

# 清华大学试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计 考试时间：2020 年 1 月 5 日 8: 00—10: 00

姓名\_\_\_\_\_学号 20\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_.

一 填空题（每空 3 分，共 30 分；答案均写在试卷上，注意标清题号）

1. 设  $X$  服从几何分布,  $E(X|X>2)=5$ , 则  $P(X=3)=$ \_\_\_\_\_,  $Var(X|1<X<4)=$ \_\_\_\_\_。
2.  $(X,Y)$  的联合密度函数  $p(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & 0<x,y<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $Z=\begin{cases} Y, & \text{若 } X\geq Y \\ X, & \text{若 } X<Y \end{cases}$ , 则  $E(Z^2)=$ \_\_\_\_\_。
3. 随机变量  $X$  服从二项分布  $b(n,0.8)$ ,  $c$  为任意实数, 若  $E((X-c)^2)$  的最小值为 12, 则  $n=$ \_\_\_\_\_。
4. 如果  $0<Var(X)<+\infty$ , 则  $Var\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right)=$ \_\_\_\_\_。
5. 已知随机变量  $X\sim U(0,2)$ , 则  $Var(\min\{X^2,1\})=$ \_\_\_\_\_。
6. 设随机变量  $X$  的密度函数为  $p(x)=3e^{-3x}I_{x\geq 0}$ , 则  $E\left(X^2\cdot e^{\frac{X}{3E(X)}}\right)=$ \_\_\_\_\_。
7. 将一枚均匀的硬币独立地抛掷 100 次, 用中心极限定理和切比雪夫不等式估计正面次数在 45 至 55 之间的概率, 结果分别为\_\_\_\_\_;
8. 设二维随机变量  $(X,Y)$  的密度函数为  $p(x,y)=\begin{cases} 1, & 0<|x|<y<1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ , 则  $E(X^2|Y)=$ \_\_\_\_\_。

二. (10 分) 某厂有甲、乙、丙三车间生产同一种产品, 产量分别占总产量的 60%, 30%和 10%。各车间的次品率分别是 2%, 5%, 6%。试求

- (1) 在该厂产品中任取一件, 恰为次品的概率;
- (2) 若发现一件产品为次品, 该次品来自甲车间的概率?

三. (8 分) 设随机变量  $X\sim U(0,2)$ ,  $Y=X^3$ , 求随机变量  $Y$  的分布函数、密度函数、期望和方差。

四. (12 分) 随机变量  $(X_1, X_2)$  的密度函数为  $p(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} e^{\frac{-2}{3}\left[(x-1)^2 - \frac{(x-1)(y-2)}{2} + \frac{(y-2)^2}{4}\right]}$ ,  $Y = 2X_1 + X_2$ 。

(1) 求  $Y$  的分布; (2) 计算  $X_1$  和  $Y$  的相关系数  $\text{Corr}(X_1, Y)$ ; (3) 计算  $E(X_1|Y=1)$ 。

五. (8 分) 抛掷一枚 6 面的色子, 出现 1 点至 6 点的概率均为  $\frac{1}{6}$ , 抛掷过程是相互独立的。直至首次连续出现 1 点 6 点停止。例如: 3, 2, 3, 5, 1, 1, 6 停止, 抛掷 7 次。试求抛掷次数的期望。

六. (6 分) 样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  来自总体  $X$ ,  $E(X) = \mu$ ,  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ , 证明  $E(S^2) = \sigma^2$ 。

七. (10 分)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  的样本。

(1) 指定常数  $T > 0$ , 设样本中取值小于  $T$  的样品数为  $r$ , 利用比例  $\frac{r}{n}$  给出参数  $\lambda$  的估计量;

(2) 求参数  $\frac{1}{\lambda}$  的极大似然估计量。

八. (16 分) 设某工厂生产一种产品, 它的一个指标参数服从正态分布  $N(\mu, 3^2)$ ,  $\mu \leq 10$  为优级。做假设检验,  $H_0: \mu \leq 10$  VS  $H_1: \mu > 10$ , 显著性水平  $\alpha = 0.1$ 。

(1) 样本容量  $n = 36$ , 写出的拒绝域的范围; (2) 样本容量  $n = 36$ , 计算  $\bar{x} = 11$  的  $p$  值;

(3) 样本容量  $n = 36$ ,  $\mu = 11.5$  时, 若出错是第几类错误, 并计算发生这类错误的概率;

(4) 样本容量增大到多少时能够保证当  $\mu > 10.1$  时, 第二类错误不超过 0.001。

备注 1. 本考卷样本均为简单随机样本, 样本均值  $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ , 样本方差为  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$

备注 2. 参数为  $\lambda$  的指数分布随机变量, 期望为  $\frac{1}{\lambda}$ , 方差为  $\frac{1}{\lambda^2}$

备注 3. 解答中标准正态随机变量的分布函数和密度函数分别可用  $\Phi(x)$  和  $\varphi(x)$  表示

备注 4.  $\Phi(1.28) = 0.9$ ,  $\Phi(1.65) = 0.95$ ,  $\Phi(1.96) = 0.975$ ,  $\Phi(1) = 0.841$ ,  $\Phi(2) = 0.977$ ,  $\Phi(3) = 0.999$

备注 5. 正态、 $\chi^2$ 、 $t$  等分布所需取值, 均用 (下侧) 分位数表示, 例如  $X \sim \chi^2(n)$ , 则  $P(X < \chi_{\alpha}^2(n)) = \alpha$

备注 6.  $t_{0.75}(1) = 1$ ,  $t_{0.75}(2) = 0.79$ ,  $t_{0.8}(1) = 1.38$ ,  $t_{0.8}(2) = 1.06$ ,  $F_{0.5}(1, 1) = 1$ ,  $F_{0.5}(1, 2) = 0.67$ ,  $F_{0.75}(1, 1) = 5.83$