离散数学2第七次作业

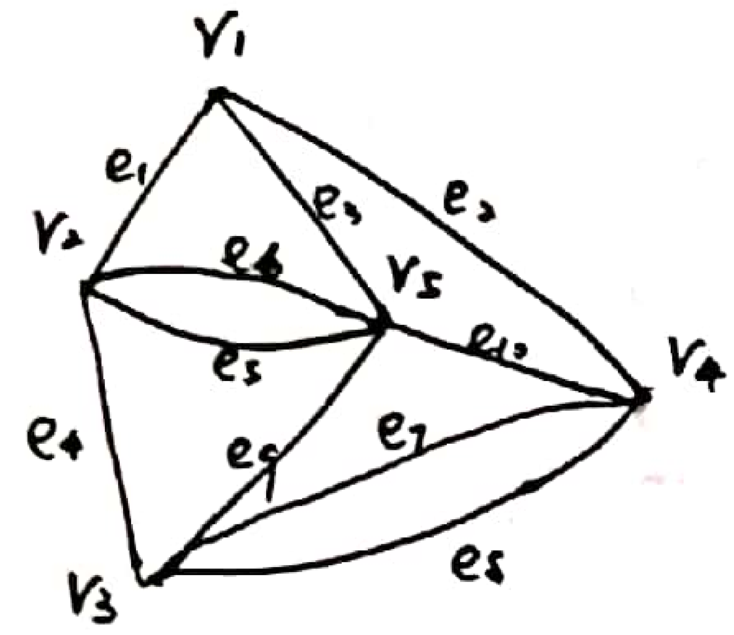
1、树共$(n-1)$条边，总度数为$2(n-1)$

$$\begin{cases} n_1+\cdots+n_k=n \quad ① \\ n_1+2n_2+\cdots+kn_k=2(n-1) \quad ② \end{cases}$$

①代入② $n_1+2n_2+\cdots+kn_k=2n_1+2n_2+\cdots+2n_k-2$

$$\Rightarrow n_1=n_3+2n_4+\cdots+(k-2)n_k+2$$

2.



关联矩阵（每边任给一方向）

$$B=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccccc} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&1&1&1&0\\ 0&-1&0&0&0&0&-1&-1&0&1\\ 0&0&-1&0&-1&-1&0&0&-1&-1 \end{array}\right] \begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccc} e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6&e_7&e_8&e_9&e_{10} \end{array} \end{array}$$

(1)

$$B_5=\begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&1&1&1&0\\ 0&-1&0&0&0&0&-1&-1&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B_5 B_5^T)=\det\begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&1&1&1&0\\ 0&-1&0&0&0&0&-1&-1&0&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&-1&0&0\\ 1&0&0&-1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&-1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix} 3&-1&0&-1\\ -1&4&-1&0\\ 0&-1&4&-2\\ -1&0&-2&4 \end{bmatrix}=3\begin{vmatrix} 4&-1&0\\ -1&4&-2\\ 0&-2&4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1&0&-1\\ -1&4&-2\\ 0&-2&4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1&0&-1\\ 4&-1&0\\ -1&4&-2 \end{vmatrix}$$

$$=3(4\times12+(-4))+(-12+(2))+(-2-15)$$

$$=101$$ 则树的数目为101

(2) 删去$e_3=(v_1,v_5)$的B_5得到B_5'

$$B_5'=\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&1&1&1&0\\ 0&-1&0&0&0&-1&-1&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B_5' B_5'^T)=\det\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&1&1&1&0\\ 0&-1&0&0&0&-1&-1&0&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&-1&0&0\\ 1&0&0&-1\\ 0&1&-1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix} 2&-1&0&-1\\ -1&4&-1&0\\ 0&-1&4&-2\\ -1&0&-2&4 \end{bmatrix}=2\begin{vmatrix} 2&-1&0\\ -1&4&-1\\ -1&0&-2 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 2&-1&0\\ -1&4&-1\\ 0&-1&4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1&4&-1\\ 0&-1&4\\ -1&0&-2 \end{vmatrix}$$

$$=2(2\times(-8)+1\times1)+4(2\times15+(-4))-(2+15)$$

$$=-30+104-17=57$$

则必不含(v_1,v_5)的树有57个

必含(v_1,v_5)的树有$101-57=44$个

(3) 删去 $e_{10}=(V_4,V_5)$ 的 B_5 得到 B_5''

$$B_5''=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0&0\\-1&0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&1&1&1\\0&-1&0&0&0&0&-1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\det(B_5''B_5''^T)=\det\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0&0\\-1&0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&1&1&1\\0&-1&0&0&0&0&-1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

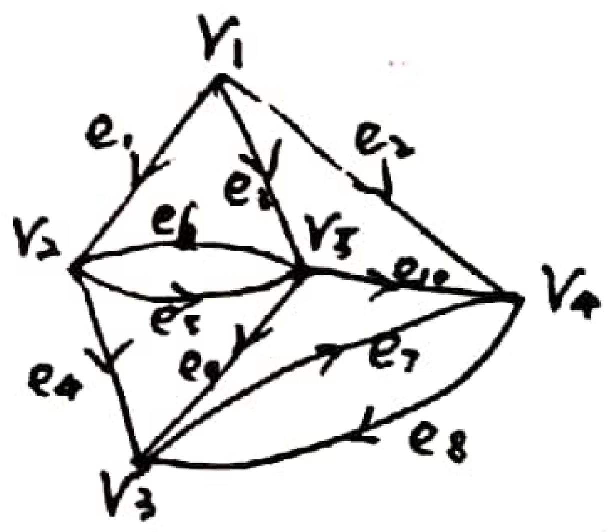
$$=\det\begin{bmatrix}3&-1&0&-1\\-1&4&-1&0\\0&-1&4&-2\\-1&0&-2&3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}3&-1&0&-1\\0&4&1&-3\\0&-1&4&-2\\-1&0&-2&3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}0&-1&-6&8\\0&4&1&-3\\0&-1&4&-2\\-1&0&-2&3\end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix}-1&-6&8\\4&1&-3\\-1&4&-2\end{bmatrix}=-(-2+12)-4(12-32)-(18-8)$$

$$=-10+80-10=60$$

则不含 (V_4,V_5) 的树有60个

5、



关联矩阵

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\-1&0&0&1&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&1&-1&-1&0\\0&-1&0&0&0&0&-1&1&0&-1\\0&0&-1&0&-1&1&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$\qquad e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ e_7\ e_8\ e_9\ e_{10}$

(1) 删 V_1 得 B_1 =

$$\begin{bmatrix}-1&0&0&1&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&1&-1&-1&0\\0&-1&0&0&0&0&-1&1&0&-1\\0&0&-1&0&-1&1&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

修改1为0得 $\vec{B_1}$ =

$$\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&-1&-1&0\\0&-1&0&0&0&0&-1&0&0&-1\\0&0&-1&0&-1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\det(\vec{B_1}B_1^T)=\det\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&-1&-1&0\\0&-1&0&0&0&0&-1&0&0&-1\\0&0&-1&0&-1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&-1&0&0\\1&0&0&-1\\-1&0&0&1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix}2&0&0&-1\\-1&3&-1&-1\\0&-1&3&-1\\-1&0&0&2\end{bmatrix}=2\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\0&0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&3&-1\\0&-1&3\\-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix}3&-1\\-1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&-1\\-1&3\end{vmatrix}=24$$

以 V_1 为根的根树树目为24

(2) B_1 删 e_3 得 B_1'，$\vec{B_1}$ 删 e_3 得 $\vec{B_1}'$

$$\det(\vec{B_1}'B_1'^T)=\det\begin{bmatrix}-1&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&-1&-1&0\\0&-1&0&0&0&-1&0&0&-1\\0&0&0&-1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&0&-1&0\\1&-1&0&0\\1&0&0&-1\\-1&0&0&1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix}2&0&0&-1\\-1&3&-1&-1\\0&-1&3&-1\\-1&0&0&1\end{bmatrix}=2\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&3&-1\\0&-1&3\\-1&0&0\end{vmatrix}=8$$

以 V_1 为根不含 (V_1,V_5) 的根树数目为8个

(3) B_1 删除 $e_4=(v_2,v_3)$ 得 B_1''，$\vec{B_1}$ 删除 e_4 得 $\vec{B_1}''$

$$\det(\vec{B_1}''B_1''^T)=\det\begin{bmatrix}-1&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1&-1&0\\0&-1&0&0&0&-1&0&0&-1\\0&0&-1&-1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&-1\\-1&0&0&1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix}2&0&0&-1\\0&2&-1&-1\\0&-1&3&-1\\-1&0&0&2\end{bmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-1&-1\\-1&3&-1\\0&0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&2&-1\\0&-1&3\\-1&0&0\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}2&-1\\-1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&-1\\-1&3\end{vmatrix}=15$$

以 v_1 为根不含 (v_2,v_3) 的根树数目为15个

则必含 (v_2,v_3) 的根树数目为9个

8、将二分图中各边标号排序 $e_{ij}=n(i-1)+j_n$ $(v_i\in V_1, u_j\in V_2)$，并以 $v_i\to u_j$ 为正方向

则基本关联矩阵（删去 v_1）为：

$$B_1=\begin{array}{c}\\ m+n-1\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}0&\cdots&0&1&\cdots&1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&\cdots&0&1&\cdots&1&0&\cdots&0\\&&&&&\vdots&&&&&&\vdots\\-1&&0&-1&&0&-1&&0&-1&&\\0&\ddots&-1&0&\ddots&-1&0&\ddots&-1&&\ddots&-1\end{bmatrix}}_{mn}$$

$$\det B_1B_1^T=\det\begin{bmatrix}n&&0&-1&\cdots&-1\\&\ddots&&&&\\0&&n&-1&\cdots&-1\\-1&\cdots&-1&m&&0\\&&&&\ddots&\\-1&\cdots&-1&0&&m\end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix}n-\frac{1}{m}&-\frac{1}{m}&\cdots&-\frac{1}{m}&&&\\-\frac{1}{m}&n-\frac{1}{m}&\cdots&-\frac{1}{m}&&0&\\\vdots&&\ddots&&&&\\-\frac{1}{m}&\cdots&&n-\frac{1}{m}&&&\\-1&&&-1&m&&\\&&\ddots&&&\ddots&\\-1&&&-1&&&m\end{bmatrix}$$

$$=\det\underbrace{\begin{bmatrix}n-\frac{1}{m}&-\frac{1}{m}&\cdots&-\frac{1}{m}\\-\frac{1}{m}&n-\frac{1}{m}&\cdots&-\frac{1}{m}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\-\frac{1}{m}&\cdots&&n-\frac{1}{m}\end{bmatrix}}_{m-1}\det\underbrace{\begin{bmatrix}m&&\\&\ddots&\\&&m\end{bmatrix}}_{n}$$

$$=m^n\left(\frac{n}{m}\right)^{m-1}\det\begin{bmatrix}m-1&-1&\cdots&-1\\-1&m-1&\cdots&-1\\\vdots&&\ddots&\vdots\\-1&\cdots&&m-1\end{bmatrix}$$

$$=m^n\left(\frac{n}{m}\right)^{m-1}\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\-1&m-1&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\\-1&\cdots&&m-1\end{bmatrix}$$

$$=m^n\left(\frac{n}{m}\right)^{m-1}\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&m&&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&\cdots&&m\end{bmatrix}=m^n\left(\frac{n}{m}\right)^{m-1}m^{m-2}=m^{n-1}n^{m-1}$$