

## 习题课材料（七）

### 1 事件与概率

习题 1. 一个箱子中装有标号为  $1, 2, \dots, N$  的球, 这些球除标号外完全相同。从中有放回的摸了  $n$  次球, 依次记下其号码。(1) 试求记下的号码按顺序严格上升的概率;(2) 这些号码按顺序上升 (不一定严格) 的概率。

习题 2. 从数列  $1, 2, \dots, N$  中不放回地取出  $n$  个数, 并按大小排列成  $x_1 < x_2 < \dots < x_m < \dots < x_n$ , 试求  $x_m = M$  的概率, 这里  $1 \leq M \leq N$ 。

习题 3. 若上题中采用有放回取数, 这是  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \leq \dots \leq x_n$ , 求此时  $x_m = M$  的概率。这里  $1 \leq M \leq N$ 。

习题 4. 用概率论的思想证明如下恒等式:

$$1 + \frac{A-a}{A-1} + \frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)} + \dots + \frac{(A-a) \cdots 2 \cdot 1}{(A-1) \cdots (a+1)a} = \frac{A}{a}$$

这里  $A, a$  都是正整数, 且  $A > a$ 。

习题 5. 某班有  $N$  个士兵, 每人各有一支枪, 这些枪外形完全一样, 在一此紧急集合中, 若每人随机取走一支枪。(1) 至少有一个人拿到自己的枪的概率。(2) 恰好有  $k(0 \leq k \leq N)$  个人拿到自己的枪的概率。(提示: 考虑概率  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ )。

习题 6. 食品厂把印有水浒 108 将之一的画卡作为赠券收入某种儿童食品袋中, 每袋一卡, 试求购买  $n$  袋这种食品而能收齐全套画卡的概率。

### 2 条件概率与独立性

习题 7. 设一个家庭中有  $n$  个小孩的概率为:

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & , \quad n \geq 1 \\ 1 - \frac{\alpha p}{1-p}, & n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $0 < p < 1, 0 < \alpha < \frac{1-p}{p}$ , 若认为生一个小孩为男孩或女孩是等可能的, 求证: (1) 一个家庭有  $k(k \geq 1)$  个男孩的概率为  $\frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{k+1}}$ ; (2) 已知家庭中至少有一个男孩, 求此家庭中至少有两个男孩的概率; (3) 已知家庭中没有女孩, 求正好有一个男孩的概率。

习题 8. 在一次选举中, 候选人  $A$  得到  $n$  张选票而候选人  $B$  得到  $m$  张选票, 且  $n > m$ , 假定选票的一切排列顺序是等可能的。证明: 在计票过程中,  $A$  的票数始终领先的概率为  $\frac{n-m}{n+m}$ 。

习题 9. 在拍卖过程中, 共有  $n$  次不同的报价, 且这  $n$  次报价出现的顺序是完全随机。你采用如下策略: 前  $m$  次报价一律拒绝, 在后面的报价中, 若遇到比前  $m$  次都高的报价, 则接受; 否则等到最后, 接受最后一次报价, 求此种策略能得到最高报价的概率。当  $n \rightarrow \infty$  时, 是否存在最佳的  $\alpha = \frac{m}{n}$ , 使得得到最高报价的概率最大。