理科线性代数第十一次作业

一、复线性空间

1、(1) pf: 考虑A的特征方程 $Ax=\lambda x$ ①

取厄米 $\bar{x}^T A^H = \bar{\lambda}\bar{x}^T$ ②

①左乘 $\bar{x}^T$ $\bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x$ ③

②右乘 x $\bar{x}^T A x = \bar{\lambda}\bar{x}^T x$ ④

③-④得 $(\lambda-\bar{\lambda})\bar{x}^T x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$ 特征值全为实数

(2) pf: 设 λ_1, λ_2 为A两个特征值 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

考虑分别对应的特征方程 $Ax=\lambda_1 x$ ①

$Ay=\lambda_2 y$ ②

②式取厄米 $\bar{y}^T A = \lambda_2 \bar{y}^T$

右乘 x $\bar{y}^T A x = \lambda_2 \bar{y}^T x$

$\Rightarrow \lambda_1 \bar{y}^T x = \lambda_2 \bar{y}^T x$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \bar{y}^T x = 0$

即不同特征值对应的特征向量正交

(3)(4) 可以一起证明，只要证可以酉矩阵正交化即可说明可相似正交化

pf: 取A的一个特征值及其对应的特征向量 v_1 $Av_1=\lambda_1 v_1$

将 v_1 扩成一个 $\mathbb{C}^n$ 的基 $\{v_1, e_2', \dots e_n'\}$ 正交归一得 $\{v_1, e_2, \dots e_n\}$

$$A[v_1\ e_2 \dots e_n] = [v_1\ e_2' \dots e_n']\begin{bmatrix}\lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1\end{bmatrix}$$

$$A = [v_1\ e_2' \dots e_n']\begin{bmatrix}\lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1\end{bmatrix}[v_1\ e_2 \dots e_n]^{-1}$$

$$A^H = [\bar{v}_1\ \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ B_1^H & A_1^H\end{bmatrix}[\bar{v}_1\ \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n]^{-1}$$

$$= A = [v_1\ e_2 \dots e_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1\end{bmatrix}[v_1\ e_2 \dots e_n]^{-1} \quad ①$$

由正交归一矩阵组成的酉矩阵 $[v_1\ e_2 \dots e_n]^T = [\bar{v}_1\ \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n]^{-1}$

$QQ^H = I \Rightarrow Q^H = Q^{-1} \Rightarrow [\bar{v}_1\ \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n]^T = [v_1\ e_2 \dots e_n]^{-1}$

则由① $\begin{bmatrix}\lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ B_1^H & A_1^H\end{bmatrix} \Rightarrow B_1 = 0$

$$\Rightarrow A = [v_1\ e_2 \dots e_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1\end{bmatrix}[v_1\ e_2 \dots e_n]^{-1}$$

对 A_1 进行同样操作 $A_1 = \underbrace{[v_2\ e_3' \dots e_n']}_{X_2}\begin{bmatrix}\lambda_2 & 0 \\ 0 & A_2\end{bmatrix}\underbrace{[v_2\ e_3' \dots e_n']^{-1}}_{X_2^{-1}}$

则 $A = [v_1\ e_2 \dots e_n]\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & X_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ & 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & X_2^{-1}\end{bmatrix}[v_1\ e_2 \dots e_n]^{-1}$

$$= [v_1\ v_2'\ e_3'' \dots e_n'']\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ & 0 & A_2\end{bmatrix}[v_1\ v_2'\ e_3'' \dots e_n'']^{-1}$$

考虑到 v_2' 为 $e_2 \sim e_n$ 线性组合，则 v_2' 与 v_1 正交

$v_2' = [e_2 \dots e_n]v_2$ $e_3'' = [e_2 \dots e_n]e_3'$ … $e_n'' = [e_2 \dots e_n]e_n'$

$v_2' \dots e_n''$ 线性无关 且均归一化

$\Rightarrow v_1 \dots e_n''$ 是一组正交归一基

类似地进行有限次可以将矩阵T酉矩阵正交化 .

2、 (a) 对于任一个特征值 λ 特征方程：$Ax=\lambda x$

对 $f=x^H A x$ 取 x 为 λ 特征向量 $(x\neq 0)$

$$f = x^H A x = \lambda x^H x > 0$$

$x^H x > 0 \Rightarrow \lambda > 0$ 即A特征值全为正

(b) 由第1题 $A = Q'^H \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} Q'$

$$= Q'^H \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q'$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q' \right)^H \left(\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q' \right)$$

取 $Q = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q'$，则 Q 可逆 $\left(Q'^H \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix} Q = Q'^H Q' = I \Rightarrow Q^{-1} = Q'^H \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix} \right)$

且有 $A = Q^H Q$

(c) 先证第1个主元为正，取 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$f = x^T A x = [1\ 0 \cdots 0] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11} > 0$$

对第k个主元采用数学归纳法，设 $1\le i\le k-1$ 时 第i个主元为正

下证第k个主元也为正 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\underset{(\text{第}k-1\text{次消元后})}{A'_{k-1}} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & * \\ & a'_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a'_{(k-1)(k-1)} & \\ 0 & & & & a'_{kk} \ \cdots \end{bmatrix}$

有 $A'_{k-1} = E_{k-1} A$ 其中初等矩阵 $E_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ * & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & * & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$（第k−1列）

取 $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} k$ $\quad x^T A x = x^T E_{k-1} A'_{k-1} x$

$$= [0 \cdots \underset{k}{1} \cdots 0] \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ * & \ddots & & & \\ \vdots & & * & 1 & \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots \\ * & \cdots & * & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & & * \\ & a'_{22} & & \\ & & a^{(k-1)}_{kk} & \\ 0 & & & a^{(k-1)}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} k$$

$$= [-\frac{a_{1k}}{a_{11}}\ -\frac{a'_{2k}}{a'_{22}} \cdots \underset{k}{1}\ 0 \cdots 0] \begin{bmatrix} a_{k1} \\ a'_{k2} \\ \vdots \\ a^{(k-1)}_{kk} \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{a_{1k}a_{k1}}{a_{11}} - \frac{a'_{2k}a'_{k2}}{a'_{22}} - \cdots + a^{(k-1)}_{kk} > 0$$

而 $-\frac{a^{(i-1)}_{ik}a^{(i-1)}_{ki}}{a^{(i-1)}_{ii}} = -\frac{(a^{(i-1)}_{ki})^H a_{ki}}{a^{(i-1)}_{ii}} < 0 \Rightarrow a^{(k-1)}_{kk} > 0$ #.

(d) 先证第1阶顺序主子式为正 第1阶顺序主子式 $= a_{11} > 0$ 显然成立.

对k归纳，设第(k−1)阶顺序主子式为正

则如(c)消元时 由于初等行变换不涉及倍增操作，

因此各阶顺序主子式不变

设已作消元 消元后第k阶顺序主子式 = 初始第k阶顺序主子式

= 消元后第(k−1)阶顺序主子式 × $a^{(k-1)}_{kk}$

= 初始第(k−1)阶顺序主子式 × $a^{(k-1)}_{kk}$ >0

⇒ 第k阶顺序主子式为正 #

3、pf: A^HA 为厄米矩阵，由1题证明，每个特征值几何重数 = 代数重数

非0特征值对应特征向量张成 r（r 为 A^HA 的秩）维空间，记特征向量为 $v_1', \dots v_r'$，令 $\{v_1', \dots v_r'\}$ 正交归一生成 $\{v_1, \dots v_r\}$.

① A^HA 特征值非负　　对于特征方程　$A^HA\alpha = \lambda\alpha$

左乘 α^H　$\alpha^H A^H A\alpha = |A\alpha|^2 = \lambda\alpha^H\alpha = \lambda|\alpha|^2$

$\Rightarrow \lambda \geq 0$　　令 $\sigma_i^2 = \lambda_i \Rightarrow \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

② $1 \leq i \leq r$　令 $u_i = \frac{Av_i}{|Av_i|} = \frac{Av_i}{\sqrt{v_i^H A^H A v_i}} = \frac{Av_i}{\sqrt{\lambda_i v_i^T v_i}} = \frac{Av_i}{\sqrt{\lambda_i}} = \frac{Av_i}{\sigma_i}$

将 $\{v_1 \dots v_r\}$ 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的基并用 G-S 方法正交归一得 $\{v_1, \dots v_r\, v_{r+1} \dots v_n\}$

将 $\{u_1, \dots u_r\}$ 扩充成 $\mathbb{R}^m$ 的基并用 G-S 方法正交归一得 $\{u_1, \dots u_r\, u_{r+1} \dots u_m\}$

$$\Rightarrow A\,[v_1 \dots v_r\ v_{r+1} \dots v_n] = [u_1 \dots u_r\ u_{r+1} \dots u_m]\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow AV = U\Sigma$

$\Rightarrow A = U\Sigma V^T$

4. pf: 先证 $\operatorname{rank} T = n$

$\because \operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$

$\therefore \operatorname{rank} T^r \leq \operatorname{rank} T^{r-1} \leq \dots \leq \operatorname{rank} T \leq n$

而 $\operatorname{rank} T^r = \operatorname{rank} I = n$

$\Rightarrow \operatorname{rank} T = n$

$\Rightarrow T$ 可逆

T 的特征值 λ 均有 $\lambda^r = 1$

因为 $T\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow T^r\alpha = \lambda^r\alpha \Rightarrow \alpha = \lambda^r\alpha \Rightarrow \lambda^r = 1$

将 T 化为若当标准形　$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & & & 0 \\ & \lambda_2 & \lambda_{23} & & \\ & & \lambda_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$　　$T = P^{-1}JP$

设 $a_{i,i+1} \neq 0$　则 $a_{i,i+1} = 1$

$(J^2)_{i,i+1} = a_{23}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 = (\lambda_2 + \lambda_3)^2$

$(J^3)_{i,i+1} = (\lambda_2+\lambda_3)^2\lambda_2 + (\lambda_2+\lambda_3)^2\lambda_3 = (\lambda_2+\lambda_3)^3$

$\vdots$

$(J^r)_{i,i+1} = (\lambda_2+\lambda_3)^r$

$(J^{r+1})_{i,i+1} = (\lambda_2+\lambda_3)^{r+1}$

$$T^r = P^{-1}J^rP = P^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1^r & (\lambda_1+\lambda_2)^r & & * \\ & \lambda_2^r & \ddots & \\ & & \ddots & (\lambda_{n-1}+\lambda_n)^r \\ 0 & & & \lambda_n^r \end{bmatrix}P = P^{-1}IP = I$$

$$则\quad P^{-1}\left(\begin{bmatrix} \lambda_1^r & (\lambda_1+\lambda_2)^r & & * \\ & \lambda_2^r & \ddots & \\ & & \ddots & (\lambda_{n-1}+\lambda_n)^r \\ 0 & & & \lambda_n^r \end{bmatrix} - I\right)P = 0$$

$\Rightarrow (\lambda_i + \lambda_{i+1})^r = 0$

$$T^{r+1} = P^{-1}J^{r+1}P = P^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1^{r+1} & (\lambda_1+\lambda_2)^{r+1} & & * \\ & \lambda_2^{r+1} & \ddots & \\ & & \ddots & (\lambda_{n-1}+\lambda_n)^r \\ 0 & & & \lambda_n^r \end{bmatrix}P = P^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}P$$

$(\lambda_i + \lambda_{i+1})^{r+1} = (\lambda_i + \lambda_{i+1})^r(\lambda_i + \lambda_{i+1}) = 0 = a_{i,i+1}$ 矛盾

则 $a_{i,i+1}$

$\therefore$ 若当标准形 $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

即 $T = P^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)P$　可相似对角化.

二、群、环、域

1. $a\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{1\ 2\ 3\ 4}$ $b\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{1\ 2\ 4\ 3}$ $c\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{1\ 3\ 2\ 4}$ $d\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{1\ 3\ 4\ 2}$ $e\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{1\ 4\ 2\ 3}$

$f\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{1\ 4\ 3\ 2}$ $g\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{2\ 1\ 3\ 4}$ $h\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{2\ 1\ 4\ 3}$ $i\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{2\ 3\ 1\ 4}$ $j\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{2\ 3\ 4\ 1}$

$k\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{2\ 4\ 1\ 3}$ $l\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{2\ 4\ 3\ 1}$ $m\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{3\ 1\ 2\ 4}$ $n\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{3\ 1\ 4\ 2}$ $o\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{3\ 2\ 1\ 4}$

$p\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{3\ 2\ 4\ 1}$ $q\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{3\ 4\ 1\ 2}$ $r\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{3\ 4\ 2\ 1}$ $s\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{4\ 1\ 3\ 2}$ $t\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{4\ 1\ 3\ 2}$

$u\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{4\ 2\ 1\ 3}$ $v\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{4\ 2\ 3\ 1}$ $w\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{4\ 3\ 1\ 2}$ $x\ \dfrac{1\ 2\ 3\ 4}{4\ 3\ 2\ 1}$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
a	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
b	b	a	e	f	c	d	h	g	k	l	i	j	s	t	u	v	w	x	m	n	o	p	q	r
c	c	d	a	b	f	e	m	n	o	p	q	r	g	h	i	j	k	l	t	s	w	x	u	v
d	d	c	f	e	a	b	n	m	q	r	o	p	t	s	w	x	u	v	g	h	i	j	k	l
e	e	f	b	a	d	c	s	t	u	v	w	x	h	g	k	l	i	j	n	m	q	r	o	p
f	f	e	d	c	b	a	t	s	w	x	u	v	n	m	q	r	o	p	h	g	k	l	i	j
g	g	h	i	j	k	l	a	b	c	d	e	f	o	p	m	n	r	q	u	v	s	t	x	w
h	h	g	k	l	i	j	b	a	e	f	c	d	u	v	s	t	x	w	o	p	m	n	r	q
i	i	j	g	h	i	k	o	p	m	n	r	q	a	b	c	d	e	f	v	u	x	w	s	t
j	j	i	l	k	g	h	p	o	r	q	m	n	v	u	x	w	s	t	a	b	c	d	e	f
k	k	l	h	g	j	i	u	v	s	t	x	w	b	a	e	f	c	d	p	o	r	q	m	n
l	l	k	j	i	h	g	v	u	x	w	s	t	p	o	r	q	m	n	b	a	e	f	c	d
m	m	n	o	p	q	r	c	d	a	b	f	e	i	j	g	h	l	k	w	x	t	s	v	u
n	n	m	q	r	o	p	d	c	f	e	a	b	v	x	t	s	v	u	i	j	g	h	l	k
o	o	p	m	n	r	q	i	j	g	h	l	k	c	d	a	b	f	e	x	w	v	u	t	s
p	p	o	r	q	m	n	j	i	l	k	g	h	x	w	v	u	t	s	c	d	a	b	f	e
q	q	r	n	m	p	o	w	x	t	s	v	u	d	c	f	e	a	b	j	i	l	k	g	h
r	r	q	p	o	n	m	x	w	v	u	t	s	j	i	l	k	g	h	d	c	f	e	a	b
s	s	t	u	v	w	x	e	f	b	a	d	c	k	l	h	g	j	i	q	r	n	m	p	o
t	t	s	w	x	u	v	f	e	d	c	b	a	q	r	n	m	p	o	k	l	h	g	j	i
u	u	v	s	t	x	w	k	l	h	g	j	i	e	f	b	a	d	c	r	q	p	o	n	m
v	v	u	x	w	s	t	l	k	j	i	h	g	r	q	p	o	n	m	e	f	b	a	d	c
w	w	x	t	s	v	u	q	r	n	m	p	o	f	e	d	c	b	a	l	k	j	i	h	g
x	x	w	v	u	t	s	r	q	p	o	n	m	l	k	j	i	h	g	f	e	d	c	b	a

2、 Pf：① 结合律：考虑到矩阵乘法有结合律，对于3个3×3行列式为1的正交矩阵A.B.C　　$(AB)C = A(BC)$

② 单位元：$I_{3\times3}$　　$|I_{3\times3}|=1$ 且其为正交矩阵

$$IA = AI = A$$

③ 逆元：首先，任一个行列式不为0的矩阵满秩，有逆

对于任一个行列式为1的正交矩阵A，下证 A^{-1} 也为行列式为1的正交矩阵

$$|A^{-1}||A| = |I| = 1$$

$$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 1$$

A为正交阵 $\Rightarrow AA^T = I \Rightarrow A^T = A^{-1}$

则 $(A^{-1})(A^{-1})^T = A^T(A^T)^T = A^TA = I$ 即 A^{-1} 也为正交阵

$\therefore A^{-1}$ 为A逆元，也在群中

综上：所有3×3行列式为1的正交矩阵构成一个群

3、 Pf：① 结合律：设三个保持内积的线性变换分别为 R.S.T

则 $(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$ 是自然的

或选择一组基，设对应矩阵 A.B.C　　$(A\cdot B)C = A(B\cdot C)$

因此线性变换满足结合律

② 单位元：I 恒同映射　　I 在群中　因为 $g(Iv, Iw) = g(v, w)$

I 是单位元，因为对任何保持内积线性变换 $I\cdot T = T\cdot I = T$

③ 逆元：先证T存在逆

在某组基下，设T对应矩阵为A

$$g(Av, Aw) = (Av)^T g^{\cdot} Aw = g(v, w) = v^T g w$$

反证法，设A不可逆，即A各列线性相关

$A = [v_1 \ldots v_n]$　$\exists c_i$ 不全为0　s.t. $c_1v_1+\cdots+c_nv_n = 0$

$$A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

不妨令 $v = w = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$，　g非退化，则 $v^Tgv \neq 0$

则 $g(Av, Av) = (Av)^T g Av = 0$

$g(v, v) = v^T g v \neq 0$　矛盾

$\therefore$ A可逆，则T可逆，设T逆元为 T^{-1}

① $TT^{-1} = T^{-1}T = I$

② 对于 $g(Tv, Tw) = g(v, w)$

取 $Tv = v'$，$Tw = w'$ $\Rightarrow v = T^{-1}v'$，$w = T^{-1}w'$

$\Rightarrow g(v', w') = g(T^{-1}v', T^{-1}w')$

即 T^{-1} 也属于该群

综上：保持内积线性变换构成个群