

第十二讲

Turing机

2022/5/17

School of Software

1

上下文无关语言的判定性质

- 空语言问题

给定CFG G ，如何判定

$$L(G) = \emptyset$$

算法:

检测CFG 的开始变量 S 是否无用

2022/5/17

School of Software

2

上下文无关语言的判定性质

- 无限语言问题

给定CFG G ，如何判定其语言 $L(G)$ 是无限的

算法:

1. 消去 ϵ 产生式和单一产生式
2. 消去无用符号
3. 构造变量的依赖图
4. 若变量的依赖图有环，则其语言是无限的

2022/5/17

School of Software

3

上下文无关语言的判定性质

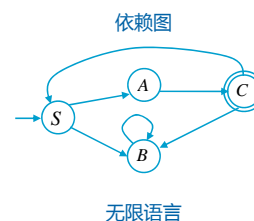
- 空语言问题

例: $S \rightarrow AB$

$A \rightarrow aCb|a$

$B \rightarrow bB|bb$

$C \rightarrow cBS$



2022/5/17

School of Software

4

上下文无关语言的判定性质

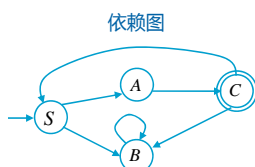
- 空语言问题

例: $S \rightarrow AB$

$A \rightarrow aCb|a$

$B \rightarrow bB|bb$

$C \rightarrow cBS$



$S \Rightarrow AB \Rightarrow aCb \Rightarrow acBSbB \Rightarrow acbbSbbb$

$S \Rightarrow acbbSbbb \Rightarrow (acbb)^2S(bbb)^2 \Rightarrow (acbb)^iS(bbb)^i$

2022/5/17

School of Software

5

上下文无关语言的判定性质

- 语言元素问题

给定CFG G ，如何判定字符串 $w \in L(G)$

算法: 解析算法

- 穷尽分析树搜索法

- CYK 解析算法

CYK: J. Cocke, D. Younger, T. Kasami

2022/5/17

School of Software

6

CYK 算法

基本思想: 设 $G = (V, T, S, P)$ 为满足 CNF 的 CFG, $w = a_1 a_2 \dots a_n \in T^*$;

迭代计算满足下列条件的 X_{ij} ($1 \leq i \leq j \leq n$):

$$(1) X_{ij} \subseteq V$$

$$(2) A \in X_{ij} \text{ iff } A \xrightarrow{*}_G a_i a_{i+1} \dots a_j$$

因此, $w \in L(G)$ iff $S \in X_{1n}$

2022/5/17

School of Software

7

CYK 算法

迭代计算 X_{ij} :

(1) $j=i$. 如果 " $A \rightarrow a_i$ " $\in P$,

则 $A \in X_{ij}$;

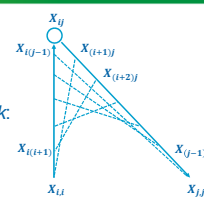
(2) $j > i$. $A \in X_{ij}$ 当且仅当存在 k :

$i \leq k < j$, 可以找到 $B \in X_{ik}$ 和

$C \in X_{(k+1)j}$, 使得:

" $A \rightarrow BC$ " $\in P$.

复杂度 设 $|w| = n$, 则该迭代过程的复杂度为 $O(n^3)$



2022/5/17

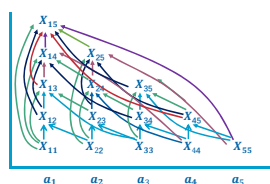
School of Software

8

CYK 算法

- 填表算法

根据上面算法, X_{ij} 可由如下填表方法实现:



2022/5/17

School of Software

9

CYK 算法

```

let the input be a string w consisting of n characters:
    a1 ... an.
let the grammar contain r nonterminal symbols R1 ... Rr,
with start symbol R1.
let P[n,n,r] be an array of booleans. Initialize all
elements of P to false.
for each i = 1 to n
    for each unit production Rj → ai
        set P[i,i,j] = true
for each k = 2 to n -- Length of span
    for each i = 1 to n-k+1 -- Start of span
        for each t = 1 to k-1 -- Partition of span
            for each production Ra → Rb Rc
                if P[i,t,b] and P[k-t,i+t,c]
then set P[k,i,a] = true
if P[n,1,1] is true
then w is member of language
else w is not member of language

```

2022/5/17

School of Software

10

CYK 算法

例: 给定下列 CNF 文法 G , 产生式如下:

$S \rightarrow AB|BC$

$A \rightarrow BA|a$

$B \rightarrow CC|b$

$C \rightarrow AB|a$

字符串 $baaba$ 是否属于该文法的语言?

2022/5/17

School of Software

11

CYK 算法

i	1	2	3	4	5
a _i	b	a	a	b	a

$S \rightarrow AB|BC$

$A \rightarrow BA|a$

$B \rightarrow CC|b$

$C \rightarrow AB|a$

2022/5/17

School of Software

12

CYK 算法

i	1	2	3	4	5
a_i	b	a	a	b	a

j=5	{S,A,C}				
j=4	-	{S,A,C}			
j=3	-	{B}	{B}		
j=2	{S,A}	{B}	{S,C}	{S,A}	
j=1	{B}	{A,C}	{A,C}	{B}	{A,C}
	b	a	a	b	a

$S \rightarrow AB|BC$
 $A \rightarrow BA|a$
 $B \rightarrow CC|b$
 $C \rightarrow AB|a$

字符串 **bbabaa** 是否属于该文法的语言？

2022/5/17

School of Software

13

上下文无关语言判定性质

CFL的一些不可判定问题：

1. 上下文无关文法是否无歧义的？
2. 上下文无关语言是否固有歧义的？
3. 两个上下文无关语言相交是否为空？
4. 两个上下文无关语言是否相等？
5. 上下文无关语言是否等于 Σ^* ？

2022/5/17

School of Software

14

Turing 机

- 图灵机的介绍
- 图灵机的定义
- 图灵机的即时描述
- 图灵机的语言

2022/5/17

School of Software

15

Turing 机

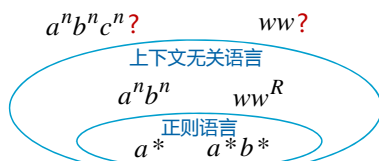
- 图灵机的介绍
- 图灵机的定义
- 图灵机的即时描述
- 图灵机的语言

2022/5/17

School of Software

16

语言的层次

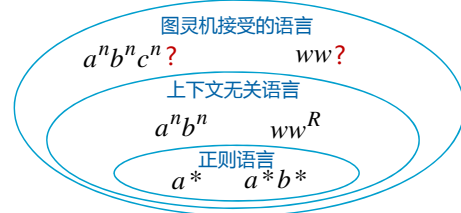


2022/5/17

School of Software

17

语言的层次

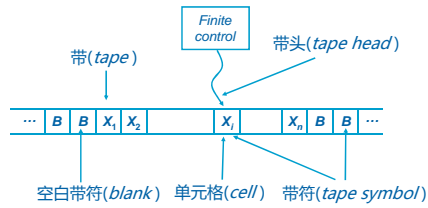


2022/5/17

School of Software

18

基本图灵机

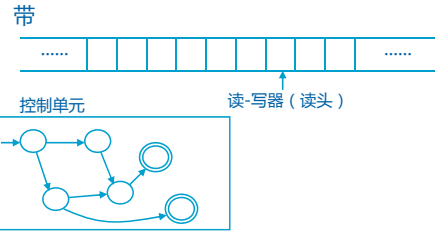


2022/5/17

School of Software

19

基本图灵机



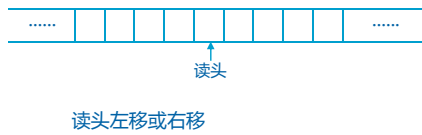
2022/5/17

School of Software

20

基本图灵机

两端无限

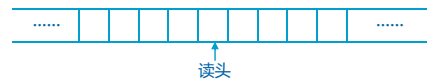


2022/5/17

School of Software

21

基本图灵机



每一步,读头需完成如下动作:

1. 读一个符号
2. 写一个符号
3. 左移或右移

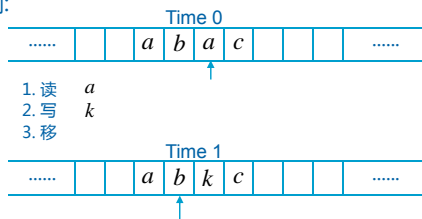
2022/5/17

School of Software

22

基本图灵机

例:

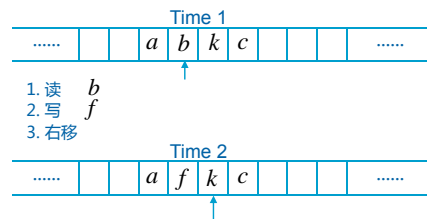


2022/5/17

School of Software

23

基本图灵机

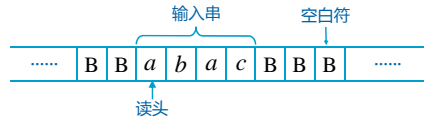


2022/5/17

School of Software

24

输入字符串



读头开始时位于输入串的最左端

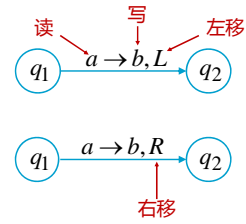
说明: 输入串不能为空

2022/5/17

School of Software

25

状态转移

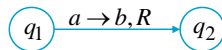


2022/5/17

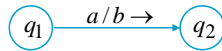
School of Software

26

状态转移



或记为



$$\delta(q_1, a) = (q_2, b, R)$$

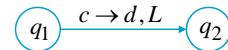


2022/5/17

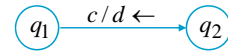
School of Software

27

状态转移



或记为



$$\delta(q_1, c) = (q_2, d, L)$$

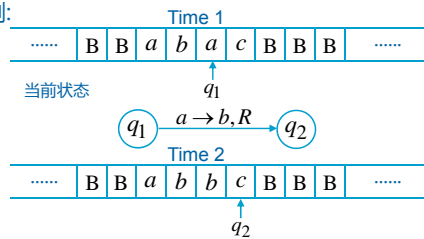
2022/5/17

School of Software

28

状态转移

例:



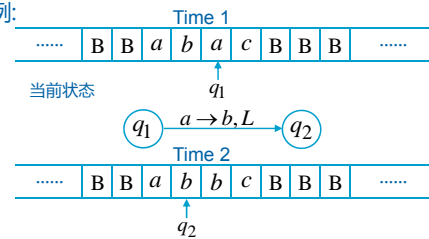
2022/5/17

School of Software

29

状态转移

例:



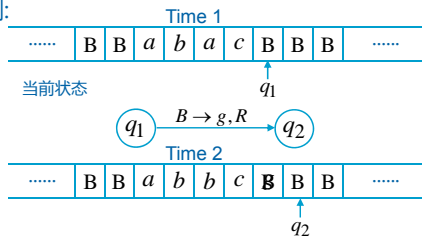
2022/5/17

School of Software

30

状态转移

例:



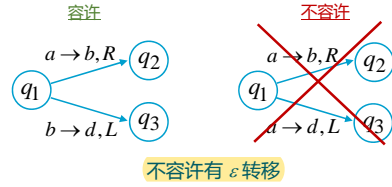
2022/5/17

School of Software

31

状态转移

图灵机是确定的



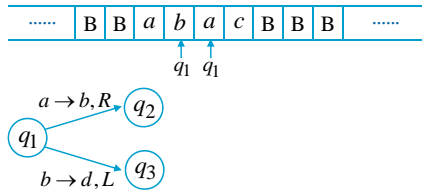
2022/5/17

School of Software

32

部分转移函数

例:



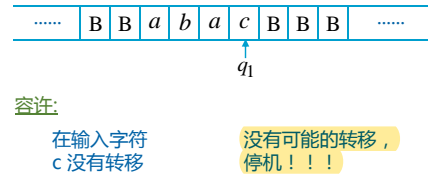
2022/5/17

School of Software

33

停机

例:



2022/5/17

School of Software

34

识别字符串

接受输入



当输入完字符串,
TM停在某终态

拒接输入



若TM停在一非终态
或者
若TM进入一无限循环



2022/5/17

School of Software

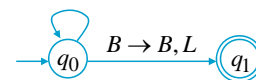
35

识别字符串

例:

图灵机接受语言: aa^*

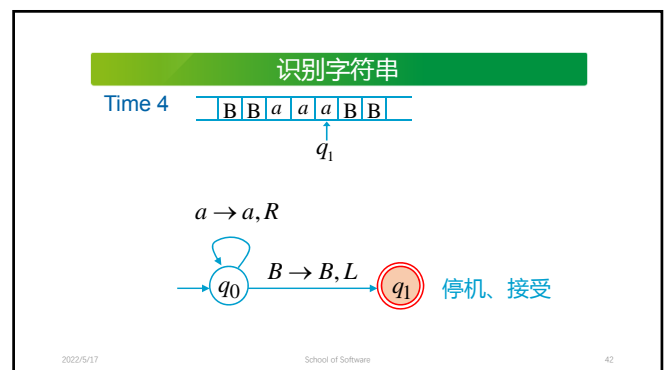
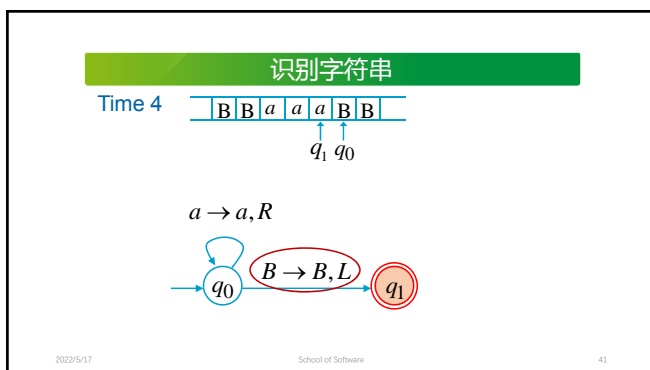
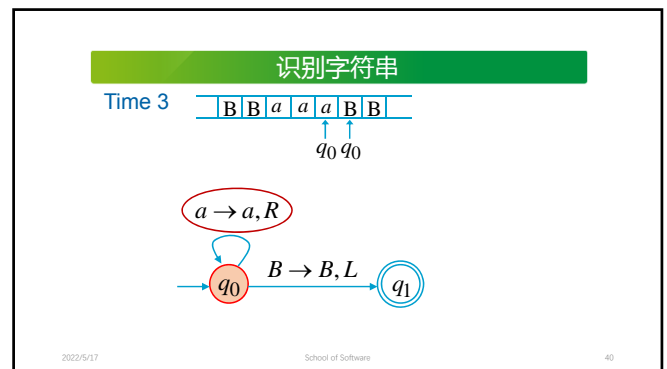
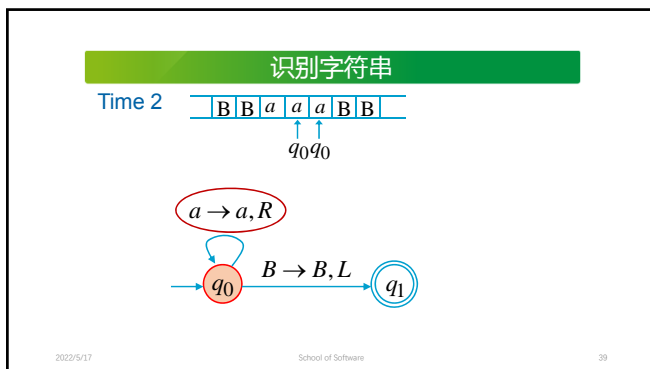
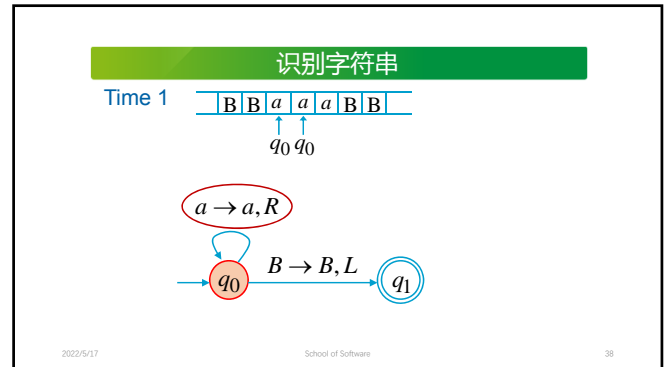
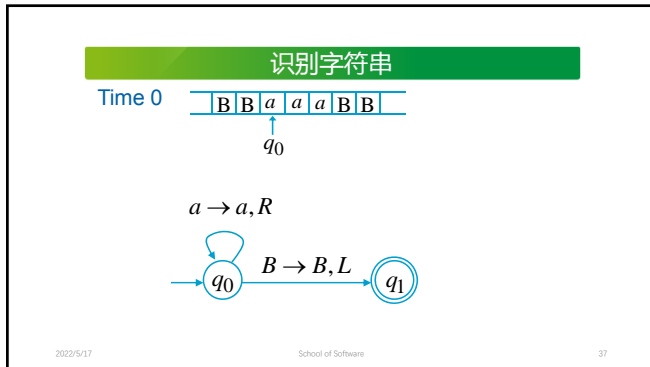
$a \rightarrow a, R$

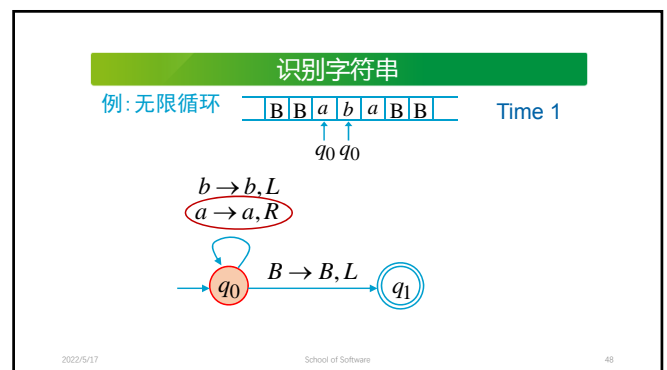
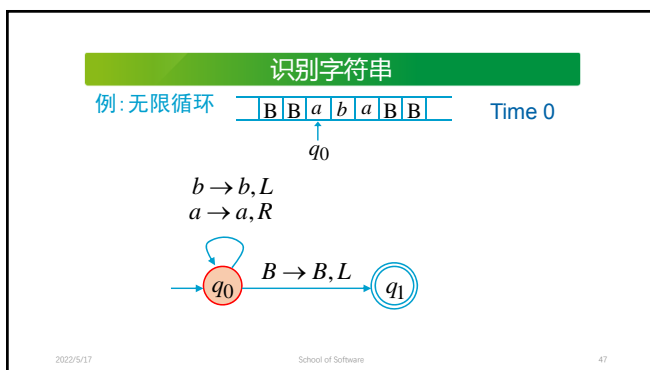
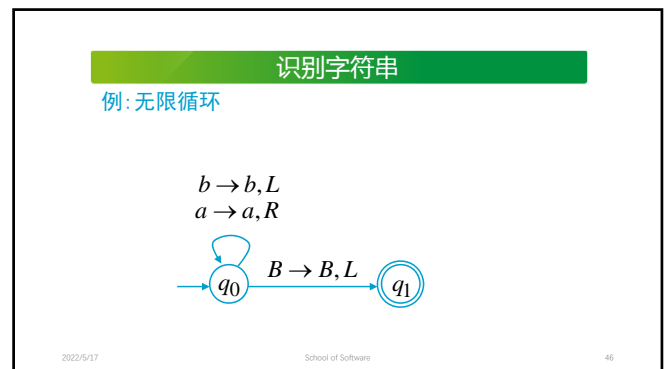
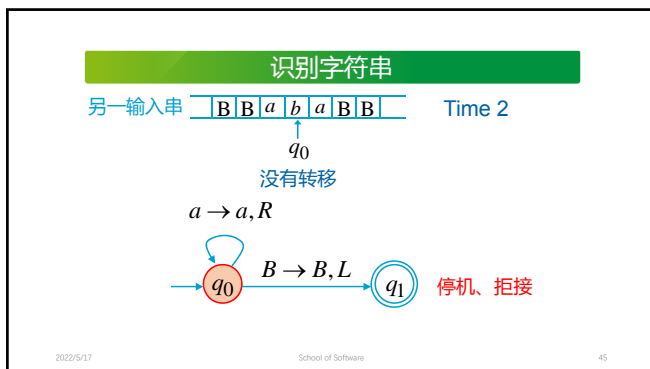
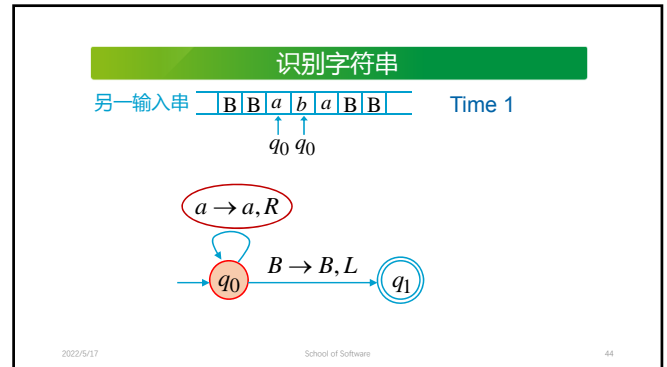
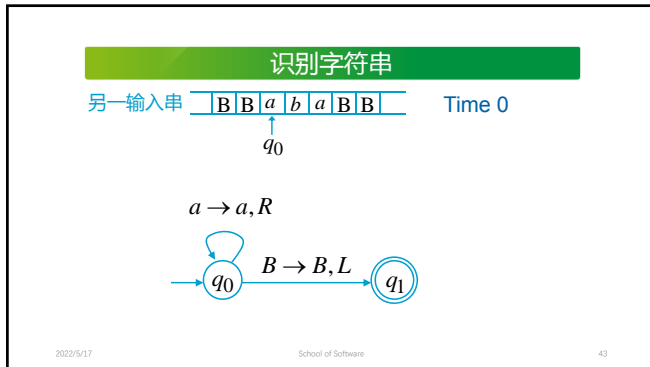


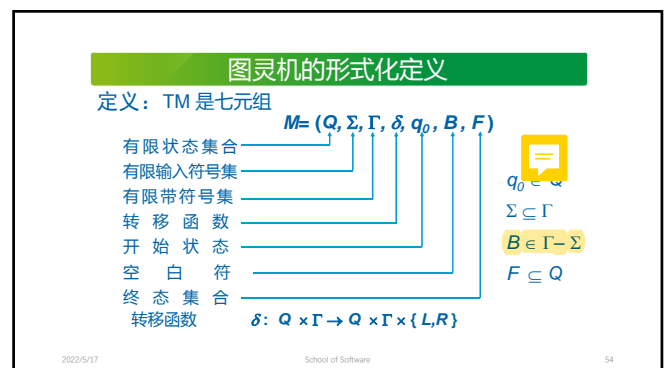
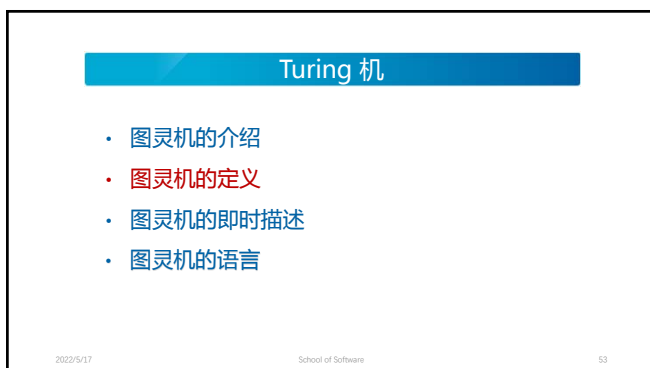
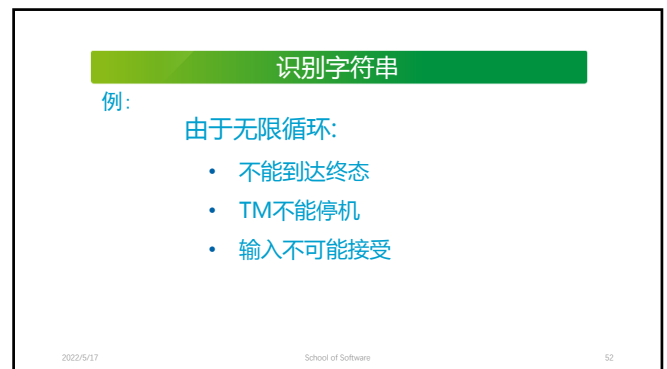
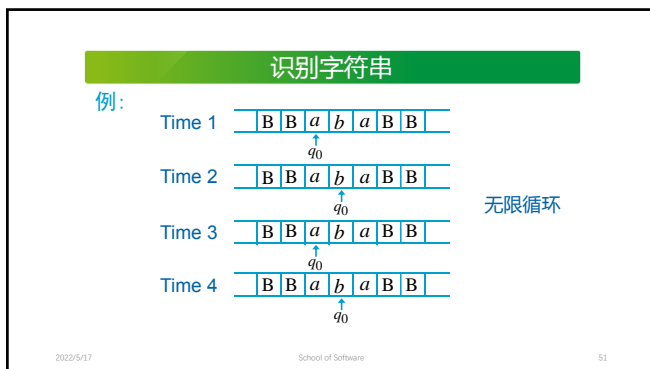
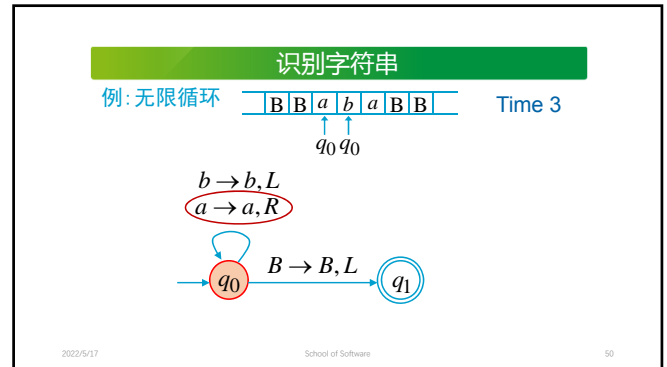
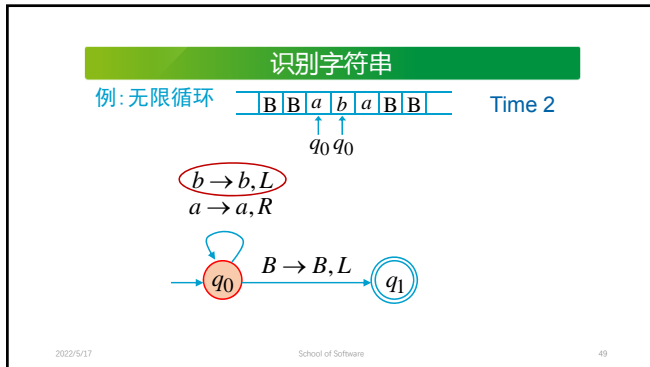
2022/5/17

School of Software

36

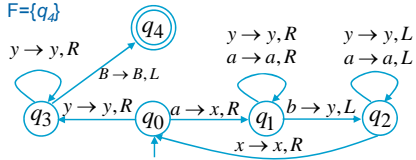






图灵机例

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
 $\Sigma = \{a, b\}$
 $\Gamma = \{a, b, x, y, B\}$
 $F = \{q_4\}$



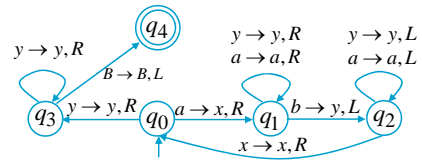
2022/5/17

School of Software

55

图灵机例

TM接受的语言 $\{a^n b^n | n \geq 1\}$



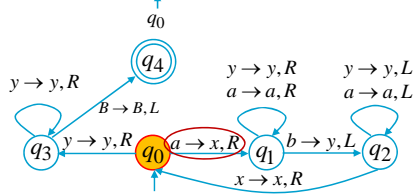
2022/5/17

School of Software

56

图灵机例

输入串 $B B a b B B$ Time 0



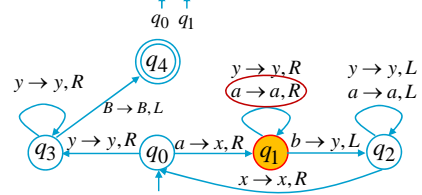
2022/5/17

School of Software

57

图灵机例

输入串 $B B x a b B B$ Time 1



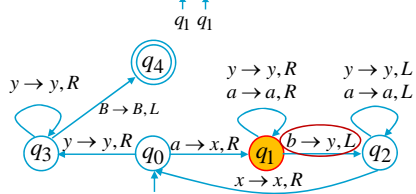
2022/5/17

School of Software

58

图灵机例

输入串 $B B x a b B B$ Time 2



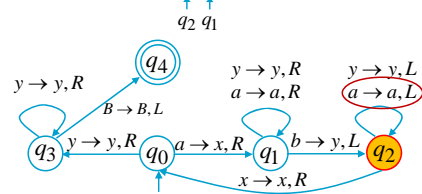
2022/5/17

School of Software

59

图灵机例

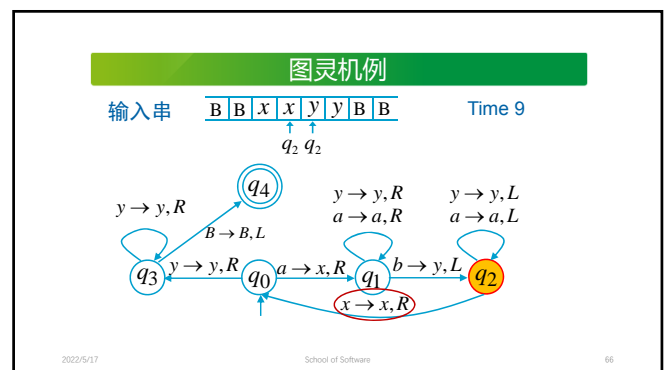
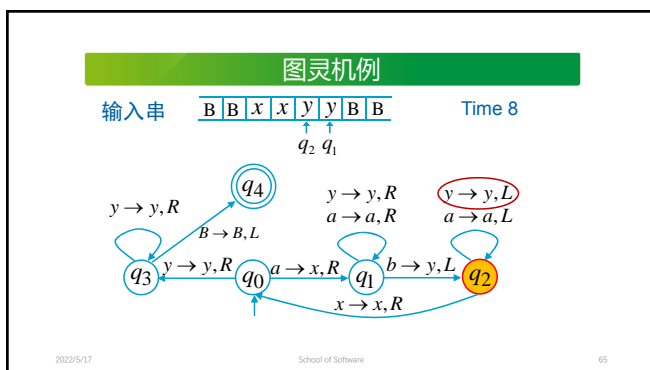
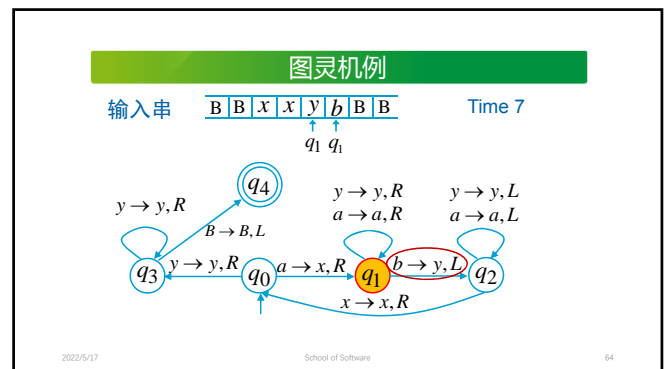
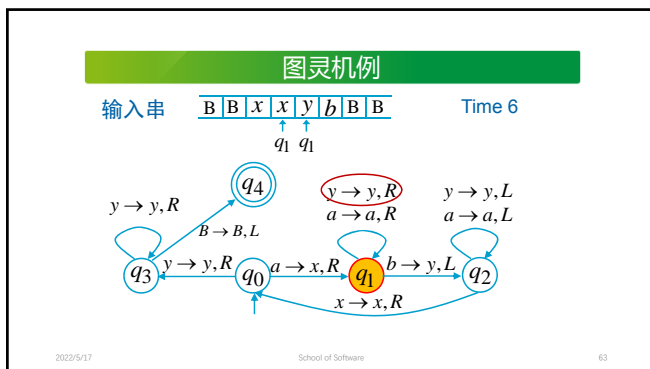
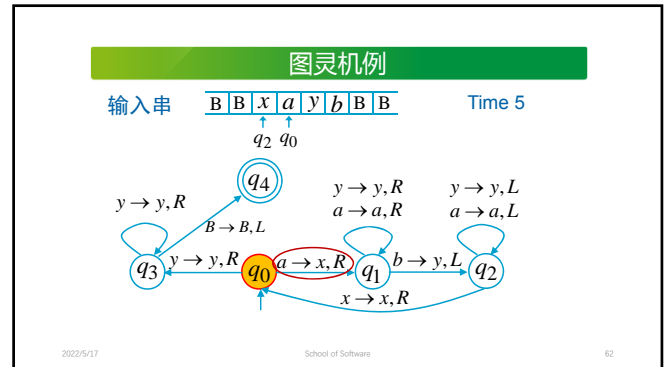
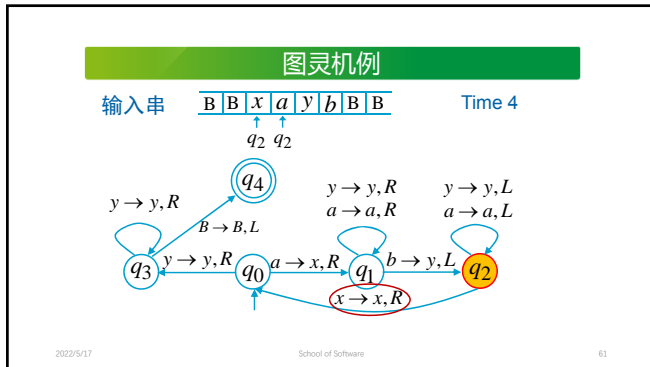
输入串 $B B x a y b B B$ Time 3



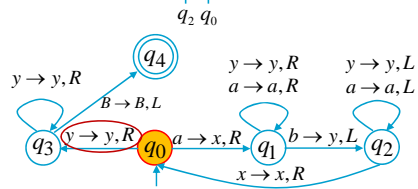
2022/5/17

School of Software

60



图灵机例

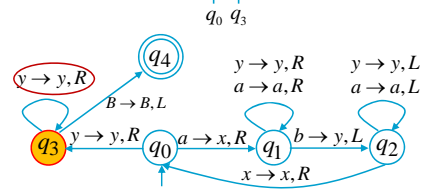
输入串 $\overline{B B x x y y B B}$ Time 10

2022/5/17

School of Software

67

图灵机例

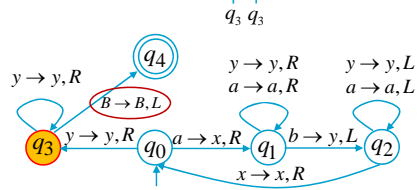
输入串 $\overline{B B x x y y B B}$ Time 11

2022/5/17

School of Software

68

图灵机例

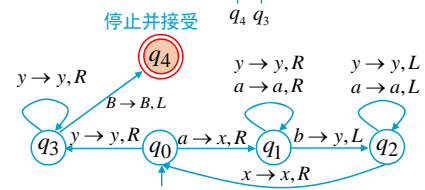
输入串 $\overline{B B x x y y B B}$ Time 12

2022/5/17

School of Software

69

图灵机例

输入串 $\overline{B B x x y y B B}$ Time 13

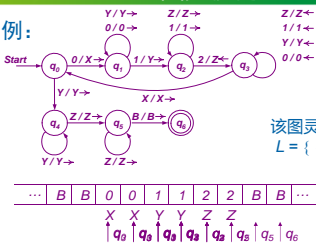
2022/5/17

School of Software

70

图灵机例

另例:



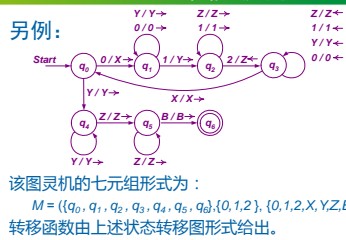
2022/5/17

School of Software

71

图灵机例

另例:

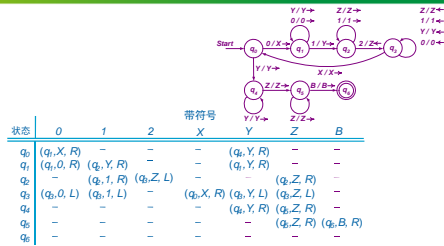


2022/5/17

School of Software

72

转移图与转移表



2022/5/17

School of Software

73

Turing 机

- 图灵机的介绍
- 图灵机的定义
- 图灵机的即时描述
- 图灵机的语言

2022/5/17

School of Software

74

TM即时描述 (ID)

图灵机

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

当前格局

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \dots X_n$$

称为即时描述, 或 ID (instantaneous descriptions), 其中:

- $q \in Q$ 为当前 M 的状态;
- 当前读头正在扫描 X_i

2022/5/17

School of Software

75

TM推导关系 \vdash

给定图灵机 $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

定义 ID's 之间的推导关系 \vdash_M (或 \vdash) 如下:

- 设 $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$, 则有

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \dots X_n \vdash_M X_1 X_2 \dots X_{i-1} p Y X_{i+1} \dots X_n$$

两个例外:

- $i=1$ 时, $q X_1 X_2 \dots X_n \vdash_M p B Y X_2 \dots X_n$
- $i=n$ 且 $Y=B$ 时,

$$X_1 X_2 \dots X_{n-1} q X_n \vdash_M X_1 X_2 \dots X_{n-2} p X_{n-1}$$

2022/5/17

School of Software

76

TM推导关系 \vdash

- 设 $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$, 则有:

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \dots X_n \vdash_M X_1 X_2 \dots X_{i-1} Y p X_{i+1} \dots X_n$$

两个例外:

- $i=n$ 时, $X_1 X_2 \dots X_{n-1} q X_n \vdash_M X_1 X_2 \dots X_{n-1} Y p B$
- $i=1$ 及 $Y=B$ 时,

$$q X_1 X_2 \dots X_n \vdash_M p X_2 \dots X_{n-1} X_n$$

类似, 可定义推导关系 \vdash_M 的传递闭包记为 \vdash_M^* (或 \vdash^*)

2022/5/17

School of Software

77

TM推导关系 \vdash

对输入字符串 001122, 该图灵机可以有如下推导:

$$\begin{aligned} q_0 001122 &\vdash_M X q_1 01122 \vdash_M X_0 q_1 1122 \vdash_M X_0 Y q_2 122 \vdash_M X_0 Y_1 q_2 22 \\ &\vdash_M X_0 Y q_3 122 \vdash_M q_3 X_0 Y_1 22 \vdash_M X q_0 0 Y_1 22 \vdash_M X X Y Y Z q_2 2 \\ &\vdash_M X X Y Y q_2 Z \vdash_M X q_3 X Y Y Z Z \vdash_M X X q_0 Y Y Z Z \vdash_M X X Y Y q_2 Z Z \\ &\vdash_M X X Y Y Z q_2 Z \vdash_M X X Y Y Z Z q_2 B \vdash_M X X Y Y Z Z B q_2 B \end{aligned}$$

初始 ID

最终 ID

2022/5/17

School of Software

78

Turing 机

- 图灵机的介绍
- 图灵机的定义
- 图灵机的即时描述
- **图灵机的语言**

2022/5/17

School of Software

79

递归可枚举语言

图灵机接受的语言称为递归可枚举语言
(*recursive enumerable languages*)

给定图灵机

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

定义 M 的语言:

$$L(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*, q_0 w \vdash_M^* \alpha p \beta, p \in F, \alpha \in \Gamma^*, \beta \in \Gamma^* \}$$

初始 ID

最终 ID

2022/5/17

School of Software

80

递归可枚举语言

- 停机：若TM没有可能的后续转移，则停机。
 - 定理：任给图灵机 M ，容易构造一个图灵机 M' ，使得 $L(M) = L(M')$ ，并满足：如果 $w \in L(M)$ ，则对于 w ， M' 接受 w 并一定停机。
- 由此结论，如果没有特别指出，今后假定图灵机到达终态后一定停机。
- 但是，若 $w \notin L(M)$ ，则对于 w ， M 不一定能停机。

2022/5/17

School of Software

81

递归语言

- 递归语言 (*recursive languages*)
- 称语言 L 是递归的，当且仅当存在图灵机 M ， $L = L(M)$ ，且满足：
1. 若 $w \in L(M)$ ，则对于 w ， M 接受 w ，自然会停机。
 2. 若 $w \notin L(M)$ ，则对于 w ， M 最终也会停机（虽然不能到达终态）。
- 递归语言对应的问题是可判定的



2022/5/17

School of Software

82

课后练习

✧ 必做题：

- P-302 !Ex.7.4.1(b)
- P-303 Ex.7.4.3(c)
- P-328 Ex.8.2.2(c)
- P-328 Ex.8.2.3
- P-329 Ex.8.2.5(b)

✧ 思考题：

- P-329 Ex.8.2.5(c)

2022/5/17

School of Software

83

Thank you

2022/5/17

School of Software

84