高等微积分(2)第二次作业

1. pf: 设 $F(x)=(tf(x)+g(x))^2$ 则 $F(x)\geq 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$\therefore \int_a^b F(x)\,dx\geq 0\quad \forall t$ 均成立

$\Rightarrow t^2\int_a^b f^2(x)\,dx+2t\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx+\int_a^b g^2(x)\,dx\geq 0\quad \forall t$ 均成立

考虑到 LHS 为关于 t 的二次函数，二次函数恒非负则 $\Delta\leq 0$.

$\Rightarrow \Delta=4\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2-4\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)\leq 0$

$\Rightarrow \left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2\leq\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$

2. pf: 想要证明"U是$\mathbb{R}^n$开集 $\Leftrightarrow$ U可以表示成一族开球邻域之并"

先证"$\Rightarrow$" 由U是$\mathbb{R}^n$开集 $\Rightarrow \forall x\in U$, $\exists B_{r_x}(x)\subset U$ 使 $x\in B_{r_x}(x)$

$U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subset\bigcup_{x\in U}B_{r_x}(x)\subset\bigcup_{x\in U}U=U$

则 $U=\bigcup_{x\in U}B_{r_x}(x)$，即$U$可表示成一族开球邻域之并

再证"$\Leftarrow$" 设这样一族开球邻域每一个均可表示为 $B_{r_\alpha}(x_\alpha)$ ($\alpha\in$ 指标集Λ)

$\forall c\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_{r_\alpha}(x_\alpha)\quad \exists k\in\Lambda$ s.t. $x\in B_{r_k}(x_k)$

即 c 属于半径为r_k，球心为x_k的开球邻域 则 $r_k>d(c,x_k)$

取 $\delta\in\mathbb{R}$ s.t. $0<\delta<r_k-d(c,x_k)$

则 $\forall y\in B_\delta(c)\quad d(x_k,y)\leq d(c,y)+d(c,x_k)\leq\delta+d(c,x_k)<r_k$

则 $B_\delta(c)\subset B_{r_k}(x_k)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_{r_\alpha}(x_\alpha)$，即 c 为 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_{r_\alpha}(x_\alpha)$ 内点 ($\forall c$)

$\therefore U$是$\mathbb{R}^n$开集.

3. 解: (1) $0\leq 1-\cos xy\leq\frac{(xy)^2}{2}=\frac{x^2y^2}{2}$，$x^2+y^2\geq 2xy$

$0\leq\frac{1-\cos xy}{x^2+y^2}\leq\frac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)}\leq\frac{x^2y^2}{4xy}\leq xy$

而 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy=0$ 由夹逼 Thm $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos xy}{x^2+y^2}=0$.

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-3x^2y+y^3-4xy}{x^2+y^2}$ 不存在

假设该极限存在. 设 $f(x,y)=\frac{-3x^2y+y^3-4xy}{x^2+y^2}$，$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=L$

$\forall t\in\mathbb{R}$ 设 $g(x)=(x,tx)$ 则 $\lim_{x\to 0}g(x)=(0,0)$

$\lim_{x\to 0}f\circ g(x)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=L$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-3tx^3+t^3x^3-4tx^2}{x^2+t^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-3tx+t^3x-4t}{t^2+1}=-\frac{4t}{t^2+1}$

即 $L=-\frac{4t}{t^2+1}\quad\forall t\in\mathbb{R}$ 成立. 这显然不可能，假设不成立

综上: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

(3) 设 $f(x,y)=x^2+y^2$ $g(t)=\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}$ 而 $\forall x,y\neq 0$, $x^2+y^2\neq 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}-e}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g\circ f(x,y) = \lim\limits_{t\to 0} g(t)$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t} \overset{\text{洛比达}}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{(e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)})'}{1} = \lim\limits_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\left(-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)+\frac{1}{t(1+t)}\right)$

$= \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{-(1+t)\ln(1+t)+t}{t^2(1+t)}$

$\overset{\text{洛必达}}{=\!=} e \lim\limits_{t\to 0} \frac{-\ln(1+t)-1+1}{2t(1+t)+t^2} \overset{\text{洛必达}}{=\!=} e \lim\limits_{t\to 0} -\frac{\ln(1+t)}{3t^2+2t}$

$\overset{\text{洛必达}}{=\!=} -e \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{6t+2} = -\frac{1}{2}e$.

(4) 设 $f(x,y)=\frac{ax+by}{(x^2+y^2)^{\alpha}}$

① $\alpha=\frac{1}{2}$ 假设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$ 存在 i) $a=0$, $b=0 \Rightarrow f(x,y)=0$ $(\forall (x,y)\neq(0,0))$ 则 $L=0$

ii) ab 不均为0 $\forall t\in\mathbb{R}$ 设 $g(x)=(x,tx)$ $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=(0,0)$ 而 $x\neq 0$ 时 $(x,tx)\neq(0,0)$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f\circ g(x) = L$

$\Rightarrow L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{ax+btx}{(x^2+t^2x^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a+bt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a+bt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}$ 这不可能！极限不存在

② $\alpha>\frac{1}{2}$ 假设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$ 存在 i) $a=0$ $b=0 \Rightarrow f(x,y)=0$ $(\forall (x,y)\neq(0,0))$ 则 $L=0$.

ii) ab 不均为0 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax+by}{(x^2+y^2)^{\alpha}} = L$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax+by}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = L\cdot \lim (x^2+y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} = L\cdot 0 = 0$ 此与①矛盾！极限不存在

③ $\alpha<\frac{1}{2}$ $\left|\frac{ax}{(x^2+y^2)^{\alpha}}\right| = \left|\frac{ax}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\right| \leq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}$.

$\Rightarrow -(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} \leq \frac{ax}{(x^2+y^2)^{\alpha}} \leq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}$. $(\frac{1}{2}-\alpha>0)$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \pm(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}=0$ 则根据夹逼 Thm. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax}{(x^2+y^2)^{\alpha}}=0$.

同理 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{by}{(x^2+y^2)^{\alpha}}=0$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax}{(x^2+y^2)^{\alpha}} + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{by}{(x^2+y^2)^{\alpha}} = 0+0=0$.

综上： $a=0$ 且 $b=0$ 时 $\alpha\in\mathbb{R}$

a,b 不全为0时 $\alpha<\frac{1}{2}$

4. pf: $\forall x\in \mathbb{R}^n$ $\forall \varepsilon>0$ 取 $\delta=\varepsilon$ $\forall d(x,x_0)<\delta$ 有

$$d(f(x),f(x_0)) = |f(x)-f(x_0)| = |d(x,x_0) - d(x_0,x_0)| = d(x,x_0)<\delta=\varepsilon$$

则 f 在 x 处连续

而 $\forall x\in \mathbb{R}^n$ f 均在 x 处连续 $\Rightarrow$ f 是连续函数

5. pf: ① $f(x_0)=g(x_0)$ 时 $f(x_0)=h(x_0)=g(x_0)$

$\forall \varepsilon>0$ 由 f 在 x_0 处连续 $\Rightarrow \exists \delta_1>0$ $\forall x\in B_{\delta_1}(x_0)\cap D$ 有 $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

由 g 在 x_0 处连续 $\Rightarrow \exists \delta_2>0$ $\forall x\in B_{\delta_2}(x_0)\cap D$ 有 $d(g(x),g(x_0))<\varepsilon$

则 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ $\forall x\in B_\delta(x_0)\cap D$

有 $d(h(x),h(x_0))\le \max\{d(f(x),f(x_0)),\ d(g(x),g(x_0))\}<\varepsilon$.

即 $\forall x_0$ 满足 $f(x_0)=g(x_0)$ 则 h 在 x_0 处连续

② $f(x_0)<g(x_0)$ 时 $f(x_0)=h(x_0)$

取 $\varepsilon=\frac{g(x_0)-f(x_0)}{2}>0$ 由 f 在 x_0 处连续 $\Rightarrow \exists\delta_1>0$ $\forall x\in B_{\delta_1}(x_0)\cap D$ 有 $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow f(x)<\varepsilon+f(x_0)=\frac{f(x_0)+g(x_0)}{2}$ (i)

由 g 在 x_0 处连续 $\Rightarrow \exists\delta_2>0$ $\forall x\in B_{\delta_2}(x_0)\cap D$ 有 $d(g(x),g(x_0))<\varepsilon$

$\Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow g(x)>-\varepsilon+g(x_0)=\frac{f(x_0)+g(x_0)}{2}$ (ii)

结合 (i)(ii) 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ $\forall x\in B_\delta(x_0)\cap D$ 有 $f(x)<\frac{f(x_0)+g(x_0)}{2}<g(x)$

则 $\forall x\in B_\delta(x_0)\cap D$ $h(x)=f(x)$.

$\forall\varepsilon>$ 由 f 在 x_0 处连续

$\exists\delta_0>0$ $\forall x\in B_{\delta_0}(x_0)\cap D$ 有 $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

从而 $d(h(x),h(x_0))<\varepsilon$ $\Rightarrow$ h 在 x_0 处连续

③ $f(x_0)>g(x_0)$ 时 与②同理: h 在 x_0 处连续

综合①②③: $\forall x_0\in D$ h 在 x_0 处连续

$\Rightarrow$ h 是连续函数