算法分析与设计基础 第八周作业

徐浩博　软件02　2020010108

Problem 1

a. 证明可能的接缝数是m的指数函数

首先，我们先找到接缝数N的一个下界. 对于最上方的任意一个点，考虑到$n > 2$，则它必然存在左边一列或右边一列. 我们不妨假设它存在的是左边一列，并仅考虑当前列和左列. 对于每一行，能够被选择为接缝的有两种情况，那么总共就有2^m种情况. 这显然是接缝数N的一个下界.

其次，我们考虑N的上界. 对于任何一个最上方的点，在面对下一行时最多有三种选择，即选择当前格、左下格、右下格作为接缝（由于存在边界，因此有些格子可能取不到）. 考虑到每个最上方的格子走到最下部需要进行$m-1$步决策，故一个最上方格子最多对应3^{m-1}条可能接缝，而最上方格子有n个，故接缝数N的一个上界是$n3^{m-1}$.

结合上下界，我们可以看到，可能的接缝数是m的指数函数.

b. 设计动态规划算法　我们设计动态规划算法时（假设接缝从上到下进行规划），考虑每一个像素的选择：它可以从左上、上、右上三个像素获得转移（未考虑边界的情况下），转移的损失记为d，那么第i行j列的像素动态规划方程可以写作：

$$A[i][j] = min(A[i-1][j-1], A[i-1][j], A[i-1][j+1]) + d[i][j];$$

其中A[i][j]表示终点为第i行j列的像素其上方的累计最小损失. 初始条件为A[1][i] = 0.

我们将之写成伪代码：

```
let all the elements of A = 0
let all the elements of pre = 0
    for(int i = 1; i < h - 1; i++) //height
            for(int j = 1; j < w - 1; j++) //weight
    {

            A[i][j] = A[i - 1][j] + d[i][j]
            pre[i][j] = (i, j)
            if (j < w - 2 and A[i - 1][j + 1] + d[i][j] < A[i][j])
            {
                    A[i][j] = A[i - 1][j + 1] + d[i][j]
                    pre[i][j] = (i - 1, j + 1)
            }
            if (j > 1 and dp[i - 1][j - 1] + d[i][j] < A[t])
            {
                    dp[t] = dp[i - 1][j - 1] + d[i][j]
```

```
                        pre[i][j] = (i - 1, j - 1)
                }
        }
    minimum_loss = min{A[h - 1][1] ... A[h - 1][w - 2]}
```

我们看到计算的复杂度瓶颈在于内外嵌套的两层循环，因此对于一次seam-carving来说，复杂度是$\Theta(mn)$.

c. 实验报告

摘要

seam-carving算法是一种基于动态规划的图像压缩算法. 本实验意图对真实的RGB图片，结合sobel算子识别边界并进行seam-carving压缩. 具体来说，我们会将读入一张24位BMP图片，并利用算法将它的长宽压缩到原来的1/2，并且将图片输出，这样可以直观检验我们的seam-carving压缩成果.

关键词：seam-carving 动态规划 sobel算子 BMP格式

1 实验环境

操作系统：Windows 10
编译器：g++ (gcc 6.3.0)
处理器：Intel Core i7-10750H 六核CPU @ 2.60GHz
编程语言：C++

2 算法分析

具体的动态规划方法已经在前面叙述过，这里不再赘述. 我们要将长宽均压缩到原来的一半，可以先对宽进行seam-carving压缩n/2次，然后将图片翻转90度再对长（翻转后是宽）压缩m/2次，再翻转回来即可.

计算实际复杂度时，先看翻转前，计算复杂度为$\Theta(mn)+\Theta(m(n-1))+\cdots+\Theta(m(n/2+1))=\Theta(mn^2)$；翻转后为$\Theta(mn/2)+\Theta((m-1)n/2)+\cdots+\Theta((m/2+1)n/2)=\Theta(m^2n)$. 因此总复杂度为$\Theta(mn(m+n))$.

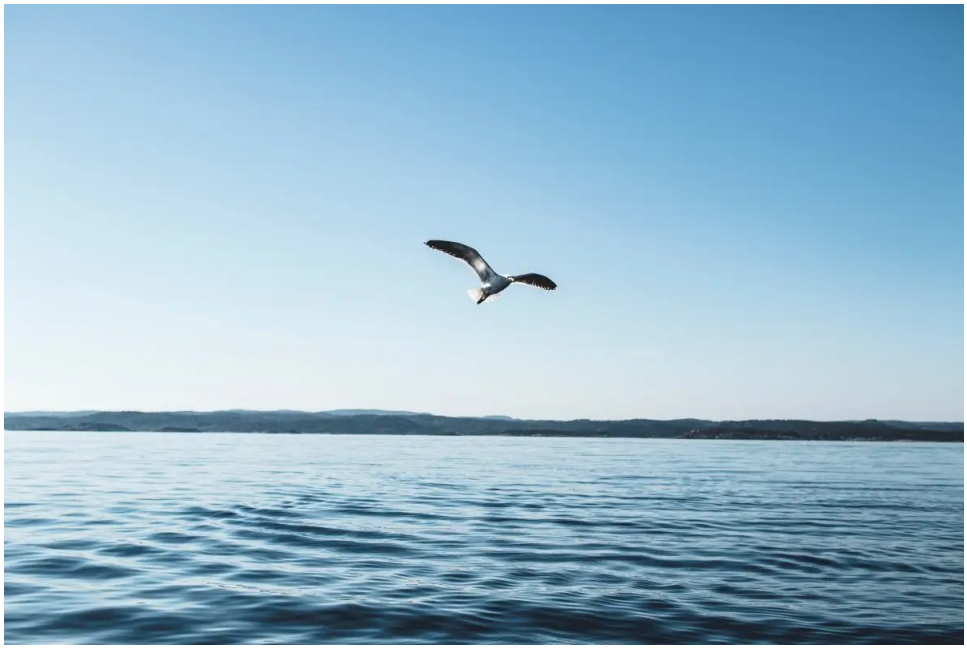
3 实验设计思路

程序分为读入、动态规划、输出三个部分. 由于我们只考虑24位BMP图，因此读入时先读入文件头，然后分像素保存每个像素的RGB对应值. 动态规划阶段，先正着进行n/2次seam-carving；然后翻转90度，进行m/2次；最后翻转回来，得到的就是长宽均压缩一半的图片. 输出阶段，我们将输入的文件头中长宽进行更改并输出，然后分像素输出压缩后的图片每个像素对应的RGB值即可.

值得注意的是，动态规划阶段，我们采用的损失权重是sobel算子计算出来的，算子的值越大，说明该像素越可能是边界，因此越不应该被裁剪；由此可以将每个像素先转化为灰度像素，然后进行sobel算子运算.

4 结果展示

压缩前的图片如图(1200×800)：



压缩后的图片如图(600×400)：

5 总结

在实验中，我们利用seam-carving算法对RGB图像的长宽进行了压缩，可以看到，压缩后的图片基本保留了原有图片的重要信息，但长宽分别压缩为了原来的一半. 但我们也需要看到，压缩比较大时，该算法的复

杂度是很高的，而且压缩的图像还是存在畸变、失真等问题，这些都有待更有效更快捷的其他算法进行改进.

Problem 2

本题中，我们采用的贪心策略是，首先对所有活动按照开始时间从小到大进行排序. 理想的排序时间开销为O(nlogn). 下面我们再开辟一个H数组记录新开辟的教室，H初始为空. 对于排序好的活动从小到大依次进行如下贪心操作：对于第i项活动，检查现有开辟的教室H中是否存在结束时间早于活动i开始时间的活动，如果存在教室j满足，则在教室j进行活动i，并将H[j]置为i的结束时间；否则H中加入一个教室，让它的值为i的结束时间. 考虑到H可以用小顶堆维护，因此我们将H设为小顶堆，这样对n个教室遍历，每次访问堆顶/插入一个元素，总复杂度为O(nlogn). 综合以上两点，总复杂度为O(nlogn).

下面我们采用数学归纳法证明这种贪心算法能够得到正确答案. 我们假设这种算法在做第i个活动的决策后，总能使编号1-i的活动利用最少的教室. i=1时，显然必须开辟一个新教室，最少的教室为1，算法正确. 假设i=k时也成立. 则i=k+1时，活动i有两种决策可能. i)可以不开辟新教室，则与i=k相比，总教室数不变，由归纳假设，1-k采用了最少的教室num，1-k+1需要的教室数显然不小于num，我们的贪心决策没有增加新教室，则num也是1-k+1需要的最少教室数. ii)必须要开辟一个新教室，在这种情况下，所有已开辟的num个教室最后一个活动（记为$a_1...a_{num}$）结束时间必然都大于第i个活动的开始时间. 我们采用反证法证明num+1是1-k+1个活动所需要的最小教室数. 假设num个教室足够这k+1个活动开展，考虑到i与$a_1...a_{num}$均不兼容，那么$a_1...a_{num}$中必然有两个活动a_k, a_l兼容，这样才能腾出教室给i活动，而a_k, a_l兼容则说明其中一个活动开始时间大于等于另一个结束时间（不妨设$a_k.finish_time \leq a_l.start_time$），而由i序号小于$a_l$有$i.start_time \geq a_l.start_time$，因此有$a_k.finish_time \leq i.start_time$. 但是由i与a_k不兼容得$a_k.finish_time > i.start_time$，推出矛盾，因此num+1是活动1-k+1需要的最小教室数. 结合数学归纳法，我们证明了该算法的正确性.

该算法的伪代码为：

```
GREEDY_ALGORITHM:
        let A[1 ... n] be an array of tuples (start_time, finish_time)
        sort A[1 ... n] from the smallest to the largest by start_time
        let H be a minHeap which is empty at first
        for i from 1 to n:
                if H is empty or H.top > A[n].start_time:
                        H.insert(A[n].finish_time)
                else:
                        H.extract_min
                        H.insert(A[n].finish_time)
        return H.size
```