

复变函数 2012

B 卷

杨晓京老师

2012 年 1 月 4 日

1 求 3^i 和 $(1+i)^i$ 的值。

2 (1) 判定 $w = z\operatorname{Re}(z)$ 在何处可导, 何处解析?

(2) 设函数 $f(z) = x^2 + axy + by^2 - i(cx^2 + dxy + y^2)$, 问常数 a, b, c, d 取何值时, $f(z)$ 在复平面内处处解析?

3 计算下列积分。

(1) $\oint_C \frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)} dz$, 其中 $C: |z|=2$ 为正向圆周;

(2) $\oint_C \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$, $C: |z|=2$ 为正向圆周。

4 求下列幂级数的收敛半径。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln(in)}\right)^n$ 。

5 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式, 并指出他们的收敛半径。

(1) $\frac{z-1}{z+1}$, $z_0 = 1$;

(2) $\frac{1}{4-3z}$, $z_0 = 1+i$ 。

6 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列圆环域内展成 Laurent 级数:

(1) $1 < |z| < 2$,

(2) $0 < |z-1| < 1$ 。

7 计算定积分。

(1) $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{a + b \cos \theta} d\theta, \quad a > b > 0;$

(2) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx, \quad a, b > 0.$

8 求一映射, 将由圆盘 $|z| < 1$ 和 $|z - \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}$ 所围成的月牙形区域保角映射成为上半平面。

9 求将上半平面 $\text{Im}(z) > 0$ 的映射成单位圆 $|w| < 1$ 且满足条件 $w(2i) = 0, \arg w'(2i) = 0$ 的分式线性映射。

10 证明:

(1)(Cauchy 不等式) 若函数 $f(z)$ 在圆盘 $|z-a| < R$ 内解析, 且 $|f(z)| \leq M$, 其中 M 为大于零的常数, 则

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}, n = 1, 2, \dots$$

(2)(Liouville 定理) 若函数 $f(z)$ 在复平面 \mathbb{C} 上解析且有界, 则 $f(z)$ 必为一常数。

(3) 请叙述代数学基本定理, 并利用 Liouville 定理证明之。