0.1 逻辑与集合

练习 0.1.1 画出例 0.1.1 中的所有集合运算律的 Venn 图.

练习 0.1.2 对任意两个命题 A, B，$A \Rightarrow B$ 可以定义为 $B \vee (\neg A)$. 直观上可以如此理解：$B \vee (\neg A)$ 成立等价于 A 不成立或 B 成立，于是当 A 成立时必有 B 成立. 运用例 0.1.1 中的逻辑运算律，证明 $A \Rightarrow B = (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

练习 0.1.3 对任意三个命题 A, B, C，运用例 0.1.1 中的逻辑运算律，证明逻辑运算符合模律，即当 A 是 C 的充分条件时，$(A \wedge B) \vee C = A \wedge (B \vee C)$.

练习 0.1.4 对任意两个命题 A, B，我们定义运算异或为 $A \oplus B = (A \wedge (\neg B)) \vee (B \wedge (\neg A))$.

1. 按例 0.1.1 的条件画出 $A \oplus B$ 对应的 Venn 图.
2. 证明异或满足交换律和结合律.

0.2 间接证明法

练习 0.2.1 请用反证法证明以下命题.

1. 若 $p > 2$ 是素数，则 p 是奇数.
2. 对正整数 n，若 n^2 是奇数，则 n 是奇数.
3. 不存在最小的正有理数.

练习 0.2.2 经典逻辑的基本公理之一是排中律，即对任意命题 A，A 不能既不真又不假. 反证法可以看作排中律的推论，即如果我们发现 A 不能是错的，那么 A 就只能是对的. 因此，想要证明命题 A 真，不妨挑一个命题 B，先证明 $B \Rightarrow A$，再证明 $(\neg B) \Rightarrow A$. 那么 A 就必须是对的了. 给定命题：存在两个无理数 a, b，满足 a^b 是一个有理数. 请先假设 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是有理数，再假设 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是无理数，针对两种情形讨论来证明这个命题.

练习 0.2.3 证明 $2^{2^{n-1}} - 1$ 必然至少有 n 个素因数.（因此第 n 个素数 p_n 一定小于等于 $2^{2^{n-1}}$.）
　　提示：运用因式分解 $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

练习 0.2.4 假设有一个 $a \times b$ 的巧克力排块，我们需要将它掰成 1×1 的小块，在掰的同时会被打分. 假设掰一次将 $x + y$ 块掰成了 x 块和 y 块，则得分 xy. 证明：当巧克力被完全掰成 1×1 的小块时，总得分永远为 $\frac{1}{2}ab(ab-1)$.

0.3 映射

练习 0.3.1 判断下列映射是否是单射、满射、双射，并写出双射的逆映射.

1. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto x+1$.
2. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto 2x$.
3. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto 3$.
4. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto x^2$.
5. $f\colon (-\infty,0]\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto x^2$.
6. $f\colon \mathbb{R}\to(0,\infty)$,
   $x\mapsto \mathrm{e}^x$.
7. $f\colon \left[-\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$,
   $x\mapsto \sin x$.

练习 0.3.2 对复合映射 $f=g\circ h$，证明或举出反例.

1. g,h 都是满射，则 f 一定是满射.
2. g,h 都是单射，则 f 一定是单射.
3. h 不是满射，则 f 可能是满射.
4. g 不是满射，则 f 可能是满射.
5. g 不是单射，则 f 可能是单射.
6. h 不是单射，则 f 可能是单射.
7. g,h 都不是双射，则 f 可能是双射.

练习 0.3.3 1. 在不改变对应法则和定义域的前提下，$\mathbb{R}$ 上的变换 $f(x)=x^2+2x+3$，把陪域换成哪个集合，得到的映射是满射?

2. 证明映射 $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x$ 是单射.

练习 0.3.4 下列 $\mathbb{R}$ 上的变换，哪些满足交换律 $f\circ g=g\circ f$?

1. $f(x)=x+1, g(x)=2x$.
2. $f(x)=x^2, g(x)=x^3$.
3. $f(x)=2^x, g(x)=3^x$.
4. $f(x)=2x+1, g(x)=3x+2$.
5. $f(x)=2x+1, g(x)=3x+1$.
6. $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$.

练习 0.3.5 对 $\mathbb{R}$ 上的变换 $f(x)=2x+1$ 和 $g(x)=ax+b$，求实数 a,b，使得 $f\circ g=g\circ f$.

练习 0.3.6 在化简函数 $\arccos\circ\sin\colon[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[0,\pi]$ 的下列步骤中，分别利用了映射的哪些性质?

1. 如果 $y=(\arccos\circ\sin)(x)$，则 $\cos y=(\cos\circ(\arccos\circ\sin))(x)$.
2. $\cos\circ(\arccos\circ\sin)=(\cos\circ\arccos)\circ\sin$.
3. $(\cos\circ\arccos)\circ\sin=\mathrm{id}_{[0,1]}\circ\sin$.
4. $\mathrm{id}_{[0,1]}\circ\sin=\sin$.

综上得 $\sin x=\cos y$，由此推断化简结果.

练习 0.3.7 用数学归纳法证明，任取有限个映射 $f_1,\cdots,f_n$，如果对 $1\leqslant i\leqslant n-1$，$f_{i+1}$ 的定义域都等于 f_i 的陪域，则复合映射 $f_n\circ\cdots\circ f_1$ 不因映射复合的计算次序而改变.

练习 0.3.8 证明，任意映射 f 都存在分解 $f=g\circ h$，其中 h 是满射，g 是单射.

练习 0.3.9 给定映射 h,g 和 $f=g\circ h$，证明，若 f 是双射，则 h 是单射，g 是满射.

练习 0.3.10 证明命题 0.3.2 .

1.1 基本概念

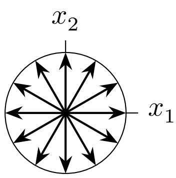


图 1.1.1: 练习 1.1.1

练习 1.1.1 如图 1.1.7 所示，钟表表盘上对应整点有 12 个向量.

1. 计算 12 个向量之和.
2. 不计 2 点方向向量，计算其他 11 个向量之和.
3. 假设这 12 个向量的起点从表盘中心移到 6 点，则 12 点对应向量变为 $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$. 计算此时 12 个向量之和.

练习 1.1.2 如果平面上的向量 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$ 共线，那么 $\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ 是否共线?

练习 1.1.3 证明命题 1.1.5 .

练习 1.1.4 1. 如果只用加法交换律，不用加法结合律，那么 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ 有多少种与之相等的表达式?

2. 如果只用加法结合律，不用加法交换律，那么 $((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}$ 有多少种与之相等的表达式?

练习 1.1.5 判断下列映射是否是线性映射.

1. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto x+1.$
2. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto 2x.$
3. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto 0.$
4. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto 1.$
5. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto x^2.$
6. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $x\mapsto 2^x.$
7. $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,
   $$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+y\\y-x\\2x\end{bmatrix}.$$
8. $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,
   $$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+1\\y-x\\2x\end{bmatrix}.$$

练习 1.1.6 设 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是线性映射，证明存在实数 k，使得 $f(x)=kx$.

练习 1.1.7 设映射 $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}g(x,y,z)\\h(x,y,z)\end{bmatrix}$，其中 $g,h\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. 证明 f 是线性映射当且仅当 g,h 都是线性映射.

练习 1.1.8 设 $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，是否存在线性映射 $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$，满足 $f(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{b}_i, i=1,2,3$?

练习 1.1.9 判断下列映射是否是线性映射.

1. 给定 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^m$，$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m, f(k)=k\boldsymbol{a}$.
2. 给定实数 k，$f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m, f(\boldsymbol{a})=k\boldsymbol{a}$.
3. $f\colon\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^m, f\left(\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_m\\a_{m+1}\end{bmatrix}\right)=a_{m+1}\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}$.

练习 1.1.10 给定三维向量 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$，定义：

1. 二者**点积**为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}:=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.
2. 二者**叉积**为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}:=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$.

那么给定 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$，映射 $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\boldsymbol{b}\mapsto\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\boldsymbol{b}\mapsto\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是否是线性映射?

练习 1.1.11 给定平面上任意面积为 1 的三角形，经过下列变换之后，其面积是否确定？如果是，面积多少？（不需严谨证明，猜测答案即可.）

1. 旋转变换.
2. 反射变换.
3. 对 x_2 投影的投影变换.
4. x_1 方向拉伸 3 倍，x_2 方向不变的伸缩变换.
5. 把 x_1 方向的 3 倍加到 x_2 方向上，保持 x_1 方向不变的错切变换.

练习 1.1.12 设 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-y+1\\x+2\end{bmatrix}$.

1. 证明 f 不是线性变换.
2. 构造分解 $f=g\circ h$，其中 g 是 $\mathbb{R}^2$ 上的平移变换，h 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换.（这种平移与线性变换的复合称为仿射变换. 注意，平移变换并不是线性变换.）

练习 1.1.13 ☕ 设连续函数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，f 是否是线性映射?（需要微积分知识）

1.2 线性映射的表示矩阵

练习 1.2.1 将下列向量 $\boldsymbol{b}$ 写成矩阵和向量乘积的形式.

1. $\boldsymbol{b}=2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

2. $\boldsymbol{b}=5\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$.

3. $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2b+a+c\\c-b\\a+b+c\\a+b\end{bmatrix}$，其中 a,b,c 为常数.

4. $\boldsymbol{b}=f\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}\right)$，其中 $f\colon\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ 是线性变换，满足 $f(\boldsymbol{e}_k)=k\boldsymbol{e}_{6-k},k=1,\cdots,5$.

5. 假设如果某天下雨，则第二天下雨概率为 0.8；如果当天不下雨，则第二天下雨概率为 0.3. 已知当天有一半的概率会下雨，令 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^2$，其两个分量分别是明天下雨和不下雨的概率.

练习 1.2.2 判断下列矩阵和向量的乘积是否良定义. 在可以计算时，先将其写成列向量的线性组合，再进行计算.

1. $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\5\\7\end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix}1&1&0\\3&2&1\\7&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix}1&3&7\\1&2&4\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix}1&3&7\\1&2&4\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$.

练习 1.2.3 设 $A=\begin{bmatrix}0.8&0.3\\0.2&0.7\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_0=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$. 对任意自然数 i，令 $\boldsymbol{u}_{i+1}=A\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_{i+1}=A\boldsymbol{v}_i$.

1. 对 $i=1,2,3,4$，计算 $\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_i$.

2. 猜测 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{u}_i, \lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{v}_i$.

3. 任取初始向量 $\boldsymbol{w}_0$，猜测极限 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{w}_i$，其中 $\boldsymbol{w}_{i+1} = A\boldsymbol{w}_i$；不同初始向量得到的极限在同一条直线上吗?

练习 1.2.4 设线性变换 f 的表示矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. 令 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，将 y_1, y_2, y_3 分别用 x_1, x_2, x_3 表达出来.

2. 将 x_1, x_2, x_3 分别用 y_1, y_2, y_3 表达出来.

3. 找到矩阵 B，使得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

4. 设 g 是由矩阵 B 决定的线性变换，证明 f, g 互为逆变换.

练习 1.2.5 计算下列线性映射 f 的表示矩阵.

1. f 为 xy 平面向 y 轴的投影变换.

2. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$，其中点积的定义见练习 1.1.10 .

3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \boldsymbol{x}$，其中叉积的定义见练习 1.1.10 .

4. $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$，$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 + x_2 \end{bmatrix}$.

5. $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$，$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$.

6. $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$，$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_m \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix}$.

练习 1.2.6 考虑桥墩载荷问题，其中 l_1, l_2, d 作为常数.

1. 映射 f 输入 F_1, F_2 得到输出 f_1, f_2，写出 f 的表示矩阵.
2. 以桥梁的左端为支点，逆时针方向的力矩为 $df_2 - l_1F_1 - l_2F_2$. 以桥梁的右端为支点或者以桥梁的中点作为支点，都能类似地得到逆时针方向的力矩. 假设映射 f 的输入为 F_1, F_2, f_1, f_2，而输出为桥梁的左端、中点和右端的逆时针方向的力矩，写出 f 的表示矩阵.

练习 1.2.7 设 xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 f 是下列三个变换的复合：先绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$；然后进行一个保持 y 坐标不变，同时将 y 坐标的两倍加到 x 坐标上的错切；最后再沿着直线 $x + y = 0$ 反射.

1. 证明 f 是线性变换.
2. 计算 $f(\boldsymbol{e}_1)$ 和 $f(\boldsymbol{e}_2)$.
3. 写出 f 的表示矩阵.
4. 计算 $f\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right)$.

练习 1.2.8

1. 幻方矩阵是指元素分别是 $1, \cdots, 9$ 的 3 阶矩阵 M，且每行、每列以及两条对角线上的三个元素之和都相同. 求 $M\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 的所有可能值.
2. 数独矩阵是指 9 阶矩阵 M，从上到下、从左到右依次分成九个 3×3 的子矩阵，且每行、每列以及九个子矩阵中的元素都是 $1, \cdots, 9$. 求 $M\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ 的所有可能值.

练习 1.2.9 证明，如果 n 阶方阵 A 对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则 $A = O$.

练习 1.2.10 证明，如果 n 阶方阵 A 对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，都存在依赖于 $\boldsymbol{x}$ 的常数 $c(\boldsymbol{x})$，满足 $A\boldsymbol{x} = c(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$，则存在常数 c，使得 $A = cI_n$.

1.3 线性方程组

练习 1.3.1 把下列矩阵化为行简化阶梯形，并回答问题.

1. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\6 & 7 & 8 & 9 & 10\\11 & 12 & 13 & 14 & 15\end{bmatrix}$，化简后第一列是否为主列?
2. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\0 & 7 & 8 & 9 & 10\\11 & 12 & 13 & 14 & 15\end{bmatrix}$，化简后第二列是否为主列?

3. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$，化简后第三列是否为主列？

4. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$，化简后第四列是否为主列？

5. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$，化简后第五列是否为主列？

练习 1.3.2 下列方程组有解时，找到所有解；方程组无解时，对方程组做初等变换，得到矛盾表达式 $0=1$.

1. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\5\end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\5\end{bmatrix}$.

练习 1.3.3 将下列问题首先化成 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的形式，然后求所有解.

1. 对 $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$，如何将其第三列写成前两列的线性组合？

2. 对 $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$，如何将其第四列写成前两列的线性组合？

3. 对 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$，如何将其第五列写成前两列的线性组合?

练习 1.3.4 求证：齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=0, \end{cases}$$

有非零解当且仅当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$.

练习 1.3.5 求满足下列条件的常数 b, c.

1. 方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ 无解.
2. 方程组 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ c \end{bmatrix}$ 无解.
3. 方程组 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & b & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 无解.
4. 方程组 $\begin{bmatrix} b & 3 \\ 3 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$ 有无穷组解.
5. 方程组 $\begin{bmatrix} 2 & b \\ 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 \\ c \end{bmatrix}$ 有无穷组解.
6. 方程组 $\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 有非零解.
7. 方程组 $\begin{bmatrix} b & 2 & 3 \\ b & b & 4 \\ b & b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 有非零解（求三个不同的 b).

练习 1.3.6 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+\ x_3=0, \\ ax_1\qquad -\ x_3=0, \\ -x_1\qquad +3x_3=0, \end{cases}$$

有非零解，求 a 的值，并求出所有的解.

练习 1.3.7 在下列方程组中，讨论在 p 取不同值时方程组是否有解，并在有解时，求出所有的解.

$$\begin{cases} px_1+\ x_2+\ x_3=1, \\ x_1+px_2+\ x_3=p, \\ x_1+\ x_2+px_3=p^2. \end{cases}$$

练习 1.3.8 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. 求证：

1. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解当且仅当 $b_1+b_2+b_3=0$.

2. 齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解集是 $\{k\boldsymbol{x}_1 \mid k\in\mathbb{R}\}, \boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$.

3. 当 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解时，设 $\boldsymbol{x}_0$ 是一个解，则解集是 $\{\boldsymbol{x}_0+k\boldsymbol{x}_1 \mid k\in\mathbb{R}\}$.

练习 1.3.9 求三阶方阵 A,使得线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$ 的解集是 $\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\,\middle|\, c,d\in\mathbb{R}\right\}$.

练习 1.3.10 1. 构造三阶方阵，其元素各不相同，且行简化阶梯形有且只有一个主元.

2. ☕ 构造 100 阶方阵 A，所有元素非零，且行简化阶梯形恰有 99 个主元．试描述 $A\boldsymbol{x}=0$ 的解集.

练习 1.3.11 给定线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，其中 A 是 100 阶方阵．假设 Gauss 消元法计算到最后一行得到 $0=0$.

1. 消元法是在计算 A 的行的线性组合．因此 A 的 100 行的某个线性组合是?

2. 计算出 $0=0$ 说明方程组有无穷多解．因此 A 的 100 列的某个线性组合是?

3. 试说明 Gauss 消元法计算出的零行的个数和自由变量的个数相等.

练习 1.3.12 仅用从上往下的倍加变换（即把上面的行的若干倍加到下面的行上)，将下列矩阵化为阶梯形，并分析其主元的规律.

1. $\begin{bmatrix}1&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}$.　　2. $\begin{bmatrix}2&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}$.　　3. $\begin{bmatrix}2&-1&&\\-1&2&-1&\\&-1&2&-1\\&&-1&2\end{bmatrix}$.

这些矩阵都是**三对角矩阵**，即除对角元素及与其相邻的元素外其余元素都是零的方阵.

练习 1.3.13 求解

$$\begin{cases}x_1 & & & +x_n &= 0,\\ x_1+x_2 & & & &= 0,\\ & x_2+x_3 & & &= 0,\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & x_{n-1}+x_n &= 0.\end{cases}$$

练习 1.3.14 ☕ 证明用倍加变换与倍乘变换可以实现对换变换.

练习 1.3.15 证明定理 1.3.7 第二部分.

练习 1.3.16 练习 1.2.8 中的数独矩阵经历哪些行变换或列变换后还是数独矩阵?

练习 1.3.17 (初等列变换在方程组上的含义) 考虑方程组 $\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$. 进行下列换元，写出 x',y' 满足的方程组．对比原方程组，其系数矩阵做了哪种初等变换?

1. $x' = y, y' = x$.
2. $x' = 2x, y' = y$.
3. $x' = x, y' = x + y$.
4. $x' = x + 1, y' = y$.

练习 1.3.18 (方程、法向量与超平面) 给定原点 O，则空间中的点 P 与向量 $\overrightarrow{OP}$ 一一对应. 空间中所有点构成的集合称为**点空间**，上述一一对应是点空间到线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的双射. 注意，点空间与线性空间并不相同. 特别地，空间中的点 P 也可用向量 $\overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^3$ 表示.

两个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量垂直当且仅当其内积为零（练习 1.1.10 ）. 与空间中某个平面垂直的非零向量称为该平面的**法向量**. 考虑空间中以非零向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 为法向量的平面.

1. 给定 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$，分别对应该平面上的两个点，证明，$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \boldsymbol{q}$；
2. 设该平面经过对应于 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ 的点，令 $d = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \boldsymbol{p}$，证明，平面是方程 $ax + by + cz = d$ 的解集.
3. 设 $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ 和 $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ 的解集平面平行，试分析两个方程系数的关系.
4. 设 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ 为两个不共线的非零向量，则 $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ 与 $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ 的解集平面不平行，因此必相交于一条直线 l. 对方程做倍加变换，证明，$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ 与 $(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y + (c_1 + c_2)z = d_1 + d_2$ 的解集平面的交集还是直线 l.（从几何上看，倍加变换将一个平面沿相交直线旋转，因此不改变解集的交集.）

一个 m 元线性方程的解集是对应于 $\mathbb{R}^m$ 的点空间中的一个**超平面**，因此求解线性方程组等价于求若干超平面的交集.

练习 1.3.19 对下列问题，将其化成 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，并找到所有解.

1. 考虑例 1.1.1 中的桥墩载荷问题. 假设重物的重力分别为 $F_1 = 2, F_2 = 3$，放置的位置 l_1, l_2 为未知变量，桥梁长度为 5. 如果两个桥墩的载荷分别为 $f_1 = 3, f_2 = 2$，求所有可能的 $\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$.
2. 笼中有若干鸡兔，每只鸡有一个头两条腿两只翅膀，每只兔有一个头四条腿没有翅膀. 笼中现有 4 个头、12 条腿、8 只翅膀，求鸡兔数目.
3. 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 满足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$，且 A 第一列的元素之和为 2，求所有可能的 A.
4. 求平面上直线 $y = 2x + 3, y = -x + 5$ 的交点.
5. 空间中有三个平面，分别经过点 $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$，具有法向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$，求这三个平面的交点（练习 1.3.18 ）.

6. 空间中有一条经过原点的直线，并且与向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ 垂直，求所有直线上的点.

7. 空间中有一个平面经过点 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，求所有与该平面垂直的向量.

练习 1.3.20 ☕ 如果线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 和 $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，对任意 $\boldsymbol{b}$ 都有相同的解集，那么 $A=C$ 成立么?

提示：取特殊的 $\boldsymbol{b}$.

练习 1.3.21 ☕ 设线性映射 $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. 当 $n>m$ 时，$\boldsymbol{F}$ 是否可能是单射? 当 $n<m$ 时，$\boldsymbol{F}$ 是否可能是满射?

提示：把 $\boldsymbol{F}$ 的表示矩阵化为阶梯形.

1.4 线性映射的运算

练习 1.4.1 设 A,B,C 分别是 $3\times5, 5\times3, 3\times1$ 矩阵，则 $BA, AB, BC^{\mathrm{T}}, A(B+C)$ 中哪些定义良好?

练习 1.4.2 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&-1&0\\0&2&-2\end{bmatrix}$，求 $AB, BA, AB-BA$.

练习 1.4.3 计算.

1. $\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix}17&-6\\35&-12\end{bmatrix}^5$.

4. $\begin{bmatrix}1&3&1\\2&2&1\\3&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&-1\\-2&-5&4\end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix}8&6&-6\\4&6&-4\\8&8&-6\end{bmatrix}^6$.

练习 1.4.4 考虑下列 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换.

1. 设 $\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x})=R_\theta\boldsymbol{x}$，其中 $R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$. 求证：
   (a) $\boldsymbol{R}_\theta$ 是绕原点逆时针旋转角度 θ 的变换.
   (b) 分析当 θ 取何值时，存在常数 λ 和非零向量 $\boldsymbol{x}$，满足 $R_\theta\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$.
   (c) 计算 $R_\theta^n, n>0, n\in\mathbb{N}$.

2. 设 $\boldsymbol{H}_\theta(\boldsymbol{x})=H_\theta\boldsymbol{x}$，其中 $H_\theta=\begin{bmatrix}\cos2\theta&\sin2\theta\\\sin2\theta&-\cos2\theta\end{bmatrix}$，而 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}, \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}\sin\theta\\-\cos\theta\end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的向量. 求证：

(a) $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=0, \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=1; H_\theta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}, H_\theta\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{w}$. 试分析变换 $\boldsymbol{H}_\theta$ 的几何意义.

(b) $H_\theta^2=I_2, H_\theta=I_2-2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}$.

(c) $R_{-\theta}H_\phi R_\theta=H_{\phi-\theta}, H_\phi R_\theta H_\phi=R_{-\theta}$，并分析其几何意义.

3. 设 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})=S\boldsymbol{x}$，其中 $S=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$. 设 λ 是常数，求证：$S\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 有非零解当且仅当 $\lambda=1$，并求出所有的非零解；计算 $S^k, k>0, n\in\mathbb{N}$.

练习 1.4.5 计算.

1. $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^2$.

2. $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^k$.

练习 1.4.6 设 E_{ij} 是 (i,j) 元为 1，其余元素为 0 的矩阵，而 n 阶方阵 $J_n=\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&0&1\\&&&0\end{bmatrix}$.

1. 计算 $A=I_2+J_2, B=I_2+J_2^{\mathrm{T}}, C=J_2-J_2^{\mathrm{T}}$.
2. 先计算 AB 再计算 $(AB)C$，然后先计算 BC 再计算 $A(BC)$.
3. 先计算 AB, AC 再计算 $AB+AC$，然后先计算 $B+C$ 再计算 $A(B+C)$.
4. 计算 $AB+BC, B(A+C), (A+C)B$，三者是否相等?
5. 计算 $(A+B)^2, A^2+2AB+B^2, A^2+AB+BA+B^2$，三者是否相等?
6. 计算 $(AB)^2$ 与 A^2B^2，二者是否相等?
7. 计算 $E_{13}-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}$，$E_{13}E_{32}$，$E_{32}E_{13}$，其中 $\boldsymbol{e}_i\in\mathbb{R}^4$，$E_{ij}$ 是 4 阶方阵.
8. 计算 $\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$.
9. 计算 $J_4\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $J_4^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $J_4^2\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, J_4^4.
10. 计算 J_n^k，其中 k 是正整数.

11. 设 $P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{bmatrix}$，计算 $PJ_4+J_4P,(P+I_4)(2P+3I_4)-(2P+3I_4)(P+I_4)$.

12. 设 $R=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},S=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix},T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&1\end{bmatrix}$，计算 $SRT,SR^{\mathrm{T}}T$.

练习 1.4.7 设 2 阶矩阵 B 的 $(1,2)$ 元增加 1，对下列矩阵讨论该矩阵的哪行哪列一定不变，并举例说明所有其他行列确实可以变化.

1. $A+B$.
2. AB.
3. BA.
4. B^2.

练习 1.4.8 判断对错.

1. 如果 B 的第一列等于第三列，则 AB 的第一列等于第三列.
2. 如果 B 的第一列等于第三列，则 BA 的第一列等于第三列.
3. 如果 A 的第一行等于第三行，则 ABC 的第一行等于第三行.

练习 1.4.9 求所有满足条件的矩阵 B.

1. 对任意 3 阶方阵 A，$BA=4A$.
2. 对任意 3 阶方阵 A，$BA=4B$.
3. 对任意 3 阶方阵 A，BA 的每一行都是 A 的第一行.
4. 对任意 3 阶方阵 A，AB 的每一行的每一个元素都是 A 的对应行的平均值.
5. $B^2\neq O,B^3=O$，且 B 是 3 阶上三角矩阵.
6. $B\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}B$.

练习 1.4.10 给定矩阵 $A=\begin{bmatrix}p&0\\q&r\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&z\\0&0\end{bmatrix}$.

1. p,q,r 取何值时，有 $AB=BA$?
2. z 取何值时，有 $BC=CB$?
3. p,q,r,z 取何值时，有 $ABC=CAB$?

练习 1.4.11 证明，

1. 设 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量都是 1，则 n 阶方阵 A 的各行元素之和为 1 当且仅当 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.
2. 若 n 阶方阵 A,B 的各行元素之和均为 1，则 AB 的各行元素之和也均为 1.

3. 若 n 阶方阵 A, B 的各列元素之和均为 1，则 AB 的各列元素之和也均为 1.

练习 1.4.12 证明命题 1.4.17 .

练习 1.4.13 证明上三角矩阵对加法、数乘、乘法封闭，即：设 U_1, U_2 是 n 阶上三角矩阵，k 是实数，则 U_1+U_2, kU_1, U_1U_2 都是上三角矩阵. 此外，U_1U_2 的对角元素是 U_1, U_2 对应的对角元素的乘积.

练习 1.4.14 设 A 是 n 阶上三角矩阵. 求证：$A^n = O$ 当且仅当 A 是严格上三角矩阵.

练习 1.4.15 证明，如果 n 阶方阵 A 满足 $A^n = O$，则 $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = I_n$.

练习 1.4.16 对 n 阶方阵 A，考虑集合 $\mathrm{Com}(A) = \{n \text{ 阶方阵 } B \mid AB = BA\}$.

1. 求证：$\mathrm{Com}(A)$ 是所有 n 阶方阵的集合当且仅当 A 是数量矩阵 kI_n.

2. 设 $A = \mathrm{diag}(d_i)$，d_i 互不相同，求 $\mathrm{Com}(A)$.

3. 求证：任取 $B, C \in \mathrm{Com}(A)$，都有 $I_n, kB + lC, BC \in \mathrm{Com}(A)$.

4. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求证：$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Com}(A)$，而且

$$\mathrm{Com}(A) = \left\{k_1 I_3 + k_2 J_3 + k_3 J_3^2 \,\middle|\, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

练习 1.4.17 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$，求 A^k，其中 k 是正整数.

练习 1.4.18 设 A 是 n 阶方阵，求证：$A + A^{\mathrm{T}}, AA^{\mathrm{T}}, A^{\mathrm{T}}A$ 都是对称矩阵，而 $A - A^{\mathrm{T}}$ 是反对称矩阵.

练习 1.4.19 求证：

1. 任意方阵 A 都唯一地表为 $A = B + C$，其中 B 是对称矩阵，C 是反对称矩阵.

2. n 阶方阵 A 是反对称矩阵当且仅当对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = 0$.

3. 设 A, B 是 n 阶对称矩阵，则 $A = B$ 当且仅当对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{x}$.

练习 1.4.20 设 A, B 是同阶对称矩阵. 求证：AB 是对称矩阵当且仅当 $AB = BA$.

练习 1.4.21 设 A 是实对称矩阵，如果 $A^2 = O$，求证：$A = O$.

练习 1.4.22 (矩阵的迹) 方阵 A 的对角元素的和称为它的**迹**，记作 $\mathrm{trace}(A)$. 验证下列性质.

1. 对任意同阶方阵 A, B，$\mathrm{trace}(A + B) = \mathrm{trace}(A) + \mathrm{trace}(B)$.

2. 对任意方阵 A 与实数 k，$\mathrm{trace}(kA) = k\,\mathrm{trace}(A)$.

3. 对 m 阶单位矩阵 I_m，$\operatorname{trace}(I_m)=m$.

4. 对任意方阵 A，$\operatorname{trace}(A)=\operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}})$.

5. 设 $A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}$，则 $\operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}B)=\sum\limits_{i=1}^{4}a_ib_i$. 如果 A 是 m 阶方阵呢?

6. 设 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 是 m 维向量，则 $\operatorname{trace}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})=\operatorname{trace}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})$.

7. 设 A,B 分别是 $m\times n, n\times m$ 矩阵，则 $\operatorname{trace}(AB)=\operatorname{trace}(BA)$.

8. 设 A,B 是任意 m 阶方阵，则 $AB-BA\neq I_m$.

练习 1.4.23 (差分矩阵与求导) 在微积分中，$f(x)$ 的导数 $f'(x)\approx\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$. 对数列 a_n 的相邻两项做减法，可以看作是一种离散导数 $\frac{a_{n+1}-a_n}{1}$. 两者具有某种共性. 令 D 为 100 阶向前差分矩阵，而 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_{100}\end{bmatrix}$. 求证:

1. 若 a_k 是关于 k 的 3 次多项式，则除第 1 个分量外，$D\boldsymbol{a}$ 的第 k 个分量是关于 k 的 2 次多项式.

2. 若 $a_k=\mathrm{e}^k$，则除第 1 个分量外，$\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}D\boldsymbol{a}$ 的第 k 个分量是 e^k.

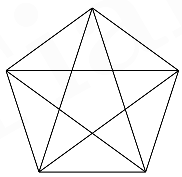


图 1.4.1: 练习 1.4.24

练习 1.4.24 如图 1.4.2 的电路包含 5 个顶点，电势分别为 $v_i, 1\leqslant i\leqslant 5$，$i,j$ 两点之间电阻为 $r_{ij}\neq 0$，从顶点 i 到 j 的电流为 c_{ij}，又记 $c_{ii}=0$. 令电势矩阵为 $V=\operatorname{diag}(v_1,\cdots,v_5)$，电流矩阵为 $C=\begin{bmatrix}c_{ij}\end{bmatrix}$，电导矩阵为 $G=\begin{bmatrix}g_{ij}\end{bmatrix}$，其中 $g_{ii}=0, g_{ij}=\frac{1}{r_{ij}}, i\neq j$. 求证 $C=VG-GV$.

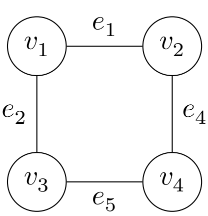


图 1.4.2: 练习 1.4.25

练习 1.4.25 图 1.4.3 中的图含有四个顶点 v_1,v_2,v_3,v_4，顶点之间有边连接. 对称矩阵 A 称为该图的**邻接矩阵**：如果 v_i,v_j 之间有边，则 A 的 (i,j) 元是 1；如果 v_i,v_j 之间没有边，则 A 的 (i,j) 元是 0.

1. 从 p_3 出发，三次通过连线，最后回到 p_3 的方法有几种？
2. 求矩阵 A^3 的 $(3,3)$ 元.
3. 分析 A^n 的 (i,j) 元的意义.

练习 1.4.26 设 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}$ 是 k 维行向量，A 是 $m\times n$ 矩阵.

1. 如果矩阵乘积 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A$ 良定义，需要满足什么条件？
2. 对任意常数 $a, b\in\mathbb{R}$，证明 $(a\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}+b\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})A = a\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A+b\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}A$.
3. 把 $2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+3\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 写成一个行向量和矩阵的乘积.

   注意：类比于矩阵乘列向量是矩阵的列的线性组合，行向量乘矩阵是矩阵的行的线性组合.
4. 求矩阵 A，使得 $\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = 2x_1y_1+3x_1y_2+4x_2y_1+5x_2y_2$.
5. 求矩阵 A，使得 $\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = x^2+4xy+5y^2$. 这样的 A 是否唯一？
6. 求 3 阶对称矩阵 A，使得对任意非零 3 维向量 $\boldsymbol{v}$，都有 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v}>0$.

练习 1.4.27 由标准坐标向量 $\boldsymbol{e}_i$ 定义 $E_{ij}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}$，它是 (i,j) 元为 1，其他元素为 0 的矩阵.

1. 证明，当 $j\neq k$ 时，$E_{ij}E_{kl}=O$.
2. 对任意矩阵 A，求向量 $\boldsymbol{v}$ 使得 $A\boldsymbol{v}$ 是 A 的第 i 列.
3. 对任意矩阵 A，求向量 $\boldsymbol{v}$ 使得 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A$ 是 A 的第 i 行.
4. 对任意矩阵 A，证明，$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{e}_j$ 为 A 的 (i,j) 元.
5. 对 $\boldsymbol{e}_k\in\mathbb{R}^m$ 证明，$\sum\limits_{k=1}^{m}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}=I_m$.
6. (阅读) 计算矩阵乘积 AB 的 (i,j) 元的另一种方法：设 A 有 m 列，B 有 m 行，则

$$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}AB\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}AI_mB\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}A\Big(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}\Big)B\boldsymbol{e}_j=\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{e}_j).$$

练习 1.4.28 注意 m 维向量是 $m\times 1$ 矩阵.

1. 对 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^m, k\in\mathbb{R}$，$k\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}k$ 是否可以看作矩阵乘法？
2. 对 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^m, \boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}$ 是否良定义？如果是，乘积有几行几列？
3. 求 $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ \vdots\\ 100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & \cdots & 1\end{bmatrix}$ 的 $(12,7)$ 元.

4. 求 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$，使得 $\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} = \left[(-1)^{i+j}\right]$.

5. 求 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$，使得 $\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{i}{j}\right]$.

6. 令 $A = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$. 证明 $AB = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}$.

1.5 可逆矩阵

练习 1.5.1 计算下列矩阵乘法.

1. $\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}1 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}^k$，$k$ 是正整数.

4. $\begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix}1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ -1 & & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1\end{bmatrix}$.

练习 1.5.2 求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

练习 1.5.3 设 $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 \\ 3 & a & -2 \\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 不可逆，求 a.

练习 1.5.4 设 $A = \begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$，解方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i, i = 1, 2, 3$，并求 A^{-1}.

练习 1.5.5 对 $\begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix}$ 做初等行变换，求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & 1 \\ 1 & & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & & \\ 3 & 4 & & \\ & & 1 & 2 \\ & & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 1 & -a & & \\ & 1 & -b & \\ & & 1 & -c \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$.

练习 1.5.6 说明 $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 可逆，并计算其逆.

练习 1.5.7 求 $A = \begin{bmatrix} & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \\ a_n & & & \end{bmatrix}$ 的逆矩阵，其中 $a_i \neq 0$.

练习 1.5.8 求下列矩阵方程的解：$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

练习 1.5.9 证明二阶方阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 可逆当且仅当 $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. 此时，$A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

练习 1.5.10 证明，有一列元素（或一行元素）全为零的方阵不可逆.

练习 1.5.11 证明，对角元素全非零的上三角矩阵 U 可逆，其逆矩阵 U^{-1} 也是上三角矩阵，且 U^{-1} 的对角元素是 U 的对角元素的倒数.

练习 1.5.12 是否只有方阵才有可能可逆？设 A 是 $m \times n$ 矩阵.

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，能否找到 B, C 使得 $AB = I_2, CA = I_3$?

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{bmatrix}$，能否找到 B,C 使得 $AB=I_3, CA=I_2$?

3. 设 $CA=I_n$，证明 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解. 此时 m,n 之间有何种关系?

4. 设 $AB=I_m$，证明 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解. 此时 m,n 之间有何种关系?

5. 设 $AB=I_m, CA=I_n$，证明 $m=n$ 且 $B=C$；由此可知，可逆矩阵一定是方阵.

6. 如果 $m\neq n$，那么 $\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n$ 之间是否存在线性双射?

练习 1.5.13 如果 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=I_n$，判断 A,B 是否可逆.

练习 1.5.14 设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

1. 求上述矩阵对应的初等行、列变换.

2. 从行变换的角度看，是否一定有 $AB=BA$? 如果否，$AB-BA$ 从行变换的角度意味着什么?

3. 从行变换的角度看，是否一定有 $AC=CA$? 如果否，$AC-CA$ 从行变换的角度意味着什么?

4. 从行变换的角度看，是否一定有 $BC=CB$? 如果否，$BC-CB$ 从行变换的角度意味着什么?

5. 从行变换的角度看，D 是否和 A,B,C 可交换? 计算 $DAD^{-1},DBD^{-1},DCD^{-1}$.

6. 从行变换的角度看，P 是否和 A,B,C 可交换? 计算 $PAP^{-1},PBP^{-1},PCP^{-1}$.

7. 对三阶方阵 X，$(AX)B$ 和 $A(XB)$ 对 X 分别做了何种行、列变换?

8. 对任意矩阵 X，先做初等行变换，再做初等列变换，其结果是否等于先做该初等列变换，再做该初等行变换? 这对应着矩阵乘法的什么性质?

练习 1.5.15 设矩阵 A 和 B 左相抵. 求证:

1. 如果 A 的第一列全是零，则 B 的第一列全是零.

2. 如果 A 的所有列都相同，则 B 的所有列都相同.

3. 如果 A 的第一列是第二列与第三列的和，则 B 的第一列也是第二列与第三列的和.

4. 如果 A 的第一列和第二列不成比例，则 B 的第一列和第二列也不成比例.

练习 1.5.16 设有 M_1,M_2,M_3 三个城市，城市之间有人口迁移. 定义矩阵 A，其 (i,j) 元 a_{ij} 为人在一年中从 A_j 迁移到 A_i 的概率. 注意，A 的每个元素都在 $0,1$ 之间，且 A 的每一列的元素之和都是 1.

1. 设今年三个城市的人口分别是 x_1, x_2, x_3，证明明年它们的预期人口分别是 $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 的三个分量.

2. 人口迁移满足什么条件时，A 为列对角占优矩阵（行对角占优矩阵的转置）？人口迁移满足什么条件时，A 为行对角占优矩阵？考虑现实生活中的情形，讨论这些假设是否合理.

3. 如果把矩阵对角占优定义中的大于号换成大于等于号，则称该矩阵为**弱对角占优矩阵**. 证明 $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 弱对角占优，且可逆，并求其逆矩阵.

4. 对任意 n 阶方阵，设它有 $n-1$ 行都是对角占优，仅有 1 行弱对角占优，该矩阵可逆吗？

练习 1.5.17 设 A 是 n 阶方阵.

1. 对任意两个多项式 $p(x), q(x)$，是否一定有 $p(A)q(A) = q(A)p(A)$？

2. 证明，所有形如 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ & a & b \\ & & a \end{bmatrix}$ 的矩阵全都彼此交换.

3. 设 $f(x) = p(x) + q(x), g(x) = p(x)q(x)$，证明，$f(A) = p(A) + q(A), g(A) = p(A)q(A)$.

4. 求 A 使得 $A + I_n, A - I_n$ 均不为零，但是 $A^2 - I_n = O$.

5. 设 $A^2 - I_n = O$，证明，任意 n 维向量 $\boldsymbol{v}$ 都存在分解式 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$，满足 $(A - I_n)\boldsymbol{x} = (A + I_n)\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.

6. 设 $A^3 = O$，证明 $A + I_n$ 与 $A - I_n$ 都可逆，并求 $p(x), q(x)$ 使得 $p(A), q(A)$ 分别为其逆.

练习 1.5.18 证明，如果 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$，则 $I_n - 2A$ 可逆.

练习 1.5.19 如果一个 n 阶方阵从 $(1, n)$ 元到 $(n, 1)$ 元的对角线下的所有元素均为零，则称为西北矩阵. 类似地，可以定义东南矩阵. 如果 B 是西北矩阵，那么 $B^{\mathrm{T}}, B^2, B^{-1}$ 是什么矩阵？西北矩阵和东南矩阵的乘积是什么矩阵？

练习 1.5.20 1. 求可逆矩阵 A, B，使得 $A + B$ 不可逆.

2. 求不可逆矩阵 A, B，使得 $A + B$ 可逆.

3. 求 3 阶不可逆矩阵 A，使得对任意 $k > 0$，$A + kI_3$ 都对角占优.

练习 1.5.21 求所有三阶矩阵 A，满足 $A^2 = I_3$，且 A 的每个元素只能是 0 或 1.

练习 1.5.22 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 是对称矩阵，通过 “对称化简” 求其逆矩阵：

1. 将 A 的第一行的二倍从第二行中减去，第一行的三倍从第三行中减去．这对应哪个初等矩阵 E_1？ E_1^{T} 对应的列变换是什么？计算 E_1A 和 $A_1 = E_1AE_1^{\mathrm{T}}$.
2. 将 A_1 的第二行与第三行调换. 这对应哪个初等矩阵 E_2? E_2^{T} 对应的列变换是什么? 计算 E_2A_1 和 $A_2 = E_2A_1E_2^{\mathrm{T}}$.
3. 将 A_2 的第二行的 $\frac{1}{3}$ 倍从第三行中减去．这对应哪个初等矩阵 E_3？ E_3^{T} 对应的列变换是什么？计算 E_3A_2 和 $A_3 = E_3A_2E_3^{\mathrm{T}}$.
4. 综上，$A_3 = E_3E_2E_1AE_1^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}}$，由此求 A 的逆.

练习 1.5.23 求证：对称矩阵的逆矩阵也是对称矩阵；反对称矩阵的逆矩阵也是反对称矩阵.

练习 1.5.24 给定 n 阶实反对称矩阵 A，求证：$I_n - A$ 可逆.

提示：反证法，考虑 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

1.6 分块矩阵

练习 1.6.1 设 A 的行简化阶梯形为 R，行变换对应的可逆矩阵是 P.

1. 求 $\begin{bmatrix} A & 2A \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形，以及行变换对应的可逆矩阵.
2. 求 $\begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形，以及行变换对应的可逆矩阵.

练习 1.6.2 求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

练习 1.6.3 计算下列分块矩阵：

1. $\begin{bmatrix} I_n & O \\ A & I_m \end{bmatrix}^{-1}$.
2. $\begin{bmatrix} O & I_m \\ I_n & A \end{bmatrix}^{-1}$.

练习 1.6.4 设分块矩阵 $X = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$，其中 A, B 可逆．试证 X 可逆，并求其逆.

练习 1.6.5 设分块矩阵 $U = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$，其中 A, B 可逆．试证 U 可逆，并求其逆.

练习 1.6.6 设 A_1, A_2 分别为 m, n 阶方阵，且存在可逆方阵 T_1, T_2，使得 $T_1^{-1}A_1T_1$ 和 $T_2^{-1}A_2T_2$ 都是对角矩阵．求证：存在 $m+n$ 阶可逆矩阵 T，使得 $T^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}T$ 是对角矩阵.

练习 1.6.7 1. 任取 $m\times n$ 矩阵 X，分块矩阵 $\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$，计算 $\begin{bmatrix}I_m & X\\ O & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$.

2. 由此判断 $\begin{bmatrix}1 & & & & c_1\\ & 1 & & & c_2\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & c_{n-1}\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a\end{bmatrix}$ 何时可逆，并在可逆时求其逆.

练习 1.6.8 利用 Sherman-Morrison 公式判断下列矩阵何时可逆，并在可逆时求其逆.

$$\begin{bmatrix}a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & a_3+1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n+1\end{bmatrix}.$$

练习 1.6.9 1. 求 A 使得 $\begin{bmatrix}O & A\\ A & O\end{bmatrix}$ 为反对称矩阵.

2. 求 5 阶置换矩阵 P，满足 $P^5\neq I_5, P^6=I_5$.

3. 求对称矩阵 A，使得不存在 B，满足 $A=BB^{\mathrm{T}}$.

练习 1.6.10 给定 $m\times n, n\times m$ 矩阵 A, B，求证：I_m+AB 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆.
提示：考虑分块矩阵.

练习 1.6.11 设实分块方阵 $X=\begin{bmatrix}A & C\\ O & B\end{bmatrix}$，其中 A 是方阵. 如果 X 与 X^{T} 可交换，求证：$C=O$.

练习 1.6.12 设分块对角矩阵 $J=\begin{bmatrix}J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3\end{bmatrix}$，其中 $J_1=\begin{bmatrix}2 & 1\\ & 2\end{bmatrix}, J_2=\begin{bmatrix}2 & 1 & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{bmatrix}, J_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}$. 试找出一个五次多项式 $f(x)$，使得 $f(J)=O$.

练习 1.6.13 构造 $2n$ 阶实方阵 A，满足 $A^2=-I_{2n}$.

练习 1.6.14 设 A, B 为两个左相抵的行简化阶梯形矩阵.

1. 证明，$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解.

2. 证明，如果 A 的最后一列不是主列，则存在 $\boldsymbol{x}$ 使得 $A\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ 1\end{bmatrix}=\mathbf{0}$.

3. 证明，如果 A 最后一列是主列，则对任意 $\boldsymbol{x}$，$A\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ 1\end{bmatrix}\neq\mathbf{0}$.

4. 设 A, B 除了最后一列之外，其他列均相等，且 A 的最后一列不是主列，证明 $A = B$.

5. 设 A, B 除了最后一列之外，其他列均相等，且 A 的最后一列是主列，证明 $A = B$.

6. 用数学归纳法证明，左相抵的行简化阶梯形必然相等．由此证明，一个矩阵 A 的行简化阶梯形唯一.

练习 1.6.15 (置换的不动点)　设 P 是置换矩阵．如果 P 对应的行变换保持第 i 行不变，则称 i 为 P 的不动点.

1. 证明 i 是 P 的不动点当且仅当 P 的第 i 个对角元为 1.

2. 证明 P 的不动点个数等于 $\mathrm{trace}(P)$（练习 1.4.22 ）.

3. 对任意置换矩阵 P_1, P_2，证明 P_1P_2 和 P_2P_1 的不动点个数相等.

练习 1.6.16　考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的变换 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$，具有该形式的变换称为**仿射变换**．仿射变换通常不是线性变换.

1. 证明 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix}$．记 $M_f := \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}$.

2. 证明 $M_f M_g = M_{f\circ g}$.

3. 证明当仿射变换 f 可逆时，矩阵 M_f 可逆，且 $M_{f^{-1}} = (M_f)^{-1}$.

练习 1.6.17　图 1.6.3 中有四个弹簧振子．弹簧的初始长度为 l_1, l_2, l_3, l_4，振子在稳态的最终长度为 $l_1 + x_1, l_2 + x_2, l_3 + x_3, l_4 + x_4$.

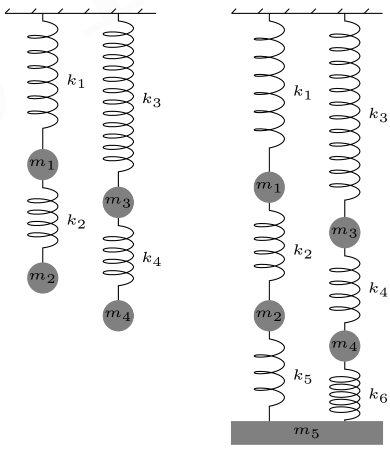


图 1.6.1: 练习 1.6.17

1. 找到矩阵 A 使得 $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}$．此时 A 的分块结构有什么特点？你能否从系统中看出原因？

2. 图 1.6.3 中振子下面，由劲度系数分别为 k_5, k_6 的弹簧挂住了一个质量为 m_5 的振子. 找到矩阵 A 使得 $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = g\begin{bmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\m_4\\m_5\end{bmatrix}$. 此时 A 的分块结构是否还有之前的特点？为什么？

练习 1.6.18 考虑一个元素皆为复数的矩阵. 将每个元素分成实部和虚部，不难发现对任意复数矩阵，都存在实数矩阵 A, B，使得该复数矩阵为 $A + \mathrm{i}B$，其中 i 是虚数单位. 同理，任意复数向量，都存在实数向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$，使得该复数向量为 $\boldsymbol{v} + \mathrm{i}\boldsymbol{w}$. 下面用 $\Re(A), \Re(\boldsymbol{v}), \Im(A), \Im(\boldsymbol{v})$ 来表达复矩阵 A 和复向量 $\boldsymbol{v}$ 的实部和虚部.

1. 用实数矩阵和向量 $A, B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 来表达 $(A + \mathrm{i}B)(\boldsymbol{v} + \mathrm{i}\boldsymbol{w})$ 的实部和虚部；
2. 对任意实数矩阵 A, B，求矩阵 X，使得 $X\begin{bmatrix}\Re(\boldsymbol{v}+\mathrm{i}\boldsymbol{w})\\ \Im(\boldsymbol{v}+\mathrm{i}\boldsymbol{w})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Re\left((A+\mathrm{i}B)(\boldsymbol{v}+\mathrm{i}\boldsymbol{w})\right)\\ \Im\left((A+\mathrm{i}B)(\boldsymbol{v}+\mathrm{i}\boldsymbol{w})\right)\end{bmatrix}$ 对任意实数向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 都成立.
3. 考虑映射 $f(a + \mathrm{i}b) = \begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$. 验证 $f\left((a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d)\right) = f(a + \mathrm{i}b)f(c + \mathrm{i}d)$.

练习 1.6.19 (错位分块对角矩阵) 定义

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \triangle \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & 0 & a_{12} & 0\\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12}\\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0\\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22}\end{bmatrix}.$$

1. 证明 $(A_1 \triangle B_1)(A_2 \triangle B_2) = (A_1A_2) \triangle (B_1B_2)$.
2. 证明 $A \triangle B$ 可逆当且仅当 A, B 都可逆；此时有 $(A \triangle B)^{-1} = A^{-1} \triangle B^{-1}$.
3. 求 X，使得对任意 2 阶方阵 A, B，都有 $X(A \triangle B)X^{-1} = \begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}$.

1.7 LU 分解

练习 1.7.1 求下列矩阵的 LU 分解，其中 L 为单位下三角矩阵.

1. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{bmatrix}$.
4. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 6\end{bmatrix}$.
5. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$.
6. $\begin{bmatrix}1 & 5 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 6 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 7\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$.

注意观察，哪些 0 保留在了 L 中或者 U 中.

练习 1.7.2 利用行变换解下列方程

1. $\begin{bmatrix}1&5&5&5\\1&2&6&6\\1&2&3&7\\1&2&3&4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}34\\28\\23\\20\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}34\\28\\23\\20\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix}1&5&5&5\\0&-3&1&1\\0&0&-3&1\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，这里的 $\boldsymbol{y}$ 是上一问的解.

练习 1.7.3 设 n 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{v}&B\end{bmatrix}$ 存在 LU 分解 $A=LU$，其中 $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$.

1. A 的左上角元素 a_{11} 是否非零?
2. 从上往下对 A 做行变换，将 $\boldsymbol{v}$ 变为 $\mathbf{0}$ 时，需要做多少次加法、乘法?
3. 再设 A 为对称矩阵. 此时 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 有什么关系? B 有什么性质?
4. 利用行变换将 $\boldsymbol{v}$ 变为 $\mathbf{0}$ 时，再利用对应的列变换将 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}$ 变为 $\mathbf{0}$，求证此时 B 变为对称矩阵. 此时需要做几次加法、乘法?

由此看到，对称矩阵 LU 分解的计算量可以节省一半.

练习 1.7.4 设 n 阶方阵

$$T=\begin{bmatrix}1&-1&&&\\-1&2&-1&&\\&-1&2&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&-1\\&&&-1&2\end{bmatrix}.$$

利用初等变换证明，存在分解式 $T=LU$，其中 L 是下三角矩阵，U 是上三角矩阵. 据此求出 T^{-1}.

2.1 基本概念

练习 2.1.1 判断下列子集是否是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 其中的子空间是否可以写成线性生成的子空间；如果可以，写出一组基.

1. $\left\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\,\middle|\,\sum_{i=1}^n a_i=0\right\}$.
2. $\left\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\,\middle|\,\sum_{i=1}^n a_i=1\right\}$.
3. $\left\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\,\middle|\,\sum_{i=1}^n a_i^2=0\right\}$.
4. $\left\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\,\middle|\,a_1=0\right\}$.

5. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \middle| a_1 \geqslant 0\right\}$.

6. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \middle| a_1 = \cdots = a_n\right\}$.

7. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \middle| a_1^2 = \cdots = a_n^2\right\}$.

8. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \middle| a_1a_2a_3 = 0\right\}$.

9. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \middle| a_1 = a_2\right\}$.

10. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \middle| a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3\right\}$.

11. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \middle| \begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}\text{是可逆矩阵}\right\}$.

12. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \middle| \begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}\text{是不可逆矩阵}\right\}$.

13. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \middle| \begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}\text{是对称矩阵}\right\}$.

14. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \middle| \begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}\text{是反对称矩阵}\right\}$.

练习 2.1.2 判断满足下列性质的 $\mathbb{R}^3$ 子集 $\mathcal{M}$ 是否存在．若存在，进一步判断哪些是子空间.

1. $\mathcal{M}$ 含有 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$；对任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{M}$，都有 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \in \mathcal{M}$；存在 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{M}$，使得 $\frac{1}{2}\boldsymbol{v} \notin \mathcal{M}$.

2. $\mathcal{M}$ 含有所有形如 $\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 1\end{bmatrix}$ 的向量；对任意 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{M}$，都有 $k\boldsymbol{v} \in \mathcal{M}$；存在 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{M}$，使得 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \notin \mathcal{M}$.

3. $\mathcal{M}$ 含有 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 但不含有 $\boldsymbol{e}_3$；对任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{M}, k \geqslant 0$，都有 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, k\boldsymbol{v} \in \mathcal{M}$.

练习 2.1.3 证明命题 2.1.9 .

练习 2.1.4 证明，$\mathcal{R}(O_{m\times n}) = \{\mathbf{0}\}, \mathcal{N}(O_{m\times n}) = \mathbb{R}^n$；如果 n 阶方阵 A 可逆，则 $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n, \mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

练习 2.1.5 证明, 对例 2.1.3 中的 $A = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}$, 这三个向量中的任意两个都可以作为 $\mathcal{R}(A)$ 的一组生成向量，但是，其中任意单个向量都不能生成 $\mathcal{R}(A)$.

练习 2.1.6 判断下列 A, B 是否具有相同的列空间、零空间，证明或举出反例.

1. A 为任意矩阵, B 分别为 $2A$, $\begin{bmatrix}A & A\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}A & AC\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}A\\ A\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}A\\ CA\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}A & A\\ O & A\end{bmatrix}$, PA, AQ, 其中 P, Q 可逆.

2. ☕ A 为 n 阶方阵，B 分别为 $A+I_n, A^2, A^{\mathrm{T}}$.

练习 2.1.7 设矩阵 A, B 具有相同的行数和列数，对下列判断，证明或举出反例.

1. 如果 A, B 有相同的零空间，那么对任意向量 $\boldsymbol{b}$，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 与 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 一定同解.

2. 如果 A,B 有相同的列空间，那么对任意向量 $\boldsymbol{b}$，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 与 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 一定同解.

3. 如果 A,B 有相同的零空间和列空间，那么对任意向量 $\boldsymbol{b}$，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 与 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 一定同解.

练习 2.1.8 设 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解，证明，

1. $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\right)$.

2. $\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right)$.

练习 2.1.9 把 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 $\boldsymbol{b}$ 表示成 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 的线性组合.

1. $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$.

2. $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

练习 2.1.10 判断下列向量组是否线性相关.

1. $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}0\\-7\\3\\1\end{bmatrix}$.

2. $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_5=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$.

练习 2.1.11 如果向量组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中的任何两个都线性无关，试问该向量组是否一定线性无关?

练习 2.1.12 设 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$，满足 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$，其中 $k_1k_2\neq 0$. 求证: $\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$.

练习 2.1.13 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性无关, 证明向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_s$ 线性无关.

练习 2.1.14 设 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性无关, A 是 n 阶可逆矩阵, 求证: $A\boldsymbol{a}_1,A\boldsymbol{a}_2,\cdots,A\boldsymbol{a}_s$ 线性无关.

注意：上题其实是本题的特殊情形. 另外，假设 $\boldsymbol{A}$ 是单射，是否已经足够？

练习 2.1.15 证明，一个线性无关向量组的任意部分组也线性无关；如果向量组有一个部分组线性相关，则该向量组也线性相关.

练习 2.1.16 证明，一个向量组线性相关当且仅当其中有一个向量可以被其他向量线性表示.

练习 2.1.17 给定 $\mathbb{R}^m$ 中向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，从每个向量中去掉第 $i_1,\cdots,i_s$ 个分量，得到 $\mathbb{R}^{m-s}$ 中向量组 $\boldsymbol{a}_1',\cdots,\boldsymbol{a}_n'$. 证明，

1. 如果 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性相关，则 $\boldsymbol{a}_1',\cdots,\boldsymbol{a}_n'$ 线性相关.

   注意：有追求的读者可以尝试这种线性代数味道更浓的证明方法：可否找到一个矩阵 A，把每个 a_n 变成 a_n'？

2. 如果 $\boldsymbol{a}_1',\cdots,\boldsymbol{a}_n'$ 线性无关，则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

练习 2.1.18 证明，对任意 $\mathbb{R}^m$ 的非平凡子空间 $\mathcal{M},\mathcal{N}$，都有 $\mathcal{M}\cup\mathcal{N}\neq\mathbb{R}^m$.

练习 2.1.19 (子空间的和) 设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间，定义集合：

$$\mathcal{M}+\mathcal{N}:=\{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}\mid\boldsymbol{m}\in\mathcal{M},\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}\}.$$

证明，

1. 集合 $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，称为子空间 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 的**和**.
2. 交集 $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，称为子空间 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 的**交**.
3. 集合的交与并满足 $(S_1\cup S_2)\cap S_3=(S_1\cap S_3)\cup(S_2\cap S_3)$. 证明或举出反例：子空间的交与和满足 $(\mathcal{M}+\mathcal{N})\cap\mathcal{W}=(\mathcal{M}\cap\mathcal{W})+(\mathcal{N}\cap\mathcal{W})$.
4. 集合的交与并满足 $(S_1\cap S_2)\cup S_3=(S_1\cup S_3)\cap(S_2\cup S_3)$. 证明或举出反例：子空间的交与和满足 $(\mathcal{M}\cap\mathcal{N})+\mathcal{W}=(\mathcal{M}+\mathcal{W})\cap(\mathcal{N}+\mathcal{W})$.

练习 2.1.20 设 $\mathbb{R}^m$ 中子空间 $\mathcal{M}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s),\mathcal{N}=\operatorname{span}(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_t)$，证明，

$$\mathcal{M}+\mathcal{N}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_t).$$

练习 2.1.21

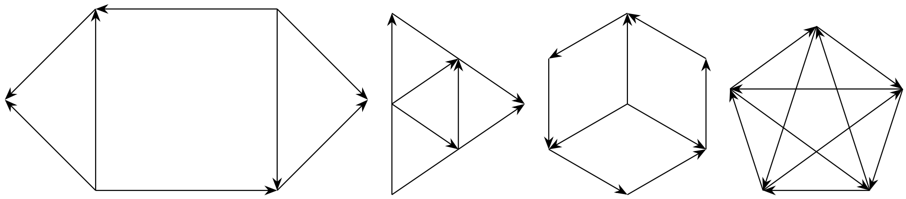
1. 给定 $m\times n,m\times s$ 矩阵 A,B，证明，$\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B)=\mathcal{R}(C)$，其中 $C=\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}$.
2. 给定 $m\times n,l\times n$ 矩阵 A,B，证明，$\mathcal{N}(A)\cap\mathcal{N}(B)=\mathcal{N}(D)$，其中 $D=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$.

练习 2.1.22 (Kirchhoff 电压定律) ☕☕ 对图 2.1.2 中的电路网络，令 M_G 为对应的关联矩阵. 根据 Kirchhoff 电压定律，找出一个方程组，其解集恰为 $\mathcal{R}(M_G)$. 要求用尽量少的方程 (但不需要写出证明).

提示：对于最后一个图，它有 10 条边，5 个点，因此 M_G 是 10×5 的矩阵. 由于 $\mathcal{N}(M_G)$ 是 1 维的（所有点电势相等的情况），因此 $\mathcal{R}(M_G)$ 是几维的？至少需要几个等式才能确定？

练习 2.1.23 (电路网络拓展) 设图 2.1.1 中的电路网络的关联矩阵是 M_G，定义图的 Laplace 矩阵 $L_G=M_G^{\mathrm{T}}M_G$.

注意：这类 *Laplace* 矩阵与图上的随机游走等问题密切相关.



(a) (b) (c) (d)

图 2.1.1: Kirchhoff 定律的练习

1. 矩阵 L_G 的元素有什么意义?

2. 求子空间 $\mathcal{N}(L_G)$ 的一组生成向量.

3. 求子空间 $\mathcal{R}(L_G)$ 的一组生成向量，要求其中每个向量至少有两个分量为零.

4. 任取向量 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{N}(L_G), \boldsymbol{w} \in \mathcal{R}(L_G)$，$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$ 可能取哪些值?

5. 求线性方程组，其解集恰好是 $\mathcal{R}(L_G)$.

练习 2.1.24 以下哪些向量组是矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的零空间的基?

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

4. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

5. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2.2 基和维数

练习 2.2.1 求下列向量组的极大线性无关部分组和秩.

1. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$;

2. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

练习 2.2.2 在下列向量组中，除去哪个向量，得到的向量组和原向量组线性等价?

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

练习 2.2.3 用筛选法去掉方程组中所有多余的方程: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

练习 2.2.4 给定线性无关的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$，求 $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1$ 所有的极大线性无关部分组.

练习 2.2.5 证明，一个向量组的任意线性无关的部分组都可以扩充成它的一个极大线性无关部分组.

练习 2.2.6 证明，如果向量组 S 可以被向量组 T 线性表示，则 $\operatorname{rank}(S) \leqslant \operatorname{rank}(T)$.

练习 2.2.7 证明向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1$ 线性等价.

注意：有追求的读者可以尝试这种线性代数味道更浓的证明方法：可否找到一个可逆矩阵 A，把一个向量组变成另一个向量组？

练习 2.2.8 证明，如果向量组和它的一个部分组的秩相同，则两个向量组线性等价.

练习 2.2.9 举例说明秩相等的向量组未必线性等价.

练习 2.2.10 已知向量组的秩是 r，设 S 是一个包含 r 个向量的部分组. 证明:

1. 如果 S 线性无关，则 S 是原向量组的一个极大线性无关部分组.
2. 如果 S 与原向量组线性等价，则 S 是原向量组的一个极大线性无关部分组.

练习 2.2.11 证明命题 2.2.17 .

练习 2.2.12 求下列子空间的基和维数.

1. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x-y=0$ 与平面 $x+y-2z=0$ 的交集.
2. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中与向量 $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}$ 都垂直的向量组成的子空间.
3. 齐次线性方程组 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集.

练习 2.2.13 ☕☕ 一个三阶方阵，如果每行、每列以及两个对角线上的元素之和都相等，则称为幻方矩阵. 判断 $\left\{\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_9\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^9 \,\middle|\, \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\\ a_7 & a_8 & a_9\end{bmatrix}\text{是幻方矩阵}\right\}$ 是否是 $\mathbb{R}^9$ 的子空间. 如果是，求它的一组基.

提示：一个常见的幻方矩阵是 $\begin{bmatrix}2 & 9 & 4\\ 7 & 5 & 3\\ 6 & 1 & 8\end{bmatrix}$. 你能否根据它找到许多幻方矩阵？

练习 2.2.14 ☕ 任取非零常数 $k_1,\cdots,k_n$ 满足 $\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_n}+1\neq 0$，求如下向量组的秩：

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1+k_1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1+k_2\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}_n=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1+k_n\end{bmatrix}.$$

练习 2.2.15 给定 r 阶方阵 P 和子空间 $\mathcal{M}$ 的一组基 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$. 令 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r\end{bmatrix}P$，证明，$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基当且仅当矩阵 P 可逆.

练习 2.2.16 (Steinitz 替换定理) 设 $S:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关，可被 $T:\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_t$ 线性表示，求证：

1. $r\leqslant t$.
2. ☕ 可以选择 T 中的 r 个向量换成 S，得到的新的向量组与 T 线性等价.

练习 2.2.17 (平行的平面) 考虑方程 $x-3y-z=12$ 和 $x-3y-z=0$ 的解集. 这两个解集的交集是什么？如果 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 分别是第一个和第二个方程的解，那么 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2, 2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 分别是哪个方程的解？

注意：从几何上看，这两个解集是 $\mathbb{R}^3$ 中两个平行的平面，其中一个经过原点，因此是二维子空间；另一个不经过原点，因此不是子空间.

练习 2.2.18 ☕☕ 设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间，求证维数公式：

$$\dim(\mathcal{M}+\mathcal{N})=\dim\mathcal{M}+\dim\mathcal{N}-\dim\mathcal{M}\cap\mathcal{N}.$$

提示：先取 $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$ 的一组基，根据基扩充定理，分别扩充成 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的一组基，证明这两组基的并集是 $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ 的一组基.

2.3 矩阵的秩

练习 2.3.1 给定矩阵 $A = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}$.

1. 写出 A 的行空间、列空间.
2. 如果 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 都不为零，求 $\operatorname{rank}(A)$ 的所有可能值，并讨论这四个向量与 $\operatorname{rank}(A)$ 之间的关系.

练习 2.3.2 求下列矩阵列空间的一组基.

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

练习 2.3.3 求满足下列条件的 3×4 矩阵 A 的行简化阶梯形和秩.

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 解集的一组基为 $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.
2. A 的 (i,j) 元为 $a_{ij} = 4$.
3. A 的 (i,j) 元为 $a_{ij} = i + j + 1$.
4. A 的 (i,j) 元为 $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

练习 2.3.4 设矩阵 A 的行简化阶梯形为 R，求下列 B 的行简化阶梯形.

1. $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$.
2. $B = \begin{bmatrix} A & AC \end{bmatrix}$.
3. $B = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$.
4. $B = \begin{bmatrix} A \\ CA \end{bmatrix}$.
5. $B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$.
6. $B = PA$, 其中 P 是可逆矩阵.
7. A 有 LU 分解 $A = LU$，这里 L 为单位下三角阵，令 $B = U$.

练习 2.3.5 求矩阵 A 中 “$*$” 处的元素，满足相应的条件.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & * & * \\ 4 & * & * \end{bmatrix}$，且 A 的秩为 1.
2. $A = \begin{bmatrix} * & 9 & * \\ 1 & * & * \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$，且 A 的秩为 1.
3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & * \end{bmatrix}$，$a \neq 0$，且 A 的秩为 1.
4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & * \end{bmatrix}$，且 A 的秩为 2.

练习 2.3.6 构造满足下列条件的矩阵 R，要求其中为 1 的元素尽量多.

1. R 为 4×7 的阶梯形，其中主列为第二、四、五列.

2. R 为 4×7 的阶梯形，其中主列为第一、三、六、七列.

3. R 为 4×7 的阶梯形，其中主列为第四、六列.

4. R 为 4×8 的行简化阶梯形，其中自由列为第二、四、五、六列.

5. R 为 4×8 的行简化阶梯形，其中自由列为第一、三、六、七、八列.

练习 2.3.7 说明满足下列条件的矩阵 A 是否存在. 如果存在，举例说明，要求其中为 0 的元素尽量多.

1. A 为 4×7 的阶梯形，其中主列为第二、四、五列，A^{T} 的主列为第一、三列.

2. A 为 4×7 的阶梯形，其中主列为第二、四、五列，A^{T} 的主列为第二、三、四列.

练习 2.3.8 证明，$\operatorname{rank}(kA)=\operatorname{rank}(A)\ (k\neq 0)$, $\quad\operatorname{rank}(A+B)\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

练习 2.3.9 对分块矩阵 $C=\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}$，证明，

$$\max\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}\leqslant\operatorname{rank}(C)\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

练习 2.3.10

1. 对分块对角矩阵 $C=\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}$，证明，$\operatorname{rank}(C)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

2. 对分块上三角矩阵 $C=\begin{bmatrix}A & X\\ O & B\end{bmatrix}$，证明，$\operatorname{rank}(C)\geqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$. 由此证明，当 A,B 可逆时，C 也可逆.

练习 2.3.11 ☕ 设 A,B,C 分别为 $m\times n,n\times k,k\times s$ 矩阵，证明，

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\leqslant\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B).$$

提示：构造合适的分块上三角矩阵.

练习 2.3.12 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 1，证明，存在非零向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$，使得 $A=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$.

练习 2.3.13 试分析矩阵 A 满足什么条件时，$AB=AC$ 可以推出 $B=C$.

注意：类比如下问题：对集合之间的映射 $f\colon X\to Y,g\colon Z\to X,h\colon Z\to X$，当一个映射 f 满足什么条件时，$f\circ g=f\circ h$ 可以推出 $g=h$？

练习 2.3.14 设 $m\times n$ 矩阵 A 列满秩，求证：存在行满秩的 $n\times m$ 矩阵 B，使得 $BA=I_n$.

注意：类比如下问题：设集合 X,Y 都只有有限个元素，映射 $f\colon X\to Y$ 为单射，是否存在映射 $g\colon Y\to X$，满足 $g\circ f$ 是 X 上的恒同变换？

练习 2.3.15 证明命题 2.3.10 .

练习 2.3.16 设 A,B 是 n 阶方阵，利用不等式 $\operatorname{rank}(AB)\leqslant\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$，证明，

1. 如果 $AB = I_n$，则 A, B 都可逆，且 $BA = I_n$.

2. 如果 AB 可逆，则 A, B 都可逆.

练习 2.3.17 证明命题 2.3.15 .

练习 2.3.18 证明，当 A 行满秩时，仅用初等列变换就可以把它化为相抵标准形；当 A 列满秩时，仅用初等行变换就可以把它化为相抵标准形.

练习 2.3.19 ☕ 对二阶方阵 A，如果存在 $n > 2$，使得 $A^n = O$，求证：$A^2 = O$.

提示：根据 A 的秩分类讨论. 其中秩等于 1 时，考虑练习 *2.3.12* .

练习 2.3.20 ☕ 多项式 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$，求证：对任意方阵 A，都有 $\mathrm{rank}(f(A)) \leqslant \mathrm{rank}(A)$.

提示：可否对 $f(x)$ 进行因式分解？

练习 2.3.21 ☕ 考虑反对称矩阵的秩.

1. 证明反对称矩阵的秩不能是 1.

   提示：考虑练习 *2.3.12* .

2. 对反对称矩阵 A，去掉首行首列得到矩阵 B. 求证：B 也是反对称矩阵，且 $\mathrm{rank}(B)$ 等于 $\mathrm{rank}(A)$ 或 $\mathrm{rank}(A) - 2$.

   提示：注意 $A = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v} & B \end{bmatrix}$，然后根据是否有 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}(B)$ 进行分类讨论.

3. 证明反对称矩阵的秩必然是偶数. 由此证明，奇数阶反对称矩阵一定不可逆.

练习 2.3.22 设 A 是 n 阶可逆实反对称矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 n 维实列向量，求证：$\mathrm{rank}(A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}) = n$.

提示：构造分块矩阵，或者直接应用 *Sherman-Morrison* 公式.

练习 2.3.23 (满秩分解)

1. 求向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$，使得 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$.

2. 设 A 是秩为 $r > 0$ 的 $m \times n$ 的矩阵，令 C 为 A 的主列按顺序组成的矩阵，则 C 有几行几列？令 R 为 A 的行简化阶梯形的非零行按顺序组成的矩阵，则 R 有几行几列？求证 $A = CR$.

3. 求证：任意秩为 $r > 0$ 的 $m \times n$ 矩阵 A 可以分解成列满秩矩阵和行满秩矩阵的乘积，即分别存在 $m \times r, r \times n$ 矩阵 C, R，且 $\mathrm{rank}(C) = \mathrm{rank}(R) = r$，使得 $A = CR$.

4. 证明，任意线性映射 f 都存在分解 $f = g \circ h$，其中 h 是线性满射，g 是线性单射.

   注意：对一般的映射，也有类似的结论，见练习 *0.3.8* .

练习 2.3.24 (秩一分解) 证明，任意秩为 $r > 0$ 的矩阵 A 可以分解成 r 个秩为 1 的矩阵的和.

提示：这实际上是命题 *2.3.16* 或者练习 *2.3.23* 的简单推论. 有追求的读者可以由此找到两个证明.

2.4 线性方程组的解集

练习 2.4.1 求下列矩阵零空间的一组基:

1. $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix}1&-2&1&1&-1\\2&1&-1&-1&-1\\1&7&-5&5&5\\3&-1&-2&1&-1\end{bmatrix}$. 3. $\begin{bmatrix}2&1&-1&-1&1\\1&-1&1&1&-2\\3&3&-3&-3&4\\4&5&-5&-5&7\end{bmatrix}$.

练习 2.4.2 求下列方程组的全部解:

$$\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1,\\x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1,\\4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1.\end{cases}$$

练习 2.4.3 求下列矩阵零空间的一组基.

1. $\begin{bmatrix}I_n&I_n\end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix}I_n&I_n\\O&O\end{bmatrix}$. 3. $\begin{bmatrix}I_n&I_n&I_n\end{bmatrix}$.

练习 2.4.4 给定 $A=\begin{bmatrix}1&&\\6&1&\\9&8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\end{bmatrix}$, 求 A 的零空间、列空间、行空间、左零空间的一组基.

练习 2.4.5 线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ 的全部解是 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, k\in\mathbb{R}$, 求 A.

练习 2.4.6 求常数 a,b,c, 使得方程 $\begin{bmatrix}1&-3&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=12$ 的所有解都具有如下形式:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}c\\0\\1\end{bmatrix}x_3.$$

练习 2.4.7 设 3×4 矩阵 A 的零空间的一组基是 $\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}$.

1. 求 $\operatorname{rank}(A)$ 和 $\operatorname{rref}(A)$.
2. 方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对哪些 $\boldsymbol{b}$ 有解?

练习 2.4.8 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\1&0&0&0\end{bmatrix}$, 对任意 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4$, 令 $S_{\boldsymbol{v}}:=\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}_0\mid\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{N}(A)\}$, 即由 $\mathcal{N}(A)$

沿着 $\boldsymbol{v}$ 平移后得到的子集. 令 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\6\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{b}_i$ 使得 $S_{\boldsymbol{v}_i}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_i$ 的解集, 并分析 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 之间的关系.

练习 2.4.9 ☕ 把国际象棋的棋盘以及棋子的初始位置分别抽象成如下矩阵 B 和 C:

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}r&n&b&q&k&b&n&r\\p&p&p&p&p&p&p&p\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\p&p&p&p&p&p&p&p\\r&n&b&q&k&b&n&r\end{bmatrix}.$$

分别求其列空间、行空间、零空间和左零空间的一组基, 其中 r,n,b,q,k,p 是两两不等的非零实数.

练习 2.4.10 设 A,B,C,D 为二阶方阵, 如果分块矩阵 $M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$ 满足每一行、每一列以及四个二阶子方阵中的四个元素都是 $1,2,3,4$, 则称 M 为四阶数独矩阵. 写出一个四阶数独矩阵, 并分别求其列空间、行空间、零空间和左零空间的一组基.

练习 2.4.11 在平面直角坐标系下给定点 $A(a_1,a_2),B(b_1,b_2),C(c_1,c_2)$, 证明, A,B,C 三点不共线当且仅当矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&a_2&1\\b_1&b_2&1\\c_1&c_2&1\end{bmatrix}$ 可逆.

练习 2.4.12 设 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_t$ 是线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解, 其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 证明, $c_0\boldsymbol{x}_0+c_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_t\boldsymbol{x}_t$ 也是解当且仅当 $c_0+c_1+\cdots+c_t=1$.

练习 2.4.13 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, 其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_t$ 是 $\mathcal{N}(A)$ 的一组基. 令 $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{k}_i, 1\leqslant i\leqslant t$, 证明, 线性方程组的任意解都可唯一地表示成 $c_0\boldsymbol{x}_0+c_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_t\boldsymbol{x}_t$, 其中 $c_0+c_1+\cdots+c_t=1$.

练习 2.4.14 对任意 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的向量组 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_t$, 证明, 存在满足如下条件的非齐次线性方程组:

1. $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_t$ 都是此方程组的解;

2. 该方程组的任意解都能被 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_t$ 线性表示.

练习 2.4.15 ☕ 给定线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 和分块矩阵 $B=\begin{bmatrix}A&\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}$. 证明, 如果 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$, 则方程组有解.

练习 2.4.16 (Fredholm 二择一定理) ☕ 线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解当且仅当 $\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解.

注意：前一个方程组中 $\boldsymbol{x}$ 为未知向量，后一个方程组中 $\boldsymbol{y}$ 为未知向量.

练习 2.4.17 如果 10 阶方阵 A 满足 $A^2=O$，证明 $\operatorname{rank}(A)\leqslant 5$. 是否存在 $A^2=O, \operatorname{rank}(A)=5$ 的 10 阶方阵 A?

提示：子空间 $\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 有何关系？

练习 2.4.18 ☕ 设 A,B 分别为 $m\times n, n\times k$ 矩阵，证明，$\operatorname{rank}(AB)\geqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n$.

提示：法一：参见练习 *2.3.11* .

法二：利用相抵标准形.

法三：证明 $\dim\mathcal{N}(AB)\leqslant\dim\mathcal{N}(A)+\dim\mathcal{N}(B)$.

练习 2.4.19 对 n 阶方阵 A，求证：

1. $A^2=A$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-A)=n$.

   提示：考虑 A 和 $I-A$ 的相关的子空间有何关系？

2. $A^2=I_n$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(I_n+A)+\operatorname{rank}(I_n-A)=n$.

   提示：考虑 $I+A$ 和 $I-A$ 的相关的子空间有何关系？

练习 2.4.20 证明或否定：如果对任意 $\boldsymbol{b}$，方程组 $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 和 $A_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 总有相同的解集，则 $A_1=A_2$.

练习 2.4.21 证明，$\mathbb{R}^n$ 的任意子空间一定是某个矩阵的零空间.

练习 2.4.22 给定 $l\times n$ 矩阵 A 和 $m\times n$ 矩阵 B，证明，$\mathcal{N}(A)\subseteq\mathcal{N}(B)$ 当且仅当存在 $m\times l$ 矩阵 C，使得 $B=CA$.

练习 2.4.23 给定 $m\times n$ 矩阵 A,B，证明，$\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(B)$ 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 T，使得 $B=TA$.

练习 2.4.24 给定 n 阶方阵 A.

1. 对任意 k，证明 $\mathcal{R}(A^k)\geqslant\mathcal{R}(A^{k+1})$;

2. 假设 $\mathcal{R}(A^k)=\mathcal{R}(A^{k+1})$，求证 $\mathcal{R}(A^{k+1})=\mathcal{R}(A^{k+2})$;

3. 求证：存在 $k\leqslant n$，满足 $\operatorname{rank}(A^k)=\operatorname{rank}(A^{k+1})=\cdots$. 由此证明，如果存在 p 使得 $A^p=O$，则 $A^n=O$.

练习 2.4.25 (Kirchhoff 电流定律) 对练习 2.1.22 中的电路网络，令 M_G 为对应的关联矩阵. 根据 Kirchhoff 电流定律，求 M_G 左零空间的一组基.

练习 2.4.26 在例 2.4.7 中，有结论 $\operatorname{rank}(M_G^{\mathrm{T}}R^{-1}M_G)=\operatorname{rank}(M_G)$，其中 R^{-1} 为对角元素都大于零的对角矩阵. 根据下列思路证明该结论.

1. 若 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{y}=0$，则 $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$.

2. $M_G\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，当且仅当 $M_G^{\mathrm{T}}R^{-1}M_G\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

3. $\operatorname{rank}(M_G^{\mathrm{T}}R^{-1}M_G)=\operatorname{rank}(M_G)$.

阅读 2.4.27 (桥墩载荷)

3.1 基本概念

练习 3.1.1 证明命题 3.1.3 .

练习 3.1.2 在 $\mathbb{R}^4$ 中求向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角.

1. $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\1\end{bmatrix}$.
2. $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\1\\5\\1\end{bmatrix}$.
3. $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$.

练习 3.1.3 求证：

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 0，当且仅当存在 $k>0$，使得 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$.

2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正交，当且仅当对任意实数 t，有 $\|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\|\geqslant\|\boldsymbol{a}\|$.

3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正交，当且仅当 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$.

练习 3.1.4 证明推论 3.1.5 .

练习 3.1.5 (Cauchy-Schwarz 不等式的其他证明) 1. 先证明 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是单位向量的情形：$|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}|\leqslant 1$，且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a}=\pm\boldsymbol{b}$. 再由单位向量的情形推广到一般的情形.

提示：利用均值不等式 $\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}$.

2. 根据内积的正定性，对任意实数 t，都有 $(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}+2t\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\geqslant 0$. 利用判别式证明结论.

练习 3.1.6 给定 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$. 计算 $\boldsymbol{a}$ 与坐标向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的夹角的余弦，并计算这三个余弦值的平方和.

练习 3.1.7 设 $\|\boldsymbol{a}\|=3,\|\boldsymbol{b}\|=4$，确定 $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$ 的取值范围.

练习 3.1.8 设 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}z\\x\\y\end{bmatrix}$，且 $x+y+z=0$. 确定 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的取值范围.

练习 3.1.9 1. 找到 $\mathbb{R}^4$ 中的四个两两正交的向量，且每个向量的每个分量只能是 ±1.

2. $\mathbb{R}^n$ 中最多有多少个两两正交的向量?

练习 3.1.10 1. 找到 $\mathbb{R}^2$ 中的三个向量，使它们之间两两内积为负.

2. 找到 $\mathbb{R}^3$ 中的四个向量，使它们之间两两内积为负.

3. ☕☕ $\mathbb{R}^n$ 中最多有多少个向量，使它们之间两两内积为负?

练习 3.1.11 在 $\mathbb{R}^4$ 中求一单位向量与下列向量正交:

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

练习 3.1.12 设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基，证明，

1. 如果 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i=0\ (1\leqslant i\leqslant n)$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

2. 如果 $\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$，则 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_2$.

练习 3.1.13 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，证明下列向量组也是一组标准正交基:

$$\boldsymbol{b}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3),\quad \boldsymbol{b}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3),\quad \boldsymbol{b}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3).$$

练习 3.1.14 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$ 是 $\mathbb{R}^5$ 的一组标准正交基，令

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_5,\quad \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4,\quad \boldsymbol{b}_3=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3.$$

求 $\operatorname{span}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ 的一组标准正交基.

练习 3.1.15 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3+x_5=0,\end{cases}$$

解空间的一组标准正交基.

练习 3.1.16 利用 Gram-Schmidt 正交化方法求由下列向量线性生成的子空间的标准正交基:

1. $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\2\end{bmatrix}$. 2. $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$.

练习 3.1.17 证明命题 3.1.13 .

练习 3.1.18 (勾股定理的高维推广) 1. 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ 围成一个三角形，证明其面积的平方为 $\frac{1}{4}(\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})^2)$.

2. 两两垂直的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$ 围成一个四面体，证明其斜面上三角形面积的平方等于其余三个直角三角形面积的平方和.

练习 3.1.19 取定非零向量 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的一个变换，它将每个向量 $\boldsymbol{b}$ 映射到其向直线 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a})$ 正交投影后平行于 $\boldsymbol{a}$ 的部分.

1. 证明这是一个线性变换，其表示矩阵为 $A = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}$.

2. 证明 $A^2 = A, A^{\mathrm{T}} = A$.

练习 3.1.20 (内积决定转置) 求证：设 $m\times n$ 矩阵 A 和 $n\times m$ 矩阵 B，如果对任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$，都有 $(B\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{w})$，则 $B = A^{\mathrm{T}}$.

练习 3.1.21 (Riesz 表示定理) 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是线性映射，证明，存在向量 $\boldsymbol{b}$，使得对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$.

练习 3.1.22

1. (平行四边形法则) 证明 $\mathbb{R}^n$ 中任意平行四边形的两条对角线长度的平方和，等于其四条边长的平方和.

2. (极化公式) 证明 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2)$.

   注意：这意味着，长度决定角度.

3. 设 $\|\boldsymbol{a}\|_4 = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^4)^{\frac{1}{4}}$，定义关于 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的二元函数 $\frac{1}{4}(\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|_4^2 - \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|_4^2)$. 这个二元函数是否满足内积定义中的对称性、双线性、正定性?

4. ☕ 定义 $\|\boldsymbol{a}\|_\infty$ 为所有分量绝对值的最大值，定义关于 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的二元函数 $\frac{1}{4}(\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|_\infty^2 - \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|_\infty^2)$. 这个二元函数是否满足内积定义中的对称性、双线性、正定性? 此时，三角不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式是否仍然成立?

阅读 3.1.23 计算机在存储图像时，

3.2 正交矩阵和 QR 分解

练习 3.2.1 求一个四阶正交矩阵，其中前两个列向量分别为：$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

练习 3.2.2 写出元素都是 0 或 1 的所有三阶正交矩阵.

阅读 3.2.3 (Hadamard 矩阵) 给定 n 阶矩阵 A，如果 A 的元素都是 1 或 -1，且 $A^{\mathrm{T}}A = nI_n$，则称 A 是一个 n 阶 **Hadamard 矩阵**.

显然 Hadamard 是所有元素绝对值相同的正交矩阵的倍数. 可以证明 Hadamard 矩阵的阶只能是 $1, 2$ 或 $4k, k = 1, 2, \cdots$.

然而是否存在 $4k$ 阶 Hadamard 矩阵，还是一个悬而未决的问题，称为 **Hadamard 猜想**.

Hadamard 矩阵在信号处理中有应用.

练习 3.2.4

1. 列举所有的 1, 2 阶 Hadamard 矩阵.

2. 说明不存在 3 阶 Hadamard 矩阵.

3. 找出一个 4 阶 Hadamard 矩阵.

4. 证明如果 A 是 Hadamard 矩阵，则 $\begin{bmatrix} A & A \\ A & -A \end{bmatrix}$ 也是 Hadamard 矩阵. 以此说明存在 2^n 阶 Hadamard 矩阵.

   注意：这与阅读 3.1.23 中的 Haar 小波基相关.

练习 3.2.5 证明，分块上三角矩阵 $\begin{bmatrix} c & \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix}$ 是正交矩阵时，必有 $c = \pm 1, \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$，$Q$ 是正交矩阵.

练习 3.2.6 证明，上三角矩阵是正交矩阵时，必是对角矩阵，且对角元素是 ± 1.

练习 3.2.7 对标准基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，显然 $\sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} = I_n$. 对任意标准正交基 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$，求证 $\sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}} = I_n$.

练习 3.2.8 设 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两组标准正交基，证明存在正交矩阵 Q，使得 $Q\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

练习 3.2.9 回顾命题 3.2.4 ，设 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，考虑下列放松的条件.

1. A 在一组基上保距，即如果对 $1 \leqslant i \leqslant n$，$\|A\boldsymbol{a}_i\| = \|\boldsymbol{a}_i\|$，那么 A 是否一定是正交矩阵?

2. A 在一组基上保内积，即如果对 $1 \leqslant i, j \leqslant n$，$A\boldsymbol{a}_i$ 与 $A\boldsymbol{a}_j$ 的内积等于 $\boldsymbol{a}_i$ 与 $\boldsymbol{a}_j$ 的内积，那么 A 是否一定是正交矩阵?

练习 3.2.10 设 $H_{\boldsymbol{v}} := I_n - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上反射变换的表示矩阵，Q 是 n 阶正交矩阵，证明 $Q^{-1}H_{\boldsymbol{v}}Q$ 也是某个反射变换的表示矩阵.

练习 3.2.11 证明命题 3.2.6 .

练习 3.2.12 计算 QR 分解.

1. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

练习 3.2.13 设向量组 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性无关，首先令 $\boldsymbol{q}_1$ 为与 $\boldsymbol{v}_1$ 平行的单位向量，然后令 $\boldsymbol{q}_2$ 为二维子空间 $\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ 中垂直于直线 $\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1)$ 的单位向量，再令 $\boldsymbol{q}_3$ 为三维子空间 $\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ 中垂直于平面 $\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ 的单位向量，以此类推. 这样得到的 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_k$ 与 Gram-Schmidt 正交化得到的结果是否一致? 如果有区别的话，区别在哪里? 从 QR 分解的角度如何解释?

练习 3.2.14 (QR 分解的其他理解) 考虑 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的列向量围成的平行四边形.

1. 通过列变换，把第一列的若干倍加到第二列，使得平行四边形变成长方形. 这对应着 A 右乘哪个矩阵?

2. 通过旋转和反射，把平行四边形的第一条边变到 x_1 轴正半轴上，第二条边变到 x_1x_2 平面中 $x_2>0$ 的那一半．这对应着 A 左乘哪个正交矩阵？

练习 3.2.15 证明若矩阵列满秩，则其简化 QR 分解唯一．

提示：可以利用练习 *3.2.6* ．

练习 3.2.16 证明任意 n 阶正交矩阵可以表示成不多于 n 个反射的乘积．

练习 3.2.17 ☕ 设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 和 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个向量组，证明，存在正交矩阵 Q，使得 $Q\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{b}_i, 1\leqslant i\leqslant s$，当且仅当 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_j, 1\leqslant i,j\leqslant s$.

提示：化简成两个向量组均为线性无关向量组的情形，再用练习 *3.2.15* ．

练习 3.2.18 (保角变换) 设可逆矩阵 A 对应的线性变换保持向量之间的角度不变．

1. 对 A 进行 QR 分解，证明 R 也保持向量之间的角度不变．
2. 证明 R 为对角矩阵．
3. 证明 $R=kI_n$，这里 k 为常数．由此得到，A 必是某个正交矩阵的倍数．

练习 3.2.19 设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 m 个向量，定义矩阵

$$G(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m):=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_m\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_m\end{bmatrix},$$

称为 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的 **Gram 矩阵**．证明，

1. $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是正交单位向量组当且仅当 $G(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=I_m$.
2. Gram 矩阵 $G=G(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 是 m 阶对称矩阵，且对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{x}\geqslant 0$.
3. $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关当且仅当 $G=G(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 可逆，也等价于对任意非零 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{x}>0$.

3.3 正交投影

练习 3.3.1 设 $\mathcal{M}$ 是下列齐次线性方程组的解空间：

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0,\\ 3x_1+2x_2-2x_4=0,\\ 3x_1+x_2+9x_3-x_4=0,\end{cases}$$

分别求 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^{\perp}$ 的一组标准正交基．

练习 3.3.2 设 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ 生成子空间 $\mathcal{M}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$，求 $\mathcal{M}^{\perp}$ 的一组标准正交基．

练习 3.3.3 1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\1&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}5&4\\6&3\\5&1\end{bmatrix}$，求两个矩阵列空间的交集中的一个非零向量；由此判断两个列空间是否正交.

2. 求标准正交基 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$，使得 $\boldsymbol{v}_1\in\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{R}(B)$，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in\mathcal{R}(A)$，且 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3\in\mathcal{R}(B)$.

3. 求一组向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，使得 $A\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y}$，并计算 $\begin{bmatrix}A & -B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}$.

4. 求 $\begin{bmatrix}A & -B\end{bmatrix}$ 零空间的一组基，并求所有的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，满足 $A\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y}$.

练习 3.3.4 1. $\mathbb{R}^5$ 中的两个三维子空间是否可能正交?

2. 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&&&&\\&0&1&&&\\&&0&0&&\\&&&0&1&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{bmatrix}$，则 $\mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(A)$ 是否正交? 是否互为正交补?

练习 3.3.5 设 6 阶方阵 A 满足 $A^3=0$，它的秩最大为多少? 举例说明. 在 A,A^2 的行空间、列空间、零空间和左零空间之中，哪些互相正交?

练习 3.3.6 设 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{M}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s)$，证明，$\mathcal{M}^\perp=\left\{\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i=0,1\leqslant i\leqslant s\right\}$.

练习 3.3.7 对向量组 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k\}$，定义 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k\}^\perp$ 为与这些向量都正交的向量所构成的子集.

1. 证明 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k\}^\perp$ 是一个子空间.

2. 构造矩阵 A，使得 $\mathcal{N}(A)=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k\}^\perp$.

3. 证明 $(\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k\}^\perp)^\perp=\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k)$.

练习 3.3.8 集合运算有 De Morgan 定律：对给定集合的两个子集 X,Y，$X\cap Y$ 的补集等于 X 的补集与 Y 的补集的并集；$X\cup Y$ 的补集等于 X 的补集与 Y 的补集的交集. 子空间是否也有类似的法则呢? 设 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间 $\mathcal{M},\mathcal{N}$，不妨设存在矩阵 A,B，使得 $\mathcal{M}=\mathcal{R}(A),\mathcal{N}=\mathcal{R}(B)$.

1. $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ 是哪个矩阵的列空间? 因此，$(\mathcal{M}+\mathcal{N})^\perp$ 是该矩阵的什么空间?

2. $\mathcal{M}^\perp,\mathcal{N}^\perp,\mathcal{M}^\perp\cap\mathcal{N}^\perp$ 分别是哪个矩阵的零空间?

3. 证明 De Morgan 定律的子空间版本：$(\mathcal{M}+\mathcal{N})^\perp=\mathcal{M}^\perp\cap\mathcal{N}^\perp,(\mathcal{M}\cap\mathcal{N})^\perp=\mathcal{M}^\perp+\mathcal{N}^\perp$.

练习 3.3.9 设 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},\mathcal{M}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，求 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的正交投影.

练习 3.3.10 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的直线:

$$\mathcal{L}:\begin{cases} x_1+x_2+\ \ x_3=0,\\ 2x_1-x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

求 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 在直线 $\mathcal{L}$ 上的正交投影.

练习 3.3.11 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中由方程 $x_1-x_2+x_3=0$ 决定的平面，求 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ 在平面 $\mathcal{M}$ 上的正交投影，并求 $\boldsymbol{b}$ 到平面 $\mathcal{M}$ 的距离.

练习 3.3.12 将下列问题中的 $\boldsymbol{x}$ 分解成 $\mathcal{N}(A)$ 与 $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 中向量的和.

1. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$. 2. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$. 3. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}5\\5\\9\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&4\\2&3&5\end{bmatrix}$.

练习 3.3.13 证明命题 3.3.12 .

练习 3.3.14 说明满足下列条件的矩阵是否存在，如果存在，举例说明.

1. $\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix}\in\mathcal{R}(A), \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\in\mathcal{N}(A)$.
2. $\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix}\in\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}), \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\in\mathcal{N}(A)$.
3. $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 有解，且 A 的左零空间包含 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.
4. A 不是零矩阵，且 A 的每一行的转置垂直于 A 的每一列.
5. A 非零，且 $\mathcal{R}(A)=\mathcal{N}(A)$.
6. A 的所有列向量的和是零向量，且所有行向量的和是分量均为 1 的向量.
7. A, B 均为非零的正交投影矩阵，且 $A+B$ 仍是正交投影矩阵.
8. A, B 均为正交投影矩阵，但 $A+B$ 并不是正交投影矩阵.
9. A, B, C 均为非零的三阶正交投影矩阵，且 $A+B+C=I_3$.

练习 3.3.15 下列说法中，哪些正确？

1. A 的所有行的转置与 A^{-1} 的所有行的转置两两正交.
2. A 的所有行的转置与 A^{-1} 的所有列两两正交.
3. A 的所有列与 A^{-1} 的所有行的转置两两正交.
4. A 的所有列与 A^{-1} 的所有列两两正交.
5. 如果向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 正交，则 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 与 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 的解集互相正交.
6. 如果 A 是正交投影矩阵，则 A 的第 k 列的长度的平方等于 A 的第 k 个对角元素.
7. 如果 A,B 是正交投影矩阵，则 $AB=BA$ 当且仅当 AB 也是正交投影矩阵.
8. 如果 A,B 是正交投影矩阵，则 $A+B$ 是正交投影矩阵当且仅当 $\mathcal{R}(A),\mathcal{R}(B)$ 互相正交.

练习 3.3.16 如果矩阵 A 的列向量线性无关，那么向 $\mathcal{R}(A)$ 的正交投影矩阵为 $A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$. 试分析以下化简中可能出现的问题：$A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}=AA^{-1}(A^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}}=I_nI_n=I_n$.

1. 证明 $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}=A^{-1}(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ 并不一定总成立.
2. 当 A 满足什么条件时，上式一定成立？试分析此时正交投影矩阵等于 I_n 的原因.

练习 3.3.17 设 $A=\begin{bmatrix}3&6&6\\4&8&8\end{bmatrix}$.

1. 求向 A 的列空间的正交投影矩阵 P_1.
2. 求向 A 的行空间的正交投影矩阵 P_2.
3. 计算 P_1AP_2.

练习 3.3.18 给定 $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{bmatrix}$. 设 P_1 是关于 A 的第一列的正交投影矩阵，P_2 是关于 A 的正交投影矩阵，计算 P_2P_1.

练习 3.3.19 一个 n 阶方阵 P 是关于 A 的正交投影矩阵，当且仅当对任意向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，都有 $P\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}(A),\boldsymbol{x}-P\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$.

练习 3.3.20 当 A 分别为对称矩阵、反对称矩阵、正交矩阵或上三角矩阵时，判断 $\mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(A)$ 是否互为正交补. 证明或给出反例.

练习 3.3.21 给定 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$，$\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2$.

1. 是否一定存在矩阵 A，使得 $\mathcal{R}(A)=\mathcal{M}_1,\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})=\mathcal{M}_2,\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})=\mathcal{N}_1,\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}_2$？
2. ☕ 如果不一定存在，那么当四个子空间满足什么条件时，这样的矩阵才一定存在？

练习 3.3.22 给定向量 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$，不难确知其平均值 $\boldsymbol{x}_m=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\boldsymbol{b}_i$. 再给出向量 $\boldsymbol{b}_{m+1}$，这 $m+1$ 个向量的平均值就是 $\boldsymbol{x}_{m+1}=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}\boldsymbol{b}_i$. 则 $\boldsymbol{x}_{m+1}$ 可以用 $\boldsymbol{b}_{m+1},\boldsymbol{x}_m,m$ 来表示：$\boldsymbol{x}_{m+1}=\boldsymbol{x}_m+\frac{1}{m+1}(\boldsymbol{b}_{m+1}-\boldsymbol{x}_m)$.

若给出向量组成的矩阵 $B_n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_{m+1} & \cdots & \boldsymbol{b}_{m+n}\end{bmatrix}$，如何用 $B_n,\boldsymbol{x}_m,m,n$ 来表示 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{m+n}$ 这 $m+n$ 个向量的平均值 $\boldsymbol{x}_{m+n}$?

练习 3.3.23 一个方阵如果仅仅满足 $P^2=P$，则称之为**斜投影矩阵**，其对应的线性变换称为**斜投影**. 给定一个 n 阶斜投影矩阵 P.

1. 证明 I_n-P 也是 n 阶斜投影矩阵.
2. 证明 $\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(I_n-P),\mathcal{R}(I_n-P)=\mathcal{N}(P)$.
3. 对任意向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$，是否一定存在分解 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，满足 $\boldsymbol{v}_1\in\mathcal{R}(P),\boldsymbol{v}_2\in\mathcal{R}(I_n-P)$? 分解如果存在，是否唯一?
4. 构造一个二阶斜投影矩阵，但不是正交投影矩阵.

练习 3.3.24 设平面上的四个点 $\begin{bmatrix}x_i\\y_i\end{bmatrix}$ 分别是 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\20\end{bmatrix}$，利用最小二乘法求下列直线或曲线：

1. 求平行于 x 轴的直线 $y=b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^4|y_i-b|^2$ 最小.
2. 求经过原点的直线 $y=kx$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^4|y_i-kx|^2$ 最小.
3. 求直线 $y=kx+b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^4|y_i-(kx_i+b)|^2$ 最小.
4. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^4\left|y_i-(ax_i^2+bx_i+c)\right|^2$ 最小.

4.1 引子

4.2 行列式函数

练习 4.2.1 计算下列行列式.

1. $\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&2&-1\\0&0&0&3\end{vmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\0&1&4\end{vmatrix}$.
3. $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$.
4. $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.
5. $\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$.

练习 4.2.2 设 A 是三阶方阵，$\det(A)=5$，求下列矩阵 B 的行列式.

1. $B=2A,-A,A^2,A^{-1}$.
2. $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，其中 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$.

练习 4.2.3 设 $A_n=\begin{bmatrix}-1&1\\-6&4\end{bmatrix}+nI_2$.

1. 求 A_0,A_1,A_2,A_3 的行列式.
2. 求 $\begin{bmatrix}-1&1\\-6&4\end{bmatrix}+xI_2$ 的行列式，并将其写成 $(x+a)(x+b)$ 的形式.
3. 分别求 $A_0^2,A_0^2+I_2,A_0^2+3A_0+2I_2,A_0^3-2A_0^2+3A_0-4I_2$ 的行列式，并分析它们与 a,b 的关系.

练习 4.2.4 计算 $\det(A)$.

1. $A=\left[i+j\right]_{n\times n}$.
2. $A=\left[ij\right]_{n\times n}$.

练习 4.2.5 计算 $\begin{vmatrix}1&-1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&-1\\-1&&&1\end{vmatrix}$.

练习 4.2.6 计算 $\begin{vmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&\cdots&1+x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\cdots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\cdots&1+x_ny_n\end{vmatrix}$.

练习 4.2.7 计算 $\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&\iddots&\iddots&\vdots\\a_{n1}&0&\cdots&0\end{vmatrix}$.

练习 4.2.8

1. 令 A_n 是从右上到左下对角线上的元素全为 1，其余元素全为 0 的 n 阶方阵. 求 A_2,A_3,A_4,A_5 的行列式，分析其规律，推断出 A_n 的行列式.
2. 令 $A_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$，以此类推 A_n. 求 A_2,A_3,A_4 的行列式，分析其规律，推断出 A_n 的行列式.

   提示：利用 LU 分解.

3. 设 A 具有 QR 分解 $A = Q\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$，求 $\det(A)$ 的所有可能值.

4. 定义 **Hilbert 矩阵** $H_n = \left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{n\times n}$. 计算 $\det(H_2), \det(H_3)$.

   Hilbert 矩阵是一种常见的难于计算的矩阵，常用来测试算法.

练习 4.2.9 证明或举出反例.

1. $AB - BA$ 的行列式必然是零.
2. A 的行列式等于其行简化阶梯形的行列式.
3. A 为 n 阶反对称矩阵，当 n 为奇数时，$\det(A) = 0$.
4. A 为 n 阶反对称矩阵，当 n 为偶数时，$\det(A) = 0$.
5. 如果 $|\det(A)| > 1$，那么当 n 趋于无穷时，A^n 中必然有元素的绝对值趋于无穷.
6. 如果 $|\det(A)| < 1$，那么当 n 趋于无穷时，A^n 中的所有元素都趋于 0.

练习 4.2.10 以下均为某些学生出现过的错误. 请找到错误的原因.

1. 对二阶可逆矩阵 $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，计算其逆矩阵的行列式：

   $$\det(A^{-1}) = \det\left(\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\right) = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1.$$

   这个结论很奇怪. 请问错在哪里？

2. 对分块矩阵 $M = \begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$，计算其行列式：$\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix} = AD - BC$，得到的是矩阵，而不是数. 如果 A 可逆，正确的公式是什么？

3. 计算正交投影矩阵 P 的行列式 $\det(P) = \det(A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}) = \frac{\det(A)\det(A^{\mathrm{T}})}{\det(A^{\mathrm{T}}A)} = 1$，然而正交投影矩阵常常不可逆. 错在哪里？

4. 如果 $AB = -BA$，那么 $\det(A)\det(B) = -\det(B)\det(A)$，由此得到 $2\det(A)\det(B) = 0$，所以 A, B 必有一个矩阵不可逆. 这是否正确？如果不是，请指出错误并举出反例.

5. 对矩阵 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，同时做两个行变换得到 $\begin{bmatrix}a+sc & b+sd\\ c+ta & d+tb\end{bmatrix}$，行列式是否一定保持不变？$s, t$ 满足什么条件时，行列式一定保持不变？

   注意：这不是初等行变换.

练习 4.2.11 设 n 阶方阵 A 的对角元素全为 0，其他元素全为 1，令 $A = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$.

1. 求向量 $\boldsymbol{u}$，使得 $\boldsymbol{a}_i$ 可以写成 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的线性组合.

2. ☕ 利用列多线性性质，求 $\det(A)$.

练习 4.2.12 证明命题 4.2.5 .

练习 4.2.13 证明命题 4.2.11 .

练习 4.2.14 用行列式证明奇数阶反对称矩阵不可逆.

练习 4.2.15 ☕ 证明任意可逆矩阵 A 都可以只用倍加变换化为 $\mathrm{diag}(1,1,\cdots,\det(A))$.

练习 4.2.16 给定 $A=\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}_{n\times n}$，而 $B=\begin{bmatrix}a_{ij}c^{i-j}\end{bmatrix}_{n\times n}$，其中 $c\neq 0$，证明，$\det(A)=\det(B)$.

练习 4.2.17 给定 $n-1$ 个互不相同的数 $a_1,\cdots,a_{n-1}$，令

$$P(x)=\begin{vmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-1}\\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}.$$

证明 $P(x)$ 是一个关于 x 的 $n-1$ 次多项式，并求 $P(x)$ 的 $n-1$ 个根.

练习 4.2.18 ☕ 设 $f_i(x)$ 是 i 次多项式，$0\leqslant i\leqslant n-1$，其首项系数是 a_i. 又设 $b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}$ 是 n 个数，计算下列 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix}f_0(b_0) & f_0(b_1) & \cdots & f_0(b_{n-1})\\ f_1(b_0) & f_1(b_1) & \cdots & f_1(b_{n-1})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n-1}(b_0) & f_{n-1}(b_1) & \cdots & f_{n-1}(b_{n-1})\end{vmatrix}.$$

练习 4.2.19 1. 对分块对角矩阵 $X=\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}$,其中 A,B 是方阵,证明,$\det(X)=\det(A)\det(B)$.

2. 对分块上三角矩阵 $X=\begin{bmatrix}A & C\\ O & B\end{bmatrix}$，其中 A,B 是方阵，证明，$\det(X)=\det(A)\det(B)$.

练习 4.2.20 设 A 可逆，D 是方阵，证明，$\det\left(\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right)=\det(A)\det(D-CA^{-1}B)$.

练习 4.2.21 设 A,B 是 n 阶方阵，证明，$\det\left(\begin{bmatrix}A & B\\ B & A\end{bmatrix}\right)=\det(A+B)\det(A-B)$.

练习 4.2.22 设 A,B 分别是 $m\times n,n\times m$ 矩阵，证明，$\det(I_m+AB)=\det(I_n+BA)$. 由此推出，$I_m+AB$ 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆.

提示：构造分块矩阵.

练习 4.2.23 计算 $\begin{vmatrix}1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2\end{vmatrix}$.

练习 4.2.24 设 A 是三阶矩阵，已知 $\det(A-I_3)=\det(A-2I_3)=\det(A-3I_3)=0$.

1. 证明存在非零向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$，满足 $A\boldsymbol{v}_i=i\boldsymbol{v}_i$.
2. 设 $k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+k_3\boldsymbol{v}_3=\mathbf{0}$，证明 $k_1\boldsymbol{v}_1+2k_2\boldsymbol{v}_2+3k_3\boldsymbol{v}_3=\mathbf{0}, k_1\boldsymbol{v}_1+4k_2\boldsymbol{v}_2+9k_3\boldsymbol{v}_3=\mathbf{0}$.
3. 证明存在可逆 Vandermonde 矩阵 V，使得
$$\begin{bmatrix}k_1\boldsymbol{v}_1 & k_2\boldsymbol{v}_2 & k_3\boldsymbol{v}_3\end{bmatrix}V=O.$$
4. 证明 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，因此矩阵 $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{bmatrix}$ 可逆.
5. 证明存在对角矩阵 D，使得 $AB=BD$，并计算 $\det(A)$.

练习 4.2.25 对函数 $f(t)=\det(I_n+tA)$ 在 $t=0$ 处求导. 设 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$，则 I_n+tA 的第 i 列是 $\boldsymbol{e}_i+t\boldsymbol{a}_i$.

1. 当 $n=1,2,3$ 时，用 A 的元素表示 $f'(0)$；分析其规律，求 $f'(0)$ 的一般表达式.
2. 利用 $\det(I_n+AB)=\det(I_m+BA)$，证明 $\operatorname{trace}(AB)=\operatorname{trace}(BA)$（trace 的定义见练习 1.4.22 ）.

练习 4.2.26 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，任取其中的 k 行和 k 列构成 k 阶方阵，它的行列式称为 A 的一个 k 阶子式. 定义 $\operatorname{rank}_{\det}(A)=\max\{k\mid A \text{ 有非零的 } k \text{ 阶子式}\}$. 证明，$\operatorname{rank}_{\det}(A)=\operatorname{rank}(A)$.

练习 4.2.27 (Hadamard 不等式)

1. 利用 QR 分解证明，对任意 n 阶矩阵 $T=\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_n\end{bmatrix}$，$|\det(T)|\leqslant\|\boldsymbol{t}_1\|\|\boldsymbol{t}_2\|\cdots\|\boldsymbol{t}_n\|$.
2. 说明阅读 3.2.3 中的 Hadamard 矩阵使得等号成立.

练习 4.2.28 ☕ 设 n 阶对称矩阵 A 有 $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解 $A=LDL^{\mathrm{T}}$，其中 $D=\operatorname{diag}(d_i)$，并记 A 的第 i 个顺序主子阵为 A_i. 证明 $d_i=\frac{\det(A_i)}{\det(A_{i-1})}$.

矩阵 A 的第 i 个顺序主子阵的行列式称为其第 i 个**顺序主子式**.

练习 4.2.29 (行列式在多元微积分中的应用) 一个多元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，把 x_i 之外的变量都看做常数，对 x_i 的导数称为 f 对 x_i 的**偏导数**，记作 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. 例如，$f(x,y)=x^2y$，则 $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy, \frac{\partial f}{\partial y}=x^2$.

平面 $\mathbb{R}^2$ 有直角坐标系 (x,y)，和极坐标系 (r,θ)，其中 $r\geqslant 0$ 是该点到原点的距离，$\theta\in[0,2\pi)$ 是从 x 轴正方向开始，逆时针旋转，到达该点和原点连线所需要的的角度. 两种坐标之间的关系是 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$.

分别计算 $J_1=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{bmatrix}$ 和 $J_2=\begin{bmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y}\end{bmatrix}$ 的行列式，将结果都写成 r,θ 的函数. 这两个矩阵 J_1,J_2 有什么关系？

练习 4.2.30 设 $f(a,b,c,d)=\ln(ad-bc)$.

1. 接上题，求偏导数 $\frac{\partial f}{\partial a},\frac{\partial f}{\partial b},\frac{\partial f}{\partial c},\frac{\partial f}{\partial d}$.
2. 证明 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b}\\ \frac{\partial f}{\partial c} & \frac{\partial f}{\partial d}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.
3. 三阶时是否有类似的结论？

阅读 4.2.31 在 Vandermonde 矩阵中，

4.3 行列式的展开式

练习 4.3.1 计算.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

练习 4.3.2 利用按行（列）展开求下列行列式；按哪一行（列）展开，使得计算最简单?

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

练习 4.3.3 计算 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

练习 4.3.4 求 $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4, x^3 的系数.

练习 4.3.5 计算 $\begin{vmatrix} \lambda & & & & a_n \\ -1 & \lambda & & & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & \lambda & a_2 \\ & & & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$.

练习 4.3.6 计算 $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ n & \lambda & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & \lambda & n \\ & & & & 1 & \lambda \end{vmatrix}$.

练习 4.3.7 回顾例 1.7.4 中的对称、上三角和下三角 Pascal 矩阵. 在四阶的情形，这三种矩阵分别为 $S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}, U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. 另外，存在 LU 分解 $S_n = L_n U_n$.

1. 求 $\det(L_n), \det(U_n), \det(S_n)$.

2. 求 S_n 右下角元素的代数余子式.

3. 将 S_n 右下角的元素减 1 得到矩阵 A_n，求 $\det(A_n)$.

练习 4.3.8 给定 $A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. 利用展开式得到 $\det(B_n)$ 关于 n 的递推关系，并计算 $\det(B_n)$.

2. 利用 $\det(A_n)$ 与 $\det(B_n)$ 的关系计算 $\det(A_n)$.

练习 4.3.9 (行列式中的 Fibonacci 数列) 如果一个矩阵比上（下）三角矩阵仅仅多一排非零对角元，则称之为上（下）Hessenberg 矩阵．例如，$H_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 就是上 Hessenberg 矩阵．上 Hessenberg 矩阵在数值代数中很有用.

1. 令 H_n 为 n 阶上 Hessenberg 矩阵，其对角元素都是 2，其他非零元素都是 1．证明 $\det(H_{n+2}) = \det(H_{n+1}) + \det(H_n)$，即这些行列式组成了 Fibonacci 数列.

2. 令 S_n 是对角元素为 3，与对角元相邻的元素为 1 的 n 阶三对角矩阵（见练习 1.3.12 ），例如，$S_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$．它既是上 Hessenberg 矩阵，也是下 Hessenberg 矩阵．求 S_n 的递归公式，并分析与 Fibonacci 数列的关系.

3. 设 n 阶三对角矩阵的行列式的完全展开式中，最多有 t_n 项非零，求 t_n 的递归公式.

练习 4.3.10 求下列推广的 Vandermonde 行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

练习 4.3.11 对 n 阶方阵 A，证明，$\det(\lambda I_n - A)$ 是 λ 的首项系数为 1 的 n 次多项式.

练习 4.3.12 1. 设 A 是正交矩阵，且 $\det(A) < 0$，证明 $I_n + A$ 不可逆．由此可得，存在非零向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $A\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

提示：考虑 $A^{\mathrm{T}}(A+I)$ 与 $A+I$ 的行列式之间的关系.

2. ☕ 设 A 是奇数阶正交矩阵，且 $\det(A)>0$，证明 I_n-A 不可逆. 由此可得，存在非零向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$. 偶数阶的情形，结论是否成立？

练习 4.3.13 ☕ 设 n 阶方阵 $A=[a_{ij}]$ 对角占优（见定义 1.5.13 ），且对角元素全是正数，证明 $\det(A)>0$.

提示：数学归纳法.

练习 4.3.14 证明若 A 不可逆，则其伴随矩阵的秩是 0 或 1.

练习 4.3.15 给定所有元素全为整数的可逆矩阵 A，证明，A^{-1} 的所有元素全为整数，当且仅当 $|\det(A)|=1$.

练习 4.3.16 利用 Cramer 法则把未知数 x_1,x_2 表示成 t 的函数：

$$\begin{cases} \mathrm{e}^t x_1+\ \ \mathrm{e}^{-2t}x_2=3\sin t, \\ \mathrm{e}^t x_1-2\mathrm{e}^{-2t}x_2=t\cos t. \end{cases}$$

阅读 4.3.17 (Cramer 法则的另一证明)

练习 4.3.18 设 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=BA$，证明，

1. $\left|\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}\right)\right|=\left|\det(A^2+B^2)\right|$.

   提示：将 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$ 推广到分块矩阵.

2. ☕ $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}\right)=\det(A^2+B^2)$.

   提示：利用完全展开式比较特定项如 $(a_{11}\cdots a_{nn})^2$ 的系数.

注意：此题也有一些不利用完全展开的方法，读者可以自行思考.
法一：先考虑 A 可逆的情形，再对不可逆的 A 构造可逆序列 $A_k\to A$.
法二：利用复数.

练习 4.3.19 利用完全展开式求行列式.

1. 设 A 为 4 阶矩阵，所有元素均为 1，在其行列式的完全展开式中，多少项为 1？多少项为 -1？由此计算 A 的行列式.

2. 把 A 的 (i,j) 元乘以 $\frac{i}{j}$ 得到 B，在 A 和 B 行列式的完全展开式中，每一项如何变化？行列式如何变化？

3. 设 $A=\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ e & 0 & f & 0 \\ 0 & g & 0 & h \end{bmatrix}$，在行列式的完全展开式中，有多少项非零？这个完全展开式是否有因式分解？（跟分块对角矩阵的情形进行类比）

练习 4.3.20 由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$，证明，$1,\cdots,n$ 的所有排列中，奇、偶排列各占一半.

练习 4.3.21 在空间 $\mathbb{R}^3$ 中，证明由向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 围成的平行四边形面积是 $\sqrt{\det(A^{\mathrm{T}}A)}$，其中 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}$.

提示：进行 QR 分解 $A=QR$，那么 A 和 R 对应的平行四边形有何关系？$\sqrt{\det(A^{\mathrm{T}}A)}$ 和 $\sqrt{\det(R^{\mathrm{T}}R)}$ 有何关系？

练习 4.3.22 (行列式游戏) 甲和乙两个人构造一个 n 阶方阵，轮流填写矩阵中的元素，直到填满为止. 如果矩阵的行列式非零，则甲胜；否则，乙胜.

1. 如果乙先开始，且 $n=2$，谁有必胜策略?
2. 如果乙先开始，且 $n=3$，谁有必胜策略?
3. 如果甲先开始，且 $n=3$，谁有必胜策略?
4. 如果甲先开始，且 n 为偶数，则谁有必胜策略?

5.1 引子

练习 5.1.1 证明定理 5.1.5 .

5.2 基本概念

练习 5.2.1 求下列复矩阵的全部特征值和特征向量.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
4. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.
5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

练习 5.2.2 构造符合要求的矩阵 A.

1. A 的特征多项式为 $\lambda^2-9\lambda+20$，构造三个不同的 A.
2. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}$，且 A 的特征值为 $4,7$.

3. $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\*&*&*\end{bmatrix}$，且 A 的特征值为 $1,2,3$.

练习 5.2.3 设 $A=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&x&-2\\-2&-2&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&y\end{bmatrix}$，已知 A,B 特征多项式相同，求 x,y.

练习 5.2.4 设 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$ 可逆，且 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}$ 是 A 的特征向量，求 a,b 的值.

练习 5.2.5 设 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$.

1. 利用一元二次方程求根公式，写出 A 的两个特征值 λ_1,λ_2 的表达式.
2. 构造一个非对角的 A，满足 $\lambda_1=\lambda_2$.
3. 设 λ 为 A 的特征值，证明 $A\begin{bmatrix}b\\\lambda-a\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}b\\\lambda-a\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}\lambda-d\\c\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\lambda-d\\c\end{bmatrix}$.

   注意：如果这两个向量不是零向量，那么它们就是特征向量.
4. 若上述两个向量中有且仅有一个是零向量，求 A 的特征值和特征向量.
5. 若上述两个向量都是零向量，求 A 的特征值和特征向量.

练习 5.2.6 给定向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$，计算 $A=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 的所有特征对.

练习 5.2.7 已知 A 的特征值为 $1,2,3$，求下列矩阵的特征值.

1. $2A, A+I_3, A^2, \overline{A}, A^{\mathrm{T}}, A^{-1}$（$A$ 为何可逆?）. 2. $\begin{bmatrix}A&0\\0&A\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}A&A\\0&A\end{bmatrix}$.

练习 5.2.8 证明，如果 $(\lambda,\boldsymbol{x})$ 是 A 的特征对，则 $(f(\lambda),\boldsymbol{x})$ 是 $f(A)$ 的特征对，其中 $f(x)$ 是任意多项式.

练习 5.2.9 设 A 是可逆矩阵，证明，A 的特征值都不为 0；若 λ_0 是 A 的一个特征值，则 $\frac{1}{\lambda_0}$ 是 A^{-1} 的一个特征值.

练习 5.2.10 设 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3\in\mathbb{R}^3$ 为一组标准正交基，分别求 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{q}_3\boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}}$ 所有特征值和特征向量.

练习 5.2.11 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$.

1. 设 $A\boldsymbol{w}=\mu\boldsymbol{w}$，且 $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n,\lambda\neq\mu$，证明 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 正交.
2. 证明，实对称矩阵的属于不同特征值的实特征向量正交.

练习 5.2.12 证明:

1. 若存在正整数 k，使得 $A^k = O$，则 A 的特征值只能是 0.
2. 若 $A^2 = I_n$，则 A 的特征值只能是 1 或 -1.
3. 若 $A^2 = A$，则 A 的特征值只能是 1 或 0.

练习 5.2.13 对方阵 A，若多项式 $f(x)$ 满足 $f(A) = O$，则称 $f(x)$ 是 A 的**化零多项式**.
给定 A 的特征值 λ，证明，若 $f(x)$ 是 A 的化零多项式，则 $f(\lambda) = 0$.

练习 5.2.14 设方阵 A, B 可交换，λ_0 是 A 的一个特征值，V_{λ_0} 是 A 的特征值为 λ_0 的特征子空间. 证明，对任意 $\boldsymbol{x} \in V_{\lambda_0}$，都有 $B\boldsymbol{x} \in V_{\lambda_0}$. 当 A, B 不可交换时，结论是否成立?

练习 5.2.15 证明，A 和 $T^{-1}AT$ 具有相同的特征多项式.

练习 5.2.16 设 λ_1, λ_2 是 A 的两个不同特征值，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 不是 A 的特征向量.

练习 5.2.17 证明或举出反例.

1. 如果 A, B 具有相同的特征值、代数重数和特征向量，则 $A = B$.
2. 如果 A, B 有相同的特征值和代数重数，则 $A - B$ 所有特征值之和为零.
3. $A + B$ 的特征值之和等于 A 的特征值之和与 B 的特征值之和的和.
4. $A + B$ 的特征值之积等于 A 的特征值之积与 B 的特征值之积的积.
5. AB 的特征值之积等于 A 的特征值之积与 B 的特征值之积的积.
6. AB 和 BA 具有相同的特征值和代数重数.
7. 如果 A 的特征值全为零，则 A 是零矩阵.
8. 将 A 的第 i 行加到第 j 行上，再将第 i 列从第 j 列中减去，得到的矩阵 B 和 A 有相同的特征值. 若正确，则对应的特征向量有何联系?
9. 将 A 的第 i 行加到第 j 行上，再将第 j 列从第 i 列中减去，得到的矩阵 B 和 A 有相同的特征值. 若正确，则对应的特征向量有何联系?
10. 将 A 的第 i, j 行交换，再将第 i, j 列交换，得到的矩阵 B 和 A 有相同的特征值. 若正确，则对应的特征向量有何联系?
11. 对角阵的特征向量一定是标准坐标向量.
12. 正交矩阵的特征值都是绝对值等于 1 的复数.
13. 所有 n 阶置换矩阵都有一个共同的特征向量.

练习 5.2.18 设 A,B 分别是 $m\times n, n\times m$ 矩阵，证明，

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA).$$

特别地，当 $m=n$ 时，$\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$.

练习 5.2.19 如果复矩阵 A,B 可交换，证明 A,B 至少有一个公共的特征向量.

提示：法一：任取 A 的特征向量 x，随 k 增加逐个考察子空间 $\operatorname{span}(x, Bx, \cdots, B^k x)$，当添加新的向量后维数不增加时，子空间中必含有 B 的特征向量.

法二：利用定理 *5.4.7* .

练习 5.2.20 设 A 是四阶数独矩阵（见练习 2.4.10 ），证明其绝对值最大的特征值为 10，且属于该特征值的特征向量的所有分量都相等.

练习 5.2.21 设方阵 A 的每个元素都是整数，证明 $\frac{1}{2}$ 一定不是 A 的特征值.

提示：法一：利用特征多项式.

法二：考察特征向量元素的奇偶性.

练习 5.2.22 回顾例 5.1.1 中的矩阵 $A=\begin{bmatrix}0.6 & 0.1\\ 0.4 & 0.9\end{bmatrix}$，以及稳定状态对应的矩阵 $A^\infty=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.8 & 0.8\end{bmatrix}$.

1. 如果 A^n 和 A^∞ 中对应的元素相差不超过 0.01，那么 n 至少是多少?

2. 交换 A 的两行，特征值是否不变?

练习 5.2.23 给定 m 阶方阵 A_1，n 阶上三角矩阵 A_2 和 $m\times n$ 矩阵 B. 证明如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值，关于 $m\times n$ 矩阵 X 的矩阵方程 $A_1X - XA_2 = B$ 有唯一解.

矩阵方程 $A_1X - XA_2 = B$ 称为 **Sylvester 方程**，在控制论中有不少应用.

提示：逐列计算 X.

5.3 对角化和谱分解

练习 5.3.1 设三阶方阵 A 的特征值及对应特征向量是 $1,1,3$ 和 $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，求 A.

练习 5.3.2 判断下列方阵是否可对角化.

1. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

练习 5.3.3 计算 A^n.

1. $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

2. $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$.

练习 5.3.4 设 $A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{bmatrix}$. 当 k 取何值时，A 可对角化？当 A 可对角化时，写出其谱分解.

练习 5.3.5 设 A 是 4 阶方阵，其对角元都是 4，非对角元都是 -1. 令 H 为 4 阶 Hadamard 矩阵，即 $H=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$（见阅读 3.2.3 ）. 计算 AH，由此得出 A 的谱分解，并求 $\det(A), A^{-1}$.

练习 5.3.6 利用矩阵，求下列数列的通项公式和极限.

1. （Lucas 数） $L_1=1, L_2=3, L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$.
2. $a_0=0, a_1=1, a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n$.
3. $a_0=a_1=0, a_2=1, a_{n+3}=\frac{1}{2}a_{n+2}+\frac{1}{4}a_{n+1}+\frac{1}{4}a_n$.
4. ☕ $a_0=1, a_{n+1}=a_n+2\times 3^n$.

   提示：考虑向量 $\begin{bmatrix}a_n\\3^n\end{bmatrix}$.
5. ☕ $a_0=0, b_0=1, a_{n+1}=a_n+b_n, b_{n+1}=3a_n+3b_n$.

   提示：考虑向量 $\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$.

练习 5.3.7 利用谱分解说明如下事实.

1. $\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix}^{1024}$ 的每个元素都大于 10^{700}.
2. $\begin{bmatrix}3&2\\-5&-3\end{bmatrix}^{1024}=I_2$.
3. $\begin{bmatrix}5&7\\-3&-4\end{bmatrix}^{1024}=-\begin{bmatrix}5&7\\-3&-4\end{bmatrix}$.
4. $\begin{bmatrix}5&6.9\\-3&-4\end{bmatrix}^{1024}$ 的每个元素都小于 10^{-70}.

练习 5.3.8 设有谱分解 $A=X\Lambda X^{-1}$，求下列矩阵的谱分解.

1. A^{-1}.
2. A^{T}.
3. $\begin{bmatrix}A&O\\O&2A\end{bmatrix}$.
4. $\begin{bmatrix}O&A\\A&O\end{bmatrix}$.

练习 5.3.9 利用特征值计算下列 n 阶矩阵的行列式.

1. $\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&b\\b&\cdots&b&a\end{vmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix}1+a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&1+a_2b_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a_{n-1}b_n\\a_nb_1&\cdots&a_nb_{n-1}&1+a_nb_n\end{vmatrix}$.

练习 5.3.10 证明：

1. n 阶方阵 $J_n(\lambda_0)=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{bmatrix}$ 只有一个特征值 λ_0，其代数重数是 n，几何重数是 1.

2. 分块对角矩阵 $A=\begin{bmatrix}J_{n_1}(\lambda_0) & O \\ O & J_{n_2}(\lambda_0)\end{bmatrix}$ 只有一个特征值 λ_0，其代数重数是 n_1+n_2，几何重数是 2.

练习 5.3.11 试分析秩为 1 的方阵何时可对角化.

练习 5.3.12 设 A 是实二阶方阵，且 $\det(A)<0$，证明 A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化.

练习 5.3.13 证明 $A=\begin{bmatrix}I_r & O \\ B & -I_{n-r}\end{bmatrix}$ 可对角化.

练习 5.3.14 ☕ 证明，

1. 若 $A^2=A$，则 A 可对角化.
2. 若 $A^2=O$，且 $A\neq O$，则 A 不可对角化.
3. 若 $A^2+A+I_n=O$，则 A 在 $\mathbb{R}$ 上不可对角化.

练习 5.3.15 证明或举出反例.

1. 如果 A 所有的特征向量是 $k\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix},k\neq 0$，则 A 一定有不单的特征值.
2. 如果 A 所有的特征向量是 $k\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix},k\neq 0$，则 A 一定不可对角化.
3. 如果 A 是上三角矩阵但不是对角矩阵，则 A 不可对角化.
4. 如果 A 是上三角矩阵但不是对角矩阵，则存在对角矩阵 D，使得 $A-D$ 不可对角化.
5. 如果 A 可以被对角矩阵对角化，则 A 也是对角矩阵.

练习 5.3.16 证明定理 5.3.9 第 2 条.

练习 5.3.17 证明, 对反射矩阵 $H_{\boldsymbol{v}}=I_n-2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\|\boldsymbol{v}\|=1$, 存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}H_{\boldsymbol{v}}Q=\operatorname{diag}(-1,1,\cdots,1)$.

练习 5.3.18 (Householder 矩阵的推广) 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，对任意 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$，存在唯一的分解 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，其中 $\boldsymbol{v}_1\in\mathcal{M},\boldsymbol{v}_2\in\mathcal{M}^{\perp}$. 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的变换 $\boldsymbol{H}$，使得 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$.

1. 证明 $\boldsymbol{H}$ 是线性变换.
2. 设 H 为该线性变换的表示矩阵，证明 $H^2=I_n$.

3. 求 H 的特征值、代数重数及特征子空间. H 能否被对角化?

4. ☕ 证明, 存在矩阵 A, 使得 $H = I_n - 2AA^{\mathrm{T}}$.

线性变换 $\boldsymbol{H}$ 保持 $\mathcal{M}$ 不变, 把 $\mathcal{M}^{\perp}$ 中的向量映射到其负向量, 因此是关于子空间 $\mathcal{M}$ 的反射变换.

练习 5.3.19 ☕ 设 A 是 n 阶实方阵, 满足 $A^2 = I_n$, 证明 A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化, 并判断 A 是否是关于某个子空间的反射变换.

练习 5.3.20 设矩阵 A 的特征多项式是 $p_A(x)$.

1. 设 A 为对角矩阵, 证明 $p_A(A) = O$.

2. 设 A 为可对角化的矩阵, 证明 $p_A(A) = O$.

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, 它是否可对角化? 是否满足 $p_A(A) = O$?

练习 5.3.21 求下列矩阵的特征值, 并判断是否可以对角化.

1. $\begin{bmatrix} 10 & 1 & \\ & 10 & 1 \\ & & 10 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 & 1 & \\ & 10.001 & 1 \\ & & 10.002 \end{bmatrix}$.   2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ 0.001 & & & 0 \end{bmatrix}$.

注意: 由此可见, 矩阵变化不大时, 特征值和可对角化性质可能变换很大.

5.4 相似

练习 5.4.1 设 A, B 是 n 阶方阵, 且满足 $AB = BA$.

1. 证明, 若 A 有 n 个不同的特征值, 则 B 可对角化.

2. 若 A 有代数重数大于 1 的特征值, B 是否一定可对角化?

练习 5.4.2 对下列矩阵 A, B, 求 X 使得 $A = XBX^{-1}$.

1. $A = MN, B = NM$, 其中 M, N 是方阵, 且 M 可逆.

2. $A = \begin{bmatrix} MN & O \\ N & O \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} O & O \\ N & NM \end{bmatrix}$, 其中 M, N 不必是方阵.

3. $A = \begin{bmatrix} M & -N \\ N & M \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} M + \mathrm{i}N & O \\ O & M - \mathrm{i}N \end{bmatrix}$, 其中 M, N 是方阵.

练习 5.4.3 ☕ 给定 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$.

1. 证明, 若 A 有 n 个不同的特征值, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

2. 证明, 若 $A = J_n(\lambda)$, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

3. 举例说明，存在 A, B 满足 $AB = BA$，但不存在多项式 $f(x)$，使得 $B = f(A)$.

练习 5.4.4 ☕☕ 证明，任意迹为 0 的方阵相似于一个对角元素全为 0 的方阵.

提示：利用数学归纳法．先取不是 A 的特征向量 $\boldsymbol{q}$，并把 $\boldsymbol{q}, A\boldsymbol{q}$ 扩充成一组基做相似变换.

练习 5.4.5 (Jordan 链) 对任意 n 阶方阵 A，一组向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_s$，如果存在 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}, \quad (A - \lambda I)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1, \quad \cdots, \quad (A - \lambda I)\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{x}_{s-1}, \quad \text{而 } (A - \lambda I)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_s \text{ 无解},$$

就称其为 A 的一个关于 λ 长度为 s 的 **Jordan 链**.

显然，$\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{N}(A - \lambda I)$ 是特征向量，$\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{N}\left((A - \lambda I)^2\right), \cdots, \boldsymbol{x}_s \in \mathcal{N}\left((A - \lambda I)^s\right)$，但 $\boldsymbol{x}_s \notin \mathcal{R}(A - \lambda I)$.

求证：

1. $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_s$ 线性无关.
2. 令 $X_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix}$，则 $AX_1 = X_1 J_s(\lambda)$.
3. 若 A 只有一个特征值 λ，且其几何重数为 1，则 A 有一个关于 λ 的长度为 n 的 Jordan 链 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，且 A 相似于 $J_n(\lambda)$.

练习 5.4.6 给定 m 阶方阵 A_1，n 阶方阵 A_2 和 $m \times n$ 矩阵 B．证明：

1. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值，关于 $m \times n$ 矩阵 X 的 Sylvester 方程 $A_1 X - X A_2 = B$ 有唯一解.
2. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值，则存在唯一的矩阵 X 满足

$$\begin{bmatrix} I_r & X \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & X \\ 0 & I_t \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

3. 对 n 阶方阵 A，存在可逆矩阵 X，使得

$$X^{-1} A X = \begin{bmatrix} \lambda_1 I + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I + N_s \end{bmatrix},$$

其中 $N_1, \cdots, N_s$ 是严格上三角矩阵.

阅读 5.4.7 (Jordan 分解的证明)

6.1 实对称矩阵的谱分解

练习 6.1.1 求下列实对称矩阵的谱分解.

1. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$；　2. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$；　3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；　4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

练习 6.1.2　设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 $0,3,3$，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(A)$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(3I-A)$，求 A.

练习 6.1.3　设实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$，有一个单特征值 -3，求 a 的值和 A 的谱分解.

练习 6.1.4　设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(A)$，求 A 及其谱分解.

练习 6.1.5　求下列实对称矩阵 A 的谱分解.

1. A 满足 $A^3 = O$.
2. $A = a_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} + a_2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组标准正交基，a_1, a_2 为实数.
3. $A = \begin{bmatrix} O & M \\ M & O \end{bmatrix}$，其中 M 是 n 阶对称矩阵，有谱分解 $M = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$.

练习 6.1.6　设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 计算满足下列条件的 b 的取值范围.

1. A 不可逆.　2. A 可以正交对角化.　3. A 不可对角化.

练习 6.1.7　计算下列矩阵及其特征值. 哪些是对称矩阵？哪些矩阵的特征值是 ± 1？由此看出正交相似的特殊性.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.　2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

练习 6.1.8　证明命题 6.1.6 .

练习 6.1.9　证明，两个实对称矩阵正交相似，当且仅当它们具有相同的特征多项式.

练习 6.1.10　设实对称矩阵 A 满足 $A^5 = I_n$，证明 $A = I_n$.

练习 6.1.11 设 $A_1, \cdots, A_m$ 是 m 个两两可交换的实对称矩阵，证明它们可以同时正交对角化.

练习 6.1.12 当 n 充分大时，矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-n} \\ 0 & 1+10^{-n} \end{bmatrix}$ 非常接近对称矩阵. 计算其谱分解，并求两个线性无关的特征向量的夹角.

练习 6.1.13 设 λ_1 是实对称矩阵 A 的最大的特征值. 证明 A 的左上角元素 $a_{11} \leqslant \lambda_1$.

练习 6.1.14 将如下函数表示成对称矩阵的 Rayleigh 商，并通过 Rayleigh 商求表达式的最大值和最小值.

1. $\frac{3x^2+2xy+3y^2}{x^2+y^2}$.
2. $\frac{(x+4y)^2}{x^2+y^2}$.

练习 6.1.15 (非对称矩阵的 Rayleigh 商)

1. 如下对实矩阵的特征值都是实数的证明，哪里有问题？

   设 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，于是 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \lambda = \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$. 由于分子、分母都是实数，特征值 λ 也是实数.

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，计算 $\max\limits_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$.

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$，计算 $\max\limits_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$.

4. 对任意实矩阵 A 与非零实向量 $\boldsymbol{x}$，证明 $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$，其中 $B = \frac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}$ 是对称矩阵.

练习 6.1.16 设实对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} O & A \\ A^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix}$.

1. 证明，$S\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，当且仅当 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$，满足 $A\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{y}, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{z}$.
2. 证明，如果 λ 是 S 的特征值，则 $-\lambda$ 也是 S 的特征值.
3. 证明，如果 $\lambda \neq 0$ 是 S 的特征值，则 λ^2 是 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值，也是 AA^{T} 的特征值.
4. 证明，AA^{T} 和 $A^{\mathrm{T}}A$ 的非零特征值相同，且有相同的重数.
5. 分别取 $A = I_2$ 或 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，求对应 S 的谱分解.

练习 6.1.17 构造一个实方阵 A，满足 $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$ 但 $A \neq A^{\mathrm{T}}$，并验证 A 和 A^{T} 具有相同的特征值和特征向量. 注意，这里相同的特征向量不意味着对应的特征值相同.

注意：事实上，对实方阵 A，如果 $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$，则 A 和 A^{T} 具有相同的特征值和特征向量.

练习 6.1.18 考虑下列复对称矩阵.

1. 设复对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$，计算 A^2，并判断 A 是否可对角化.

2. 设复对称矩阵 $F_4=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$，计算 F_4^2 和 $F_4\overline{F_4}^{\mathrm{T}}$；根据 F_4^2 的特征值、F_4 的迹和行列式，求 F_4 的所有特征值. 是否存在实正交矩阵 Q，使得 $Q^{\mathrm{T}}F_4Q$ 是对角阵?

   这里 F 是一个四阶**离散 Fourier 变换**的表示矩阵，这类矩阵在信号处理和数值积分中有重要应用.

练习 6.1.19 (二阶差分矩阵与二阶导数) 在微积分中，$f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)\approx\frac{f(x+\delta)+f(x-\delta)-2f(x)}{2\delta^2}$. 如果将一个区间等分，将函数 $f(x)$ 在等分点处的取值列成一个向量 $\boldsymbol{f}$，则 $\boldsymbol{f}$ 就是离散化的函数，计算中可以代替 $f(x)$. 而 $f(x)$ 的二阶导数就可以用 $\frac{1}{2h^2}D\boldsymbol{f}$ 来表示，其中 h 是每个分出的小区间的长度，而 $D=\begin{bmatrix} * & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & * \end{bmatrix}$，其中 “$*$” 处元素与函数在区间端点处满足的条件有关.

1. 求 $A_3=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 的谱分解，并将特征向量写成 $\begin{bmatrix} \sin d \\ \sin 2d \\ \sin 3d \end{bmatrix}$ 的形式.

   注意：这是离散化的正弦函数.

2. 求 $B_4=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 的谱分解，并将特征向量写成 $\begin{bmatrix} \cos d \\ \cos 3d \\ \cos 5d \\ \cos 7d \end{bmatrix}$ 的形式.

   注意：这是离散化的余弦函数.

注意，$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin kx=-k^2\sin kx$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\cos kx=-k^2\cos kx$. 对离散化的情形，也有类似结论. 这一点将在第 7 章中得到更多讨论. 在 Fourier 分析中，将函数写成正弦函数和余弦函数的和有极大的好处；而在计算上，将向量写成离散正弦或离散余弦的线性组合，也有类似的好处. 例如，图片的 JPEG 压缩就常用 B_8 谱分解产生的正交基来进行处理.

练习 6.1.20 考虑正方形铁丝上的热扩散问题，设四个顶点的温度组成向量 $\boldsymbol{t}$. 在热量扩散时，如果一个点的温度低于周围点温度的平均值，则该点温度升高；反之则该点温度降低. 假设每经过一个时间单位，一个点的温度变化与周围点平均温度和该点温度之差成正比，比例系数为 k.

1. 写出矩阵 A，使得 $A\boldsymbol{t}$ 表示经过一个单位时间之后四个点的温度.

2. 令 H 为 4 阶 Hadamard 矩阵（见练习 5.3.5 ），计算 AH.

3. 求 A 的谱分解.

4. 求 $\lim\limits_{t\to\infty} A^t$，它是否与 k 有关？经过足够长的时间后，最终的温度分布是什么？

练习 6.1.21 采集 n 个人的三项数据，例如身高、体重、收入，组成向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\in\mathbb{R}^n$. 令 x_1,x_2,x_3 为三组数据的平均值，$\boldsymbol{u}$ 为分量全是 1 的向量. 定义向量 $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j$ 的协方差为 $\operatorname{cov}(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=\frac{1}{n}(\boldsymbol{a}_i-x_i\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}_j-x_j\boldsymbol{u})$. 称 $C=\begin{bmatrix}\operatorname{cov}(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)\end{bmatrix}_{3\times3}$ 为数据的协方差矩阵.

1. 令 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}$，$U$ 为所有元素都是 1 的 $n\times 3$ 矩阵，求常数 k，使得 $kUU^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}x_1\boldsymbol{u} & x_2\boldsymbol{u} & x_3\boldsymbol{u}\end{bmatrix}$.

2. 用 A,U 来表示 C，并证明 C 是对称矩阵.

3. 任取 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in\mathbb{R}^3$，证明向量 $A\boldsymbol{y}_1,A\boldsymbol{y}_2$ 的协方差是 $\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{y}_2$.

4. 设 C 有谱分解 $C=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，考虑 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}Q$ 的三个列向量对应的三组数据，证明这三组数据两两协方差为零.

协方差为零的两组数据称为不相关的数据，利用谱分解从原本相关的数据中得到不相关的数据的线性组合，是统计学中很重要的一个方法.

6.2 正定矩阵

练习 6.2.1 判断下列矩阵是否正定.

1. $\begin{bmatrix}5 & 6\\6 & 7\end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix}-1 & -2\\-2 & -5\end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix}1 & 10\\10 & 100\end{bmatrix}$.
4. $\begin{bmatrix}1 & 10\\10 & 101\end{bmatrix}$.
5. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 2\\1 & 2 & 5\end{bmatrix}$.
6. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 2\\1 & 2 & 5\end{bmatrix}$.

练习 6.2.2 考虑实矩阵 $S=\begin{bmatrix}1 & b\\b & 1\end{bmatrix}$. 求使得下列条件成立的 b 的取值范围.

1. S 不正定但是半正定.
2. S 不定.
3. S 半负定.

练习 6.2.3 下列实矩阵中未知元素满足什么条件时，矩阵正定？半正定？

1. $\begin{bmatrix}1 & b\\b & 9\end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix}2 & 4\\4 & c\end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix}c & b\\b & c\end{bmatrix}$.
4. $\begin{bmatrix}c & 1 & 1\\1 & c & 1\\1 & 1 & c\end{bmatrix}$.
5. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & d & 4\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}$.
6. $\begin{bmatrix}s & -4 & -4\\-4 & s & -4\\-4 & -4 & s\end{bmatrix}$.
7. $\begin{bmatrix}t & 3 & 0\\3 & t & 4\\0 & 4 & t\end{bmatrix}$.
8. $\begin{bmatrix}a & a & a\\a & a+c & a-c\\a & a-c & a+c\end{bmatrix}$.

练习 6.2.4 设 A 对称正定，B 是实矩阵.

1. 证明，对任意整数，A^k 也正定.

2. 若存在正整数 r，使得 $A^rB = BA^r$，证明 $AB = BA$.

练习 6.2.5 对 n 阶实对称矩阵 A，证明，当实数 t 充分大时，$tI_n + A$ 正定.

练习 6.2.6 对 n 阶实对称矩阵 A, 证明, 存在正实数 c, 使得对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 都有 $|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}| \leqslant c\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

练习 6.2.7 (Hadamard 不等式) 给定对称正定矩阵 A，求证：

1. 对任意 $\boldsymbol{y}$，$\det\left(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\right) \leqslant 0$;

2. 记 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$，则 $\det(A) \leqslant a_{nn}A_{n-1}$，其中 A_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式;

3. $\det(A) \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

利用上述结论证明：如果实矩阵 $T = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}$ 可逆，那么 $\det(T)^2 \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n}(t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \cdots + t_{ni}^2)$.

注意：练习 *4.2.27* 用不同方法证明了相同结论.

练习 6.2.8 ☕☕ 证明 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{i+j} \end{bmatrix}_{n\times n}$ 正定.

提示：法一：考虑 $\int_0^1 t(x_1 + x_2t + \cdots + x_nt^{n-1})^2\,\mathrm{d}t$.

法二：证明 $\det(A) = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \frac{1}{i+j} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i-j)^2$.

练习 6.2.9 ☕☕ 证明 Hilbert 矩阵 $H_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{i+j-1} \end{bmatrix}_{n\times n}$ 正定.

练习 6.2.10 设 A, B 是实对称矩阵，如果 $A - B$ 正定，则记作 $A \succ B$. 求证：

1. $A \succ B, B \succ C$ 可以推出 $A \succ C$.

2. $A \succ B$ 和 $B \succ A$ 不可能同时成立.

3. 对任意实对称矩阵 A，都存在实数 k_1, k_2 使得 $k_1I_n \succ A \succ k_2I_n$.

练习 6.2.11 举例说明，实对称矩阵 A 的所有顺序主子式都非负，但 A 并不半正定.

练习 6.2.12 证明命题 6.2.4 .

练习 6.2.13 ☕☕ 证明，实对称矩阵半正定，当且仅当它的所有主子式都非负.

提示：法一：利用数学归纳法.

法二：考虑矩阵 A 的微小变化得到的正定矩阵 $A + \varepsilon I$.

练习 6.2.14 设 A 是实对称矩阵，证明，

1. A 半正定，当且仅当存在实对称矩阵 B，使得 $A = B^2$.

2. 若 A 半正定，则存在唯一的半正定实对称矩阵 B，使得 $A = B^2$.

练习 6.2.15 ☕ 证明，若实对称矩阵对角占优，且对角元素全为正数，则该矩阵正定.

练习 6.2.16 证明或举出反例：

1. 如果 A 对称正定，则 A^{-1} 正定.
2. 如果 A, B 对称正定，则 $A+B$ 正定.
3. 如果 A, B 对称半正定，则 $A+B$ 半正定.
4. 如果 A, B 对称不定，则 $A+B$ 不定.
5. 如果 A 列满秩，B 对称正定，则 $A^{\mathrm{T}}BA$ 正定.
6. 如果 $S = A^{\mathrm{T}}A$ 且 A 有简化 QR 分解 $A = QR$，则 $S = R^{\mathrm{T}}R$ 是 S 的 Cholesky 分解.
7. 如果 A, B 正定，则 AB 的特征值都是正数.

练习 6.2.17 证明命题 6.2.7 .

练习 6.2.18 考虑实对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & C \end{bmatrix}$. 证明 S 正定当且仅当 A 及其 Schur 补都正定.

练习 6.2.19 ☕ 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵，A 正定. 证明，存在可逆矩阵 T，使得 $T^{\mathrm{T}}AT$ 和 $T^{\mathrm{T}}BT$ 同时是对角矩阵.

练习 6.2.20 ☕☕ 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵，A, B 半正定. 证明，存在可逆矩阵 T，使得 $T^{\mathrm{T}}AT$ 和 $T^{\mathrm{T}}BT$ 同时是对角矩阵.

提示：按 $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$ 是否是平凡子空间分类讨论，转化为练习 6.2.19 .

6.3 奇异值分解

练习 6.3.1 求下列矩阵的奇异值分解.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
4. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.
6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.
7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
8. $\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$，其中 A 有奇异值分解 $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$.

练习 6.3.2 矩阵 A 的 QR 分解 $A = QR$，且 R 有奇异值分解 $R = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，求 A 的奇异值分解.

练习 6.3.3 设 A 的奇异值分解为 $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\begin{bmatrix} O & A^{\mathrm{T}} \\ A & O \end{bmatrix}$ 的谱分解.

练习 6.3.4 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，考虑单位圆 $C=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{v}\|=1\}$ 及其在 A 对应的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 下的像 $A(C)=\{A\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{v}\|=1\}$.

1. 设 $\boldsymbol{w}\in A(C)$，证明 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{w}=1$.
2. 求 A 的奇异值分解 $A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$.
3. 注意 V,U 为二阶正交矩阵，对应的线性变换是旋转或反射，而 Σ 是对角矩阵，对应伸缩变换. 从几何上看，曲线 $V^{\mathrm{T}}(C),\Sigma V^{\mathrm{T}}(C),U\Sigma V^{\mathrm{T}}(C)$ 分别是什么形状?

练习 6.3.5 设矩阵 A 的奇异值分解是 $A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$.

1. 证明 $AA^{\mathrm{T}}=U(\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}})U^{\mathrm{T}},A^{\mathrm{T}}A=V(\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma)V^{\mathrm{T}}$ 分别是这两个对称矩阵的谱分解，并得到 AA^{T} 和 $A^{\mathrm{T}}A$ 的非零特征值相同.
2. 对任意 A 的奇异值 $\sigma\neq 0$，设 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 分别是 $A^{\mathrm{T}}A$ 和 AA^{T} 的属于 σ^2 的特征向量，证明 $A\boldsymbol{v}$ 和 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$ 分别是 AA^{T} 和 $A^{\mathrm{T}}A$ 的属于 σ^2 的特征向量.

练习 6.3.6 (极分解) 对 n 阶方阵 A，存在正交矩阵 Q 和对称半正定矩阵 S，使得 $A=QS$.

分解式 $A=QS$ 称为 A 的**极分解**. 容易看到，$A=S_1Q_1$，即方阵分解为对称半正定矩阵和正交矩阵的乘积，也存在.

练习 6.3.7 ☕☕ 证明矩阵的广义逆唯一.

提示：耐心计算.

练习 6.3.8 证明命题 6.3.7 .

练习 6.3.9 ☕ 证明矩阵任意特征值的绝对值不大于其最大的奇异值.

练习 6.3.10 证明或者举出反例.

1. n 阶方阵 A 为正交矩阵当且仅当它有 n 个奇异值，值都是 1.
2. 如果 n 阶方阵有 n 个奇异值，则所有奇异值的乘积等于所有特征值的乘积.
3. 假设 n 阶方阵 A 的 SVD 分解为 $A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，而 $A+I_n$ 的 SVD 分解为 $A+I_n=U(\Sigma+I_n)V^{\mathrm{T}}$. 证明 A 是对称矩阵.
4. 如果 n 阶方阵 A 的 n 个奇异值就是它的 n 个特征值，则 A 是对称矩阵.

练习 6.3.11 证明命题 6.3.15 .

练习 6.3.12 证明命题 6.3.16 .

练习 6.3.13 (樊畿迹定理) ☕ 对任意 n 阶对称矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，假设特征值为 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，对应特征向量为 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$，则 $\max\limits_{\substack{n\times m\text{ 矩阵 }Q:\\ Q^{\mathrm{T}}Q=I}}\operatorname{trace}(Q^{\mathrm{T}}AQ)=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i$，且 $Q=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_m\end{bmatrix}$ 时取得最大值.

练习 6.3.14 (低秩逼近与数据拟合) 考虑平面上的点 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\20\end{bmatrix}$. 现在想找到一条直线，使得点到直线距离的平方和最小. 令 $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 4\\0 & 8 & 8 & 20\end{bmatrix}$.

1. 找到函数 $f(a,b,c)$，使得 $f(a,b,c)$ 就是每个点到直线 $ax+by+c=0$ 的距离的平方和.
2. 假设 a,b 已知，用导数证明此时最好的 c 是 $-\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$，这里 x_0, y_0 代表四个点的 x 坐标平均值和 y 坐标平均值.

   注意：这意味着欲求直线应为 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c=0$.
3. 对 A 进行“中心化”，即对每一行所有元素减去该行的平均值，得到 B. 此时对 B 的列对应的四个点来说，最佳直线为何应该经过原点？A, B 对应的最佳直线为何一定平行？
4. 计算 B 的最佳秩 1 逼近.
5. 计算欲求直线.
6. 思考：如果考虑的不是平面上的点，而是 n 维空间中的点，问题如何处理？

练习 6.3.15 ☕ 考虑子空间 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$，其对应的正交投影矩阵为 P, Q. 我们想要研究矩阵 $H = P(P+Q)^+Q + Q(P+Q)^+P$.

1. 计算 $(P+Q)(P+Q)^+$ 的列空间和零空间，该矩阵是否是一个正交投影矩阵？
2. 计算 $(P+Q)^+(P+Q)$ 的列空间和零空间，该矩阵是否是一个正交投影矩阵？和前一矩阵有何关联？
3. 证明 $Q(P+Q)^+(P+Q) = Q$，$(P+Q)(P+Q)^+Q = Q$.
4. 证明 $H = 2P(P+Q)^+Q = 2Q(P+Q)^+P$.
5. 假设 T 是 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ 上的正交投影矩阵，证明 $HP = HQ = HT = H$.
6. 证明 $HT = T$.

注意 $PT = QT = T$，再利用第 1 条，可得 $H = HT = T$，由此即得 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ 的正交投影矩阵的表达式.

7.1 线性空间

练习 7.1.1 在所有正实数构成的集合 $\mathbb{R}^+$ 上，定义加法和数乘运算：

$$a \oplus b := ab, \quad k \odot a := a^k, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}.$$

判断 $\mathbb{R}^+$ 对这两个运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

练习 7.1.2 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$\mathbb{Q}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. 证明 $\mathbb{Q}[\omega]$ 关于数的加法和数乘构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.

2. 证明子集 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathcal{M} = \{b\omega \mid b \in \mathbb{Q}\}$ 都是 $\mathbb{Q}[\omega]$ 的子空间. 并求二者的交与和.

3. 判断 $\mathbb{Q}[\omega]$ 是否是数域.

练习 7.1.3 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，子集 $\mathbb{R}$ 是否是子空间?

练习 7.1.4 设 $\mathbb{Q}[\mathrm{i}] = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. 证明 $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ 关于数的加法和数乘构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.

2. 证明 $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ 是数域.

3. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作有理数域 $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ 上的线性空间，子集 $\mathbb{R}$ 是否是子空间?.

练习 7.1.5 设 $\mathcal{V}$ 是以 0 为极限的实数序列全体：$\mathcal{V} = \left\{\{a_n\} \,\middle|\, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$. 定义加法和数乘分别为：

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}; \quad k\{a_n\} = \{ka_n\}, k \in \mathbb{R}.$$

证明 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

练习 7.1.6 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的平面 $\mathbb{S} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \,\middle|\, x + y - z = 1\right\}$. 对于平面上的任意两点 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ 和实数 k，定义加法和数乘分别为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 1 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}; \quad k \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx + 1 - k \\ ky \\ kz \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

1. 证明 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{R}$ 上线性空间.

2. 求单射 $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{R}^3$，使得 $f(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w})$，且 $f(k \otimes \boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v})$.

可以看到，尽管这个平面不经过原点，但不妨在平面上任取一点 "装作" 原点，则任意取法都会产生一个线性空间，且不同取法对应不同的线性空间.

练习 7.1.7 对 n 阶方阵 A，令 $P(A) = \{f(A) \mid f(x) \in \mathbb{F}[x]\}$. 证明 $P(A)$ 关于矩阵的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间.

练习 7.1.8 对 n 阶方阵 A，令 $\mathrm{Com}(A) = \{n \text{ 阶方阵 } B \mid AB = BA\}$.

1. 证明，$\mathrm{Com}(A)$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

2. 证明，对任意 $B, C \in \mathrm{Com}(A)$，都有 $BC \in \mathrm{Com}(A)$；由此证明对任意多项式 $f(x)$，都有 $f(A) \in \mathrm{Com}(A)$.

练习 7.1.9 考虑矩阵空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的分别满足以下条件的矩阵 A 的全体，判断是否是子空间.

1. A 可逆.
2. A 奇异.
3. $A^2=0$.
4. $AA^T=I$.
5. $\mathcal{R}(A)=\mathcal{M}$，其中 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的给定子空间.
6. $\mathcal{N}(A)=\mathcal{M}$，其中 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的给定子空间.
7. 存在矩阵 B,C，使得 $A=\begin{bmatrix} C & -B \\ B & C \end{bmatrix}$.

练习 7.1.10 考虑多项式空间 $\mathbb{R}[x]$ 的分别满足以下条件的多项式 p 的全体，判断是否是子空间.

1. $p(2)=0$.
2. $p(2)=1$.
3. $p'(2)=0$.
4. p 的次数是奇数.
5. p 的根都是实数.

练习 7.1.11 设 $\mathcal{M}_1=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2),\mathcal{M}_2=\operatorname{span}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$，其中

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

分别求 $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2,\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2$ 的一组基和维数.

练习 7.1.12 设 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 是矩阵空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中所有迹为零的矩阵构成的子集.

1. 证明 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.
2. 求子空间 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 和 $\operatorname{span}(I_n)$ 的交与和.

练习 7.1.13 考虑函数空间 $C(\mathbb{R})$ 的如下子集：

$$\mathcal{V}=\{f\mid f''+3f'+2f=0\},\quad \mathcal{M}=\{f\mid f'+2f=0\},\quad \mathcal{N}=\{f\mid f'+f=0\}.$$

1. 证明 $\mathcal{V},\mathcal{M},\mathcal{N}$ 都是 $C(\mathbb{R})$ 的子空间，且 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{V}$ 的子空间.
2. 描述 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 中的所有元素，并证明 $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}=\{\mathbf{0}\}$.
3. 对任意 $f\in\mathcal{V}$，证明 $f'+f\in\mathcal{M},f'+2f\in\mathcal{N}$.
4. 证明 $\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}=\mathcal{V}$.
5. 设 $f\in\mathcal{V}$，且满足 $f(0)=1,f'(0)=2$，求 f.

7.2 基和维数

练习 7.2.1 把数域 $\mathbb{F}$ 看作自身上的线性空间，求它的一组基和维数.

练习 7.2.2 求练习 7.1.1 中线性空间 $\mathbb{R}$ 的一组基和维数.

练习 7.2.3 在练习 7.1.2 中的线性空间 $\mathbb{Q}[\omega]=\{a+b\omega \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 内，

1. 求下列向量组的秩：$S_1:\frac{1}{2},3,-7$，$S_2:1,\omega,\omega^2,\omega^3$，$S_3:\omega,\overline{\omega},\sqrt{3}$.
2. 求 $\mathbb{Q}[\omega]$ 的一组基和维数.

练习 7.2.4 判断练习 7.1.5 中线性空间的维数是否有限.

练习 7.2.5 判断 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $C[-\pi,\pi]$ 内的下列向量组是否线性相关，并求其秩.

1. $\cos^2 x,\sin^2 x$.
2. $\cos^2 x,\sin^2 x,1$.
3. $\cos 2x,\sin 2x$.
4. $1,\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx$.
5. $1,\sin x,\sin^2 x,\cdots,\sin^n x$.

练习 7.2.6 考虑练习 7.1.8 中的线性空间 $\mathrm{Com}(A)$，对下列 A 求 $\mathrm{Com}(A)$ 的一组基.

1. $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&0&1\\&&&0\end{bmatrix}_{n\times n}$.
4. $\mathrm{diag}(a_i)$, 其中 a_i 各不相同.
5. $\mathrm{diag}(a_i)$.

练习 7.2.7 给定 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数 $a_1,\cdots,a_n$.

1. 在线性空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 中，令
$$f_i(x)=(x-a_1)\cdots\widehat{(x-a_i)}\cdots(x-a_n),\quad i=1,\cdots,n,$$
其中 $\widehat{(x-a_i)}$ 表示不含该项. 证明，$f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 的一组基.
2. 设 $b_1,\cdots,b_n$ 是 $\mathbb{F}$ 中任意 n 个数，找出 $f(x)\in\mathbb{F}[x]_n$，使得 $f(a_i)=b_i,i=1,\cdots,n$.

练习 7.2.8 证明，n 维线性空间中任意多于 n 个的向量都线性相关.

练习 7.2.9 考虑练习 7.1.7 中的线性空间 $P(A)$.

1. 判断其维数是否有限.
2. 证明存在次数不大于 n^2 的多项式 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$，使得 $f(A)=O$.
3. 令 $A=\mathrm{diag}(1,\omega,\omega^2)$，其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，求 $P(A)$ 的维数和一组基.

练习 7.2.10 证明连续函数空间的子集 $\mathrm{span}(f(x)=k_0+k_1\cos x+k_2\cos 2x \mid f(0)=0)$ 是一个子空间，并求一组基.

练习 7.2.11 给定 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ 和 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 上的线性变换 $f\colon X\mapsto AX$. 分别求 $\mathcal{N}(f)$ 和 $\mathcal{R}(f)$ 的维数和一组基.

练习 7.2.12 设 $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间，且 $\mathcal{M}_1\subseteq\mathcal{M}_2$. 证明，如果 $\dim\mathcal{M}_1=\dim\mathcal{M}_2$，则 $\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_2$.

练习 7.2.13 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\mathcal{M}^\perp$ 是其正交补空间，证明，$\mathbb{R}^n=\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}^\perp$.

练习 7.2.14 证明，练习 7.1.12 中的 $\mathbb{F}^{n\times n}=\mathbb{F}_0^{n\times n}\oplus\operatorname{span}(I_n)$.

7.3 线性映射

练习 7.3.1 证明命题 7.3.4 .

练习 7.3.2 证明命题 7.3.7 .

练习 7.3.3 考虑 $\mathbb{C}^n$ 上的变换 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{v})=\overline{\boldsymbol{v}}$.

1. $\boldsymbol{C}$ 是否是一个 $\mathbb{C}$ 上线性空间的线性变换？
2. 如果将 $\mathbb{C}^n$ 看作一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，那么 $\boldsymbol{C}$ 是否是一个 $\mathbb{R}$ 上线性空间的线性变换？

练习 7.3.4 给定 $a\in\mathbb{F}$，判断下面定义的 $\mathbb{F}[x]$ 上的变换 $\boldsymbol{T}_a$ 是否是线性变换：

$$\boldsymbol{T}_a(f(x))=f(x+a),\quad\forall f(x)\in\mathbb{F}[x].$$

练习 7.3.5 在光滑函数空间 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上定义变换：$\boldsymbol{A}(f(x))=(f'(x))^2$. 判断 $\boldsymbol{A}$ 是否是线性变换.

练习 7.3.6 计算例 7.3.2 中线性映射的核与像集，并求二者的维数.

练习 7.3.7 ☕ 给定 m 阶方阵 A_1，n 阶方阵 A_2 和 $m\times n$ 矩阵 B. 证明，如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值，则

1. 对 $m\times n$ 矩阵 X，$A_1X=XA_2$ 只有平凡解.

   提示：利用 *Hamilton-Cayley* 定理.

2. 对 $m\times n$ 矩阵 X，$A_1X-XA_2=B$ 只有唯一解.

   注意：练习 5.2.23 和 5.4.6 用不同方法证明了相同结论.

练习 7.3.8 定义 $\mathbb{F}[x]$ 上的变换：$\boldsymbol{A}(f(x))=xf(x),\forall f(x)\in\mathbb{F}[x]$.

1. 证明 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{F}[x]$ 上的一个线性变换.
2. 设 $\boldsymbol{D}$ 是求导算子，证明 $\boldsymbol{DA}-\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{I}$.

练习 7.3.9 令 $\mathcal{V}$ 为全体实数数列组成的线性空间，其中元素记为 $(a_0, a_1, \cdots)$. 定义其上变换

$$\boldsymbol{D}\left((a_0, a_1, \cdots)\right) = (0, a_0, a_1, \cdots), \qquad \boldsymbol{M}\left((a_0, a_1, \cdots)\right) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \cdots).$$

1. 证明 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{M}$ 都是线性变换.
2. 证明 $\boldsymbol{DM} - \boldsymbol{MD} = \boldsymbol{I}$.
3. 对于任意 n 阶方阵 A, B，证明 $AB - BA \neq I_n$.

练习 7.3.10 设 f 是线性空间 $\mathcal{V}$ 上的线性变换，$\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$. 证明，如果存在正整数 m，使得 $f^{m-1}(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}, f^m(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}), \cdots, f^{m-1}(\boldsymbol{a})$ 线性无关. 由此推出 $\dim \mathcal{V} \geqslant m$.

练习 7.3.11 证明命题 7.3.10 .

练习 7.3.12 对线性空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$，考虑例 7.3.2 中的 $\boldsymbol{L}_A$ 和 $\boldsymbol{R}_A$，其中 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. 证明 $\boldsymbol{L}_A\boldsymbol{R}_A = \boldsymbol{R}_A\boldsymbol{L}_A$，并指出这是矩阵乘法的何种性质.
2. 证明 $\boldsymbol{L}_A$ 的特征值必是 A 的特征值.
3. 求 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上可逆线性变换 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{T}\boldsymbol{R}_A\boldsymbol{T}^{-1}$.

练习 7.3.13 设线性空间 $\mathcal{V}$ 有直和分解：$\mathcal{V} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$. 任取 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$，都有唯一的分解式：$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，其中 $\boldsymbol{a}_1 \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathcal{M}_2$. 定义 $\mathcal{V}$ 上的变换：

$$\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_1}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_2}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}_2.$$

1. 证明，$\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_1}, \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_2}$ 都是 $\mathcal{V}$ 上的线性变换. 称 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_1}$ 为沿 $\mathcal{M}_1$ 向 $\mathcal{M}_2$ 的投影变换.
2. 证明，$\mathcal{N}(\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_1}) = \mathcal{M}_2, \mathcal{R}(\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_1}) = \mathcal{M}_1$.
3. 证明，$\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_1}^2 = \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_1}, \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_1} + \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_2} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_1}\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_2} = \boldsymbol{O}$.
4. 分别求 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_1}, \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}_2}$ 的特征值和特征子空间.

练习 7.3.14 考虑例 7.3.11 中的线性变换 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换 $\boldsymbol{S}$，试问它是否是投影变换.

练习 7.3.15 考虑练习 7.1.1 中的实线性空间 $\mathbb{R}^+$，给定 $a > 0$，判断映射

$$\begin{aligned} \log_a \colon \quad \mathbb{R}^+ &\to \quad \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \log_a x, \end{aligned}$$

是否是线性映射. 如果是，进一步分析当 a 取何值时，该映射是同构.

练习 7.3.16 任取 2 阶实方阵 A，满足 $A^2 = -I_2$. 证明 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, f(a + bi) = a + bA$ 是这两个线性空间的同构. 请举出至少两种可能的 A.

练习 7.3.17 证明矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 与 $\mathbb{F}^{mn}$ 同构.

练习 7.3.18 证明多项式空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 与 $\mathbb{F}^n$ 同构.

练习 7.3.19 证明练习 7.1.2 中的线性空间 $\mathbb{Q}[\omega]$ 与练习 7.1.4 中的线性空间 $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ 同构.

7.4 向量的坐标表示

练习 7.4.1 证明命题 7.4.1 .

练习 7.4.2 求 $\mathbb{F}^4$ 中由基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 到基 $\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3,\boldsymbol{t}_4$ 的过渡矩阵，并分别求向量 $\boldsymbol{a}$ 在两组基下的坐标.

1. $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix};$

   $\boldsymbol{t}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_3=\begin{bmatrix}5\\3\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_4=\begin{bmatrix}6\\6\\1\\3\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}.$

2. $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix};$

   $\boldsymbol{t}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_4=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\2\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$

练习 7.4.3 考虑函数空间的子空间 $\operatorname{span}\big(\sin^2 x,\cos^2 x\big)$.

1. 证明 $\sin^2 x,\cos^2 x$ 和 $1,\cos 2x$ 分别是子空间的一组基.
2. 分别求从 $\sin^2 x,\cos^2 x$ 到 $1,\cos 2x$，和从 $1,\cos 2x$ 到 $\sin^2 x,\cos^2 x$ 的过渡矩阵.
3. 分别求 1 和 $\sin^2 x$ 在两组基下的坐标.

练习 7.4.4 考虑多项式空间 $\mathbb{R}[x]_4$.

1. 求如下这三组基之间的过渡矩阵：

$$1,x,x^2,x^3;\qquad 1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3;\qquad 1,x+2,(x+2)^2,(x+2)^3.$$

2. 求多项式 $p(x)=x^3+6x^2+12x+8$ 在上述三组基下的坐标.
3. 设多项式 $q(x)$ 在基 $1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$. 求 $q(1),q(0),q'(0)$.

练习 7.4.5 考虑多项式空间 $\mathbb{R}[x]_4$ 中的的一组基 p_1,p_2,p_3,p_4，其中每个多项式 p_n 满足 $p_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$. 求这组基和基 $1,x,x^2,x^3$ 之间的过渡矩阵.

这样的多项式叫 Chebyshev 多项式，有很多特殊性质，参见例 8.1.11 .

练习 7.4.6 考虑练习 7.2.7 中的线性空间 $\mathbb{F}[x]_n$，考虑 $n=3$ 的情形.

1. 给定 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数 a_1,a_2,a_3，求由基 $1,x,x^2$ 到基 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 的过渡矩阵.
2. 考虑练习 7.2.7 中的 $f(x)$，给定 $\mathbb{F}$ 中任意三个数 b_1,b_2,b_3，求 $f(x)$ 在两组基下的坐标.

练习 7.4.7 矩阵空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 有两组基 $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，和 $\boldsymbol{t}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_3=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_4=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$. 求从基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 到基 $\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3,\boldsymbol{t}_4$ 的过渡矩阵.

练习 7.4.8 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的一组基，求下列向量组的一个极大线性无关部分组：

$$\boldsymbol{t}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+3\boldsymbol{e}_4,\quad \boldsymbol{t}_2=-\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4,$$
$$\boldsymbol{t}_3=3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3+4\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{t}_4=-2\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2+10\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4.$$

练习 7.4.9 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的一组基.

1. 判断 $\boldsymbol{t}_1=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{t}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{t}_n=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n$ 是否也是 $\mathcal{V}$ 的一组基.
2. 判断 $\boldsymbol{t}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{t}_2=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\cdots,\boldsymbol{t}_n=\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{e}_1$ 是否也是 $\mathcal{V}$ 的一组基.

练习 7.4.10 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的一组基，令 $\boldsymbol{t}_i=\boldsymbol{e}_1+a_i\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_i^{n-1}\boldsymbol{e}_n,i=1,\cdots,n$. 证明 $\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 也是 $\mathcal{V}$ 的一组基.

练习 7.4.11 设 (I): $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 、(II): $\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 和 (III): $\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_n$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的三组基，如果从 (I) 到 (II) 的过渡矩阵是 P，从 (II) 到 (III) 的过渡矩阵是 Q，证明，

1. 从 (II) 到 (I) 的过渡矩阵是 P^{-1}.
2. 从 (I) 到 (III) 的过渡矩阵是 PQ.

7.5 线性映射的矩阵表示

练习 7.5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{F}^3$ 上的一个线性变换：

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+2x_2\\x_3-x_2\\x_2-x_3\end{bmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$ 在标准基下的矩阵，并分别求 $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ 的一组基和维数.

练习 7.5.2 设 $\mathcal{V}=\mathrm{span}(f_1,f_2)$ 是函数空间的子空间，其中 $f_1=\mathrm{e}^{ax}\cos bx, f_2=\mathrm{e}^{ax}\sin bx$. 证明求导算子 $\boldsymbol{D}$ 是 $\mathcal{V}$ 上的线性变换，并求其在基 f_1,f_2 下的矩阵.

练习 7.5.3 设 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 上的线性变换 $\boldsymbol{L}_A\colon X\mapsto AX$，其中 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. 求 $\boldsymbol{L}_A$ 在基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 下的矩阵.

练习 7.5.4 设 $\mathcal{V}$ 是所有 2 阶对称矩阵构成的线性空间，f 是其上的线性变换：$f(X)=A^{\mathrm{T}}XA$，其中 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. 求 f 在基 $E_{11},E_{22},E_{12}+E_{21}$ 下的矩阵.

练习 7.5.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间 $\mathcal{V}$ 上的一个线性变换，证明，存在 $\mathbb{F}[x]$ 中一个次数不超过 n^2 的多项式 $f(x)$，使得 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

练习 7.5.6 证明命题 7.5.5 .

练习 7.5.7 设 $\mathcal{V}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\mathbb{F}$ 可以看作自身上的线性空间，而 $\mathcal{V}$ 到 $\mathbb{F}$ 的线性映射称为 $\mathcal{V}$ 上的**线性函数**. 令 $\mathcal{V}^*=\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathbb{F})$，称为 $\mathcal{V}$ 的**对偶空间**. 证明，$\mathcal{V}^*$ 和 $\mathcal{V}$ 同构.

练习 7.5.8 求导算子 $\boldsymbol{D}$ 定义了多项式空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的线性变换，给定 $\mathbb{F}[x]_n$ 的两组基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 和 $1,x,\cdots,\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$.

1. 求两组基之间的过渡矩阵.
2. 求 $\boldsymbol{D}$ 在两组基下的矩阵.
3. 通过过渡矩阵验证两个表示矩阵是相似的.
4. 是否存在一组基，使得 $\boldsymbol{D}$ 在该组基下的矩阵是对角矩阵?

练习 7.5.9 设 $\mathcal{V}$ 是 n 维线性空间，f 是其上的线性变换，又设存在向量 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{V}$，使得 $f^{n-1}(\boldsymbol{a})\neq\boldsymbol{0}$，且 $f^n(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$. 证明，$\mathcal{V}$ 存在一组基，使得 f 在该组基下的矩阵是

$$J_n=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{bmatrix}.$$

练习 7.5.10 考虑练习 7.5.9 中的方阵 J_n，判断 J_n 与 J_n^{T} 是否相似.

练习 7.5.11 已知 $\mathbb{F}^3$ 上的线性变换 f 在标准基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵是 $A=\begin{bmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & 6\end{bmatrix}$. 设 $\boldsymbol{t}_1=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_2=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{F}^3$ 的另一组基，求 f 在这组基下的矩阵.

练习 7.5.12 证明命题 7.5.12 .

练习 7.5.13 证明命题 7.5.13 .

练习 7.5.14 设 3 维线性空间 $\mathcal{V}$ 有一组基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，其上的线性变换 f 在该组基下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. 求 f 的全部特征值和特征向量.
2. 判断是否存在一组基，使得 f 在该组基下的表示矩阵是对角矩阵. 如果存在，写出这组基及对应的对角矩阵.

练习 7.5.15 设 4 维线性空间 $\mathcal{V}$ 有一组基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$，其上的线性变换 f 在该组基下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. 求 f 的全部特征值和特征向量.
2. 判断是否存在一组基，使得 f 在该组基下的表示矩阵是对角矩阵. 如果存在，写出这组基及对应的对角矩阵.

练习 7.5.16 设 $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，在 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 中定义如下变换:

$$f(X) = B^{-1}XB, \quad \forall X \in \mathbb{F}^{2\times 2}.$$

1. 证明 f 是线性变换.
2. 求 f 的全部特征值和特征向量.

阅读 7.5.17 (矩阵函数)

8.1 欧氏空间

练习 8.1.1 在 $\mathbb{R}^2$ 中，对任意 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，定义二元函数

$$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 2a_2b_2.$$

判断 $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 是否是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个内积.

练习 8.1.2 证明，$\mathbb{R}^n$ 上的二元函数 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{a}$ 定义了一个内积，当且仅当 A 是对称正定矩阵.

练习 8.1.3 证明，矩阵空间 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 关于如下二元函数构成欧氏空间: $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(B^{\mathrm{T}}A)$.

练习 8.1.4 证明正交向量组线性无关.

练习 8.1.5 设 3 维欧氏空间 $\mathcal{V}$ 的一组基是 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$，它的度量矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. 求 $\mathcal{V}$ 的一组标准正交基.

练习 8.1.6 设 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ 是 3 维欧氏空间 $\mathcal{V}$ 的一组标准正交基，令

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2 + 2\boldsymbol{q}_3), \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{q}_1 + 2\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3), \quad \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{q}_1 - 2\boldsymbol{q}_2 - 2\boldsymbol{q}_3).$$

证明，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 也是 $\mathcal{V}$ 的一组标准正交基.

练习 8.1.7 设 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_4, \boldsymbol{q}_5$ 是 5 维欧氏空间 $\mathcal{V}$ 的一组标准正交基，令

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_5, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_4, \quad \boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3.$$

求 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ 的一组标准正交基.

练习 8.1.8 计算例 8.1.11 中 Lengendre 多项式作为多项式空间中向量的范数，并说明该向量组不是正交单位向量组.

练习 8.1.9 设 f 是 n 维欧氏空间 $\mathcal{V}$ 内的线性函数，证明，存在唯一的固定向量 $\boldsymbol{b} \in \mathcal{V}$，使得对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$，都有 $f(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

练习 8.1.10 证明命题 8.1.15 .

练习 8.1.11 证明命题 8.1.17 第 2–3 条.

练习 8.1.12 考虑欧氏空间 $C[-1,1]$ 及其内积 $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. 证明奇函数组成的子空间和偶函数组成的子空间互为正交补.

练习 8.1.13 对欧氏空间 $\mathcal{V}$ 的子空间 $\mathcal{W}$，定义包含映射 $\boldsymbol{J}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. 证明 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^*$ 是到 $\mathcal{W}$ 的正交投影.

练习 8.1.14 设 $\mathcal{M}$ 是 n 维欧氏空间 $\mathcal{V}$ 的子空间，在 $\mathcal{M}$ 中取一组标准正交基 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_r$. 证明，$\mathcal{V}$ 中任意向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的正交投影 $\boldsymbol{a}_1 = \sum\limits_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{q}_i \rangle \boldsymbol{q}_i$.

练习 8.1.15 设 $\mathcal{M}$ 是 n 维欧氏空间 $\mathcal{V}$ 的子空间，$\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{M}$ 上的正交投影. 证明，

$$\langle \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{b}) \rangle, \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{V}.$$

阅读 8.1.16 (无限维欧氏空间中的正交投影)

8.2 欧氏空间上的线性映射

练习 8.2.1 (线性变换的范数) ☕ 类似于定义 6.3.6 ，欧氏空间 $\mathcal{V}$ 上向量的范数可以自然地诱导出 $\mathcal{V}$ 上线性变换的范数，即 $\sup\limits_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \dfrac{\|f(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 称为 f 的**范数**，记为 $\|f\|$. 注意 $\|f\| = +\infty$ 有可能成立.

对练习 7.3.8 中的线性变换 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{A}$，证明 $\|\boldsymbol{D}\|\|\boldsymbol{A}\| \geqslant \frac{1}{2}$.

这是量子力学中 **Heisenberg 不确定性原理**的一个简化模型.

练习 8.2.2 证明伴随映射的基本结论：

1. 若 $g = f^*$，则 $f = g^*$.
2. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

练习 8.2.3 给定对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，它在标准欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上定义的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称变换. 给 $\mathbb{R}^n$ 找一组基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在新的基下的矩阵不再是对称矩阵. 这是否意味着 $\boldsymbol{A}$ 不再是对称变换了?

练习 8.2.4 给定多项式空间 $\mathbb{R}[x]$ 及其内积 $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$，考虑其上线性变换 $\boldsymbol{M}$，满足 $(\boldsymbol{M}p)(x) = xp(x)$. 证明 $\boldsymbol{M}$ 是对称变换，但没有特征值和特征向量.

练习 8.2.5 ☕ 考虑例 8.2.9 第 3 条中的子空间 $\mathcal{V}_{a,b}$ 上和其上对称变换 $\boldsymbol{D}^2$. 这个对称变换对应的 Rayleigh 商 $\frac{\langle f, \boldsymbol{D}^2 f\rangle}{\langle f, f\rangle}$ 对非零的 f，取值最大是多少? 此时 f 是什么函数?

练习 8.2.6 证明命题 8.2.14 .

练习 8.2.7 证明命题 8.2.15 .

练习 8.2.8 回忆阅读 3.2.3 和 3.1.23 中的小波基和 Hadamard 矩阵 $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，它是正交矩阵. 求其正交相似标准形.

练习 8.2.9 求正交矩阵 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 的正交相似标准形.

练习 8.2.10 设 $\boldsymbol{q}$ 是 n 维欧氏空间 $\mathcal{V}$ 中的单位向量，$\boldsymbol{P}$ 是 $\mathcal{M}$ 向 $\mathrm{span}(\boldsymbol{q})$ 上的正交投影. 令 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{P}$ 是 $\mathcal{V}$ 上的线性变换. 求证：

1. $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{q}\rangle \boldsymbol{q}$.
2. $\boldsymbol{Q}$ 是正交变换，且其正交相似标准形是 $\mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$. 称 $\boldsymbol{Q}$ 为关于超平面 $\mathrm{span}(\boldsymbol{q})^\perp$ 的反射.

练习 8.2.11 设 $\boldsymbol{Q}$ 是 n 维欧氏空间 $\mathcal{V}$ 上的正交变换，$\lambda_0 = 1$ 是一个特征值，对应的特征子空间 $\mathcal{N}\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}$ 的维数是 $n - 1$. 证明，$\boldsymbol{Q}$ 是反射.

练习 8.2.12 欧氏空间 $\mathcal{V}$ 上的线性变换 f，如果满足 $ff^* = f^*f$，则称 f 是一个**正规变换**. 验证对称变换和正交变换都是正规变换.

实矩阵 A，如果满足 $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$，则称 A 是一个**正规矩阵**. 验证对称、反对称、正交矩阵都是正规矩阵.

8.3 酉空间

练习 8.3.1 在 $\mathbb{C}[x]_n$ 中定义二元函数 $\langle f,g\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)\overline{g(k)}$.

1. 证明，它定义了 $\mathbb{C}[x]_n$ 上的一个内积.

2. 当 $n=3$ 时，求它的一组标准正交基.

练习 8.3.2 在具有标准内积的酉空间 $\mathbb{C}^3$ 中，设 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$，求与之线性等价的一个正交向量组.

练习 8.3.3 证明命题 8.3.9 .

练习 8.3.4 证明命题 8.3.10 .

练习 8.3.5 利用 Schur 分解证明命题 8.3.13 .

练习 8.3.6 证明，酉矩阵的行列式的绝对值为 1；酉矩阵的特征值的绝对值为 1.

练习 8.3.7 设 f 是酉空间 $\mathcal{V}$ 上的 Hermite 变换，证明，对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{V}$，$\langle f(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a}\rangle$ 都是实数.

练习 8.3.8 如果矩阵的共轭转置等于其自身的负矩阵，那么该矩阵称为**反 Hermite 矩阵**或**斜 Hermite 矩阵**. 证明，反 Hermite 矩阵是正规矩阵，且其特征值都是纯虚数.

练习 8.3.9 如果一个 Hermite 矩阵的特征值都是正实数，则称其为**正定** Hermite 矩阵. 证明，二元函数 $\overline{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{a}$ 定义了 $\mathbb{C}^n$ 上的一个内积，当且仅当 A 是正定 Hermite 矩阵.

练习 8.3.10 利用酉矩阵的酉相似标准形证明定理 8.2.18 .

练习 8.3.11 判断以下矩阵是否是酉矩阵、Hermitian 矩阵、反 Hermitian 矩阵、正规矩阵，再计算谱分解.

1. $\begin{bmatrix}0 & 1-\mathrm{i}\\ i+1 & 1\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}2 & 1+\mathrm{i}\\ \mathrm{i}-1 & 3\end{bmatrix}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1-\mathrm{i}\\ 1+\mathrm{i} & -1\end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix}0 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0 & 0\end{bmatrix}$.

5. $A=\begin{bmatrix}\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i}\\ 1 & \mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$，考虑 $A^{\mathrm{H}}A$ 和 AA^{H}.

练习 8.3.12 证明或举出反例.

1. 既是 Hermitian 矩阵又是酉矩阵的矩阵是对角阵.

2. 如果 H 是 Hermitian 矩阵，则 $\mathrm{i}H$ 是反 Hermitian 矩阵.

3. 如果 A 是 n 阶实方阵，则 $A+\mathrm{i}I_n$ 可逆.

4. 如果 A 是 n 阶酉矩阵，则 $A+\mathrm{i}I_n$ 可逆.

5. Hermitian 矩阵的行列式是实数.

6. 反 Hermitian 矩阵的行列式是纯虚数.

练习 8.3.13 给定 n 阶实方阵 A,B，我们考虑复矩阵 $A+\mathrm{i}B$ 和实矩阵 $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ 的关系.

1. 证明 $A+\mathrm{i}B$ 是 Hermitian 矩阵当且仅当 $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ 是实对称矩阵.

2. 证明 $A+\mathrm{i}B$ 是酉矩阵当且仅当 $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ 是正交矩阵.

3. 证明对 n 维实向量 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 和实数 a,b，我们有 $(A+\mathrm{i}B)(\boldsymbol{v}+\mathrm{i}\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{v}+\mathrm{i}\boldsymbol{w})(a+\mathrm{i}b)$ 当且仅当 $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

4. 证明 $(A_1+\mathrm{i}B_1)(A_2+\mathrm{i}B_2)=A_3+\mathrm{i}B_3$ 当且仅当 $\begin{bmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 & -B_2 \\ B_2 & A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_3 & -B_3 \\ B_3 & A_3 \end{bmatrix}$，其中 $A_i,B_i,i=1,2,3$ 是 n 阶实方阵.

5. $\operatorname{trace}(A+\mathrm{i}B)$ 和 $\operatorname{trace}\left(\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\right)$ 有何关系？$\det(A+\mathrm{i}B)$ 和 $\det\left(\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\right)$ 如何？

6. 求可逆矩阵 C 使得矩阵 $\begin{bmatrix} A+\mathrm{i}B & O \\ O & A-\mathrm{i}B \end{bmatrix}=C\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}C^{-1}$.

   注意：因此两矩阵相似.

练习 8.3.14 考虑酉矩阵 $U=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，其中 $a,b,c,d\in\mathbb{C}$.

1. 证明存在 $\phi\in\mathbb{R}$ 使得 $c=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\overline{b}, d=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\overline{a}$. 计算 $\det(U)$，将结果用 ϕ 表示.

2. 由 $|a|^2+|b|^2=1$ 可设 $|a|=\cos\theta,|b|=\sin\theta$，其中 $\theta\in\mathbb{R}$. 求 $\phi_1,\phi_2\in\mathbb{R}$ 满足 $U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}\cos\theta & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}\sin\theta \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_2}\sin\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1}\cos\theta \end{bmatrix}$.

   注意：这说明一个 2 阶酉矩阵被四个实系数 $\phi,\phi_1,\phi_2,\theta$ 决定.

3. 求 $\psi_1,\psi_2\in\mathbb{R}$，使得 $U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}D_1R_\theta D_2$，其中 R_θ 是旋转矩阵 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，而 $D_j=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_j} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi_j} \end{bmatrix}$.

   注意：这也说明一个 2 阶酉矩阵被四个实系数 $\phi,\psi_1,\psi_2,\theta$ 决定.

练习 8.3.15 设 n 阶酉矩阵 A 满足 $A=A^{\mathrm{T}}$（A 未必是 Hermitian 矩阵).

1. 证明 $\overline{A}=A^{-1}$ 是 A 的逆矩阵.

2. 证明 A 的每个特征值都有实特征向量.

3. 证明存在对角阵 D 和（实）正交矩阵 P，使得 $A = PDP^{-1}$.

注意 $\frac{1}{\sqrt{n}}F_n$ 就满足条件，其中 F_n 是 n 阶 Fourier 矩阵.

练习 8.3.16 ☕ 对任意 n 阶酉矩阵 U，证明存在对角阵 D、酉矩阵 P_1 和（实）正交矩阵 P_2，使得 $U = P_1DP_2^{\mathrm{T}}$. 比较和 SVD 的异同.

练习 8.3.17 给定 n 阶 Fourier 矩阵 F_n，计算 $\det(F_n)$ 和 F_n^2.

练习 8.3.18 证明命题 8.3.18 .

练习 8.3.19 证明定理 8.3.20 .

练习 8.3.20 对任意复数 $c_1, \cdots, c_n$，形如 $\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & & c_{n-2} \\ \vdots & c_{n-1} & c_0 & \ddots & \vdots \\ c_2 & & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$ 的方阵称为**循环矩阵**.

1. 证明，对任意 n 阶循环矩阵 C，$F_n^{-1}CF_n$ 是对角矩阵，其中 F_n 是 n 阶 Fourier 矩阵.

2. 设计一个计算 Cx，其中 C 为循环矩阵的快速算法.

3. 设计一个求解 $Cx = b$，其中 C 为循环矩阵的快速算法.

阅读 8.3.21 (Toeplitz 矩阵)

阅读 8.3.22 (实 Schur 分解)