《高等微积分 2》第十周习题课

1 设 $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy$. 求出 f 的所有极值点和对应的极值.

2 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的开集, $f\in C(D,\mathbf{R})$. 请判断下列命题是否正确, 并说明理由.

(1) f 在其偏导数不存在的点也可能取到极值.

(2) 如果 f 在 D 中存在唯一的临界点 (人们也把临界点称之为驻点), 则 f 在 D 中至多一个极值点.

(3) 如果 f 在 D 中恰有两个极值点, 则其中之一必为极大值点, 另一个必为极小值点.

(4) 设 (x_0,y_0) 是 f 的驻点, 且 $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)\le 0$, 则 (x_0,y_0) 不是极值点.

3 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\dfrac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty$.

(1) 证明: 存在 $R>0$, 使得 f 在 $\{(x,y)|x^2+y^2>R^2\}$ 上的取值或者恒正, 或者恒负.

(2) 证明: 或者有 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$, 或者有 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=-\infty$.

(3) 假设 f 处处可微. 证明: 存在 (x_0,y_0), 使得 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$.

(4) 假设 f 处处可微. 证明: 对任何 a,b, 存在 (x_0,y_0), 使得 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=a$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=b$. (提示: 考虑 $g(x,y)=f(x,y)-ax-by$, 然后利用第 (3) 问的结论).

4 给定正数 a,b. 求函数 $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 的最大与最小值.

5 求函数 $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大与最小值.

6 设 $p>1$, $a_i\ge 0$. 证明:

$$\frac{a_1+...+a_n}{n}\le(\frac{a_1^p+...+a_n^p}{n})^{\frac{1}{p}}.$$

7 给定 n 个正数 $\alpha_1, ..., \alpha_n$. 设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 满足约束条件:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1, \quad 且 x_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq n,$$

求函数 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1^{\alpha_1}) \cdot (x_2^{\alpha_2}) \cdot ... \cdot (x_n^{\alpha_n})$ 的最大值.

8 设 $F(x, y, z) = x^2 - x + y^2 - z(z-1)(z-2)$.

(1) 求 F 的 (全) 微分.

(2) 求 F 在点 $(1, 2, 3)$ 处的梯度向量.

(3) 对于方向 $\mathbf{q} = (a, b, c)$, 求方向导数 $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}|_{(2,3,4)}$ 的值.

(4) 设 $z = z(x, y)$ 是方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 $(2, 2, 3)$ 附近确定的隐函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(2,2)}, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,2)}$.

(5) 求上述隐函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(2, 2)$ 附近的带有皮亚诺余项的二阶泰勒公式, 即要求余项形如 $o\left((x-2)^2 + (y-2)^2\right)$.

(6) 求曲面 $S = (x, y, z)|F(x, y, z) = 0$ 在点 $(2, 2, 3)$ 处的切平面方程.

(7) 求曲线 $L = \{(x, y, z)|F(x, y, z) = 0, x + y + z = 7\}$ 在点 $(2, 2, 3)$ 处的切线方程.

(8) 求出 F 的所有临界点 (驻点), 并判断它们是否为极值点.