理科线性代数第十次作业

一、张量的进一步练习

1. (a) 设该对称二次型对应矩阵为A

对称二次型退化 $\Leftrightarrow Null(g)\neq 0$

$\Leftrightarrow \exists v\neq 0 \quad \forall w\in\mathbb{R}^n \quad g(v,w)=0$

$\Leftrightarrow \exists v\neq 0 \quad \forall w\in\mathbb{R}^n \quad w^TAv=0$

$\Leftrightarrow \exists v\neq 0 \quad Av=0$

$\Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ A 不满秩

$\Leftrightarrow$ A 有特征值0

$\Rightarrow$ 对称二次型非退化 $\Leftrightarrow$ A无零特征值

则该命题正、反均成立

(b) 若 g 表示欧几里得内积，取$\mathbb{R}^3$三个基 $e_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $e_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

则在 e_1,e_2,e_3 下 g 矩阵为 $A=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ 此矩阵非退化

设 $W=span\{e_1,e_2\}$ 则 g_W 矩阵 $A'=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$ 此矩阵退化

$\therefore$ 以上为一个g非退化而g_W退化的例子

(c) pf: 先证 $W\cap W^\perp=\{0\}$ 设W一组基为$\{e_1\dots e_m\}$ 扩充为V的基 $\{e_1\dots e_n\}$

$\forall x\in W \Rightarrow x=c_1e_1+\dots+c_me_m$

$x\in W^\perp \Rightarrow \begin{cases} g(x,e_1)=0 \Rightarrow c_1g(e_1,e_1)+c_2g(e_1,e_2)+\dots+c_mg(e_1,e_m)=c_1G_{11}+c_2G_{12}+\dots+c_mG_{1m}=0 \\ \vdots \\ g(x,e_m)=0 \Rightarrow c_1g(e_1,e_m)+c_2g(e_2,e_m)+\dots+c_mg(e_m,e_m)=c_1G_{1m}+c_2G_{2m}+\dots+c_mG_{mm}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow G_W\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_m\end{bmatrix}=0$ 而 G_W 满秩 $\Rightarrow \begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_m\end{bmatrix}$ 只有零解 即 $x=0$

$\therefore W\cap W^\perp=\{0\}$

再证 $\dim W+\dim W^\perp=\dim V$

$\forall x\in W^\perp \Rightarrow x=c_1e_1+\dots+c_ne_n$

$\begin{cases} g(x,e_1)=0 \Rightarrow c_1g(e_1,e_1)+c_2g(e_1,e_2)+\dots+c_ng(e_1,e_n)=c_1G_{11}+\dots+c_nG_{1n}=0 \\ \vdots \\ g(x,e_m)=0 \Rightarrow c_1g(e_1,e_m)+c_2g(e_2,e_m)+\dots+c_ng(e_n,e_m)=c_1G_{m1}+\dots+c_nG_{mn}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow G_W'\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=0$ (G_W'是G前m行与n列构成的矩阵，$m\times n$)

则该方程解空间维数为n-m

$\Rightarrow \dim W^\perp=n-m$

$\Rightarrow \dim W+\dim W^\perp=\dim V$

$\Rightarrow W\oplus W^\perp=V$

pf: $g_{W^\perp}$是非退化的

选W一组基 $\{e_1\dots e_m\}$ $W^\perp$一组基$\{e_{m+1}\dots e_n\}$

在这组基下 g 矩阵 G，g_W矩阵 G_1，$g_{W^\perp}$矩阵G_2

则 $G=\begin{pmatrix}G_1&B\\C&G_2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow rank\,G\leq rank\,G_1+rank\,G_2$

$\Rightarrow n\leq m+rank\,G_2$

$\Rightarrow rank\,G_2\geq n-m$

而 $rank\,G_2\leq n-m$

$\Rightarrow rank\,G_2=n-m$ 满秩 $\Rightarrow g_{W^\perp}$非退化

2、(a) pf: 对于ω对应的矩阵 A $A\alpha=\lambda\alpha$ ①

取共轭 $A\bar{\alpha}=\bar{\lambda}\bar{\alpha}$

转置 $-\bar{\alpha}^T A=\bar{\lambda}\bar{\alpha}^T$ ②

①左乘$\bar{\alpha}^T$ $\bar{\alpha}^T A\alpha=\lambda\bar{\alpha}^T\alpha$ ③

②右乘α $-\bar{\alpha}^T A\alpha=\bar{\lambda}\bar{\alpha}^T\alpha$ ④

③+④得 $(\lambda+\bar{\lambda})\bar{\alpha}^T\alpha=0$ $\forall\alpha$成立

$\Rightarrow \lambda+\bar{\lambda}=0$

$\Rightarrow Re(\lambda)=0$

(b) i. pf: 证法同 1.(c)

先证 $W\cap W^{\perp}=\{0\}$ 再证 $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V$

$\Rightarrow W\oplus W^{\perp}=V$

$\Rightarrow rank\,W_2=n-m$ 满秩

$\Rightarrow \omega_{W_2}$ 非退化

ii. 1) $Null(g)=0 \Rightarrow$ 对于$V_1\neq0$ $\exists V_2'\neq0$ s.t $\omega(V_1,V_2')\neq0$

不妨设 $\omega(V_1,V_2')=C$ $(C\neq0)$

则 $g(V_1,\frac{V_2'}{C})=1$

$\Rightarrow V_2=V_2'/C$ 即为所求

2) 反证法 假设 $V_2=aV_1$

$\omega(V_1,V_1)=-\omega(V_1,V_1)\Rightarrow\omega(V_1,V_1)=0$

则 $\omega(V_1,V_2)=\omega(V_1,aV_1)=a\omega(V_1,V_1)=0\neq1$ 矛盾

$\therefore V_1,V_2$ 线性无关

iii. $\omega(V_1,V_2)=1$

$\omega(V_2,V_1)=-\omega(V_1,V_2)=-1$

$\omega(V_1,V_1)=\omega(V_2,V_2)=0$

$\Rightarrow \omega_W$ 对应矩阵为 $\Sigma=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ 非退化

iv. 在V中任取一非零向量V_{11} 由ii可得到V_{12} 从而 $W_1=span\{V_{11},V_{12}\}$

考虑 $V\setminus W_1=W_1^{\perp}$ 类似得到 $W_2=span\{V_{21},V_{22}\}$

进行$\frac{n}{2}$次后，得到 $W_1\ldots W_{\frac{n}{2}}$ 且两两正交

先证 $V_{11},V_{12},\ldots V_{\frac{n}{2}1},V_{\frac{n}{2}2}$线性无关

用反证法，设 $C_{11}V_{11}+C_{12}V_{12}+\cdots+C_{\frac{n}{2}1}V_{\frac{n}{2}1}+C_{\frac{n}{2}2}V_{\frac{n}{2}2}=0$ (C_{ij}不全为0)

$\forall V_i$ (设$V_i,V_j\in W_k$) $\omega(V_i,0)=0$

$\Rightarrow\omega(V_i,C_{11}V_{11}+\cdots+C_{\frac{n}{2}2}V_{\frac{n}{2}2})=0$

$\Rightarrow\omega(V_i,C_{kj}V_j)=0\Rightarrow C_{kj}=0$

则 C_{ij}全为0，矛盾，则 n个向量线性无关

将 $V_{11},V_{12},\ldots V_{\frac{n}{2}1},V_{\frac{n}{2}2}$ 作为基，下证恰得 $\omega=\begin{bmatrix}\Sigma&&0\\&\Sigma&\\0&&\ddots\ \Sigma\end{bmatrix}$

$\forall V_i,V_j$ ① $V_i,V_j\in W_k$ $\omega(V_i,V_j)=(\Sigma)_{ij}$

② V_i,V_j不属于一个子空间 $\omega(V_i,V_j)=0$

则恰得 $\omega=\begin{bmatrix}\Sigma&&0\\&\Sigma&\\0&&\ddots\ \Sigma\end{bmatrix}$

3、(1) 设 $f:V\to V$ 设 $f\left(\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$

$y_i=\sum_j(A)_{ij}x_j \Rightarrow A\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$

$\Rightarrow f\left(\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\sum_j(A)_{1j}x_j\\\vdots\\\sum_j(A)_{nj}x_j\end{bmatrix}$ 因此A是f对应的矩阵

(2) 设 V_1 一组基为 $\{e_1',\dots,e_m'\}$ 将之补充为 V 的一组基 $\{e_1',\dots,e_n'\}$

用 G-S 方法正交归一化得 $\{e_1,\dots,e_n\}$

则 $\{e_1,\dots,e_m\}$ 恰为 V_1 正交归一化所得的一组基，即 $\{e_1,\dots,e_m\}$ 为 V_1 的基.

设 $V_2 = \mathrm{span}\{e_{m+1},\dots,e_n\}$

则 $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$ ①

设 $x \in V_1$ 且 $x \in V_2$ $x = c_1e_1+\cdots+c_me_m = c_{m+1}e_{m+1}+\cdots+c_ne_n$.

$|x|^2 = x^Tx = (c_1e_1^T+\cdots+c_me_m^T)(c_{m+1}e_{m+1}+\cdots+c_ne_n) = 0$.

$\Rightarrow x = 0$.

即 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ②

结合①② $V = V_1 \oplus V_2$.

(3) 不能，举反例

设 $V = \mathbb{R}^3$ $A = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ $V_1 = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$ $V_2 = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$.

设 $v_1 = \begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix} \in V_1$, $v_2 = \begin{bmatrix}0\\b\\c\end{bmatrix} \in V_2$

$Av_1 = \begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix} \in V_1$，则 V_1 是 A 的不变子空间

$V_1 \cap V_2 = \{0\}$ $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V \Rightarrow V_1 \oplus V_2 = V$

而 $Av_2 = \begin{bmatrix}b+c\\b+c\\c\end{bmatrix}$ 在 $b+c \neq 0$ 时 $Av_2 \notin V_2$.

4. (a) g 可对角化，则不妨设 g 对应矩阵 G 有

$G = P^T\Lambda P$ 其中 $\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1&&&0\\&\lambda_2&&\\&&\lambda_3&\\0&&&\lambda_4\end{bmatrix}$ $(\lambda_1<0,\ \lambda_2,\lambda_3,\lambda_4>0)$.

$= P^T\begin{bmatrix}\lambda_1&&&0\\&\lambda_2&&\\&&\lambda_3&\\0&&&\lambda_4\end{bmatrix}P$

$= P^T\begin{bmatrix}\sqrt{|\lambda_1|}&&&0\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\sqrt{\lambda_3}&\\0&&&\sqrt{\lambda_4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{|\lambda_1|}&&&0\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\sqrt{\lambda_3}&\\0&&&\sqrt{\lambda_4}\end{bmatrix}P$

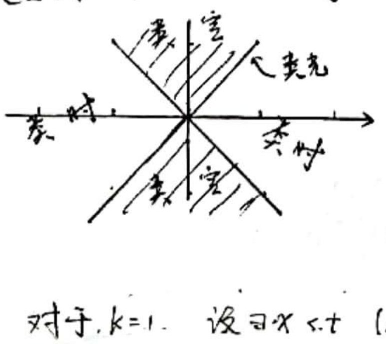
$= \left(\begin{bmatrix}\sqrt{|\lambda_1|}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\sqrt{\lambda_3}&\\&&&\sqrt{\lambda_4}\end{bmatrix}P\right)^T\begin{bmatrix}-1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\sqrt{|\lambda_1|}&&&0\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\sqrt{\lambda_3}&\\0&&&\sqrt{\lambda_4}\end{bmatrix}P\right)$

设 $\begin{bmatrix}\sqrt{|\lambda_1|}&&&0\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\sqrt{\lambda_3}&\\0&&&\sqrt{\lambda_4}\end{bmatrix}P = [e_1\, e_2\, e_3\, e_4]$ 则 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 即为所求

(b) 1) 类光的 $v = e_1+e_2$ $g(v,v) = g(e_1,e_1) + 2g(e_1,e_2) + g(e_2,e_2) = 0$

2) 类时的 $v = e_1$ $g(v,v) = g(e_1,e_1) = -1 < 0$.

3) 类空的 $v = e_2$ $g(v,v) = g(e_2,e_2) = +1 > 0$.



设 $v = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$|v^2| = g(v,v) = v^TAv = -x^2+y^2$

① $|v^2| > 0$ $y^2 > x^2$

② $|v^2| = 0$ $y^2 = x^2$

③ $|v^2| < 0$ $y^2 < x^2$

5. (a) pf: 对于 $k=1$. 设 $\exists x$ s.t. $(\lambda_1I-A)x = 0$ $(\lambda_2I-A)x = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow N_1(\lambda_1) \cap N_2(\lambda_2) = 0$

对 k 归纳，假设 $N_{k-1}(\lambda_1) \cap N_{k-1}(\lambda_2) = 0$

设 $\exists x$ s.t. $(\lambda_1I-A)^kx = 0$ $(\lambda_2I-A)^kx = 0$

$\Rightarrow$ 相减 $(\lambda_1-\lambda_2)[(\lambda_1I-A)^{k-1} + (\lambda_1I-A)^{k-2}(\lambda_2I-A) + \cdots + (\lambda_2I-A)^{k-1}]x = 0$

$\Rightarrow [(\lambda_1I-A)^{k-1} + (\lambda_1I-A)^{k-2}(\lambda_2I-A) + \cdots + (\lambda_2I-A)^{k-1}]x = 0$

左乘 $(\lambda_1I-A)^{k-1} \Rightarrow [(\lambda_1I-A)^{2k-2} + (\lambda_1I-A)^{2k-3}(\lambda_2I-A) + \cdots + (\lambda_1I-A)^{k-1}(\lambda_2I-A)^{k-1}]x = 0$

而 $(\lambda_1 I-A)^p(\lambda_2 I-A)^q\alpha \ (p\geq k) = (\lambda_1 I-A)^p\left[\lambda_2^q\alpha + C_q^1\lambda_2^{q-1}A\alpha+\cdots+A^q\alpha\right]$

$= \lambda_2^q(\lambda_1 I-A)^p\alpha + C_q^1\lambda_2^{q-1}A(\lambda_1 I-A)^p\alpha+\cdots+A^q(\lambda_1 I-A)^p\alpha=0$

则 $(\lambda_1 I-A)^{k-1}(\lambda_2 I-A)^{k-1}\alpha=0$.

而 $(\lambda_2 I-A)^{k-1}(\lambda_2 I-A)^{k-1}\alpha=0$

由归纳假设 $(\lambda_2 I-A)^{k-1}\alpha=(\lambda_1 I-A)^{k-1}\alpha=0$.

类似地降次：$\alpha=0$.

则 $N_k(\lambda_1)\cap N_k(\lambda_2)=\{0\}$

$\therefore N_{k_1}(\lambda_1)\cap N_{k_2}(\lambda_2)=\{0\}$.

(b) 由上一次作业 $\dim N_{k_i}(\lambda_i)=n_{\lambda_i}$

$\sum\dim N_{k_i}(\lambda_i)=\sum n_{\lambda_i}=n=\dim V$

$\Rightarrow V=\bigoplus_{i=1}^{s}N_{k_i}(\lambda_i)$.

(c) 每个子空间 $N_{k_i}(\lambda_i)$ 都是不变子空间

$V=\bigoplus_{i=1}^{s}N_{k_i}(\lambda_i)$ 在每个 $N_{k_i}(\lambda_i)$ 中选基组成 $\{e_{i1}\cdots e_{in_i}\}$.

$Ae_{11}=c_{11}e_{11}+c_{12}e_{12}+\cdots+c_{1n_1}e_{1n_1}$

$Ae_{12}=c_{21}e_{11}+c_{22}e_{12}+\cdots+c_{2n_1}e_{1n_1}$

$\vdots$

$A[e_{11}\,e_{12}\cdots e_{1n_1}\,e_{21}\cdots e_{nn_n}]=[e_{11}\,e_{12}\cdots e_{1n_1}\,e_{21}\cdots e_{nn_n}]\begin{bmatrix}C_1 & & 0\\ & C_2 & \\ 0 & & \ddots\ C_n\end{bmatrix}$

$A=[e_{11}\cdots e_{nn_n}]\begin{bmatrix}C_1 & & 0\\ & C_2 & \\ 0 & & \ddots\ C_n\end{bmatrix}[e_{11}\cdots e_{nn_n}]$ 则 A 相似于一个准对角阵.

(d) A. pf. 反证法 假设 e_1 在 $N_m(\lambda_1)$ 中 $(m\leq k_1-1)$

则 $B^m e_1=0 \Rightarrow B^{k_1-1}e_1=0 \Rightarrow e_1$ 在 $N_{k_1-1}(\lambda_1)$ 中，矛盾

$\therefore e_1$ 不在 $N_i(\lambda_1)$ 中 $(i\leq k_1-1)$

B. pf: $B^i(e_i)=(A-\lambda_1 I)^i e_i$

则 $(\lambda_1 I-A)^{k_1-i}(B^i(e_i))=(\lambda_1 I-A)^{k_1}e_i=0$

$\Rightarrow B^i(e_i)\in N_{k_1-i}(\lambda_1)$

C. pf: 反证法，假设 $(e_1,Be_1,\ldots,B^{k_1-1}e_1)$ 线性相关

$\Rightarrow c_0e_1+c_1Be_1+\cdots+c_{k_1-1}B^{k_1-1}e_1=0$ (c_i 不全为 0)

左乘 B^{k_1-1} $c_0B^{k_1-1}e_1=0$ 而 $B^{k_1-1}e_1\neq0 \Rightarrow c_0=0$

左乘 B^{k_2-1} $c_1B^{k_1-1}e_1=0$ 而 $B^{k_1-1}e_1\neq0 \Rightarrow c_1=0$.

$\vdots$

$\forall 0\leq i\leq k_1-1$ $c_i=0$ 矛盾，假设不成立

$\therefore (e_1,Be_1,\ldots,B^{k_1-1}e_1)$ 线性无关.

d. pf: 首先 A 与 B 可交换 $AB=A(A-\lambda I)=A^2-\lambda A=(A-\lambda I)A=BA$.

$0\leq i\leq k-1$ 时 $AB^ie_1=B^iAe_1=B^i(A-\lambda I+\lambda I)e_1=B^{i+1}e_1+\lambda B^ie_1$

设 $\mathrm{span}(e_1,\ldots,B^{k_1-1}e_1)=V$,

$\forall v\in V$ $v=c_0e_1+c_1Be_1+\cdots+c_{k_1-1}B^{k_1-1}e_1$

$Av=A(c_0e_1+c_1Be_1+\cdots+c_{k_1-1}B^{k_1-1}e_1)$

$=c_0Ae_1+c_1ABe_1+\cdots+c_{k_1-1}AB^{k_1-1}e_1$

$=c_0(Be_1+\lambda e_1)+c_1(B^2e_1+\lambda Be_1)+\cdots+c_{k_1-1}(B^{k_1}e_1+\lambda B^{k_1-1}e_1)$

$=c_0\lambda e_1+(c_0+c_1\lambda)Be_1+\cdots+(c_{k_1-2}+c_{k_1-1}\lambda)B^{k_1-1}e_1\in V$

$\therefore (e_1,Be_1,\ldots,B^{k_1-1}e_1)$ 这个空间是 A 的不变子空间

E. pf: 由D $0\le i\le k-2$ 时 $AB^ie_1=B^{i+1}e_1+\lambda_1 B^ie_1$.

$i=k-1$ 时 $AB^ie_1=B^{k-1}e_1$.

则 $A[B^{k_1-1}e_1, B^{k_1-2}e_1, \dots, e_1]$

$=[AB^{k_1-1}e_1, AB^{k_1-2}e_1, \dots Ae_1]$

$=[B^{k_1-1}e_1, B^{k_1-1}e_1+\lambda_1 B^{k_1-2}e_1, \dots, Be_1+\lambda_1 e_1]$

$=[B^{k_1-1}e_1, B^{k_1-2}e_1, \dots, e_1]\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & 0\\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_1\end{pmatrix}$

二、复线性空间的初步练习

1. (a) i. $T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$

ii. $T^2=-I$

取行列式 $|T||T|=|-I|=(-1)^{2n}\cdot 1=1$

$\Rightarrow |T|^2=1$

$\Rightarrow |T|=-1$ 或 1

iii. 对 $\mathbb{R}^{2n}=V$ 作如下操作

① 任取一非零向量记为 v_1，令 $v_2=Tv_1$

下证 v_1、v_2 线性无关

采用反证法，设 $v_1=cv_2$ $(c\neq 0)$

$\Rightarrow v_1=cTv_1$

$\Rightarrow Tv_1=cT^2v_1=-cv_1$

$\Rightarrow v_2=-cv_1=\frac{1}{c}v_1$

$\Rightarrow -c=\frac{1}{c}$ $\Rightarrow c^2=-1$（矛盾，假设不成立）

即 v_1、v_2 线性无关

② (v_1, v_2) 张成空间为 T 的不变子空间，下证

设 $\mathrm{span}(v_1, v_2)=W_1$，$\forall w\in W_1$

设 $w=c_1v_1+c_2v_2$

$Tw=c_1Tv_1+c_2Tv_2=c_1Tv_1+c_2T^2v_1=c_1Tv_1-c_2v_1\in W_1$

$\Rightarrow W_1$ 为 T 的不变子空间

③ 类似地在 $V\backslash W_1$ 中取 v_3，$v_4=Tv_3$ 令 $W_2=\mathrm{span}\{v_3, v_4\}$、

可证明 W_2 为 T 不变子空间

以此类推，得到一系列不变子空间 $W_3=\mathrm{span}\{v_5, v_6\}\cdots$ $W_n=\mathrm{span}\{v_{2n-1}, v_{2n}\}$

④ 由以上过程，$v_1, v_2 \dots v_{2n}$ 为一组线性无关向量，可以作为 V 的基、

对于每个不变子空间 W_k

$Tv_{2k-1}=0v_{2k-1}+v_{2k}$

$Tv_{2k}=-v_{2k-1}+0v_{2k}$

$\Rightarrow T[v_1 v_2 \dots v_{2n-1} v_{2n}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1\\ & & & & & -1 & 0\end{bmatrix}[v_1 v_2 \dots v_{2n-1} v_{2n}]$ #

iv. $T=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & 1\\ & & & -1 & 0\end{bmatrix}$ 时 $\lambda I-T=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ -1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda & 1\\ & & & -1 & \lambda\end{bmatrix}$

$|\lambda I-T|=\underbrace{\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}\cdots\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}}_{n个}=(\lambda^2+1)^n$ $\Rightarrow \lambda=i$ 和 $-i$

2. (a) pf: 即证 $C(A)\perp N(A^H)$, $C(A^H)\perp N(A)$

先证 $C(A)\perp N(A^H)$., 设 $A=[v_1\cdots v_n]$ $A^H=\begin{bmatrix}\bar{v}_1\\ \vdots\\ \bar{v}_n\end{bmatrix}$

设 $x\in N(A^H) \Rightarrow \begin{bmatrix}\bar{v}_1\\ \vdots\\ \bar{v}_n\end{bmatrix}x=0 \Rightarrow \bar{v}_i x=0\ (\forall i)$

设 $y\in C(A) \Rightarrow y=c_1v_1+\cdots+c_nv_n$

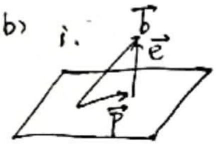
$\Rightarrow \bar{y}^Tx=(c_1\bar{v}_1^T+\cdots+c_n\bar{v}_n^T)x$

$=c_1\bar{v}_1^Tx+\cdots+c_n\bar{v}_n^Tx=0$

$\Rightarrow C(A)\perp N(A^H)$

同理: $C(A^H)\perp N(A)$

(b) i.



$\vec{e}\perp A$

$A^H\vec{e}=0$

$\Rightarrow A^H(\vec{b}-\vec{p})=0$

$\Rightarrow A^H\vec{b}=A^HAx$

$\Rightarrow$ 投影方程: $A^HAx=A^Hb$

ii. pf: 即证明 A各列线性无关 $\Leftrightarrow$ A^HA可逆

先证"$\Rightarrow$" A各列线性无关

$\Rightarrow Ax=0$ 只有零解

反证法, 设 A^HA不可逆

$\Rightarrow A^HAx=0$ 有非零解

$\Rightarrow x^HA^HAx=0$ 有非零解

$\Rightarrow |Ax|^2=0$ 有非零解

$\Rightarrow Ax=0$ 有非零解, 矛盾, 假设不成立

$\therefore A^HA$可逆

再证"$\Leftarrow$" A^HA可逆

$\Rightarrow A^HAx=0$ 只有零解

反证法, 设A各列线性相关

$\Rightarrow Ax=0$ 有非零解

$\Rightarrow A^HAx=0$ 有非零解, 矛盾, 假设不成立

综上: A各列线性无关 $\Leftrightarrow$ A^HA可逆

解: 投影向量 $x=(A^HA)^{-1}A^Hb$

$\Rightarrow \vec{p}=Ax=A(A^HA)^{-1}A^Hb$.