《高等微积分 1》第一次习题课材料

1 设 A, B 是非空有界的实数集合. 定义

$$A+B=\{x+y|x\in A, y\in B\},\quad AB=\{xy|x\in A, y\in B\}.$$

(1) 证明:

$$\inf(A+B)=\inf A+\inf B,\quad \sup(A+B)=\sup A+\sup B.$$

(2) 设 A, B 都是由非负实数构成的集合. 证明:

$$\inf(AB)=\inf A\cdot\inf B,\quad \sup(AB)=\sup A\cdot\sup B.$$

2 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 证明:

(1) 对于正奇数 k, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{A}$;

(2) 对于正偶数 k, 如果 $A>0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{A}$.

3 (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

(2) 给定正整数 k 及实数 $a_0, ..., a_{k-1}$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_0}.$$

4 (1) 给定正整数 k 及实数 $a>1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}$.

(2) 给定正数 α, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$.

5 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q<1$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

(2) 给定 $q>e$ 其中 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{n}{q})^n}{n!}$.

6 (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2})$.

(2) 设 $a_1,...,a_m$ 是给定的正数, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^{-n}+...+a_m^{-n})^{-1/n}.$$

7 给定正数 x. 证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^1}{1!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)$ 存在.

8 给定正整数 $k\geq 2$ 与实数 $a>0$. 定义数列为:

$$x_1>0,\quad x_{n+1}=\frac{k-1}{k}x_n+\frac{a}{kx_n^{k-1}},\quad \forall n\geq 1.$$

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求出该极限.

9 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+...+a_n}{n}.$$