线性代数第六次作业

特征值和特征向量

1\. (a) (1) $\det(\lambda I - A_1) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-3)-2 = \lambda^2-7\lambda+10 = (\lambda-2)(\lambda-5)$

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5$

λ_1 对应的特征向量：$\lambda_1 I - A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\dim Nul(\lambda_1 I - A_1) = 1$

取特征向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

λ_2 对应的特征向量：$\lambda_2 I - A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\dim Nul(\lambda_2 I - A_1) = 1$

取特征向量 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $\det(\lambda I - A_2) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & -6 \\ 0 & \lambda-2 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -5 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 4$

λ_1 对应的特征向量 $\lambda_1 I - A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\dim Nul(\lambda_1 I - A_2) = 1$

取特征向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

λ_2 对应的特征向量 $\lambda_2 I - A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 31 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\dim Nul(\lambda_2 I - A_2) = 1$

取特征值 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} -31 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

λ_3 对应的特征向量 $\lambda_3 I - A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\dim Nul(\lambda_3 I - A_2) = 1$

取特征值 $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) (1) 构建矩阵 $P_1 = [\alpha_1\ \alpha_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

则 $C = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ +1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & +2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & +2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(2) 构建矩阵 $P = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] = \begin{bmatrix} 5 & -31 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$[P|I] = \begin{bmatrix} 5 & -31 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -31 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{37}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 & \frac{37}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{37}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{37}{2} \end{bmatrix} = [I|P^{-1}]$

$\therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{37}{2} \end{bmatrix}$

$C = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{37}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -31 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 10 & 74 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -31 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ □

2. 证明 (a) 假设不同特征值对应特征向量线性相关 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m=0$ ①

其中 x_i 为 λ_i 对应的特征向量，c_i 不全为0，不妨令 $c_m\neq 0$

则 $c_1Ax_1+c_2Ax_2+\cdots+c_mAx_m=0$

$\Rightarrow c_1\lambda_1x_1+c_2\lambda_2x_2+\cdots+c_m\lambda_mx_m=0$

由① $c_1\lambda_1x_1+c_2\lambda_1x_2+\cdots+c_m\lambda_1x_m=0$

作差 $c_2(\lambda_1-\lambda_2)x_2+c_3(\lambda_1-\lambda_3)x_3+\cdots+c_m(\lambda_1-\lambda_m)x_m=0$ ②

$\Rightarrow c_2(\lambda_1-\lambda_2)Ax_2+c_3(\lambda_1-\lambda_3)Ax_3+\cdots+c_m(\lambda_1-\lambda_m)Ax_m=0$

$\Rightarrow c_2(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_2x_2+c_3(\lambda_1-\lambda_3)\lambda_3x_3+\cdots+c_m(\lambda_1-\lambda_m)\lambda_mx_m=0$

由② $c_2(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_2x_2+c_3(\lambda_1-\lambda_3)\lambda_2x_3+\cdots+c_m(\lambda_1-\lambda_m)\lambda_2x_m=0$

作差 $c_3(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)x_3+\cdots+c_m(\lambda_1-\lambda_m)(\lambda_2-\lambda_m)x_m=0$

类似，以此进行有限次步骤可得 $c_m(\lambda_1-\lambda_m)(\lambda_2-\lambda_m)\cdots(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x_m=0$

而 $\lambda_m\neq\lambda_i(1\leq i\leq m-1)$ 且 $c_m\neq 0$

则 $x_m=0$，明显与 x_m 为 λ_m 特征向量矛盾！

则假设不成立，不同特征值对应的特征向量线性无关 □

(b) $|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}\lambda IP-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|$

$=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|P^{-1}||P||\lambda I-A|=|P^{-1}P||\lambda I-A|$

$=|I||\lambda I-A|=|\lambda I-A|$

即 $|\lambda I-B|=|\lambda I-A|$ A、B 特征多项式一样

3. 证明：由上次作业题4(a) 对于分块矩阵 $M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$ 若A可逆且 $AC=CA$ 则 $|M|=|AD-CB|$

则 $|\lambda I-AB|=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda I_{n\times n}&B\\A&I_{n\times n}\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda I_{n\times n}&B\\A&I_{n\times n}\end{bmatrix}^T\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda I_{n\times n}&A\\B&I_{n\times n}\end{bmatrix}\right)=|\lambda I-BA|$

即 $|\lambda I-AB|=|\lambda I-BA|$

则 AB 与 BA 的特征多项式相同 □

4. ① 解：设该矩阵为 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 不妨令 $P=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 易知P可逆

$P^{-1}AP=A\Rightarrow AP=PA\Rightarrow\begin{bmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{bmatrix}$

$\begin{cases}a+c=a\\b+d=a+b\\d=c+d\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}c=0\\a=d\end{matrix}$

令 $P=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ 时 $AP=PA\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{bmatrix}\Rightarrow b=0$

则 $A=\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}=aI$ 即A为单位矩阵的a倍 $(a\in\mathbb{R})$ □

② 解：设该矩阵为 A，不妨令 $P=\begin{bmatrix}1&&&&0\\0&1&&&\\\vdots&&\ddots&&\\0&\cdots&1_{ij}&\ddots&\\0&\cdots&&&1\end{bmatrix}$ 即除对角元素及 $(P)_{ij}$ 为1外全为0，P可逆

$P^{-1}AP=A\Rightarrow AP=PA\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\\a_{i1}+a_{j1}&a_{i2}+a_{j2}&\cdots&a_{in}+a_{jn}\\\vdots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1j}+a_{1i}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2j}+a_{2i}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nj}+a_{ni}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$

则 $a_{jk}=0\ (k\neq j)$ $a_{ki}=0\ (k\neq i)$ 且 $a_{ii}=a_{jj}$

将 i, j $(i\neq j)$ 取遍 $1\sim n$ 可得 $\begin{cases} a_{ij}=0 & (i\neq j) \\ a_{ij}=a_{11} & (i=j) \end{cases}$

则 $A=a_{11}I_{n\times n}$，即 A 为单位矩阵的 a 倍 $(a\in R)$. □

5.

(a) 证明:

i. $A\alpha=\lambda\alpha$

$\Rightarrow B^kA\alpha = B^{k-1}(BA)\alpha = B^{k-1}(AB)\alpha = \cdots = AB^k\alpha = \lambda B^k\alpha$

$\Rightarrow A(B^k\alpha)=\lambda(B^k\alpha)$ 则 $B^k\alpha$ 为 A 的特征向量, 对应特征值为 λ.

ii. 反证法, 假设 $\exists k\leq m-1$ s.t. $\exists c_0\alpha+c_1B\alpha+c_2B^2\alpha+\cdots+c_kB^k\alpha=0$ (c_i 不全为0,

则 $c_0B\alpha+c_1B^2\alpha+c_2B^3\alpha+\cdots+c_kB^{k+1}\alpha=0$.

则 $0\alpha+c_0B\alpha+c_1B^2\alpha+c_2B^3\alpha+\cdots+c_kB^{k+1}\alpha=0$

即 $\{\alpha, B\alpha, \dots, B^{k+1}\alpha\}$ 线性相关

类似地 $B^i\alpha$ $(i\geq k)$ 与 $\{\alpha, B\alpha \dots B^k\alpha\}$ 线性相关

则 $\dim \operatorname{span}\langle\alpha, B\alpha\dots\rangle < k+1\leq m$. 与条件矛盾

则 $\forall k\leq m-1$ $c_0\alpha+c_1B\alpha+c_2B^2\alpha+\cdots+c_kB^k\alpha\neq 0$ (c_i 不全为0)

因此 $\{\alpha, \dots B^{m-1}\alpha\}$ 线性无关, 构成线性子空间的一组基.

iii. 不等于, 举反例 $A=B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$\det(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda-1&0\\0&\lambda-1\end{bmatrix}=(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda=1$

$\lambda=1$ 时 $\lambda I-A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

则 λ 的几何重数为 2

$\dim \operatorname{span}\langle\alpha_1, B\alpha_1, B^2\alpha_1, \dots\rangle = \dim \operatorname{span}\langle\alpha_1\rangle = 1 \neq 2$ 则 ...

(c) 设 $\exists$ 可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{bmatrix}$ 且将 λ 值相同且相邻的矩阵分为分块矩阵

则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\Lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\Lambda_s\end{bmatrix}$ 其中 $\Lambda_i=\begin{bmatrix}\lambda_i&&\\&\ddots&\\&&\lambda_i\end{bmatrix}=\lambda_i I$.

$AB \Rightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}\Lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\Lambda_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1s}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B_{s1}&B_{s2}&\cdots&B_{ss}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1s}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B_{s1}&B_{s2}&\cdots&B_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\Lambda_s\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}\Lambda_1B_{11}&\Lambda_1B_{12}&\cdots&\Lambda_1B_{1s}\\\Lambda_2B_{21}&\Lambda_2B_{22}&\cdots&\Lambda_2B_{2s}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\\Lambda_nB_{s1}&\Lambda_nB_{s2}&\cdots&\Lambda_nB_{ss}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}\Lambda_1&B_{12}\Lambda_2&\cdots&B_{1s}\Lambda_s\\B_{21}\Lambda_1&B_{22}\Lambda_2&\cdots&B_{2s}\Lambda_s\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B_{s1}\Lambda_1&B_{s2}\Lambda_2&\cdots&B_{ss}\Lambda_s\end{bmatrix}$

$i\neq j$ 时 $\Lambda_iB_{ij}=B_{ij}\Lambda_j$

$\Rightarrow \lambda_iB_{ij}=\lambda_jB_{ij}$ 且 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 则 $B_{ij}=0$

$\therefore P^{-1}BP=\begin{bmatrix}B_{11}&&&0\\&B_{22}&&\\&&\ddots&\\0&&&B_{ss}\end{bmatrix}$ 为准对称矩阵

而由定理,

若 B 可对角化, 则 $\forall B$ 任意一个不变子空间 M, $B|_M$ 也可对角化

此处 B 可化为准对称矩阵 则 $\exists M_i$ s.t. $B_{ii}=B|_{M_i}$ 且 $\bigoplus_{i=1}^{s} M_i=R^n$

$\therefore B|_{M_i}=B_{ii}$ 也可对角化 即 $\exists R_i^{-1}B_{ii}R_i=C_{ii}$ 使 C_{ii} 是对角矩阵.

$\therefore Q=\begin{bmatrix}R_1&&0\\&\ddots&\\0&&R_s\end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1}\begin{bmatrix}R_1^{-1}&&0\\&\ddots&\\0&&R_s^{-1}\end{bmatrix}$

此时 $(PQ)^{-1}BPQ=Q^{-1}PBPQ=\begin{bmatrix}C_{11}&&0\\&\ddots&\\0&&C_{ss}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_{B1}&&&0\\&\lambda_{B2}&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_{Bn}\end{bmatrix}$

$(PQ)^{-1}APQ=Q^{-1}PAPQ=Q^{-1}\begin{bmatrix}\Lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\Lambda_s\end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix}R_1^{-1}\Lambda_1R_1&&0\\&\ddots&\\0&&R_s^{-1}\Lambda_sR_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\Lambda_s\end{bmatrix}$

则 AB 可在 PQ 的作用下同时对角化 □.

6、(a) 证明. $Ax=\lambda x \Rightarrow (\lambda I-A)x=0$. 设 n_λ 为 λ 作为特征值的代数重数

$\lambda=0$ 时 $(\lambda I-A)x=0$ 的解空间即 $Ax=0$ 的解空间.

而 $Ax=0$ 非零解的个数为 $n-r$. 这些解即为 λ 的特征向量.

则 $\lambda=0$ 对应 $(n-r)$ 个线性无关的特征向量, 几何重数 $=n-r$

而代数重数 $\geq$ 几何重数 $=n-r$.

考虑到 $\sum_i n_i = n_0+\sum_{(i\neq 0)} n_i = n$

则 $\sum_{(i\neq 0)} n_i = n-n_0 \leq r$ 又有 $n_i \geq 1$.

即最多有 r 个非0特征值 □

(b) 不是.

反例: $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$

$\lambda=1$ 时 $\lambda I-A=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\dim Nul(\lambda I-A)=1$

只能有1个线性无关特征向量, 无法构成3个线性无关特征向量组成的矩阵

则A不可对角化 □

(c) 证明: 已知 $|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ (其中包含重根)

只需证 $|\lambda I-A^{-1}|=(\lambda-\frac{1}{\lambda_1})(\lambda-\frac{1}{\lambda_2})\cdots(\lambda-\frac{1}{\lambda_n})$ 因为A可逆 则 $\lambda\neq 0$, $|A|\neq 0$

即证 $|\frac{1}{\lambda}I-A^{-1}|=(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_1})(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_2})\cdots(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_n})$

$$=\frac{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)}{\lambda^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}$$

$$=(-1)^n\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)}{\lambda^n|A|}$$

$C_n=(-1)^n\det A=(-1)^n\lambda_1\cdots\lambda_n$

$\lambda_1,\cdots\lambda_n=\det A$

$$=(-1)^n\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)}{\lambda^n|A|}$$

即证 $(-1)^n\lambda^n|A|\,|\frac{1}{\lambda}I-A^{-1}|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$.

即证 $(-1)^n\lambda^n|A|\,|\frac{1}{\lambda}I-A^{-1}|=|\lambda I-A|$

而 $(-1)^n\lambda^n|A|\cdot|\frac{1}{\lambda}I-A^{-1}|=\lambda^n\begin{vmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{vmatrix}|\frac{1}{\lambda}I-A^{-1}|=\begin{vmatrix}\lambda w_1\\\lambda w_2\\\vdots\\\lambda w_n\end{vmatrix}|\frac{1}{\lambda}I-A^{-1}|=|\lambda A||\frac{1}{\lambda}I-A^{-1}|$

$=(-1)^n|A-\lambda I|=|\lambda I-A|$ □.

2、对称矩阵

1.1 $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3&-2\\-2&\lambda-3\end{vmatrix}$

$\lambda=2$ 为A的一个特征值

$\lambda=2$ 时 $\lambda I-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{bmatrix}$ 则一个特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

令 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow AP=P\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$ 令 $A_1=\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix}$

$\det(\lambda I-A_1)=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2\\-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2-4=\lambda^2-6\lambda+5=(\lambda-5)(\lambda-1)$

$\lambda=1$ 为A_1的一个特征值

$\lambda=1$ 时 $\lambda I-A_1=\begin{bmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{bmatrix}$ 则一个特征向量为 $x_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$.

令 $P_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$ $\Rightarrow P_1^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$

则 $P_1^{-1}A_1P_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\5&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0\\0&10\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}}=A_2 \Rightarrow A_1=P_1A_2P_1^{-1}$

$AP=P\begin{bmatrix}2&0\\0&A_1\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}1&0\\0&P_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&P_1^{-1}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A\left(P\begin{bmatrix}1&0\\0&P_1\end{bmatrix}\right)=\left(P\begin{bmatrix}1&0\\0&P_1\end{bmatrix}\right)\underline{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}}$ #

1.2 $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&0\\1&\lambda-2&1\\0&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-2&1\\1&\lambda-2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0\\1&\lambda-2\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+3)-(\lambda-2)$

$=(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2)$

$\lambda=2$ 是A的一个特征值

$\lambda=2$ 时 $\lambda I-A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ 一个特征向量为 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\0\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$.

令 $P=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow P^{-1}=P^T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\end{bmatrix}$

$AP=P\begin{bmatrix}2&0\\0&A_1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2&0\\0&A_1\end{bmatrix}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\sqrt2&0&-\sqrt2\\\sqrt2&-\sqrt2&\sqrt2\\-1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&-\sqrt2\\0&-\sqrt2&2\end{bmatrix}$

则 $A_1=\begin{bmatrix}2&-\sqrt2\\-\sqrt2&2\end{bmatrix}$

$\det(\lambda I-A_1)=\begin{vmatrix}\lambda-2&\sqrt2\\\sqrt2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2-2=\lambda^2-4\lambda+2$

$\lambda=2+\sqrt2$ 是A_1的一个特征值

$\lambda=2+\sqrt2$ $\lambda I-A_1=\begin{bmatrix}\sqrt2&\sqrt2\\\sqrt2&\sqrt2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 一个特征向量为 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$

令 $P_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$ $\Rightarrow P_1^{-1}=P_1^T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$

$P_1^{-1}A_1P_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-\sqrt2\\-\sqrt2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-\sqrt2\\-\sqrt2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2+\sqrt2&-2-\sqrt2\\2-\sqrt2&2-\sqrt2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4+2\sqrt2&0\\0&4-2\sqrt2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+\sqrt2&0\\0&2-\sqrt2\end{bmatrix}$

$A\left(P\begin{bmatrix}1&0\\0&P_1\end{bmatrix}\right)=\left(P\begin{bmatrix}1&0\\0&P_1\end{bmatrix}\right)\underline{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2+\sqrt2&0\\0&0&2-\sqrt2\end{bmatrix}}$ #

2. 证明：实对称矩阵相似于一个对角矩阵 $C=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$

则 $\exists$ 可逆矩阵 P s.t. $P^{-1}AP=C$.

P可逆 $\Rightarrow$ P行等价于I , $P=(E_pE_{p-1}\cdots E_1)I$

则 $(E_pE_{p-1}\cdots E_1)^{-1}A(E_pE_{p-1}\cdots E_1)=C$.

$E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_p^{-1}AE_pE_{p-1}\cdots E_1=C$.

左乘为行变换，右乘为列变换，均不改变矩阵的秩

则 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}C$.

而 A.C 具有相同的特征多项式，易知 C非0特征值数目 $=\operatorname{rank}C$.

$\therefore$ A非0特征值数目 $=$ C非0特征值数目 $=\operatorname{rank}C=\operatorname{rank}A$ □.