2019 年春季《高等微积分 2》期中考试

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第一题 10 分, 其余每题 15 分.

1 设 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 与 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 都是 C^2 光滑函数, 定义

$$h(x,y)=f(x,y,g(x,y))$$

计算 h 的各个二阶偏导函数, 要求用 f,g 的高阶偏导函数表示.

2 (1) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数. 证明: 对任何 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, 有

$$f(x,y)=f(0,0)+x\int_0^1 f_x(tx,ty)dt+y\int_0^1 f_y(tx,ty)dt.$$

(2) 设 $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑映射, 满足对任何 $(x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 有

$$|\frac{\partial g(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}|\le K,\quad \forall 1\le i\le n.$$

证明: 对任何两点 $(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)$, 有

$$|g(x_1,...,x_n)-g(y_1,...,y_n)|\le nK\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}.$$

3 (1) 求出所有实数 a,b 及正数 α, 使得如下极限式成立:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\alpha}=0.$$

(2) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数, $f(0,0)=0$. 设 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=A,\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=B$, 定义三元函数 $H:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 为

$$H(x,y,z)=\begin{cases}\frac{f(xz,yz)}{z}, & \text{如果} z\neq 0,\\ Ax+By, & \text{如果} z=0.\end{cases}$$

证明: H 是 $\mathbf{R}^3$ 上的连续函数.

4 (1) 给定实数 θ, 把函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}$ 表示成关于 x 的幂级数.

(2) 定义函数 $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}d\theta$, 把函数 $f(x)$ 表示成关于 x 的幂级数.

5 在约束条件

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

下, 求 $f(x,y,z)=xy+yz$ 的最大值与最小值.

6 考虑三维区域

$$V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\leq 1\}.$$

计算 V 的体积.

7 考虑平面区域

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 2\pi, 0\leq y\leq 2\pi\},\quad E=\{(x,y)|0\leq x\leq \pi, 0\leq y\leq \pi\}.$$

(1) 证明:

$$\iint_D|\cos x+\cos y|dxdy=4\iint_E|\cos x+\cos y|dxdy.$$

(2) 计算二重积分 $\iint_E|\cos x+\cos y|dxdy$.