

# 离散数学 11 第一次作业

1. 设 9 座 2 厂分别为  $v_1, v_2, \dots, v_9$ . 若有些务联系, 则在两点之间建边, 以此获得简单图  $G$ . 总度数为偶数.
- ① 反证法. 若每个 2 厂均与 3 座联系, 则  $\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 9 \times 3 = 27$  不为偶数, 矛盾. 因此不可能每座 2 厂都只与其它 3 座 2 厂联系.
- ② 反证法. 若只有 4 座 2 厂与偶数个 2 厂有联系 (设点集为  $V_1$ ) 则只有 5 个 2 厂与奇数个 2 厂有联系 (设点集为  $V_2$ )

$$\sum_{v_i \in V_1} d(v_i) \text{ 为偶数} \quad \sum_{v_i \in V_2} d(v_i) \text{ 为奇数}$$

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = \sum_{v_i \in V_1} d(v_i) + \sum_{v_i \in V_2} d(v_i) \text{ 为奇数, 矛盾}$$

$\therefore$  不可能只有 4 座 2 厂与偶数个 2 厂有业务联系.

2. 假设没有孤立结点, 设为  $v_k$ . 则  $G - v_k$  共有  $(n-1)$  个结点. 每个结点最大度数为  $(n-2)$ . 度数之和不大于  $(n-1)(n-2)$ , 则边数  $m \leq \frac{1}{2} \sum_{v_i \in V - v_k} d(v_i) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ . 与  $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  矛盾, 则  $G$  中不存在孤立结点.

3. 对于每个结点  $v_i$ ,  $d^+(v_i) + d^-(v_i) = n-1$

$$\text{则 } d^-(v_i) = n-1 - d^+(v_i)$$

$$\text{而 } \sum d^+(v_i) = m = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \sum (d^-(v_i))^2 &= \sum (n-1 - d^+(v_i))^2 = \sum [(n-1)^2 - 2(n-1)d^+(v_i) + (d^+(v_i))^2] \\ &= \sum (n-1)^2 - 2(n-1) \sum d^+(v_i) + \sum (d^+(v_i))^2 \\ &= n(n-1)^2 - 2(n-1) \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + \sum (d^+(v_i))^2 \\ &= \sum (d^+(v_i))^2 \end{aligned}$$

$$\text{则 } \sum (d^-(v_i))^2 = \sum (d^+(v_i))^2 \text{ 得证}$$