2019 年秋季《高等微积分 1》期末考试试题

2020 年 1 月 5 日 8 : 00-10 : 00

本试卷分两页, 共七道试题, 各题分值如下: 第 1 题 $5+5$; 第 2 题 $5+10$; 第 $3,7$ 题每小问 5 分; 第 4 题 $7+8$; 第 $5,6$ 题 $5+10$ 分.

1 设 $f(x)$ 是次数为 n 的多项式 $(n \geq 1)$. 令

$$F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + \ldots + f^{(n)}(x).$$

(1) 计算 $e^{-x}F(x)$ 的导函数.

(2) 证明: 对任何实数 x, 有

$$\int_0^x f(t)e^{-t}dt = F(0) - e^{-x}F(x).$$

解. (1) 由于 f 是 n 次多项式, 它的 $n+1$ 阶导函数 $f^{(n+1)}(x)$ 恒等于 0. 这样, 直接求导可得

$$\begin{aligned}\left(e^{-x}F(x)\right)' &= \sum_{i=0}^{n}(e^{-x}f^{(i)}(x))' = \sum_{i=0}^{n}\left(-e^{-x}f^{(i)}(x) + e^{-x}f^{(i+1)}(x)\right) \\ &= e^{-x}f^{(n+1)}(x) - e^{-x}f(x) = -e^{-x}f(x).\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 的结论, 利用 Newton-Leibniz 公式, 可得

$$\int_0^x e^{-t}f(t)dt = \left(-e^{-t}F(t)\right)|_0^x = F(0) - e^{-x}F(x).$$

□

2 (1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x-x}$.

(2) 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 满足

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1},\quad \forall x\neq 0.$$

求 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近展开至二阶的带皮亚诺余项的泰勒公式, 即要求余项是 $o(x^2)$.

解. (1) 熟知当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

由此可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

另一方面, 利用 $\frac{0}{0}$ 型洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\frac{1}{3}.$$

结合这两方面, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x-x}=\frac{\lim_{x\to 0}(x-\sin x)/x^3}{\lim_{x\to 0}(\tan x-x)/x^3}=\frac{1}{2}.$$

(2) 由 f 在 $x=0$ 处连续, 有

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=1,\quad (1\text{ 分}).$$

由此可知

$$\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}\cdot\frac{x}{e^x-1}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\\
&=(-\frac{1}{2})\cdot 1=-\frac{1}{2},\quad (2\text{ 分}).
\end{aligned}$$

下面来计算 $f''(0)$. 首先, 有

$$f'(x)=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2},\quad \forall x\neq 0,\quad (2\text{ 分})$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
f''(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}+\frac{1}{2}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x+\frac{1}{2}(e^x-1)^2}{x^3}\cdot\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^2 \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x+\frac{1}{2}(e^x-1)^2}{x^3}.
\end{aligned}
$$

利用带 Peano 余项的 Taylor 公式, 有

$$
\begin{aligned}
&e^x-1-xe^x+\frac{1}{2}(e^x-1)^2 \\
=&x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \\
&+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2 \\
=&\frac{1}{6}x^3+o(x^3),
\end{aligned}
$$

代入 $f''(0)$ 的表达式, 即得 $f''(0)=\frac{1}{6}$, ($f''(0)$ 的计算共 4 分).

这样, f 在 $x=0$ 处有二阶导数, 由带 Peano 余项的 Taylor 公式, 当 $x\to 0$ 时有

$$
\begin{aligned}
f(x) =&f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2) \\
=&1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+o(x^2), \quad \text{(1 分)}.
\end{aligned}
$$

□

3 考虑如下反常积分

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(1) 对怎样的 x, 上述反常积分收敛? 请证明你的断言.

(2) 证明: 对 $x>0$, 有 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

(3) 证明: 对 $x>0$, 有

$$\Gamma(x)=2\int_0^{\infty}s^{2x-1}e^{-s^2}ds.$$

解. (1) 原点可能是瑕点, 我们分别考虑瑕积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 及无穷积分 $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ 的收敛性.

(1.a) 瑕积分的收敛性. 注意到

$$\lim_{t\to 0+}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{x-1}}=1,$$

由比较定理的极限形式可知: 瑕积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 与 $\int_0^1 t^{x-1}dt$ 有相同的收敛发散性, 当且仅当 $x-1>-1$ 时收敛. 所以, 当且仅当 $x>0$ 时, 瑕积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 收敛.

(1.b) 无穷积分的收敛性. 注意到

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x+1}}{e^t}=0,$$

由比较定理的极限形式可知, 对任何实数 x, 无穷积分 $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ 都收敛.

结合这两方面, 反常积分

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt+\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

收敛当且仅当 $x>0$.

(2) 对任何 $y>0$, 有

$$\begin{aligned}\Gamma(y)&=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 t^{y-1}e^{-t}dt+\lim_{A\to+\infty}\int_1^A t^{y-1}e^{-t}dt\\&=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 t^{y-1}e^{-t}dt+\lim_{\epsilon\to 0+}\int_1^{1/\epsilon} t^{y-1}e^{-t}dt\\&=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^{1/\epsilon} t^{y-1}e^{-t}dt.\end{aligned}$$

利用分部积分, 对 $x>0$, 有

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^{1/\epsilon} t^{x}e^{-t}dt\\&=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^{1/\epsilon} t^{x}(-e^{-t})'dt\\&=\lim_{\epsilon\to 0+}\left(t^x(-e^{-t})|_\epsilon^{1/\epsilon}+\int_\epsilon^{1/\epsilon}xt^{x-1}e^{-t}dt\right)\\&=\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\epsilon^xe^{-\epsilon}-(1/\epsilon)^xe^{-1/\epsilon}\right)+x\Gamma(x)\\&=x\Gamma(x),\end{aligned}$$

其中最后一步用到了常用的极限: 当 $x>0$ 时 $\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\epsilon^x=0$; 对任何 x 有

$$\lim_{\epsilon\to 0+}(1/\epsilon)^x e^{-1/\epsilon}=\lim_{A\to+\infty}\frac{A^x}{e^A}=0.$$

(3) 令 $t=s^2$ 换元, 可得

$$\begin{aligned}\Gamma(x)&=\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_\epsilon^{1/\epsilon}t^{x-1}e^{-t}dt\right)\\&=\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_{\sqrt{\epsilon}}^{1/\sqrt{\epsilon}}s^{2(x-1)}e^{-s^2}d(s^2)\right)\\&=\lim_{\epsilon\to 0+}\left(2\int_{\sqrt{\epsilon}}^{1/\sqrt{\epsilon}}s^{2x-1}e^{-s^2}ds\right)\\&=2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}ds.\end{aligned}$$

□

4 (1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 的收敛半径, 其中 $(2n+1)!!=(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1$ 表示双阶乘.

(2) 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数.

解. (1) 对每个 x, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!!}\right|}{\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{2n+3}=0,$$

由达朗贝尔判别法可知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处绝对收敛, 由此可知其收敛半径为 $R=+\infty$.

(共 7分, 其中答案 2 分, 具体证明过程 5 分)

(2) 对每个 $x\in\mathbf{R}$, 有 $\frac{1}{n^2+x^2}\le\frac{1}{n^2}$. 熟知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 由比较定理可知函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上点点收敛.

(证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ 点点收敛 3分)

注意到

$$|\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'| = \frac{2|x|}{(n^2+x^2)^2} = \frac{2n|x|}{n(n^2+x^2)^2} \le \frac{n^2+x^2}{n(n^2+x^2)^2} \le \frac{1}{n^3}, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

熟知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛, 由 Weierstrass 强级数判别法可知函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛. 这样, 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上可逐项求导, 其和函数是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数.

(证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$ 一致收敛 5分) □

5 (1) 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

(2) 设 a, b 是给定的正数. 计算定积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}.$$

解. (1) 注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4-1} &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)},\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4-1} &= \int \frac{dx}{4(x-1)} - \int \frac{dx}{4(x+1)} - \int \frac{dx}{2(x^2+1)}\\ &= \frac{\ln|x-1|}{4} - \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\arctan x}{2} + C.\end{aligned}$$

(2) 答案为 $\frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$.

首先, 利用周期性以及换元公式可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(y+\pi)}{a\cos^2(y+\pi)+b\sin^2(y+\pi)}\\&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}.\end{aligned}$$

其次, 计算不定积分

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}&=\int\frac{d\tan x}{a+b\tan^2 x}\\&=\frac{1}{\sqrt{ab}}\int\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}}\tan x}{1+(\sqrt{\frac{b}{a}}\tan x)^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan(\sqrt{\frac{b}{a}}\tan x)+C.\end{aligned}$$

令 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan(\sqrt{\frac{b}{a}}\tan x)$, 它是 $f(x)=\frac{1}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的原函数. 注意到

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}F(x)=\pm\frac{\pi}{2\sqrt{ab}},$$

可把 F 扩充为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的连续函数

$$\widetilde{F}(x)=\begin{cases}F(x), & \text{如果}x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\\ \pm\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}, & \text{如果}x=\pm\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

利用 Newton-Leibniz 公式可得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\widetilde{F}(x)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{ab}}.$$

结合这两部分结果, 即得

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}=\frac{2\pi}{\sqrt{ab}}.$$

□

6 (1) 设 β 满足 $0<\beta<1$. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1-\frac{\beta}{n})$ 的收敛发散性, 请证明你的断言.

(2) 给定实数 α, 定义数列

$$x_n=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}.$$

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 的收敛发散性, 请证明你的断言.

解. (1) 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1-\frac{\beta}{n})|}{\beta/n}=\lim_{x\to0+}\frac{-\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{1/(1-x)}{1}=1,$$

熟知级数 $\sum\frac{\beta}{n}$ 发散, 利用正项级数的比较定理可知 $\sum|\ln(1-\frac{\beta}{n})|$ 发散, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-\frac{\beta}{n})=-\sum|\ln(1-\frac{\beta}{n})|$$

也是发散的.

(2) 当 $\alpha\le-1$ 时, 有

$$|x_n|=\frac{|\alpha|\cdot(|\alpha|+1)\cdot...\cdot(|\alpha|+n-1)}{n!}\ge1,$$

则 $\{x_n\}$ 不可能收敛到零, 此时 $\sum x_n$ 发散.

当 $\alpha>-1$ 时, 如果 α 是非负整数, x_n 从某项起恒为零, 相应的级数 $\sum x_n$ 收敛. 以下假设 α 不是非负整数, 此时每项 x_n 都不等于零, 有

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\frac{n-\alpha}{n+1}<1,$$

即 $|x_n|$ 递减. 我们断言 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$, 这样由于 $\sum x_n$ 从某项开始是交错级数, 利用 Leibniz 定理可知此时级数 $\sum x_n$ 收敛.

最后我们来证明前述断言. 记 $\beta=1+\alpha>0$, 注意到

$$\begin{aligned}|x_n|&=|\frac{-\alpha}{1}|\cdot|\frac{1-\alpha}{2}|\cdot...\cdot|\frac{n-1-\alpha}{n}|\\&=|\frac{1-\beta}{1}|\cdot...\cdot|\frac{n-\beta}{n}|\\&=|(1-\frac{\beta}{1})|\cdot...\cdot|(1-\frac{\beta}{n})|\end{aligned}$$

取正整数 k 使得 $1-\frac{\beta}{k+1}>0$, 则对 $n\geq k+1$ 有

$$|x_n|=\left(\prod_{i=1}^{k}|1-\frac{\beta}{i}|\right)\cdot\left(\prod_{i=k+1}^{n}(1-\frac{\beta}{i})\right)=C\prod_{i=k+1}^{n}(1-\frac{\beta}{i}). \tag{1}$$

利用函数 e^x 的 Taylor 公式, 有

$$e^{-y}=1-y+\frac{e^{\xi}}{2}y^2\geq 1-y,$$

代入 (1) 式即得

$$|x_n|\leq C\prod_{i=k+1}^{n}e^{-\beta/i}=Ce^{-\beta(\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n})}\to 0,\quad \text{as } n\to\infty.$$

总结一下, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛当且仅当 $\alpha>-1$.

$\square$

7 设 n 是正整数.

(1) 计算定积分

$$K_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx.$$

(2) 对 n 用归纳法, 证明: $K_n\geq\frac{4}{3\sqrt{n}}$.

(3) 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 满足对任何 $x\notin[0,1]$ 都有 $f(x)=0$. 对每个正整数 n, 记 $Q_n(t)=(1-t^2)^n$, 定义函数

$$P_n(x)=\frac{1}{K_n}\int_0^1 f(t)Q_n(t-x)dt,\quad \forall x\in[0,1].$$

证明: 函数序列 $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

解. (1) 令 $x=\cos\alpha$ 进行换元, 可得

$$K_n=2\int_0^1(1-x^2)^n dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin^2\alpha)^n d(\cos\alpha)=2I_{2n+1},$$

其中 $I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\alpha d\alpha$, 满足递推式 $I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2}$. 由此可得

$$K_n=2I_{2n+1}=2\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}I_1=\frac{2\cdot(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

(2) 对 n 用归纳法. $n=1$ 时, $K_1=\frac{4}{3}=\frac{4}{3\sqrt{1}}$ 时, 不等式显然成立. 假设 $n=m$ 时有 $K_m\geq\frac{4}{3\sqrt{m}}$, 则 $n=m+1$ 时有

$$K_{m+1}=\frac{2m+2}{2m+3}\cdot K_m\geq\frac{2m+2}{2m+3}\cdot\frac{4}{3\sqrt{m}}.$$

下面来证明 $\frac{2m+2}{2m+3}\cdot\frac{4}{3\sqrt{m}}\geq\frac{4}{3\sqrt{m+1}}$, 这是显然的, 因为它等价于

$$\left(\frac{2m+2}{2m+3}\right)^2\geq\frac{m}{m+1}\iff 3m+4\geq 0,$$

后者显然成立. 这就完成了归纳证明.

(3) 令 $t-x=s$ 进行换元, 可得

$$P_n(x)=\frac{1}{K_n}\int_{-x}^{1-x}f(x+s)Q_n(s)ds=\frac{1}{K_n}\int_{-1}^{1}f(x+s)Q_n(s)ds,$$

由此可得, 对任何 $x\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}|P_n(x)-f(x)|&=|\frac{1}{K_n}\int_{-1}^{1}f(x+s)Q_n(s)ds-\frac{1}{K_n}\int_{-1}^{1}f(x)Q_n(s)ds|\\&\leq\frac{1}{K_n}\int_{-1}^{1}|f(x+s)-f(x)|\cdot Q_n(s)ds\qquad(2)\\&=\frac{1}{K_n}\int_{-1}^{1}\bigstar.\end{aligned}$$

注意到 f 是 $[-1,2]$ 上的连续函数, 则在该区间上一致连续, 这样对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任何 $x_1,x_2\in[-1,2]$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 则有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$. 设

$|f|$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 M, 则由 (1) 式, 对任何 $x \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{K_n}\int_{-1}^{-\delta} \bigstar + \frac{1}{K_n}\int_{-\delta}^{\delta} \bigstar + \frac{1}{K_n}\int_{\delta}^{1} \bigstar \\
&\leq \frac{1}{K_n}\int_{-1}^{-\delta} 2MQ_n(s)ds + \frac{1}{K_n}\int_{-\delta}^{\delta} \epsilon Q_n(s)ds + \frac{1}{K_n}\int_{\delta}^{1} 2MQ_n(s)ds \\
&\leq \frac{1}{K_n}\int_{-1}^{-\delta} 2M(1-\delta^2)^n ds + \frac{1}{K_n}\int_{-1}^{1} \epsilon Q_n(s)ds + \frac{1}{K_n}\int_{\delta}^{1} 2M(1-\delta^2)^n ds \\
&\leq \frac{1}{K_n} \cdot 4M(1-\delta^2)^n + \epsilon \\
&\leq \frac{1}{K_n} \cdot 4M(1-\delta^2)^n + \epsilon \\
&\leq \frac{3\sqrt{n}}{4} \cdot 4M(1-\delta^2)^n + \epsilon,
\end{aligned}$$

当 n 充分大时, $\frac{3\sqrt{n}}{4} \cdot 4M(1-\delta^2)^n \leq \epsilon$, 从而有

$$|P_n(x) - f(x)| \leq 2\epsilon, \quad \forall x \in [0,1],$$

这就完成了证明. □