1}}$$

当且仅当$n-2k-1=1$即$n=2k+2$时，$\oint_{|z|=r>0}\frac{dz}{z^{n-2k-1}}=2\pi i$，因此

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!}2\pi i\qquad n=2k,k\in\mathbb{Z}^+\\ 0\qquad otherwise\end{cases}$$

3 求证：$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{r^n}M(r)$，其中$M(r)$是$f(z)$在圆盘$|z-z_0| \leqslant r(r>0)$内的最大模
证明：在圆$|z-z_0|=r$上，可设$z=z_0+re^{i\theta},\theta\in[0,2\pi)$，则$dz=ire^{i\theta}d\theta,|dz|=rd\theta$
由柯西积分公式和例3的结论：

$$|f^{(n)}(z_0)| = |\frac{n!}{2\pi i}||\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=r}|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}||dz|$$

将$z=z_0+re^{i\theta}$代入可得

$$=\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\frac{f(z)}{(re^{i\theta})^{n+1}}|rd\theta \leqslant \frac{n!M(r)}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{n!}{r^n}M(r)$$

4 求证Liouville定理：若$f(z)$处处可导且有界，则$f(z)$为常数。
证明：由$f(z)$处处可导可知$f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_k z^k$，有界则说明$\exists M\in\mathbb{R}^+$使得$\forall z\in\mathbb{C},|f(z)|<M$，由柯西积分公式和例3的结论可知

$$c_k=\frac{f^{(k)}(z)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz, |c_k| = |\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz| \leqslant \frac{M}{r^k}$$

由于当$r\to+\infty$时仍然成立$f(z)<M$，所以$|c_k| \leqslant \lim\limits_{r\to+\infty}\frac{M}{r^k}=0,k=1,2,3,\cdots$，也即$c_k=0,k=1,2,3,\cdots$，因此$f(z)=f(0)=const$
用类似的方法可以证明：若$f(z)$处处可导且$\exists n\in\mathbb{N},\exists M_0>0$，使得当$|z|\geqslant R_0$时有

$$max|f(z)| \leqslant M_0\sum_{k=0}^{n}|z|^k$$

则$f(z)$为最高次数不超过n的多项式

4 第四章：级数

级数收敛的必要条件 如下
对于级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n, c_n\in\mathbb{C}$其收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to+\infty}|c_n|=0$

1 请举出3个复级数，使得它们分别在收敛圆周上处处不收敛、有的点收敛有的点不收敛、处处收敛。
解：(1)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\frac{1}{1-z},|z|<1,R=1$$

在收敛圆周(即复平面单位圆)上处处不收敛，因为此时有$|z|=1$，进而

$$\lim_{n\to+\infty}|z^n|=1\neq 0$$

不满足级数收敛的必要条件
(2)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n},|z|<1,R=1$$

若令$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$，则$f'(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}$，由于$f(0)=0$，因此$f(z)=\int_0^z\frac{dt}{1-t}=-ln(1-z)=ln|\frac{1}{1-z}|+iarg(\frac{1}{1-z})$
当$|z|=1$即$z=e^{i\theta}$时，$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\cos\theta-i\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$，可知$|\frac{1}{1-z}|=\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}$，$arg(\frac{1}{1-z})=\frac{\pi-\theta}{2}$，因此原级数$=\frac{1}{2}ln\frac{1}{2(1-cos\theta)}+i\frac{\pi-\theta}{2}$，可见该级数在收敛圆周上仅在$z=1$处发散，其它所有点条件收敛
(3)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2},|z|<1,R=1$$

该级数在收敛圆周上处处绝对收敛，因为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|\frac{z^n}{n^2}|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

由收敛圆周的性质可知以下推论：
若收敛圆周上一点绝对收敛，则该圆周上处处收敛

2 将$\frac{1}{z-b}$在$z_0=b$处展开成幂级数$\sum c_n(z-a)^n$的形式
解：$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{z-a+a-b}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}=$

$$-\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z-a}{b-a})^n=\sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n,(|\frac{z-a}{b-a}|<1)$$

3 化简函数$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{a^n}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{b^n}{z^n},(|a|>|b|)$
解：由幂级数收敛条件可知$f(z)$收敛域为$|b|<|z|<|a|$，因此

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{a^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^n}{z^n}=\frac{1}{1-\frac{z}{a}}+\frac{1}{1-\frac{b}{z}}=\frac{a}{a-z}+\frac{z}{z-b}$$

4 将函数$f(z)=e^z+e^{\frac{1}{z}}-1$在$z_0=0$处展开为洛朗级数，并说明收敛域

解：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n n!}-1=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{|n|!}$$

收敛域为$z\neq 0$

5 将函数$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(1-z)^2}$在$z_0=0$处展开为洛朗级数，并说明收敛域

解：

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n},z\neq 0$$

$$\frac{1}{(1-z)^2}=(\frac{1}{1-z})'=(\sum_{n=0}^{+\infty}z^n)'=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n,|z|<1$$

因此$f(z)$收敛域为$0<|z|<1$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n}\times\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n+1}{m!}z^{n-m}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+n+1}{m!})z^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e(n+2)z^n$$

6 将函数$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$在三种情况下$\begin{cases}0<|z|<1\\1<|z|<2\\|z|>2\end{cases}$在$z_0=0$处展开为洛朗级数

解：(1)

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{2})^n+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$$

(2)

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$$

其中$c_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{2^{n+1}}\ n\geqslant 0\\-1\ n<0\end{cases}$

(3)

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{2}{z})^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$$

5 第五章：留数

一阶奇点求留数的方法 如下
设函数$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，求留数$Res[f(z),z_0]$，若$P(z_0)\neq 0,Q(z_0)=0,Q'(z_0)\neq 0$，则$Res[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

1 求积分$\oint_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz$
解：方法一：被积函数有在积分区域内有2个奇点$0,-1$，因此

$$\oint_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz=2\pi i(Res[\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z},0]+Res[\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z},-1])$$

其中在$z_0=0$处将被积函数展开为洛朗级数

$$\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}=z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n}\times\sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{3+n-m}}{m!}$$

其洛朗级数中z^{-1}系数，满足$3+n-m=-1$即$m=4+n$

$$Res[\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z},0]=c_{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4)!}=e^{-1}-(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6})=e^{-1}-\frac{1}{3}$$

由一阶奇点求留数的方法可知$Res[\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z},-1]=\frac{(-1)^3e^{-1}}{1}=-e^{-1}$ 因此积分结果为$2\pi i(e^{-1}-\frac{1}{3}-e^{-1})=-\frac{2\pi i}{3}$
方法二：作变量替换$\frac{1}{z}$，注意到积分方向由逆时针改变为顺时针，因此变量替换后要加上负号

$$\oint_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz=-\oint_{|z|=\frac{1}{r}<1}\frac{e^z}{z^2(1+z)}d\frac{1}{z}=\oint_{|z|=\frac{1}{r}<1}\frac{e^z}{z^4(1+z)}dz$$

在积分区域内，只有0是被积函数的奇点，原式$=2\pi iRes[\frac{e^z}{z^4(1+z)},0]$

$$\frac{e^z}{z^4(1+z)}=\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\times\sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{n!}z^{n+m-4}$$

其洛朗级数中z^{-1}系数，满足$n+m-4=-1$即$m=3-n\geqslant 0$，所以$n\leqslant 3$
$Res[\frac{e^z}{z^4(1+z)},0]=c_{-1}=\frac{(-1)^3}{0!}+\frac{(-1)^2}{1!}+\frac{(-1)^1}{2!}+\frac{(-1)^0}{3!}=\frac{-1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{-1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$
因此积分结果为$2\pi ic_{-1}=-\frac{2\pi i}{3}$

2 求积分$\oint_{|z|=r>1}\frac{1}{1+z^n}dz=\oint_{|z|=r>1}\frac{z^{2n}}{1+z^n}dz$
解：方法一：由留数的定义可知

$$\oint_{|z|=r>1}\frac{1}{1+z^n}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[\frac{1}{1+z^n},z_k]$$

其中z_k是满足方程$z^n+1=0$的根，所以$z_k^n=-1,\frac{1}{z_k^{n-1}}=-z_k$，由一阶奇点求留数的方法可知，$Res[\frac{1}{1+z^n},z_k]=\frac{1}{nz_k^{n-1}}=-\frac{z_k}{n}$，因此

$$2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[\frac{1}{1+z^n},z_k]=-\frac{2\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k=-\frac{2\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i}=-\frac{2\pi i}{n}e^{\frac{\pi i}{n}}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$
$$=-\frac{2\pi i}{n}e^{\frac{\pi i}{n}}\frac{e^{\frac{2\pi i}{n}}(1-(e^{\frac{2\pi i}{n}})^n)}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}}}=\begin{cases}2\pi i,\ n=1\\ \ 0,\ n\neq 1\end{cases}$$

方法二：作变量替换$\frac{1}{z}$，注意到积分方向由逆时针改变为顺时针，因此变量替换后要加上负号

$$\oint_{|z|=r>1}\frac{1}{1+z^n}dz=-\oint_{|z|=\frac{1}{r}<1}\frac{1}{1+\frac{1}{z^n}}d\frac{1}{z}=\oint_{|z|=\frac{1}{r}<1}\frac{z^{n-2}}{1+z^n}dz$$

可见当$n\geqslant 2$时，被积函数在区域$|z|=\frac{1}{r}<1$内没有奇点，因此积分结果为0。当$n<2$时，原式

$$=\oint_{|z|=\frac{1}{r}<1}\frac{1}{(1+z^n)z^{2-n}}=\oint_{|z|=\frac{1}{r}<1}\frac{1}{z^{2-n}}\sum_{k=0}^{+\infty}(-z^n)^k=\oint_{|z|=\frac{1}{r}<1}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kz^{n(k+1)-2}$$

可见仅当$n(k+1)-2=-1$时对应的项才能积分出$2\pi i$，其它情况积分结果均为0，因此有$n=\frac{1}{k+1}\leqslant 1$，而$n\in\mathbb{Z}$，因此只能是$n=1,k=0$，此时积分结果为$2\pi i$，当$n\neq 1$时积分结果为0

3 求积分$\oint_{|z|=r>0}\frac{1-cos2z^6}{z^n}dz,n\in\mathbb{N}$
解：参照第三章例1

4 求积分$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta},(a,b\in\mathbb{R},a>|b|\geqslant 0)$
解：当$b=0$时积分结果为$\frac{2\pi}{a}$，下设$b\neq 0$。利用$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$作变量替换$z=e^{i\theta}$，则有$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$，所以$d\theta=\frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz(a+b(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}))}=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{bz^2+2az+b}$$

方程$bz^2+2az+b=0$有两实根$z_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，且由韦达定理可知$z_1z_2=1$而$|z_2|>1$，因此$0<|z_1|<1$，即被积函数在积分区域内仅有一个奇点$z_1$，由一阶奇点求留数的方法可知原式$=-2i*2\pi i\frac{1}{2bz_1+2a}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$，且$b=0$时也满足该式

5 求积分$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta},a,b\in\mathbb{R}$
解：利用例4的结论

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{2d\theta}{a^2(1+\cos 2\theta)+b^2(1-\cos 2\theta)}=\int_0^{2\pi}\frac{d2\theta}{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2\theta}$$

$=2*\frac{2\pi}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}}=\frac{2\pi}{ab}$

6 求积分$J_{a,b}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}$和$K_{a,b}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta d\theta}{(a+b\cos\theta)^2},(a,b\in\mathbb{R},a>|b|\geqslant 0)$
解：利用例4的结论，有$\frac{\partial I_{a,b}}{\partial a}=\int_0^{2\pi}\frac{-d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=-J_{a,b}=\frac{\partial}{\partial a}(\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}})=-\frac{2a\pi}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$，因此$J_{a,b}=\frac{2a\pi}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$，且$\frac{\partial I_{a,b}}{\partial b}=\int_0^{2\pi}\frac{-\cos\theta d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=-K_{a,b}=\frac{\partial}{\partial b}(\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}})=-\frac{2b\pi}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$，因此$K_{a,b}=\frac{2b\pi}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$

7 求积分$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}$
解：在复平面上半平面内以原点为圆心、R为半径作半圆$C_R:z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]$，构造闭曲线$\Gamma_R=[-R,R]\cup C_R$，则有

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}=\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{1+x^{2n}}+\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}=2\pi i(\sum_{k=1}^{n}Res[\frac{1}{1+z^{2n}},z_k])$$

注意到z_k是方程$1+z^{2n}=0$在复平面上半平面内的解，因此只有n个而不是$2n$个，进而

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}=0,\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=2I_n=2\pi i(\sum_{k=1}^{n}Res[\frac{1}{1+z^{2n}},z_k])$$

由$\frac{1}{z_k^{2n-1}}=-z_k$和由一阶奇点求留数的方法有

$$I_n=\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[\frac{1}{1+z^{2n}},z_k])=\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2nz_k^{2n-1}}=-\frac{\pi i}{2n}\sum_{k=1}^{n}z_k=-\frac{\pi i}{2n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{(2k-1)\pi}{2n}i}$$

$$=-\frac{\pi i}{2n}e^{-\frac{\pi i}{2n}}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k\pi i}{n}}=-\frac{\pi i}{2n}e^{-\frac{\pi i}{2n}}\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}(1-(e^{\frac{\pi i}{n}})^n)}{1-e^{\frac{\pi i}{n}}}=\frac{\frac{\pi}{2n}}{\frac{e^{\frac{\pi i}{2n}}-e^{-\frac{\pi i}{2n}}}{2i}}=\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

推论：$I_{r,n}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}}=\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$

8 求积分$J_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$
解：在复平面上半平面内以原点为圆心、R为半径作半圆$C_R:z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]$，构造闭曲线$\Gamma_R=[-R,R]\cup C_R$，则有

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{(1+z^2)^n}=\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{(1+x^2)^n}+\int_{C_R}\frac{dz}{(1+z^2)^n}=2\pi i(Res[\frac{1}{(1+z^2)^n},i])$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{(1+z^2)^n}=0,\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=2J_n=2\pi i(Res[\frac{1}{(1+z^2)^n},i])$$

$\frac{1}{(1+z^2)^n}=\frac{1}{(z-i)^n}\frac{1}{(z+i)^n}$，设该函数在$z_0=i$处展开的洛朗级数的留数为$c_{-1}$，设

$$\frac{1}{(z+i)^n}=\sum_{k=0}^{+\infty}d_k(z-i)^k$$

可见$d_{n-1}=c_{-1}$，下面用两种办法求d_{n-1}
(1)$d_k=\frac{(\frac{1}{(z+i)^n})^{(k)}|_{z=i}}{k!}$，则$d_{n-1}=\frac{-n\times(-n-1)\times\cdots\times(-n-(n-1)+1)}{(n-1)!}\times\frac{1}{(2i)^{2n-1}}=\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{i2^{2n-1}}$
(2)由$(1+w)^\alpha=1+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha\times(\alpha-1)\times\cdots\times(\alpha-k+1)}{k!}w^k,|w|<1$可得$\frac{1}{(z+i)^n}=\frac{1}{(z-i+2i)^n}=\frac{1}{(2i)^n}(1+\frac{z-i}{2i})^{-n}$，因此$d_{n-1}=\frac{1}{(2i)^n}\frac{-n\times(-n-1)\times\cdots\times(-n-(n-1)+1)}{(n-1)!}\frac{1}{(2i)^{n-1}}=\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{i2^{2n-1}}$
因此$J_n=\pi ic_{-1}=\frac{\pi C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}}$
可以发现$\frac{J_{n+1}}{J_n}=\frac{2n-1}{2n}$
推论：$J_{r,n}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(r^2+x^2)^n}=\frac{1}{r^{2n-1}}J_n$

9 求积分$I_{a,b}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},a>0,b>0$
解：在复平面上半平面内以原点为圆心、R为半径作半圆$C_R:z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]$，构造闭曲线$\Gamma_R=[-R,R]\cup C_R$，则有

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}+\int_{C_R}\frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

$$=2\pi i(Res[\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},ai]+Res[\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},bi])$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=0,\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=2I_{a,b}$$

$$=2\pi i(Res[\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},ai]+Res[\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},bi])$$

由一阶奇点求留数的方法有$Res[\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},ai]=Res[\frac{1}{x^4+(a^2+b^2)x^2+a^2b^2},ai]=\frac{1}{4(ai)^3+2(a^2+b^2)ai}=\frac{1}{2ai(b^2-a^2)}$，同理用$a$替换$b$有$Res[\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},bi]=\frac{1}{2bi(a^2-b^2)}$，因此

$$I_{a,b}=\pi i(\frac{1}{2ai(b^2-a^2)}+\frac{1}{2bi(a^2-b^2)})=\frac{\pi}{2(a^2-b^2)}(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})=\frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

由本题可验证$I_{r,r}=J_{r,2}=\frac{\pi}{4r^3}$

10 求积分$I_{a,k}=\int_0^{+\infty}\frac{xsinkx}{x^2+a^2}dx,k>0,a>0$
解：在复平面上半平面内以原点为圆心、R为半径作半圆$C_R:z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]$，构造闭曲线$\Gamma_R=[-R,R]\cup C_R$令

$$J_{a,k}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2}dx=\lim_{R\to+\infty}(\int_{-R}^{+R}\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2}dx+\int_{C_R}\frac{ze^{ikz}}{z^2+a^2}dz)=2\pi i\lim_{R\to+\infty}Res[\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2},ai]$$

由一阶奇点求留数的方法

$$2\pi i\lim_{R\to+\infty}Res[\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2},ai]=2\pi iRes[\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2},ai]=2\pi i\frac{aie^{-ak}}{2ai}=\frac{\pi i}{e^{ak}}$$

注意到

$$J_{a,k}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos kx}{x^2+a^2}dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin kx}{x^2+a^2}dx=2iI_{a,k}$$

因此$I_{a,k}=\frac{\pi}{2e^{ak}}$，该函数是关于$a$的连续函数，因此可得

$$\lim_{a\to0^+}I_{a,k}=I_{0,k}=\int_0^{+\infty}\frac{sinkx}{x}dx=\lim_{a\to0^+}\frac{\pi}{2e^{ak}}=\frac{\pi}{2}$$

于是有以下结论

$$\int_0^{+\infty}\frac{sinkx}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\ k>0\\ 0,\ k=0\\ -\frac{\pi}{2},\ k<0\end{cases}$$

11 求积分$I_{a,b,k}=\int_0^{+\infty}\frac{xsinkx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx,k>0,a>0,b>0$
解：类似例8，令$J_{a,b,k}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ikx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$，可知

$$I_{a,b,k}=\frac{1}{2}Im(J_{a,b,k})=\frac{\pi}{2}(\frac{1}{e^{ak}(b^2-a^2)}+\frac{1}{e^{bk}(a^2-b^2)})=\frac{\pi(e^{ak}-e^{bk})}{2e^{(a+b)k}(a+b)(a-b)}$$

12 求积分$S=\int_0^{+\infty}\frac{xsinkx}{(x^2+a^2)^2}dx,k>0,a>0$
方法一：利用例9的结果，设$f(a)=\int_0^{+\infty}\frac{xsinkx}{x^2+a^2}dx$，则有

$$f^{'}(a)=\int_0^{+\infty}\frac{-2axsinkx}{(x^2+a^2)^2}dx=-2aS=(\frac{\pi}{2e^{ak}})'=-\frac{k\pi}{2e^{ak}}$$

所以$S=\frac{k\pi}{4ae^{ak}}$
方法二：利用例10的结果，则有

$$S=\lim_{b\to a}\int_0^{+\infty}\frac{xsinkx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\lim_{b\to a}\frac{\pi(e^{ak}-e^{bk})}{2e^{(a+b)k}(a+b)(a-b)}=\lim_{b\to a}\frac{\pi ke^{ak}}{2e^{(a+b)k}(a+b)}=\frac{k\pi}{4ae^{ak}}$$

注：上述等式中使用了洛必达法则

13 求积分$I_{a,k}=\int_0^{+\infty}\frac{coskx}{x^2+a^2}dx$
解：类似例9，令$J_{a,k}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx$，则有

$$I_{a,k}=\frac{1}{2}J_{a,k}=\frac{1}{2}2\pi i\frac{e^{-ka}}{2ai}=\frac{\pi}{2ae^{ka}}$$

6 第六章：解析映射

分式线性映射 :
$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d},(a,b,c,d\in\mathbb{C},ad\neq bc)$，它的矩阵表示为$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},det(A)\neq 0$
两个分式线性映射的叠加：$u=g(w),w=f(z)$都是分式线性映射，且其矩阵表示分别为A_1,A_2，则$u=g(f(z))$也是分式线性映射，且其矩阵表示为A_1A_2
分式线性映射的导数$\frac{dw}{dz}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$
分式线性映射保广义圆

1 分式线性映射$w=\frac{az+b}{cz+d}$满足什么条件时，能将单位圆$|z|=1$映射成直线？
解：将单位圆映射成直线，由于直线是无界的，所以分式线性映射的分母可以取到0，即一定存在单位圆上一点z_0满足$|z_0|=1,cz_0+d=0$，也即$|c|=|d|$。反之，如果$|c|=|d|$，则$\exists z_0=-\frac{d}{c},|z_0|=1$使得分母为0。因此分式线性映射将单位圆映射成直线的充要条件是$|c|=|d|$

广义圆的对称点 :
直线的对称点：与原定义相同，即如果z_1和z_1'关于直线l对称，则有z_1和$z_1^{'}$到直线l的距离相等且z_1和$z_1^{'}$的连线垂直于l

圆的对称点：圆$Pr: z=z_0+re^{i\theta}, \theta\in[0,2\pi)$，如果$z_1$和$z_1^{'}$关于圆$Pr$对称，要满足$z_1^{'}-z_0=\lambda(z_1-z_0), \lambda>0$，且$|z_1-z_0||z_1^{'}-z_0|=r^2$，由这两个条件可得

$$\lambda=|\frac{z_1^{'}-z_0}{z_1-z_0}|=\frac{r^2}{|z_1-z_0|^2}\Rightarrow z_1^{'}=z_0+\frac{r^2}{|z_1-z_0|^2}(z_1-z_0)\Rightarrow z_1^{'}=z_0+\frac{r^2}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}$$

当Pr为单位圆$(z_0=0, r=1)$时，有$z_1^{'}=\frac{1}{\overline{z_1}}$
圆心的对称点在无穷远处
分式线性映射保广义圆对称点

2 求分式线性映射，将单位圆P_1映射成单位圆P_2，且将P_1内的一点z_1映射成P_2的圆心(即$w_1=0$)
解：由于分式线性映射保广义圆对称点，而z_1被映射为0，可知z_1关于P_1的对称点$z_1^{'}$被映射到了无穷大，因此可设所求的分式线性映射为

$$w=\alpha\frac{z-z_1}{z-z_1^{'}}=\alpha\frac{z-z_1}{z-\frac{1}{\overline{z_1}}}=-z_1\alpha\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}=C\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}$$

由于是将单位圆映射为单位圆，因此当$|z|=1$时必有$|w|=1$，并且$|z|=1\Leftrightarrow z\overline{z}=1$，从而

$$|w|=1=|C\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}|=|C||\frac{z-z_1}{z\overline{z}-\overline{z_1}z}|=\frac{|C|}{|z|}|\frac{z-z_1}{\overline{z}-\overline{z_1}}|=|C|$$

注意到上式中$|z_1|<1$(因为z_1在单位圆内)，$|z|=1$，所以$z-z_1\neq 0$. 因此所求的分式线性映射为$w=e^{i\theta}\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}, \theta\in[0,2\pi), |z_1|<1$

3分式线性映射的第一个不变式 证明例2中的分式线性映射满足不变式$\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$
解：

$$1-|w|^2=1-|e^{i\theta}\frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}|^2=\frac{(1-\overline{z_1}z)(1-z_1\overline{z})-(z-z_1)(\overline{z}-\overline{z_1})}{|1-\overline{z_1}z|^2}=\frac{(1-|z|^2)(1-|z_1|^2)}{|1-\overline{z_1}z|^2}$$

$$\frac{dw}{dz}=e^{i\theta}\frac{1-\overline{z_1}z_1}{(1-\overline{z_1}z)^2}\Rightarrow|\frac{dw}{dz}|=\frac{1-|z_1|^2}{|1-\overline{z_1}z|^2}$$

所以$\frac{|dw|}{|dz|}=\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}\Rightarrow\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$
由于$\frac{|dw|}{|dz|}\geqslant 0$，且分式线性映射具有可逆性，因此可知$|z|<(=,>)1$时就有$|w|<(=,>)1$，于是该分式线性映射将单位圆内(单位圆外，单位圆上)的点仍然映射到单位圆内(单位圆外，单位圆上)的点

4 求分式线性映射，将圆$P_1 : z = z_0 + re^{i\theta}$映射成圆$P_2 : w = w_0 + Re^{i\theta}$，且将$P_1$内的一点$z_1$映射成$P_2$的圆心$w_0 (\theta \in [0, 2\pi))$
作线性映射$z' = \frac{z-z_0}{r}$，将P_1映射为单位圆P_1'，作线性映射$w' = \frac{w-w_0}{R}$，将P_2映射为单位圆P_2'，再利用例2中的映射$w' = e^{i\theta}\frac{z'-z_1'}{1-\overline{z_1'}z'}, \theta \in [0, 2\pi)$将$P_1'$映射为$P_2'$，其中$z_1' = \frac{z_1-z_0}{r}$，这样从$z$到$w$经过三重映射的叠加，结果为$w = w_0 + rRe^{i\theta}\frac{z-z_1}{r^2-(z-z_0)(\overline{z_1}-\overline{z_0})}, \theta \in [0, 2\pi)$

5 求分式线性映射，将上半平面$Im(z) > 0$映射到单位圆盘$|w| < 1$，且将上半平面内一点z_1映射到圆心
解：由于分式线性映射保广义圆对称点，可以看成将实轴映射到单位圆周，而z_1被映射为圆心，可知z_1关于实轴的对称点$z_1' = \overline{z_1}$被映射到了圆心的对称点即无穷远点，因此可设所求的分式线性映射为

$$w = \alpha\frac{z - z_1}{z - \overline{z_1}}$$

当$z = x \in \mathbb{R}$时，有$|w| = 1$，所以

$$|w| = 1 = |\alpha||\frac{x - z_1}{x - \overline{z_1}}| = |\alpha|$$

因此所求的分式线性映射为$w = e^{i\theta}\frac{z-z_1}{z-\overline{z_1}}, \theta \in [0, 2\pi), Im(z_1) > 0$

6 求分式线性映射，将半平面P映射到圆盘$P : w < w_0 + Re^{i\theta}$，且将$P$内一点$z_1$映射到圆心，该半平面的边界直线方程为$y \cos\alpha = (x - x_0) \sin\alpha, x_0 \in \mathbb{R}, \alpha \in [0, \pi)$
作线性映射$z' = e^{-i\alpha}(z - x_0)$，将半平面$P$映射到上半平面$Im(z') > 0$，作线性映射$w' = \frac{w-w_0}{R}$，将$P$映射为单位圆盘$P'$，再利用例5的映射$w' = e^{i\theta}\frac{z'-z_1'}{z'-\overline{z_1'}}, \theta \in [0, 2\pi)$，将上半平面映射到单位圆盘，其中$z_1' = e^{-i\alpha}(z_1 - x_0)$，这样从$z$到$w$经过三重映射的叠加，结果为$w = w_0 + Re^{i\theta}\frac{z-z_1}{z-x_0-e^{2i\alpha}(\overline{z_1}-x_0)}$

7 求证：若$a, b, c, d \in \mathbb{R}$，则满足将上半平面仍然映射成上半平面的分式线性映射$w = \frac{az+b}{cz+d}$的充要条件是$ad - bc > 0$
证明：方法一：由z表示上半平面可知若$z = x + iy$则$y > 0$

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{ax + b + iy}{cx + d + iy} = \frac{(ax + b + iy)(cx + d - iy)}{(cx + d)^2 + y^2} = u + iv$$

其中$v = \frac{y(ad-bc)}{(cx+d)^2+y^2}$，如果$w$仍表示上半平面，则有$v > 0$，说明$y$与$ad-bc$同号，则$ad-bc > 0$，反之亦然
方法二：由$a, b, c, d \in \mathbb{R}$可知该分式线性映射将实轴$x$映射到实$u$，因此只需检测映射之后的平面是上半平面还是下半平面，这个检测可以通过证明$\frac{du}{dx} > 0$来证明。

$$\frac{du}{dx} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0$$

因此条件$ad-bc>0$是充要条件。
注：若没有限制$a,b,c,d\in\mathbb{R}$，则该命题不成立，例如$a=d=i,b=c=0$，此时该映射为恒等映射，当然满足将上半平面仍然映射成上半平面，但是此时$ad-bc=-1<0$

指数映射　映射$w=e^z$将带状区域$0<Im(z)<\pi$映射到上半平面$Im(w)>0$，其中在原坐标系中的直线$y=y_0$映射到新坐标系中的无起点射线$\theta=y_0$

8　求一个映射，将由两条直线$y\cos\alpha=(x-x_1)\sin\alpha$和$y\cos\alpha=(x-x_2)\sin\alpha,(x_1<x_2\in\mathbb{R},\alpha\in[0,\pi))$中间围成的带状区域(不含边界)映射到单位圆盘$|w|<1$
解：作线性映射$z_1=(z-x_2)e^{-i\alpha}$，将原来的斜带状区域映射为水平带状区域；令$h=(x_2-x_1)\sin\alpha$，作线性映射$z_2=\frac{z_1\pi}{h}$，将水平带状区域映射为宽度为π的标准带状区域；作指数映射$z_3=e^{z_2}$，将标准带状区域映射为上半平面；作分式线性映射$w=\frac{z_3-i}{z_3+i}$，将上半平面映射为单位圆盘。综上，该映射为$w=\frac{e^{\frac{(z-x_2)\pi e^{-i\alpha}}{(x_2-x_1)\sin\alpha}}-i}{e^{\frac{(z-x_2)\pi e^{-i\alpha}}{(x_2-x_1)\sin\alpha}}+i}$

9　求一个映射，将区域$D:\{|z-a|>a,|z-b|<b\mid 0<a<b\}$映射为单位圆盘$|w|<1$
解：由于分式线性映射保广义圆，并且如果该广义圆经过无穷远点则该广义圆即为直线，因此将原点映射为无穷远点，将$(2a,0)$映射为原点，作分式线性映射$z_1=\frac{z-2a}{z}$，将原月牙状区域映射为垂直带状区域；作线性映射$z_2=iz_1$，将垂直带状区域映射为水平带状区域；令$h=\frac{b-a}{a}$，作线性映射$z_3=\frac{z_2\pi}{h}$，将水平带状区域映射为宽度为π的标准带状区域；作指数映射$z_4=e^{z_3}$，将标准带状区域映射为上半平面；作分式线性映射$w=\frac{z_4-i}{z_4+i}$，将上半平面映射为单位圆盘。综上，该映射为$w=\frac{e^{\frac{i\pi a(z-2a)}{z(b-a)}}-i}{e^{\frac{i\pi a(z-2a)}{z(b-a)}}+i}$

幂映射　映射$w=z^\alpha=r^\alpha e^{i\alpha\theta}(\alpha>1)$，在原点处不一定保角

10　求一个映射，将扇形区域$D:\{0<|z|<r,0<arg(z)<\theta\mid r>0,\theta\in(0,\pi)\}$映射为单位圆盘$|w|<1$
解：作幂映射$z_1=z^{\frac{\pi}{\theta}}$，将扇形区域映射到上半圆盘；将该上半圆盘的点$(-r^{\frac{\pi}{\theta}},0)$映射为原点，点$(r^{\frac{\pi}{\theta}},0)$映射为无穷远点，作分式线性映射$z_2=\frac{z_1+r^{\frac{\pi}{\theta}}}{r^{\frac{\pi}{\theta}}-z_1}$，将上半圆盘映射到第一象限(注意该分式线性变换$b=d=r^{\frac{\pi}{\theta}},a=1,c=-1$，因此$a,b,c,d\in\mathbb{R}$且$ad-bc=2r^{\frac{\pi}{\theta}}>0$，即该变换将实轴的正向依然映射到实轴的正向)；做幂映射$z_3=z_2^2$，将第一象限映射到上半平面；作分式线性映射$w=\frac{z_3-i}{z_3+i}$，将上半平面映射为单位圆盘。综上，该映射为$w=\frac{(\frac{z^{\frac{\pi}{\theta}}+r^{\frac{\pi}{\theta}}}{z^{\frac{\pi}{\theta}}-r^{\frac{\pi}{\theta}}})^2-i}{(\frac{z^{\frac{\pi}{\theta}}+r^{\frac{\pi}{\theta}}}{z^{\frac{\pi}{\theta}}-r^{\frac{\pi}{\theta}}})^2+i}$

11 求一个映射，将位于上半平面内的弓形区域D映射为单位圆盘$|w| < 1$，该弓形区域的弦的两个端点为$(A,0),(B,0),A < B \in \mathbb{R}$，点$(A,0)$处该弓形的弧的切线与实轴正向夹角$\theta \in (0,\pi)$

解：将点$(A,0)$映射到原点，将点$(B,0)$映射到无穷远点，作分式线性映射$z_1 = \frac{z-A}{B-z}$，将弓形区域映射到区域$0 < arg(z_1) < \theta$；做幂变换$z_2 = z_1^{\frac{\pi}{\theta}}$，将一个角形区域映射到上半平面；作分式线性映射$w = \frac{z_2-i}{z_2+i}$，则将上半平面映射为单位圆盘。综上，该映射为$w = \frac{(\frac{z-A}{B-z})^{\frac{\pi}{\theta}}-i}{(\frac{z-A}{B-z})^{\frac{\pi}{\theta}}+i}$

以下内容不考：

分式线性映射的第二个不变式 ：分式线性映射$w = \frac{az+b}{cz+d}$满足不变式

$$\frac{\frac{w-w_1}{w-w_2}}{\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}} = \frac{\frac{z-z_1}{z-z_2}}{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}$$

交比和四点共圆的条件 定义四个点的交比$< z_1,z_2,z_3,z_4 >= \frac{\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}}{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}$，则$z_1,z_2,z_3,z_4$四点共圆(广义圆)的充要条件是$< z_1,z_2,z_3,z_4 >\in \mathbb{R}$

Lagrange插值多项式 ：经过点$(z_1,w_1),\cdots(z_n,w_n)$共$n$个点的$n-1$次多项式函数，定义

$$P_k(z) = \frac{(z-z_1)\cdots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\cdots(z-z_n)}{(z_k-z_1)\cdots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\cdots(z_k-z_n)}$$

可见

$$P_k(z_j) = \begin{cases} 1, \ j = k \\ 0, \ j \neq k \end{cases}$$

则有拉格朗日插值多项式

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{n} w_i P_i(z)$$