《高等微积分 1》第七次作业

1 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上有各个高阶导数. 证明: 如果 $f(x)=0$ 有 n 个不同的零点, 则对 $1 \le k \le (n-1)$, $f^{(k)}(x)=0$ 至少有 $(n-k)$ 个不同的零点.

2 设 $0<x<y$. 证明:

(1) 当 $\alpha>1$ 或者 $\alpha<0$ 时, 有 $\alpha x^{\alpha-1}(y-x)<y^\alpha-x^\alpha<\alpha y^{\alpha-1}(y-x)$.

(2) 当 $0<\alpha<1$ 时, 有 $\alpha y^{\alpha-1}(y-x)<y^\alpha-x^\alpha<\alpha x^{\alpha-1}(y-x)$.

(3) $\frac{y-x}{y}<\ln\frac{y}{x}<\frac{y-x}{x}$.

3 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处有 n 阶导数. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)=A$, 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^n}$.

4 定义函数 $f:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{1/x}, & \text{如果} x\neq 0\\ e, & \text{如果} x=0.\end{cases}$$

其中 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$. 计算 $f'(0)$, $f''(0)$.

5 求 $\tan x$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺余项的 5 阶泰勒公式.

6 求 $\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

7 设 $f(x)=\arctan x$. 对于正整数 n, 求 $f^{(n)}(0)$.