14、16（为什么是0.9

统计部分自测参考解答

1	2	3	4	5	6
D	B	C	D	B	A
7	8	9	10	11	12
A	A	B	A	C	C
13	14	15	16	17	18
D	D	B	C	A	D
19	20	21	22	23	24
A	D	B	D	C	C

1．设 $X_1,X_2,\dots,X_n(n>1)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2$，则_____。

（A）$n\bar{X}\sim N(0,1)$．　　　　（B）$nS^2\sim\chi^2(n)$．

（C）$\dfrac{(n-1)\bar{X}}{S}\sim t(n-1)$．　　　　（D）$\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$．

【答案】选 D

【解析】 $Var\left(n\bar{X}\right)=n^2Var\left(\bar{X}\right)=n^2\cdot\dfrac{1}{n}=n$ ，排除（A），

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，排除（B），

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}=\dfrac{\sqrt{n-1}\,\bar{X}}{S}\sim t(n-1)$，排除（C）．

依题知 $X_i\sim N(0,1)$, 则 $X_1^2\sim\chi^2(1),\sum_{i=2}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-1)$, 则

$$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}=\frac{X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2\Big/n-1}\sim F(1,n-1).$$

2．设 $X_1,X_2,\dots,X_n(n>1)$ 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的样本，则 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\left(X_k-\mu\right)^2}{\sigma^2}\sim$_____。

(A) $\chi^2(n-1)$　　(B) $\chi^2(n)$　　(C) $t(n-1)$　　(D) $F(1,n)$

【答案】选 B,

【解析】　$\dfrac{X_k-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，　$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(X_k-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$。

3. 设随机变量 T 服从自由度为 1 的 t 分布，则 $P(T\le 1)=$________。

?

(A)　0.5　　(B) 0.25　　(C)　0.75　　(D) 0.6.

【答案】选 C

【解析】设 X,Y 相互独立，且均服从 $N(0,1)$，则 $\dfrac{X}{|Y|}$ 服从自由度为 1 的 $t-$分布，

于是　$P(T\le 1)=P(T\le 0)+P(0<T<1)=0.5+\dfrac{1}{2}P(|T|<1)$

$$=0.5+0.5\times P(X^2<Y^2)=0.5+0.5\times 0.5=0.75$$

记录

4. 设随机变量 $X\sim t(3)$，$Y=1/X^2$。则下述判断中正确的是（　）。

(A) $Y\sim\chi^2(3)$　　(B) $Y\sim\chi^2(2)$　　(C) $Y\sim F(1,3)$　　(D) $Y\sim F(3,1)$

【答案】选 D

【解析】设 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim\chi^2(3)$，X_1、X_2 相互独立，

$$X=\frac{X_1}{\sqrt{X_2/3}}，\quad Y=\frac{1}{X^2}=\frac{X_2/3}{X_1^2/1}\sim F(3,1)。$$

对的不看

5. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自参数为 2 的 Poisson 总体的简单随机样本，令

$B_n^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则 $E(B_n^2)=$（　）。

(A) $\dfrac{n-1}{n}$　　(B) $\dfrac{2(n-1)}{n}$　　(C) 2　　(D) 1

【答案】选 B

$$E(B_n^2)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=E\left(\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=\frac{n-1}{n}Var(X)=\frac{2(n-1)}{n}$$

6. 设随机变量ξ服从自由度为(1, 1)的F分布，则$P(\xi \le 1)=$（　　）。

（A）　0.5　　（B）0.25　　（C）　0.75　　（D）0.6.

【答案】选 A

【解析】设$X_1 \sim \chi^2(1)$，$X_2 \sim \chi^2(1)$，X_1、X_2相互独立，所以

$$P(X_1 \le X_2)=P(X_1 \ge X_2)=\frac{1}{2},\quad P(\xi \le 1)=P\left(\frac{X_1}{X_2} \le 1\right)=P(X_1 \le X_2)=\frac{1}{2}。$$

7. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则

$E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2\right)=$（　　）。

整理

(A) $\frac{n}{n-1}\sigma^2$　　(B) σ^2　　(C) $\frac{n+1}{n}\sigma^2$　　(D) $\frac{n}{n+1}\sigma^2$

【答案】选 A

【解析】$E\left((X_k-\mu)^2\right)=Var(X_k)=\sigma^2$，$E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2\right)=\frac{n}{n-1}\sigma^2$

8. 设总体$X \sim U(1,\theta)$，参数$\theta>1$未知，$X_1, X_2, \ldots, X_n (n>1)$是来自$X$的简单随机样本，则参数$\theta$的极大似然估计量$\hat{\theta}$是（　　）。

（A）　$\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$　　（B）$2\bar{X}-1$

（C）　$\frac{n+1}{n}\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$　　（D）0.6.

【答案】选 A

【解析】　总体$X \sim U(1,\theta)$，其概率密度为$p(x,\theta)=\frac{1}{\theta-1}I_{1\le x\le\theta}$

似然函数$L(\theta)=\frac{1}{(\theta-1)^n}$，$L'(\theta)=\frac{-n}{(\theta-1)^{n+1}}<0$，$L(\theta)$递减，

又$X_1, \cdots, X_n \in (1,\theta)$，故$\theta$的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。

9. $X_1, X_2, \ldots, X_n (n>1)$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本，

$\bar{X}=\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$，$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2}$。则下列关系正确的是（ ）。

(A) $E(S)>\sigma$　(B) $E(S)<\sigma$　(C) $E(S)=\sigma$　(D) 不确定

【答案】选 B

【解析】$Var(S)=E\left(S^2\right)-E(S)^2=\sigma^2-E(S)^2>0$，所以 $E(S)<\sigma$。

10. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自总体 $X \sim B(1,p)$ 简单随机样本，$0<p<1$ 是未知参数。则以下选项中（ ）是 p^2 的无偏估计量。

(A) $\overline{X}-\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$　(B) $\overline{X}-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$　(C) $\overline{X}^2$　(D) $\left[E\left(\overline{X}\right)\right]^2$

【答案】选 A

【解析】$E\left(\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2\right)=Var(X)=p(1-p)$，　$E\left(\overline{X}\right)=p$，所以

$E\left(\overline{X}-\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2\right)=p^2$。

11-12 设某企业的每日赢利（单位：万元）服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$。

11. 如果方差 $\sigma^2=9$，对期望作置信度 95%的双侧对称置信区间估计，欲使置信区间的长度不超过 2，样本容量至少应该达到（ ）

(A) 25　(B) 30　(C) 35　(D) 40

12. 如果方差未知，随机抽测 9 日，得数据的均值和标准差分别为 40.5 万元和 1.2 万元. 依据抽测数据. 以 95%的把握估计最小平均赢利为（ ）。

(A) 20　(B) 30　(C) 40　(D) 50

【答案】11 选 C，12 选 C

【解析】 11. $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{3}\sim N(0,1)$，

$$P\left(u_{0.025}\le\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{3}\le u_{0.975}\right)=0.95$$

期望μ置信度95%的双侧对称置信区间估计是$\left[\bar{X}-\frac{3u_{0.975}}{\sqrt{n}}, \bar{X}+\frac{3u_{0.975}}{\sqrt{n}}\right]$

区间长度不超过2，则$\frac{6u_{0.975}}{\sqrt{n}} \le 2 \Rightarrow n \ge (3\times 1.96)^2 = 34.6$。

12. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$， $P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \le t_{0.95}(n-1)\right) = 0.95$

$\Rightarrow$ 95%置信度的置信下限为

$$\mu \ge \bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.95}(n-1) = \bar{X}-\frac{S\cdot t_{0.95}(8)}{3} = 40.5-\frac{1.2\times 1.8595}{3} = 39.756$$

不是指数分布要另外算

95%的把握估计最小平均赢利为39.756。

13. 设总体X的概率密度函数为$p(x)=\frac{1}{\lambda}e^{\frac{-(x-1)}{\lambda}}$，$x \ge 1$，其中$\lambda > 0$是未知参数。样本容量$n$足够大时样本均值$\bar{X}$的近似分布为（　）。

(A) $N(\lambda, \lambda^2)$　(B) $N(\lambda+1, \lambda^2)$　(C) $N\left(\lambda, \frac{\lambda^2}{n}\right)$　(D) $N\left(\lambda+1, \frac{\lambda^2}{n}\right)$

【答案】选D

【解析】$E(X)=\int_1^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{(x-1)}{\lambda}}dx = 1+\lambda$， $Var(X)=\lambda^2 \Rightarrow Var(\bar{X})=\frac{\lambda^2}{n}$

由中心极限定理，当n充分大时，$\bar{X}$近似服从如下正态分布$\bar{X} \overset{\cdot}{\sim} N\left(\lambda+1, \frac{\lambda^2}{n}\right)$。

14. 设总体密度为$p(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \ge \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}$，其中$\theta \in (-\infty, +\infty)$为未知参数，$X_1, \dots, X_5$为来自该总体简单随机样本。如果选取$\left(\min_{1\le i\le 5}\{X_i\}-1, \quad \min_{1\le i\le 5}\{X_i\}\right)$为$\theta$的置信区间，则它的置信系数为（　）。

(A) $1-1/e^2$　(B) $1-1/e$　(C) $1-e^{-n/2}$　(D) $1-e^{-n}$

【答案】选D
【解析】

$$P\left(\min X_i - 1 < \theta < \min X_i\right) = P\left(\theta < \min X_i < \theta + 1\right) = P\left(\min X_i > \theta\right) - P\left(\min X_i > \theta + 1\right)$$
$$= \left[P\left(X > \theta\right)\right]^n - \left[P\left(X > \theta + 1\right)\right]^n$$
$$= 1 - e^{-n}$$

15. 设总体 X 服从均匀分布 $U\left[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right]$，其中 $\theta \in □$ 是未知参数，$X_1, \ldots, X_n$ 为来自该总体简单随机样本。取 $\left[\bar{X} - \frac{5}{\sqrt{12n}}, \bar{X} + \frac{5}{\sqrt{12n}}\right]$ 为 θ 的置信区间，则由切比雪夫（Chebyshev）不等式，这个置信区间的置信水平至少为（　）。

(A) 0.90　(B) 0.96　(C) 0.85　(D) 0.98

【答案】选 B

【解析】$P\left(\left|\bar{X} - \theta\right| \le \frac{5}{\sqrt{12n}}\right) \ge 1 - \frac{12n}{25} \times \mathrm{Var}(\bar{X}) = 1 - \frac{1}{25} = 0.96$。

16. 对总体 $N(\mu, \sigma^2)$（参数均未知）的样本，$n = 9$，测得样本均值 $\bar{x} = 7.68$，样本方差 $s^2 = 0.64$。参数 μ 的置信度 95%的置信下限为（　）。

(A) 0　(B) 6.5　(C) 7.2　(D) 9.6

【答案】选 C

【解析】由 $\frac{\sqrt{9}}{S}\left(\bar{X} - \mu\right) □ t(8)$，$P\left(\frac{3\left(\bar{X} - \mu\right)}{S} \le t_{0.95}(8)\right) = 0.95$，

得 μ 的 95%置信度的置信下界为

$$\bar{x} - t_{0.95}(8)\frac{s}{3} = 7.68 - t_{0.95}(8) \times \frac{\sqrt{0.64}}{3} = 7.68 - \frac{0.8}{3} \times 1.860 = 7.184$$

17. 对正态总体的均值进行假设检验，如果在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，接受原假设 $H_0 : \mu = \mu_0$，则在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下，下列结论中正确的是（　）。

(A) 必接受 H_0　(B) 必拒绝 H_0

(C) 可能接受，也可能拒绝 H_0　(D) p 值小于 0.01

【答案】选 A

【解析】显著性水平$\alpha=0.05$下接受了原假设，说明检验值没有落在最异常的5%范围，更没有落在最异常的1%范围。

更一般的，p值大于显著性水平时接受原假设。显著性水平$\alpha=0.05$下接受了原假设，说明检验的p值大于0.05，对1%的显著性，一定接受。

18. 给定总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$\sigma^2$已知，给定样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，对总体均值$\mu$进行检验，令$H_0:\mu=\mu_0$ vs $H_1:\mu\neq\mu_0$，则（　）。

(A) 在显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.01$时也拒绝H_0.

(B) 在显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时拒绝H_0.

(C) 在显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.01$接受H_0.

(D) 在显著性水平$\alpha=0.05$接受H_0，则$\alpha=0.01$时也接受H_0.

【答案】选D

【解析】p值大于显著性水平时接受原假设。所以显著性水平$\alpha=0.05$接受H_0，则$\alpha=0.01$时也接受H_0。

对于A，C选项的条件，在显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，说明p值小于0.05。如果p值在0.01—0.05之间时，$\alpha=0.01$水平下接受H_0，如果p值小于0.01时，$\alpha=0.01$水平下拒绝H_0。所以仅知道在显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，不能确定$\alpha=0.01$水平下接受还是拒绝。

19-20

$X_1,X_2,\cdots,X_{25}$是来自正态总体$N(\mu,4)$的样本，$\bar{x}$是样本均值。对假设检验问题$H_0:\mu\geq 3$ vs $H_1:\mu<3$。若取拒绝域为$\bar{x}<2.487$，

19. 则检验的显著性水平为（　），

(A) 0.1　(B) 0.05　(C) 0.01　(D) 0.03

【答案】19选A

【解析】$\alpha=P(\bar{X}<2.487|\mu=3)=P\left(\frac{\bar{X}-3}{\sqrt{\frac{4}{25}}}<\frac{2.487-3}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\right)=\Phi\left(\frac{2.487-3}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\right)$

$=\Phi(-1.28)=0.1$

20. 当 $\mu=1.91$时，该检验犯第二类错误（受伪）的概率=（ ）。

(A) 0.1 (B) 0.05 (C) 0.01 (D) 0.075

20 选 D

【解析】第二类错误（受伪）的概率

$$\beta=P(\bar{X}\geq 2.487|\mu=1.91)=P\left(\frac{\bar{X}-1.91}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\geq\frac{2.487-1.91}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\middle|\mu=1.91\right)=1-\Phi\left(\frac{2.487-1.91}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\right)$$

$=1-\Phi(1.44)=0.075$

21-22

设 $X_1,\dots,X_{100}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本。对以下原假设和备择假设

$H_0:\mu=0$; $H_1:\mu>0$，若取拒绝域为$\{(x_1,\dots,x_{100}):\bar{x}>0.4\}$，

21. 则此检验犯第一类错误的概率为（ ），

(A) $2\Phi(2)-1$ (B) $1-\Phi(2)$ (C) $2\Phi(1.6)-1$ (D) $1-\Phi(1.6)$

22. 当 $\mu=1$ 时此检验犯第二类错误的概率为（ ）。

(A) $2\Phi(1.8)-1$ (B) $1-\Phi(1.8)$ (C) $2\Phi(3)-1$ (D) $1-\Phi(3)$

【答案】21 选 B，22 选 D

【解析】 第一类错误 $P_{\mu=0}(\bar{X}>0.4)=P_{\mu=0}\left(\frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{4}{100}}}>2\right)=1-\Phi(2)$，

第二类错误 $P_{\mu=1}(\bar{X}\le 0.4)=P_{\mu=1}\left(\dfrac{\bar{X}-1}{\sqrt{\dfrac{4}{100}}}\le -3\right)=\Phi(-3)=1-\Phi(3)$

23-24

对正态总体 $N(\mu,4^2)$ 考虑如下假设检验问题，$H_0:\mu=6$ vs $H_1:\mu\ne 6$ ，若样本容量为 36，

23. 则检验统计量 $\bar{x}=7.2$ 对应的 p 值为（　　）。

(A) $2\Phi(1.8)-1$　　(B) $1-\Phi(1.8)$　　(C) $2(1-\Phi(1.8))$　　(D) $\Phi(1.8)$

24. 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，对原假设检验的结果是（　　），此时如果犯了错误时第（　　）类错误。

(A) 接受，一　(B) 拒绝，一　(C) 接受，二　(D) 拒绝，二

【答案】23 选 C，24 选 C

【解析】检验的 p 值 $=P(|\bar{X}-6|>1.2)=P\left(\left|\dfrac{\bar{X}-6}{\frac{4}{6}}\right|>\dfrac{1.2}{\frac{2}{3}}\right)=2(1-\Phi(1.8))$

$2(1-\Phi(1.8))=2(1-0.964)=0.072>0.05$，所以接受原假设。此时犯错误，就是接受是错误的，是第二类错误（受伪）。