《高等微积分 1》第二次作业

1 计算极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

(2) 给定实数 a, b, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+b}-n\right)$.

2 给定正整数 k 及实数 $a_0, ..., a_{k-1}$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_0}$.

3 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q<1$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

利用 (1) 的结论, 求如下极限.

(2) 给定 $a>0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}$.

(3) 给定 $a>1$ 与正整数 k, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}$.

(4) 给定 $0<q<e$ 其中 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(\frac{n}{q})^n}$.

4 给定正实数 a, k. 定义数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为

$$x_0=a, \quad x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{k}{x_n}), \quad \forall n=0,1,2,...$$

(1) 证明: 对正整数 n, 有 $x_n\geq\sqrt{k}$.

(2) 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不增的, 即有 $x_1\geq x_2\geq ....$

(3) 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛.

(4) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5 给定正实数 a, b. 定义数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为

$$x_0 = a, \quad y_0 = b,$$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n), \quad \forall n = 0, 1, 2, ...$$

(1) 证明: 对正整数 n, 有 $y_n \geq x_n$.

(2) 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的, 数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不增的.

(3) 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界, 数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有下界.

(4) 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛.

(5) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

6 (1) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的数列, 且极限为 A. 证明: 对任何正整数 n, 有 $a_n \leq A$.

(2) 令 $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$. 证明: 对正整数 n, 有

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq e \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1}.$$

(3) 利用 (2) 的结论, 证明: 对正整数 n, 有

$$\frac{(n+1)^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}.$$

(4) 利用 (3) 的结论, 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

附加：记 $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$