

习题课材料（七）

1 事件与概率

习题 1. 一个箱子中装有标号为 $1, 2, \dots, N$ 的球, 这些球除标号外完全相同。从中有放回的摸了 n 次球, 依次记下其号码。(1) 试求记下的号码按顺序严格上升的概率;(2) 这些号码按顺序上升 (不一定严格) 的概率。

习题 2. 从数列 $1, 2, \dots, N$ 中不放回地取出 n 个数, 并按大小排列成 $x_1 < x_2 < \dots < x_m < \dots < x_n$, 试求 $x_m = M$ 的概率, 这里 $1 \leq M \leq N$ 。

习题 3. 若上题中采用有放回取数, 这是 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \leq \dots \leq x_n$, 求此时 $x_m = M$ 的概率。这里 $1 \leq M \leq N$ 。

习题 4. 用概率论的思想证明如下恒等式:

$$1 + \frac{A-a}{A-1} + \frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)} + \dots + \frac{(A-a) \cdots 2 \cdot 1}{(A-1) \cdots (a+1)a} = \frac{A}{a}$$

这里 A, a 都是正整数, 且 $A > a$ 。

习题 5. 某班有 N 个士兵, 每人各有一支枪, 这些枪外形完全一样, 在一此紧急集合中, 若每人随机取走一支枪。(1) 至少有一个人拿到自己的枪的概率。(2) 恰好有 $k(0 \leq k \leq N)$ 个人拿到自己的枪的概率。(提示: 考虑概率 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$)。

习题 6. 食品厂把印有水浒 108 将之一的画卡作为赠券收入某种儿童食品袋中, 每袋一卡, 试求购买 n 袋这种食品而能收齐全套画卡的概率。

2 条件概率与独立性

习题 7. 设一个家庭中有 n 个小孩的概率为:

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & , \quad n \geq 1 \\ 1 - \frac{\alpha p}{1-p}, & n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $0 < p < 1, 0 < \alpha < \frac{1-p}{p}$, 若认为生一个小孩为男孩或女孩是等可能的, 求证: (1) 一个家庭有 $k(k \geq 1)$ 个男孩的概率为 $\frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{k+1}}$; (2) 已知家庭中至少有一个男孩, 求此家庭中至少有两个男孩的概率; (3) 已知家庭中没有女孩, 求正好有一个男孩的概率。

习题 8. 在一次选举中, 候选人 A 得到 n 张选票而候选人 B 得到 m 张选票, 且 $n > m$, 假定选票的一切排列顺序是等可能的。证明: 在计票过程中, A 的票数始终领先的概率为 $\frac{n-m}{n+m}$ 。

习题 9. 在拍卖过程中, 共有 n 次不同的报价, 且这 n 次报价出现的顺序是完全随机。你采用如下策略: 前 m 次报价一律拒绝, 在后面的报价中, 若遇到比前 m 次都高的报价, 则接受; 否则等到最后, 接受最后一次报价, 求此种策略能得到最高报价的概率。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 是否存在最佳的 $\alpha = \frac{m}{n}$, 使得得到最高报价的概率最大。