1、解：
$$AB=[a_1,\cdots,a_n]\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=[a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n]$$
$$BA=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}[a_1\cdots a_n]=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1\\ a_1b_2 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \\ a_1b_n & \cdots & & a_nb_n\end{bmatrix}$$

2、解：(1) 对于AB得到的矩阵D，每一个元素均由 $d_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$ 计算而成，

即每一个元素均需m次乘法，D共 $l\times n$ 个元素

综上：需要做 $l\times m\times n$ 次乘法．

(2) 计算ABC共两种顺序

① (AB)C　其中AB共 $l\times m\times n$ 次，(AB)与C共 $l\times n\times p$ 次

　总计 $ln(m+p)$ 次

② A(BC)　其中BC共 $m\times n\times p$ 次，A与(BC)共 $l\times m\times p$ 次

　共计 $mp(n+l)$ 次

综上：① 若 $ln(m+p)<mp(n+l)$，则应选择AB相乘再与C乘的顺序

　共计 $ln(m+p)$ 次

② 若 $ln(m+p)>mp(n+l)$ 则应选择BC相乘再使A与之相乘的顺序

　共计 $mp(n+l)$ 次

③ 若 $ln(m+p)=mp(n+l)$ 则以上两种方式均可．

　共计 $ln(m+p)$ 次．

3、解：设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&3\end{bmatrix}$　$C=\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$

则
$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&8\\1&1&3\end{bmatrix}$$
$$(AB)C=\begin{bmatrix}2&3&8\\1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38\\14\end{bmatrix}$$
$$BC=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\14\end{bmatrix}$$
$$A(BC)=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38\\14\end{bmatrix}$$

则 $(AB)C=A(BC)$ 即矩阵乘法结合律得到验证．

4、解：$n=1$时　$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

$n=2$时　$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

采用数学归纳法　设 $n=k$时 ($k\geq2$且$k\in N_+$) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}1&k&\frac{k(k+1)}{2}\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}$

则
$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&k&\frac{k(k+1)}{2}\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&k+1&1+k+\frac{k(k+1)}{2}\\0&1&k+1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&k+1&\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\0&1&k+1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

即 $n=k+1$时 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$ 也成立　综上：$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$

5. 证：设 k 是其中一个使 $A^k=0$ 的正整数

$I = I + A^k = (I+A)(I-A+A^2-\cdots)$

已知 $I-A+A^2-\cdots$ 在指数大于 k 后均为0

因此 $I-A+A^2-\cdots = I-A+A^2-\cdots+(-1)^{k-1}A^{k-1}$ 为一个可以计算出的矩阵

而该矩阵左乘 $(I+A)$ 为 I

因此 $(I+A)^{-1} = I-A+A^2-\cdots+(-1)^{k-1}A^{k-1}$，$I+A$ 可逆

6. 解：$x^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

$-2x = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -4 & 8 & -2 \\ -6 & 10 & -4 \end{bmatrix}$

$5I = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore 3x^2-2x+5 = 3\begin{bmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -4 & 8 & -2 \\ -6 & 10 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 18 & -27 & 21 \\ -9 & 21 & 12 \\ -3 & 12 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -4 & 8 & -2 \\ -6 & 10 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}$

7. 解：设 $(AB)^{-1} = C$

则 $ABC = I$

$\Rightarrow A^{-1}ABC = A^{-1}I$

$\Rightarrow BC = A^{-1}$

$\Rightarrow B^{-1}BC = B^{-1}A^{-1}$

$\Rightarrow C = B^{-1}A^{-1}$ 综上 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

8. 证明：先证 A 为对角矩阵，设 c_{ij} 为 AB 第 i 行 j 列元素，d_{ij} 为 BA 第 i 行 j 列元素

$\because AB=BA$ 则 A、B 均为 $n\times n$ 矩阵

$\therefore c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ $d_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$

而 $c_{ij} = d_{ij}$，则 $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$

以 B 中每一个元素均为主元，则除 b_{ij} 外所有项系数均为0，$a_{ii}=a_{jj}$

除此之外 对于所有 $i\neq j$ 均有 $a_{ij}=0$

i,j 变化时 $a_{ii}=a_{jj}$ 即对角线上每个元素均相等，设 $a_{ii}=c$

则 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = cI$

则 $A = cI$ 得证

9、证明：设 A 为 $n_1 \times m_1$ 矩阵，B 为 $n_2 \times m_2$ 矩阵，∴假设 $AB-BA=I$

AB 可乘则 $m_1=n_2$，BA 可乘则 $m_2=n_1$，AB 与 BA 可加减则 $n_1=n_2$，$m_1=m_2$

∴ $n_1=n_2=m_1=m_2$，设 A、B 均为 $n\times n$ 方阵

设 $AB=C$，$BA=D$，C 中元素 c_{ij}，D 中元素 d_{ij}

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}，\quad d_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{ik}.$$

$$c_{ii}-d_{ii}=1 \Rightarrow c_{ii}=1+d_{ii}$$

则有
$$\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}=1+\sum_{k=1}^{n}a_{k1}b_{1k} \quad ①$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2}=1+\sum_{k=1}^{n}a_{k2}b_{2k} \quad ②$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kn}=1+\sum_{k=1}^{n}a_{kn}b_{nk} \quad ⓝ$$

①~ⓝ累加
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=n+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{ik}.$$

而
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{ik}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

则左右 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$ 相消

$0=n$ 即推出矛盾

∴ $AB-BA=I$ 假设不成立

∴ $AB-BA=I$ 对怎样的 A、B 均不成立.

综上：$AB-BA=I$ 无论对怎样的 A、B 均不成立

1.1 分块矩阵

1. $$\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&5\\0&1&0&1\\\hline 1&0&0&1\\0&1&1&0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&0&1\\\hline 1&0&0&1\\0&1&1&3\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&3\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&16\\1&3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8&6&17\\0&2&1&4\\1&3&2&3\\1&1&0&2\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|cc}0&1&2\\\hline 0&1&0\\3&0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}1&2&3\\\hline 4&2&3\\5&0&4\end{array}\right]=\begin{bmatrix}[1]+[1\ 2]\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} & [0\ 0]+[1\ 2]\begin{bmatrix}2&3\\0&4\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}[2\ 3]+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\0&4\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[1]+[14] & [0\ 0]+[2\ 11]\\ \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0\\6&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&3\\0&4\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&2&11\\4&2&3\\8&6&13\end{bmatrix}$$

2、证明：① 先证 B、C可逆 $\Rightarrow$ A可逆

设 $E=\begin{bmatrix}B^{-1}&0\\0&C^{-1}\end{bmatrix}$ 则 $AE=\begin{bmatrix}B&0\\0&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B^{-1}&0\\0&C^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}=I_n$

而 $EA=\begin{bmatrix}B^{-1}&0\\0&C^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B&0\\0&C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}=I_n$

则 $E=A^{-1}$，即 B、C可逆则 A可逆

② 再证 A可逆 $\Rightarrow$ B、C可逆

设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}D&E\\F&G\end{bmatrix}$

则 $AA^{-1}=\begin{bmatrix}B&0\\0&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D&E\\F&G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}BD&BE\\CF&CG\end{bmatrix}=I$

而BD为方块矩阵，对角线全为1，其余为0

则 $BD=I$ 则 $D=B^{-1}$ 即 B可逆

同理有 C可逆

综合①②：A可逆当且仅当 B、C可逆

3. 证明：① 设A是 $n\times m$ 分块矩阵，第 i 行 j 列子矩阵表示为 A_{ij}

A可自乘，则A为 $n\times n$ 分块矩阵，设 A自乘后 i行j列子矩阵表示为 A'_{ij}

则 $A'_{ii}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}A_{ki}$ 则 $k=i$ 时 A_{ii} 与 A_{ii} 相乘，则 A_{ii} 的行与列数应相等

即 A可以自乘 $\Rightarrow$ A的对角上的小块都是方块

② A的对角上的小块都是方块，则A有对角，A为 $n\times n$ 分块矩阵

设 A_{ii} 为 $n_i\times n_i$ 的小块 则 A_{ij} 为 $n_i\times n_j$ 的小块

$A'_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}A_{kj}$ 考查每一组 A_{ik}、A_{kj}，A_{ik} 为 $n_i\times n_k$ 小块，A_{kj} 为 $n_k\times n_j$ 小块

二者相乘，A'_{ij} 为 $n_i\times n_j$ 的小块，得出 $A\times A=A'$ 的矩阵中

A'_{ij} 为 $n_i\times n_j$ 的块，即第 i 行的分块行数均为 n_i，第 j 行的分块

列数均为 n_j，因此 A对角上的小块都是方块 $\Rightarrow$ A是一个分块矩阵

综上：A可以乘上自己的充要条件是A对角上的小块都是方块