高等微积分第六次作业

1、(1) $f(x)\neq 0$ 时 $(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

(2) $f(x)\in(-1,1)$ 时 $(\arcsin(f(x)))' = \frac{f'(x)}{\sin'(\arcsin(f(x)))} = \frac{f'(x)}{\cos(\arcsin(f(x)))}$

$= \frac{f'(x)}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(f(x)))}} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

(3) $(u(x)^{v(x)})' = (e^{v(x)\ln u(x)})'$

$= e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))' = e^{v(x)\ln u(x)}(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)})$

$= u(x)^{v(x)}(\frac{v(x)u'(x)}{u(x)} + v'(x)\ln u(x))$

2、(1) $D\subset\mathbb{R}^n$，$f: D\to\mathbb{R}^m$ 在 x_0 处可微，如果存在线性映射 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 且 h 属于 0 的某开球邻域，使 $f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + \alpha(h)$，其中 $\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h} = 0$

(2) pf：证充分性

f 在 x_0 处可导 $\Rightarrow \exists A$ 使 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{h} = 0$

$\forall h\in B_r(0)$ 设 $f(x_0+h)-f(x_0)-Ah = \alpha(h)$ 则 $\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h} = 0$

$\therefore f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + \alpha(h)$ 其中 $\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h} = 0 \Rightarrow f$ 在 x_0 处可微

证必要性 $\forall h\in B_r(0)$ $\exists\,\alpha(h)$ 使 $\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h} = 0$ 且 $f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + \alpha(h)$

不妨设 $L(h) = Ah$

则 $f(x_0+h)-f(x_0)-Ah = \alpha(h)$

则 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{h} = 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A \Rightarrow f$ 在 x_0 处可导.

(3) pf：反证法，假设 $|g'(0)| > |h'(0)|$

对 $x>0$ $|g'(0)| = \lim_{x\to 0^+}\left|\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right| = \lim_{x\to 0^+}\frac{|g(x)|}{x}$，$|h'(0)| = \lim_{x\to 0^+}\frac{|h(x)|}{x}$

$|g'(0)| > |h'(0)|$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{|g(x)|-|h(x)|}{x} > 0$

而 $x>0$，$|g(x)|\leq|h(x)|$ 则 $\lim_{x\to 0^+}\frac{|g(x)|-|h(x)|}{x}\leq 0$ 二者矛盾

综上：假设不成立，$|g'(0)|\leq|h'(0)|$

3、(1) f 在 $x=a$ 处可导，$\ln|y|$ 在 $y\neq 0$ 处可导

$(\ln|f(a)|)' = \frac{f'(a)}{f(a)} = \frac{L}{f(a)}$

则 $\lim_{h\to 0}\frac{\ln|f(a+h)|-\ln|f(a)|}{h} = \frac{L}{f(a)}$

设 $g(h) = \frac{\ln|f(a+h)|-\ln|f(a)|}{h}$ 则 $\lim_{h\to 0} g(h) = \frac{L}{f(a)}$

根据 Heine 定理 令 $x_n = \frac{1}{n}$ $(x_n\neq 0)$ 则 $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \frac{L}{f(a)}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} n(\ln|f(a+h)| - \ln|f(a)|) = \frac{L}{f(a)}$

(2) $g(h)=\dfrac{\ln|f(a+h)|-\ln|f(a)|}{h}$ 设 $\varphi(h)=e^{g(h)}=e^{\ln\left(\frac{|f(a+h)|}{|f(a)|}\right)^{1/h}}=\left(\dfrac{|f(a+h)|}{|f(a)|}\right)^{1/h}$

$\lim\limits_{h\to0}\varphi(h)=\lim\limits_{h\to0}e^{g(h)}\ \overline{\overline{e^x\text{连续}}}\ e^{\lim\limits_{h\to0}g(h)}=e^{L/f(a)}$

由 Heine 定理 令 $x_n=\frac{1}{n}$ $(x_n\neq0)$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\lim\limits_{h\to0}\varphi(h)=e^{L/f(a)}$.

4、(1) 不一定处处可导

设 $f'(x_0)=0$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$，设 $y_0=f(x_0)$.

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall|x-x_0|<\delta$ 有 $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<\varepsilon$

则 $\forall k>0$ 取 $\varepsilon=\frac{1}{k}$ $\exists\delta>0$ $\forall|x-x_0|<\delta$

$$\left|\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\right|=\left|\frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\right|>\frac{1}{\varepsilon}=k$$

则 $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{f(y)-f^{-1}(y_0)}$ 不存在，因此这时 f^{-1} 在 y_0 不可导

(2) $(f^{-1}(x))'=\dfrac{1}{(f')(f^{-1}(x))}$

$h'(x)=(g(f^{-1}(x)))'=(g')(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)=(g')(f^{-1}(x))\dfrac{1}{(f')(f^{-1}(x))}=\dfrac{g'}{f'}(f^{-1}(x))$

$h''(x)=(h'(x))'=\left(\dfrac{g'}{f'}\right)'(f^{-1}(x))=\dfrac{g''f'-g'f''}{f'^2}(f^{-1}(x))$

5、(1) 证明: $x>0$ 时 $f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ 、 $P_1(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}$

$f''(x)=(f'(x))'=(-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4})e^{-1/x}$ $P_2(\frac{1}{x})=-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}$

采用数学归纳法，设 $x>0$ 时，$f^{(k)}(x)=P_k(\frac{1}{x})e^{-1/x}$ 且 P_k 的最高次高于 P_{k-1}

$f^{(k+1)}(x)=(f^{(k)}(x))'=(P_k(\frac{1}{x})e^{-1/x})'=\left(P_k'(\frac{1}{x})+P_k(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\right)e^{-1/x}$

而 $P_k'(\frac{1}{x})=(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{c_i}{x^i})'=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{-ic_i}{x^{i+1}}$ 则 $P_k'(\frac{1}{x})$ 是次数高于 $P_k(\frac{1}{x})$ 的多项式

$P_k(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}$ 也是次数高于 $P_k(\frac{1}{x})$ 的多项式

$\therefore f^{(k+1)}(x)=(P_k'(\frac{1}{x})+P_k(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2})e^{-1/x}=P_{k+1}(\frac{1}{x})e^{-1/x}$，其中 $P_{k+1}(\frac{1}{x})$ 是次数高于 $P_k(\frac{1}{x})$ 的多项式

则 $\forall n\in N_+$，$\exists P_n(t)$ 是多项式 使 $\forall x>0$ $f^{(n)}(x)=P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$.

(2) 解: $x<0$ 时 $f'(x)=(0)'=0$ 设 $f^{(k)}(x)=0$，$\forall x_0<0$ $f^{(k+1)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{0-0}{x-x_0}=0$

则 $f^{(k+1)}(x)=0$ $(x<0)$ $\Rightarrow x<0$ 时 $f^{(n)}(x)=0$

因此左导数 $\lim\limits_{x\to0^-}f^{(n)}(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x-0}=0$

$x>0$ 时 先证 $\forall k\in Z_+$ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-1/x}}{x^k}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^k}{e^t}=0$

$\forall\varepsilon>0$ 取 $M=k+\sqrt{k^2-\ln\varepsilon}$ $\forall t>M$ 有 $2k\sqrt{t}-t<\ln\varepsilon$

$$\frac{t^k}{e^t}=e^{k\ln t-t}<e^{2k(\sqrt{t}-1)-t}<e^{2k\sqrt{t}-t}<e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon$$

则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^k}{e^t}=0$ 得证 则 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{-1/x}}{x^k}=0$

归纳假设 $f^{(n)}(0)=0$ $n=0$ 时显然成立，假设 $n=k$ 时也成立

右导数 $\lim\limits_{x\to0^+}f^{(k+1)}(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f^k(x)-f^k(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f^k(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{P_k(\frac{1}{x})}{x}e^{-1/x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{c_i}{x^{i+k}}\right)e^{-1/x}=\sum0=0$

左导数已证为0，则 $f^{(n)}(0)=0$ 得证

6. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+x}=\frac{1}{x}(1+\frac{2}{x^2-1})=\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})=\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x+1)}$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$$

$f'(x)=-(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2})$，用归纳法证 $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}})$

设 $f^{(k)}(x)=(-1)^k k!(\frac{1}{(x-1)^{k+1}}-\frac{1}{x^{k+1}}+\frac{1}{(x+1)^{k+1}})$.

$f^{(k+1)}(x)=(-1)^k k!\ (-\frac{k+1}{(x-1)^{k+2}}+\frac{k+1}{x^{k+2}}-\frac{k+1}{(x+1)^{k+1}})=(-1)^{k+1}(k+1)!(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}})$.

则 $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}})$.