离散数学(1)
Discrete Mathematics

第十章 关系

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

主观题 10分

Setting

上节课有什么疑问吗？欢迎投稿。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

第十章　关系

复习：二元关系(Binary Relations)

定义10.1.1　A到B的二元关系

- 设A, B为集合，$A\times B$ 的**任一子集**所定义的二元关系称为A到B 的二元关系。
- 特别当 $A = B$ 时，$A\times A$的**任一子集**称为A上的一个二元关系。
- 例4 A={0,1}, B={1,2,3}，R_1={<0,2>}，R_2=$A\times B$, R_3=$\varnothing$，R_4={<0,1>}.
- 那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,
- R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

复习：n元关系

定义10.1.2　n元关系（n元组的集合）

- 若 $n \in N$ 且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是n个集合，则
  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

的任一子集称为从 A_1 到 A_n 上的一个n元关系。

复习：三个特殊的关系

恒等关系、全域关系和空关系

- 对任意的集合A，

  A上的**恒等关系**I_A定义为 $I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$

  A上的**全域关系**(全关系)E_A定义为

  $$E_A = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A\}$$

- 对任意的集合A，

  空集Φ是$A\times A$的子集，定义为A上的空关系。

- 例如, A={1,2}, 则
  - E_A={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>}
  - I_A={<1,1>,<2,2>}

复习：定义域和值域(domain & range)

- 设R是A到B的二元关系

(1)R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的定义域，记作***dom*(R)**。形式化表示为：

$$dom(R)=\left\{x\,\middle|\,(\exists y)(\langle x,y\rangle\in R)\right\}$$

(2) R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的值域，记作***ran(R)***。形式化表示为：

$$ran(R)=\left\{y\,\middle|\,(\exists x)(\langle x,y\rangle\in R)\right\}$$

(3)R的定义域和值域的并集称为R的域***(field)***，记作***fld(R)***。形式化表示为：

$$fld(R)=dom(R)\cup ran(R)$$

复习：关系的逆、合成、限制和象

定义10.3.1　关系的逆、合成、限制和象

- 对X到Y的关系R，Y到Z的关系S，定义:

（1）R的**逆(inversion)**R^{-1}为Y到X的关系

$$R^{-1}=\{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$$

- 例1　令A={1,2,3,4},

R={<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>}

R^{-1}={<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>}

- 显然有：设R是任意的关系, 则$(R^{-1})^{-1}=R$

复习：关系的逆、合成、限制和象

(2)R与S的**合成(composite relation)** $\boldsymbol{S \circ R}$（也称之为**关系的复合**）为X到Z的关系

$$S \circ R = \{\langle x, y\rangle | (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R \land \langle z, y\rangle \in S)\}$$

先R后S，先右后左

复习：关系的运算

优先顺序：

- 逆运算优先于其他运算
- 关系运算优先于集合运算
- 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

复习：关系的运算

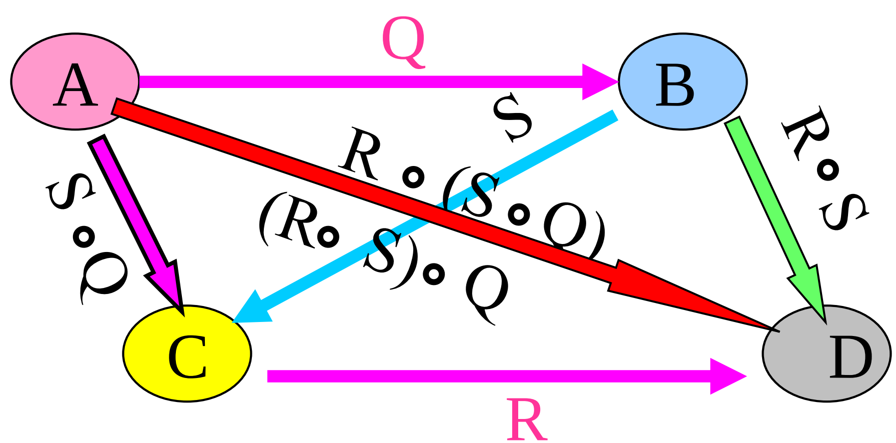
- 定理：设R，S，Q是任意的关系

  ①$(R\circ S)\circ Q = R\circ(S\circ Q)$

  ②$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$

令 $Q\subseteq A\times B$　　$S\subseteq B\times C$　　$R\subseteq C\times D$

可以形象表示:



10.4 关系的性质

- 自反性
  - $\forall a \in A$，有 $<a,a> \in R$，则R为A上的**自反关系**
- 反自反性
  - $\forall a \in A$，有 $<a,a> \notin R$，R为A上的**反自反关系**

- 例 $A=\{a,b,c\}$
  - $R_1=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<c,a>\}$
  - $R_2=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$

单选题 1分

Setting

$$R_3=\{<a,a>,<b,c>\}$$

A R_3不是自反的，也不是反自反的。

B R_3是自反的，不是反自反的。

C R_3不是自反的，是反自反的。

D R_3是自反的，也是反自反的。

提交

10.4 关系的性质

- 例：R是Z_+上的整除关系，则R具有自反性
  - 证明：$\forall x \in Z_+$，x能整除x，
  - $\therefore \langle x,x \rangle \in R$，$\therefore$R具有自反性
- 例：R是Z上的同余关系，则R具有自反性

  证明：$\forall x \in Z$，$(x-x)/k=0$，

  $\therefore$x与x同余$\therefore \langle x,x \rangle \in R \therefore$R具有自反性
- 其它≤，≥关系，均是自反关系
- 实数上的＜,＞关系,均是反自反关系

10.4 关系的性质

- 关系矩阵的特点？
  - 自反关系的关系矩阵的对角元素均为1
  - 反自反关系的关系矩阵的对角元素均为0
- 关系图的特点？
  - 自反关系的关系图中每个顶点都有环
  - 反自反关系的关系图中每个顶点都没有环
- 定理：R是A上的关系，则：
  - R是自反关系的充要条件是$I_A \subseteq R$
  - R是反自反关系的充要条件是$R \cap I_A = \Phi$

10.4 关系的性质

- 对称关系R
  - $\forall a,b\in A$,如果$<a,b>\in R$,则必有$<b,a>\in R$
- 例
  - $R_1=\{<1,1>,<2,3>,<3,2>\}$
  - R_1是对称的
  - $R_2=\{<1,1>,<3,3>\}$
  - R_2是对称的
  - $R_3=\{<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,1>\}$
  - R_3不是对称的

10.4 关系的性质

- 关系矩阵特点?
  - 对称关系的关系矩阵是对称矩阵
- 关系图特点?
  - 如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边（无单边）
- 定理： R在A上对称当且仅当$R=R^{-1}$

证明：必要性 $<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R \Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1}$

充分性$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in R$

10.4 关系的性质

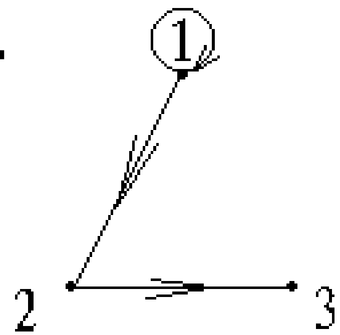
- 反对称关系R
  - $\forall a,b \in A$,如果$<a,b> \in R$且$<b,a> \in R$,则必有$a = b$
  - $\forall a,b \in A$,如果$a \neq b$,$<a,b> \in R$,则必有$<b,a> \notin R$

- 例: $A = \{a,b,c\}$
  - $R = \{<a,a>,<b,b>\}$
  - $S = \{<a,b>,<a,c>\}$
  - $T = \{<a,c>,<b,a>,<a,b>\}$
  - R, S是反对称的, T不是反对称的

多选题 1分

Setting

- $R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>\}$



A 自反

B 非自反

C 反对称

D 传递

E 对称

提交

10.4 关系的性质

- 例: 实数集合上≤关系是反对称关系
  - $\forall$x,y∈实数集,如x≠y,且x≤y,则y≤x不成立
- 例：≥,<,>关系,均是反对称关系

- 反对称关系矩阵和关系图特点？
  - 若r_{ij}=1，且i≠j，则r_{ji}=0
  - 如果两个顶点之间有边，一定是一条有向边（无双向边）
- 定理：R在A上反对称当且仅当R∩$R^{-1} \subseteq I_A$

10.4 关系的性质

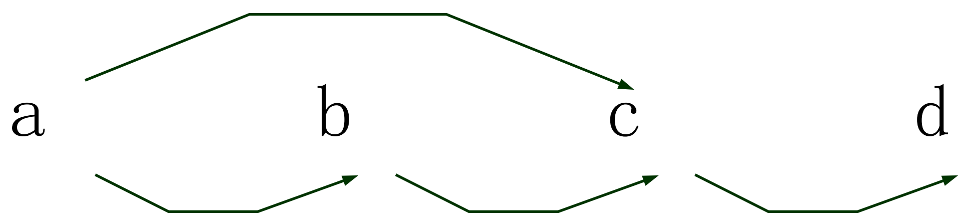
- 传递关系
  - $\forall a,b,c \in A$,如果$<a,b> \in R$,$<b,c> \in R$, 必有$<a,c> \in R$
- 例
  - $R_1 = \{<x,y>,<z,x>,<z,y>\}$
  - 是传递关系
  - $R_2 = \{<a,b>,<c,d>\}$
  - 是传递关系
  - $R_3 = \{<a,b>,<b,a>\}$
  - 不是传递关系

10.4 关系的性质

- 例:整除关系R_D是Z_+上的传递关系
  - $\forall x, y, z \in Z_+$, 如$<x, y>\in R_D$，$<y, z>\in R_D$, 即x能整除y，且y能整除z,则必有x能整除z，$<x, z>\in R_D$
- 例:P(A)上的包含关系$\subseteq$具有传递性
  - 若$u \subseteq v$, $v \subseteq w$,则必有$u \subseteq w$
- 例:实数集上的$\leq$关系具有传递性
  - 若$x \leq y$, $y \leq z$必有$x \leq z$

10.4 关系的性质

- 传递关系关系图特点？
  - 如果结点a能通过有向弧组成的有向路径通向结点x,则a必须有有向弧直接指向x,否则R就不是传递的
- 例：$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,d>,<a,c>\}$ 传递？



- $R=\{<a,b>,<b,c>,<c,d>,<a,c>, <b,d>,<a,d> \}$
- **定理：** R在A上传递当且仅当$R \circ R \subseteq R$

10.4 关系的性质

自　反： $\forall x(x \in X \to xRx)$

反自反： $\forall x(x \in X \to x\not{R}x)$

对　称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$

反对称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$

传　递：

$$\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$$

10.4 关系的性质

- 设A是集合，R_1和R_2是A上的关系
  - 若R_1，R_2是自反和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的
  - 若R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的

10.4 关系的性质

- 设A是集合，R_1和R_2是A上的关系
  - 若R_1，R_2是自反的和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的

证明：R_1，R_2是自反的$\Rightarrow$ $I_A \subseteq R_1$，$I_A \subseteq R_2$

所以$I_A \subseteq R_1 \cup R_2$

R_1，R_2是对称的$\Rightarrow$ $R_1 = R_1^{-1}$和$R_2 = R_2^{-1}$

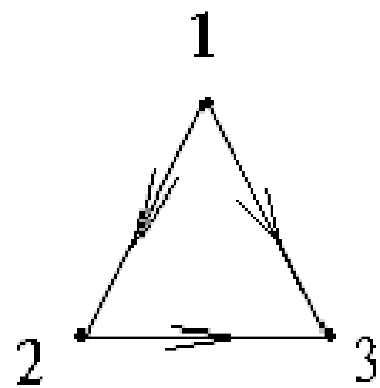
所以$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$

R是自反关系的充要条件是$I_A \subseteq R$

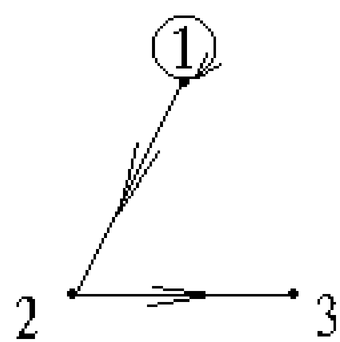
R在A上对称当且仅当$R=R^{-1}$

10.4 关系的性质

- 例： $X=\{1,2,3\}$，判断关系的性质
- $R_1=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$
  - 反自反
  - 反对称
  - 可传递



- $R2=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>\}$
  - 反对称



	自反 Reflexive （10.4.1）	反自反 Irreflexive （10.4.1）	对称 Symmetric （10.4.2）	反对称 Antisymmetric （10.4.2 ）	传递 Transitive （10.4.3 ）
定义要点	$x \in A \to xRx$	$x \in A \to x \not{R} x$ $\langle x, x \rangle \notin R$	$xRy \to yRx$ $\langle x, y \rangle \in R \to$ $\langle y, x \rangle \in R$	$xRy \wedge x \neq y$ $\to y \not{R} x$ $xRy \wedge yRx$ $\to x = y$	$xRy \wedge yRz$ $\to xRz$ $\langle x, y \rangle \in R \wedge$ $\langle y, z \rangle \in R \to$ $\langle x, z \rangle \in R$
关系矩阵的特点	$r_{ii} = 1$;主对角元均为1	$r_{ii} = 0$;主对角元均为0	对称矩阵 $r_{ij} = r_{ji}$	若$r_{ij} = 1 \wedge$ $i \neq j$ $\to r_{ji} = 0$	无直观特点或难以直接判断
关系图的特点	每个结点都有自圈	每个结点都没有自圈	若两个结点之间有边，一定是一对方向相反的边	若两个结点之间有边，一定是一条有向边	若从结点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k一定有边

运算性质

- 已知 R， R_1， R_2是A上满足相应性质的关系，
- 问题：经过并，交，补，求逆，合成运算后是否还具有原来的性质？

运算 \ 性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

注： √表示经过左端的运算仍保持原来的性质， ×则表示原来的性质不再满足。

需按纵列理解，不能按横向。如不存在一个关系，它既是自反的又是反自反的。

$R_1 \circ R_2$: 反自反性

- $A = \{1,2,3\}$
- $R_1 = \{<1,2>,<2,3>\}$
- $R_2 = \{<2,1>,<3,2>\}$
- $R_1 \circ R_2 = \{<2,2>,<3,3>\}$

$R_1 \circ R_2$: 传递性

- A = {1,2,3}
- R_1={<1,2>, <2,3>, <1,3>}
- R_2={<3,1>, <1,2>, <3,2>}
- $R_1 \circ R_2$={<3,2>, <3,3>,<1,3>}

几个主要关系的性质

A是非空的

性质 / 关系	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A					
全域关系 E_A					
A**上的空关系** Φ					
N**上的整除关系**					
包含关系 $\subseteq$					
真包含关系 $\subset$					

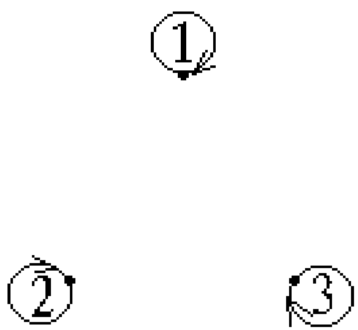
A是非空的

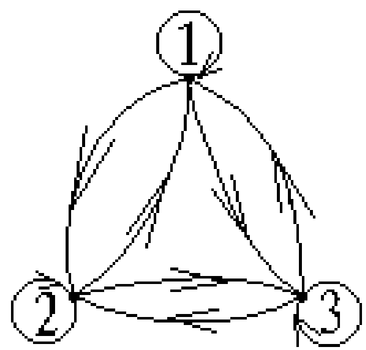
几个主要关系的性质

关系 \ 性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A	√	×	√	√	√
全域关系 E_A	√	×	√	×	√
A上的空关系 Φ	×	√	√	√	√
N上的整除关系	√	×	×	√	√
包含关系 $\subseteq$	√	×	×	√	√
真包含关系 $\subset$	×	√	×	√	√

10.4 关系的性质

- $R_3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$
- 自反，对称，反对称，可传递的

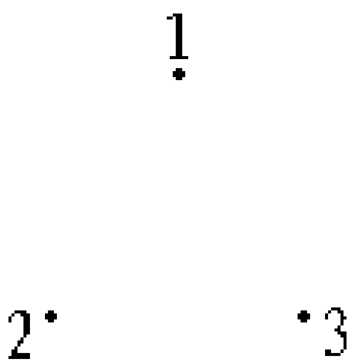




- $R_4= E_x$
- 自反，对称，可传递的

10.4 关系的性质

- $X=\{1,2,3\}$, $R_5=\varnothing$
  - 反自反的，对称的，反对称的，可传递的



- 若$X=\varnothing$，X上的空关系
  - 自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的

10.5.1 多个关系的合成举例

例

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$R^{\circ} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$$
$$R^1 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$$
$$R^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$$
$$R^3 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\} = R^2 \circ R$$
$$R4 = R^3 \circ R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\} = R^2$$

……

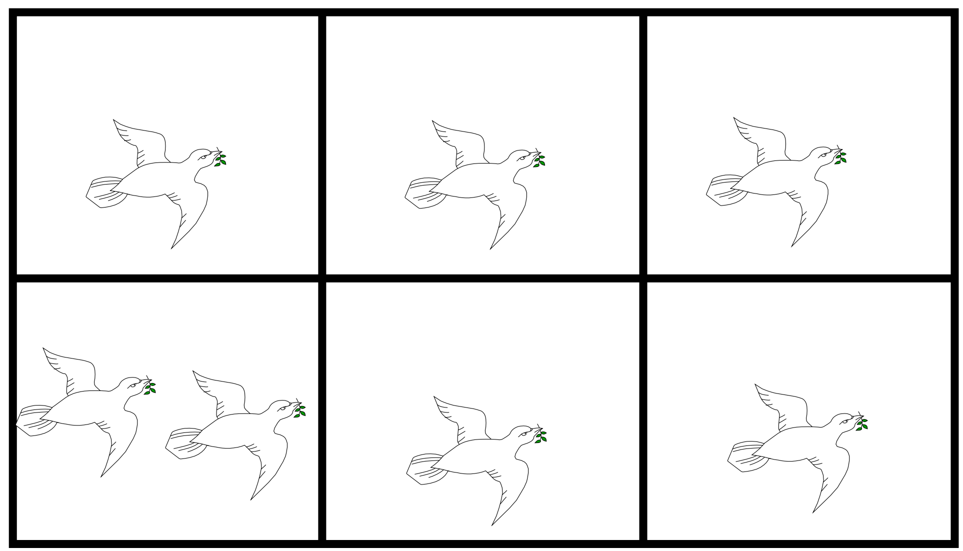
- 对于此例 $R^2 = R^4 = R^6 = \cdots,\quad R^3 = R^5 = R^7 = \cdots,$ 是否具有普遍规律？

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.1

- 设A是有限集合，$|A| = n$，R是A上的关系，则存在自然数s和$t, s \neq t$使得 $R^s = R^t$。

鸽巢原理



10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t（$s < t$），使得 $R^s = R^t$，则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$，其中 $k \in N$；

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $k, i \in N$ $p = t - s$；

(3) 令$B = \{R^0, R^1 \dots R^{t-1}\}$，则$R$的各次幂均为$B$的元素，即对任意的 $q \in N$，有 $R^q \in B$

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 例 $A = \{a, b, c, d\}$,

  $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$

  $R^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\} = R^4$

- 对应 $s = 2,\ t = 4$,

  $R^{2+k} = R^{4+k}, R^{2+2k+i} = R^{2+i}$

  $B = \{R^0,\ R^1,\ R^2,\ R^3\}$,

- R的幂中不相同的只有以上4种。

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t

$(s < t)$，使得 $R^s = R^t$，则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$，其中 $k \in N$；

证明： $R^{s+k} = R^s \cdot R^k$

$= R^t \cdot R^k$

$= R^{t+k}$

$R^m \circ R^n = R^{m+n}$

有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t $(s < t)$，使得 $R^s = R^t$，则

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $k, i \in N$ $p = t - s$；

证明：数学归纳法。对k进行归纳：

$k = 0$: $R^{s+0+i} = R^{s+i}$

假设$k = n$时有$R^{s+np+i} = R^{s+i}$

则当$k = n + 1$时，

$$R^{s+(n+1)p+i} = R^{s+np+p+i} = R^{s+np+i} \cdot R^p$$
$$= R^{s+i} \cdot R^p = R^{s+(t-s)+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

$R^m \circ R^n = R^{m+n}$

有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t $(s < t)$，使得 $R^s = R^t$，则

(3) 令$B = \{R^0, R^1 \ldots R^{t-1}\}$，则$R$的各次幂均为$B$的元素，即对任意的 $q \in N$，有 $R^q \in B$

证什么？

$R^{s+k\,p+i} = R^{s+i}$

证明：$q < t$：则$R^q \in B$

$q \geq t$：则有$q > s$。一定存在$q = s + kp + i$，

其中$0 \leq i \leq p - 1$，$R^q = R^{s+\mathrm{kp}+i} = R^{s+i}$

$s + i \leq s + p - 1 = t - 1$，所以$R^q \in B$

$p = t - s$

关系的闭包

- 希望已有的关系具有某些特殊的性质（如自反、对称、传递等）
- 有些关系原本不具备这些性质，但可以通过对原关系加以扩充，使之满足这些性质。
- 希望扩充的部分尽量小，即增加的有序对尽量少，便形成了闭包的概念。

定义10.5.2　闭包的定义

- 设R是非空集合A上的关系，如果A上有另一个关系R'满足：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）；　**满足性质**

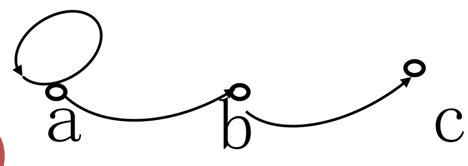
（2）$R \subseteq R'$；　**包含关系**

（3）对A上任何自反的（对称的或传递的）关系R''，$R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$。　**最小的那个**

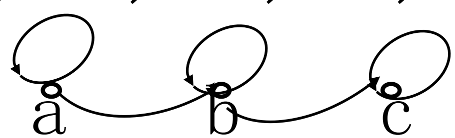
- 则称关系R'为R的自反（对称或传递）闭包　**闭包**
- 一般将R的自反闭包记作$r(R)$，对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

10.5 关系的闭包(closure)

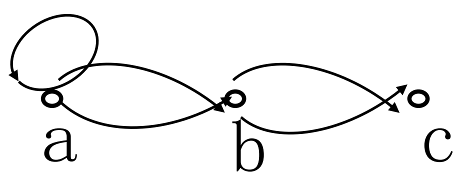
- 例$A=\{a,b,c\}$，$R=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>\}$
  - 自反闭包$r(R)$



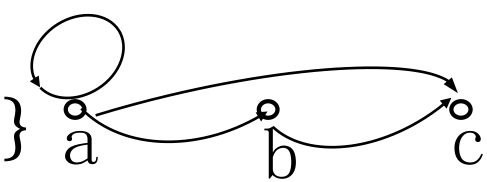
  - $\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<b,b>,<c,c>\}$
  - 对称闭包$s(R)$



  - $\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>\}$
  - 传递闭包$t(R)$



  - $\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$



10.5 关系的闭包(closure)

- 自反闭包$r(R)$，

  是具有自反性的R的“最小”超集合

- 对称闭包$s(R)$，

  是具有对称性的R的“最小”超集合

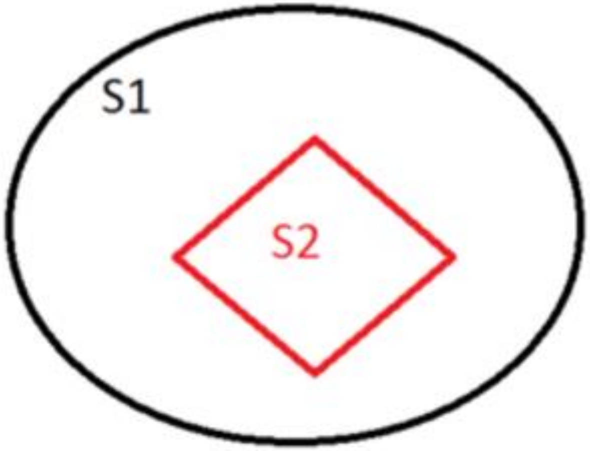
- 传递闭包$t(R)$,

  是具有传递性的R的“最小”超集合

若R已经是自反(对称、传递)的，那么R的自反(对称、传递)闭包就是它自身。

超集合(Superset)

- 定义：如果一个集合S2中的每一个元素都在集合S1中，且集合S1中可能包含S2中没有的元素，则集合S1就是S2的一个超集。S1是S2的超集，若S1中一定有S2中没有的元素，则S1是S2的真超集，S2是S1的真子集。



定理10.5.4　闭包的性质1

- 对非空集合A上的关系R，

（1）R是自反的 $\Leftrightarrow r(R)=R$；

（2）R是对称的 $\Leftrightarrow s(R)=R$；

（3）R是传递的 $\Leftrightarrow t(R)=R$。

定理10.5.5　闭包的性质2

- 对非空集合A上的关系$R1, R2$，若 $R_1 \subseteq R_2$ 则

（1）$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2）$s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3）$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

定理10.5.6 闭包的性质3

对非空集合A上的关系$R1, R2$，

（1）$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$

（2）$s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$

（3）$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

$A= \{1,2,3\}$

$R_1=\{<1,2><2,1>\}$ $R_2=\{<2,3><3,2>\}$

$t(R_1)=\{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>\}$

$t(R_2)=\{<3,3>, <2,2>, <2,3><3,2>\}$

$t(R_1 \cup R_2)=\{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,3>, <2, 3>, <3,2>,$ $<1,3>, <3,1>\}$ 多了两项

运算 \ 性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

注： √表示经过左端的运算仍保持原来的性质，×则表示原来的性质不再满足。

需按纵列理解，不能按横向。如不存在一个关系，它既是自反的又是反自反的。

$$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$r(R_1)$和$r(R_2)$是A上的自反关系，所以

$r(R_1) \cup r(R_2)$是A上的自反关系

$R_1 \subseteq r(R_1)$， $R_2 \subseteq r(R_2)$， 所以$R_1 \cup R_2 \subseteq$

$r(R_1) \cup r(R_2)$

根据自反闭包的定义 $r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$

$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, 有$r(R_1) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

同理， $r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

因此$r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

定理：R是非空集合A上的关系，则$r(R) = R \cup I_A$

证明：$R \subseteq R \cup I_A$，$R \cup I_A$是自反的

- 设R''满足$R \subseteq R''$，R''是自反的

  $\forall < a,b > \in R \cup I_A$

- 则$< a,b > \in R$或$< a,b > \in I_A$
- 如$< a,b > \in R$，由$R \subseteq R''$知$< a,b > \in R''$
- 如$< a,b > \in I_A$，由R''的自反性知$< a,b > \in R''$
- 均有$< a,b > \in R''$

$\therefore R \cup I_A \subseteq R''$

对A上任何自反的关系R''，$R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$

$$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$$r(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup I_A$$

$$= (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A)$$

$$= r(R_1) \cup r(R_2)$$

$$r(R) = R \cup I_A$$

单选题 1分

Setting

Z 上定义关系：$R = \{(x, y) | \ x + y = 2\}$，则 R 的自反闭包 $r(R) = \{(x, y) | \ x + y = 2 或 x = y\}$

A 正确

B 错误

清华大学软件学院 离散数学

Submit

10.5 关系的闭包(closure)

例：整数集Z上<（小于）关系的自反闭包是≤（小于等于）关系；

- ≠关系的自反闭包是全关系；
- 空关系的自反闭包是恒等关系；
- Z上定义关系：$R = \{(x, y) | \ x + y = 2\}$，则R的自反闭包 $r(R) = \{(x, y) | \ x + y = 2或x = y\}$。

定理：R是非空集合A上的关系, 则$s(R) = R \cup R^{-1}$

证明：$R \subseteq R \cup R^{-1}$满足闭包定义第2条

$\forall < a,b > \in R \cup R^{-1}$

$\Leftrightarrow < a,b > \in R \lor < a,b > \in R^{-1}$

$\Leftrightarrow < b,a > \in R^{-1} \lor < b,a > \in R$

$\Leftrightarrow < b,a > \in R \cup R^{-1}$

$\therefore R \cup R^{-1}$是对称的　　　　满足性质

定理：R是非空集合A上的关系, 则$s(R) = R \cup R^{-1}$

- 如$R \subseteq R''$, 且R''是对称的

  $\forall < a,b > \in R \cup R^{-1}$

  $< a,b > \in R$或$< a,b > \in R^{-1}$

  如$< a,b > \in R$, 由$R \subseteq R''$, 则$< a,b > \in R''$

  如$< a,b > \in R^{-1}$, 则$< b,a > \in R$, 则$< b,a > \in R''$

  因R''对称

  $\therefore < a,b > \in R'', \therefore R \cup R^{-1} \subseteq R''$

- 满足定义第3条

$$s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$$

$$\begin{aligned}
s(R_1 \cup R_2) &= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} \\
&= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1)^{-1} \cup (R_2)^{-1} \\
&= (R_1 \cup (R_1)^{-1}) \cup (R_2 \cup (R_2)^{-1}) \\
&= s(R_1) \cup s(R_2)
\end{aligned}$$

$$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

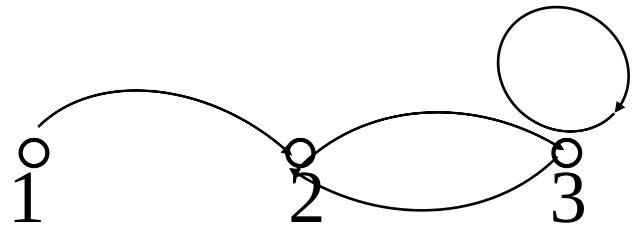
$$t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

$$t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$ 因而

$$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

若 $R_1 \subseteq R_2$ 则 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

例：设$A=\{1,2,3\}$, A上的关系R如图, 求$r(R)$, $s(R)$



- 解:$R=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$
  $r(R)= R\cup I_A$
  $=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<2,2>,$
  $<1,1>\}$
  $s(R)= R\cup R^{-1}$
  $=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<2,1>\}$

定理：R是非空集合A上的关系，则 $t(R)=R^1\cup R^2\cup\ldots$

证明: 首先证明$R^1\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$，使用归纳法。

$n=1$，显然$R^1=R\subseteq t(R)$

假设$R^k\subseteq t(R)$，对任意$<x,y>$有

$<x,y>\in R^{k+1}=R^k\circ R^1$

$\Leftrightarrow\exists t(<x,t>\in R\wedge<t,y>\in R^k)$

$\Rightarrow\exists t(<x,t>\in t(R)\wedge<t,y>\in t(R))\Rightarrow<x,y>\in t(R)$

其次， $t(R)\subseteq R^1\cup R^2\cup\ldots$即证$R^1\cup R^2\cup\ldots$传递

推论：设A是非空有限集，R是集合A上的二元关系，

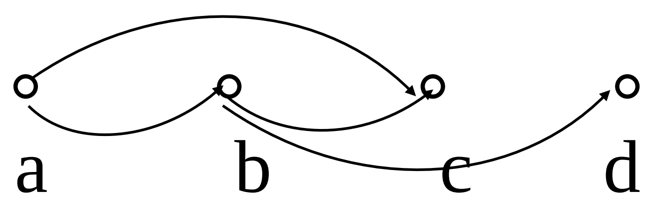
则存在正整数n，使得$t(R)=R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n$

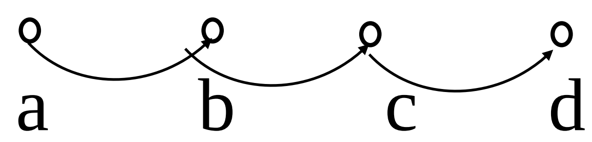
实例

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{<a,b>, <a,c>, <b,c>, <b,d>\}$$

$$S = \{<a,b>, <b,c>, <c,d>\}, \text{求} t(R), t(S)$$





解: $R^2 = \{<a,c>, <a,d>\}, R^3 = \varnothing$

$$\therefore t(R) = R \cup \{<a,c>, <a,d>\}$$

$$S^2 = \{<a,c>, <b,d>\}, S^3 = \{<a,d>\}, S^4 = \varnothing$$

$$\therefore t(S) = S \cup \{<a,c>, <b,d>\} \cup \{<a,d>\}$$

10.5 关系的闭包(closure)

给定关系R，$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的关系矩阵分别为M，M_r，M_s，M_t，那么：

- $M_r = M + I$
- $M_s = M + M^{\mathrm{T}}$
- $M_t = M + M^2 + M^3 + \cdots$

10.5 关系的闭包(closure)

关系图分别为G，G_r，G_s，G_t，那么：

- 考察G的每个顶点，如果没有环就加上一个环，最终得到的是G_r
- 考察G的每一条边，如果有一条从x_i到x_j的单向边，则在G中加一条x_j到x_i的反方向边，最终得到G_s
- 考察G的每个顶点x_i，找出从x_i出发的所有2步，3步，…，n步长的路径。设路径的终点为x_{j1}，x_{j2}，…，x_{jk}。如果没有从x_i到x_{jl}的边，就加上这条边，最终得到G_t

例子

$A=\{a,b,c\}$，$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$，求闭包$r(R),s(R),t(R)$

$$r(R)=R\cup\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$$

$$s(R)=R\cup\{<b,a>,<c,b>,<a,c>\}$$

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3$$

其中$R^2=\{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$

$$R^3=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$$

实例

- 设$A = \{a, b, c, d\}$上的关系

$R = \{< a, b >< b, a >, < b, c >, < c, d >, < d, b >\}$

(1) 写出$R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图。

(2) 计算$r(R), s(R), t(R)$。

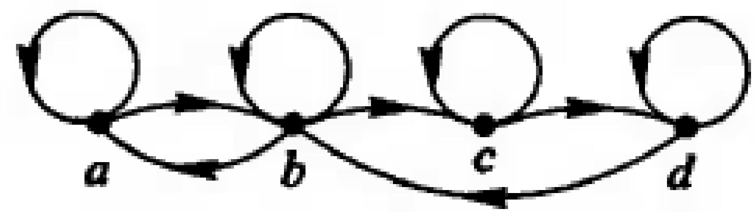
(3) 写出$R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵。

$R = \{<a,b><b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$

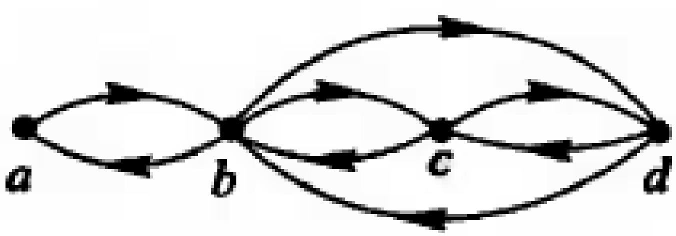
实例

- 设关系$R, r(R), s(R), t(R)$，关系图如下图

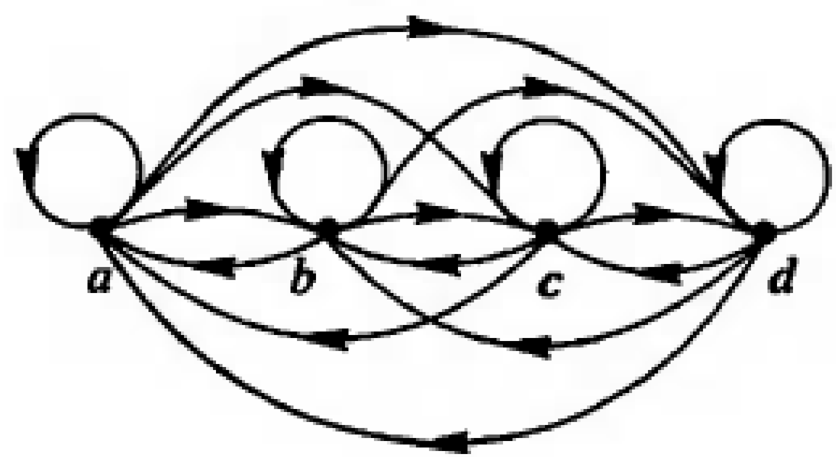
R



r(R)



s(R)



t(R)

10.5 关系的闭包(closure)

解 $R=\{<a,b><b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad M_r=M+I=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$M_s=M+M^T=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix},\quad M_t=M+M^2+M^3+M^4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

定理10.5.10　传递闭包的有限构造方法

- A为非空有限集合，$|A| = n$，R为A上的关系，则存在正整数$k \leq n$，使得

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k$$

传递闭包的求解

- 图论中一个非常重要的问题
  - 给定了一个城市的交通地图，可利用求传递闭包的方法获知任意两个地点之间是否有路相连通。
- 求传递闭包的方法
  - 直接利用关系矩阵相乘来求传递闭包
  - 在计算矩阵相乘的时候用分治方法降低时间复杂度
  - 利用基于动态规划的Warshall算法来求传递闭包

Warshall算法

计算有限集合上关系的传递闭包的一种有效算法

对Warshall算法的解说

- 设关系R的关系图为G，设图G的所有顶点为v1, v2, …, vn，则t(R)的关系图可用该方法得到：若G中任意两顶点vi和vj之间有一条路径且没有vi到vj的弧，则在图G中增加一条从vi到vj的弧，将这样改造后的图记为G’，则G’即为t(R)的关系图。G’的邻接矩阵A应满足：若图G中存在从vi到vj路径，即vi与vj连通，则B[i, j]=1，否则B[i, j]=0。
- 求t(R)的问题就变为求图G中每一对顶点间是否连通的问题。

对Warshall算法的解说

- 这样，求t(R)的问题就变为求图G中每一对顶点间是否连通的问题。
- 定义一个n阶方阵序列B(0),B(1),B(2),…,B(n)，每个方阵中的元素值只能取0或1。B(m)[i,j]=1表示存在从vi到vj且中间顶点序号不大于m的路径（m=1..n），B(m)[i,j]=0表示不存在这样的路径。而B(0)[i,j]=1表示存在从vi到vj的弧，B(0)[i,j]=0表示不存在从vi到vj的弧。
- 这样，B(n)[i,j]=1表示vi与vj连通，B(n)[i,j]=0表示vi与vj不连通。故B (n)即为t(R)的关系矩阵。

B(0)=M（M为R的关系矩阵）。

若B(0)[i,1]=1且B(0)[1,j]=1，或B(0)[i,j]=1，当且仅当存在从vi到vj且中间顶点序号不大于1的路径，此时应将B(1)[i,j]置为1，否则置为0。

一般地，若B(k-1)[i,k]=1且B(k-1)[k,j]=1，或B(k-1)[i,j]=1，当且仅当存在从vi到vj且中间顶点序号不大于k的路径，此时应将B(k)[i,j]置为1，否则置为0

$$B(k)[i,j]=(B(k-1)[i,k] \wedge B(k-1)[k,j]) \vee B(k-1)[i,j]$$

这样，就可得计算B(k)的方法：先将B(k)赋为A(k-1)；再对所有i=1..n，若B(k)[i,k]=1（即B(k-1)[i,k]=1），则对所有j=1..n，执行：

$$B(k)[i,j] \leftarrow B(k)[i,j] \vee B(k-1)[k,j]$$

令$B[j,i]$表示矩阵B第j行第i列的元素，

（1） 令矩阵$B = M(R)$；

（2） 令 $i = 1$，$n = |A|$； //外循环对列进行

（3） $for\ j = 1\ to\ n$

$if\ (B[j,i] = 1)\ then$

$for\ k = 1\ to\ n$

$B[j,k] = B[j,k] \vee B[i,k]$

// 将第i行的元素加到第j行上（逻辑加）

（4） $i = i + 1$；

（5） $if\ (i \leq n)\ then\ go\ to\ (3)$

$else\ stop$ 且 $M(R^+) = B$

Warshall算法

算法 Warshall($A[1..n,1..n]$)

//实现计算传递闭包的Warshall算法

//输入：包括n个节点有向图的邻接矩阵

//输出：该有向图的传递闭包

$R^{(0)} \leftarrow A$

$for(k \leftarrow 1; k \leq n; k++)$

$\quad for(i \leftarrow 1; i \leq n; i++)$

$\quad\quad for(j \leftarrow 1; j \leq n; j++)$

$\quad\quad\quad R^{(k)}[i,j] \leftarrow R^{(k-1)}[i,j] \; or \; R^{(k-1)}[i,k] \; and \; R^{(k-1)}[k,j]$

$return \; R^{(n)}$

10.5 关系的闭包(closure)

定理：设A是集合，R_1和R_2是A上的二元关系，$R1 \subseteq R2$，则有：

- $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
- $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
- $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

证明：$r(R_1) = R_1 \cup I_A$，$r(R_2) = R_2 \cup I_A$

10.5 关系的闭包(closure)

定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：

- 若R是自反的，则$s(R), t(R)$也自反
- 若R是对称的，则$r(R), t(R)$也对称
- 若R是可传递的，则$r(R)$也可传递

$s(R)$不是可传递的？

若R是传递的，$s(R)$不一定是传递的

反例：$R = \{< a,b >,< c,b >\}$，

R是传递的

$s(R) = \{< a,b >,< b,a >,< c,b >,< b,c >\}$

$s(R)$不是传递的

若R是可传递的，则$r(R)$也可传递

定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：若R是对称的，则$t(R)$也对称

证明：归纳法证明若R是对称，则R^n也对称

$n=1$，显然成立

假设R^n对称，对任意$<x,y>$

$$<x,y> \in R^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \exists t(<x,t> \in R \wedge <t,y> \in R^n)$$

$$\Rightarrow \exists t(<t,x> \in R \wedge <y,t> \in R^n)$$

$$\Rightarrow <y,x> \in R \circ R^n \Rightarrow <y,x> \in R^{n+1}$$

定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：若R是对称的，则$t(R)$也对称

证明：⋯ $\Rightarrow <y,x> \in R \circ R^n \Rightarrow <y,x> \in R^{n+1}$

任取$<x,y>$，有

$$<x,y> \in t(R)$$
$$\Rightarrow \exists n(<x,y> \in R^n)$$
$$\Rightarrow \exists n(<y,x> \in R^n)$$
$$\Rightarrow <y,x> \in t(R)$$

定理10.5.12 闭包同时具有的多种性质2

对非空集合A上的关系R，

（1）$rs(R) = sr(R)$

（2）$rt(R) = tr(R)$

（3）$st(R) \subseteq ts(R)$

其中 $rs(R) = r(s(R))$，其它类似。

$$r(R) \rightarrow sr(R) \rightarrow tsr(R)$$

$$r(R) \rightarrow tr(R) \rightarrow str(R)\ ?$$

传递闭包的应用

- 传递闭包在关系数据库中有很多应用
  - 最短路径选择
  - 最省时加工流程

关系的性质

- 自反？对称？传递？
- 日常生活中的关系？

  同龄人

  同班同学

  ……

10.6 等价关系和划分

定义10.6.1 等价关系

- 设R为非空集合A上的关系，如果R是
  - 自反的、
  - 对称的、
  - 传递的，
- 则称R为A上的等价关系。

多选题 1分

Setting

以下哪些关系是等价关系？

A 平面几何中三角形间的相似关系

B 同学集合中同班同学的关系

C 朋友关系

D 恒等关系、全域关系

E 非空集合上的空关系

提交

典型的等价关系

- 平面几何中三角形间的相似关系
- 同学集合中同班同学的关系
- 同学集合中同年龄的关系
- 同学集合中的老乡关系
- 但朋友关系并非等价关系（不满足传递）
- 非空集合A上的恒等关系、全域关系
- 非空集合上的空关系不是等价关系（满足反自反故不满足自反性）

例：整数集上的同余关系

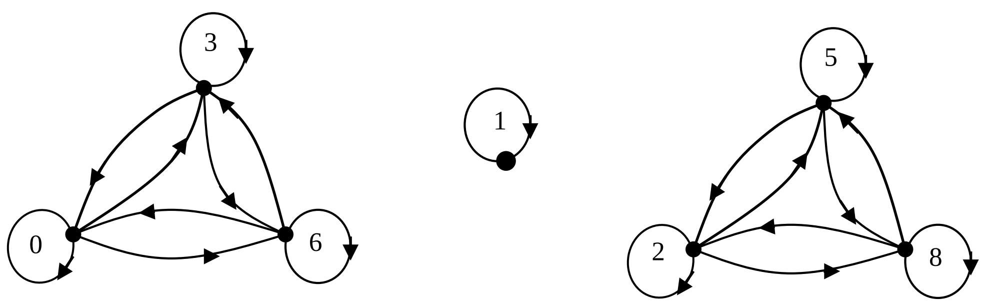
- 整数集上关系$R = \{< x, y > | x - y$能被m整除$\}$。
- 关系R是等价关系。
- 证明：R有自反性；对称性；传递性。

例：模为3的同余关系

- 设$A=\{0,1,2,3,5,6,8\}$，R为A上的模3等价关系，则

$R=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<5,5>,<6,6>,<8,8>,<0,3>,<3,0>,<0,6>,<6,0>,<2,5>,<5,2>,<2,8>,<8,2>,<3,6>,<6,3>,<5,8>,<8,5>\}$。

R的关系图见图



是否等价关系中有天然的划分？

10.6 等价关系与划分

等价类

设R是非空A集合上的等价关系，对于任何$x \in A$，令：

- $[x]_R = \{y | y \in A \ \wedge \ xRy\}$
- $[x]_R$是由$x \in A$生成的R等价类
- x为等价类$[x]_R$的表示元素

等价类

- 定义：设R是X上等价关系，对任意x可以构造X的子集$[x]_R = \{y | y \in X \text{ 且 } xRy\}$, 称之为$x$对于$R$的等价类。
- $[x]_R$是X内所有与x有等价关系R的元素构成的集合。有如下性质：

  （1）$\forall x \in X, x \in [x]_R, [x]_R \neq \emptyset$

  （2）若$y \in [x]_R$, 则$[x]_R = [y]_R$

  （3）$y \in [y]_R$, 若$y \notin [x]_R$, 则$[x]_R \neq [y]_R$

定理 设A是一个集合，R是A上的等价关系，xRy当且仅当$[x]_R = [y]_R$

证明：

- 充分性，因为$x \in [x]_R = [y]_R$, 即$x \in [y]_R$，所以xRy。
- 必要性，已知xRy，考虑$[x]_R$的任意元素z，有zRx。根据R的传递性，有zRy，因此$z \in [y]_R$。证明$[x]_R \subseteq [y]_R$。类似可证明$[y] \subseteq [x]_R$，所以$[x]_R = [y]_R$。

10.6 等价关系与划分

定理 设A是一个集合，R是A上的等价关系，对于所有$x, y \in A$，或者$[x]_R = [y]_R$，*或者* $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

证明：只需证明如果 $x \not R y$，则$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

反证法：假设$[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$，则$\exists z \in [x]_R \cap [y]_R$

$$\Rightarrow < x, z > \in R \wedge < z, y > \in R$$

$$\Rightarrow < x, y > \in R \text{（矛盾！）}$$

10.6 等价关系与划分

定理 设R是集合A上的等价关系，则

$$A = \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$$

证明：首先易证$\cup\{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$

其次，对任意$y \in A$

$y \in A \Rightarrow y \in [y]_R \wedge y \in A$

$\Rightarrow y \in \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$

所以：$A \subseteq \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$

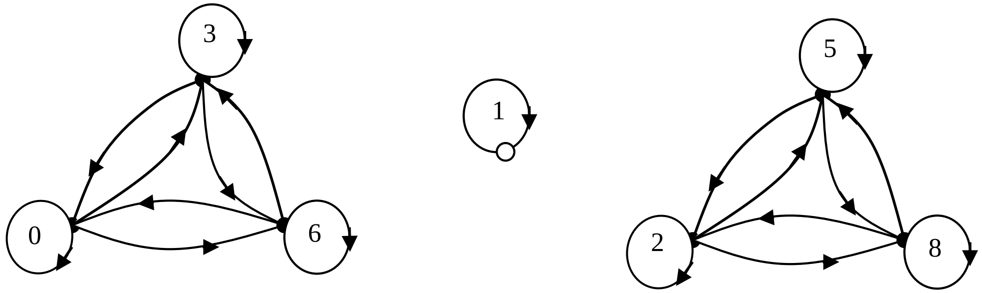
等价类覆盖集合

10.6 等价关系与划分–等价类

- 由等价类的定义性质知：X内的任两元素对于R的等价类或相等或分离，故X内所有元素对R的等价类的并集就是X。
- 也可以说，X的元素对于R的等价类定义了X的一个划分，且这样的划分就是唯一的。原因：由等价类的性质知等价关系R构成的类两两不相交，且覆盖X，且X的所有元素对于R的等价类是唯一的。

10.6 等价关系与划分-讨论

- 等价类$[x]_R$是一个集合，$[x]_R \subseteq A$（$[x]_R$是A的子集）
- $[x]_R$中的元素是在A中所有与x具有等价关系R的元素所组成的集合
- 在等价关系中的关系图中，
  - 每个连通子图中的所有点就构成一个等价类



10.6 等价关系与划分-实例

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $R = \{< a, a >, < b, b >, < a, b >, < b, a >, < c, c >, < d, d >, < c, d >, < d, c >\}$
- $[a]_R = \{a, b\} = [b]_R$
- $[c]_R = \{c, d\} = [d]_R$

谢谢！

shixia@tsinghua.edu.cn