° 哈密顿图中无1度顶点，若有2度顶点，则两边均在H回路中；每个顶点只能有关联的两边在H回路中 ° 若G有H回路，则删去顶点子集S有 $p(G-S)\le|S|$ （H通路为 $p(G-S)\le|S|+1$，p是子图连通分支数） ° 有割点不是H图 ° 二分图有H回路 $\Rightarrow |V_1|=|V_2|$

° 若简单图中任两点有 $d(u)+d(v)\ge n-1$ 则有H通路（先证连通，再取极长通路，假设不是H回路，则 $d_1+d_2<l+1\le n+1$，此点用构造回路证，矛盾得证）

° (Ore) 简单图中任两点恒有 $d(u)+d(v)\ge n$ 则有H回路（证明类似于上） ° (Dirac) 简单图每结点 $d\ge\frac{n}{2}$ 则有H回路

° 若简单图中 v_i,v_j 是不相邻结点，$d(v_i)+d(v_j)\ge n$ 则 G有H回路 $\Leftrightarrow$ $G+(v_i,v_j)$ 有H回路（$\Leftarrow$ G有H通路且 $d\,v_i+d\,v_j<n$） ° 闭合图：将所有不相邻且 $d_1+d_2\ge n$ 结点相连，直至不再有可连

° 简单图的闭合图唯一 ° G存在H回路 $\Leftrightarrow$ G闭合图存在H回路 $\Leftarrow$ G闭合图是完全图 ° 旅行商问题：总权和最小的H回路

° PT图：结点表示工序，(i,j)表示i后j才能进行 ° PERT图：结点表示工序关系，有向边表示工序（注：PT图需增加超结点）

° 拓扑序列：G是有n个结点的有向图，V中顶点序列 $v_1\ldots v_n$ 为一个拓扑序列，当且仅当 $\forall\langle v_i,v_j\rangle\in E$，$v_i$ 在序列中排在 v_j 之前

° 最短路径长 $\pi(v_i)$ ° PT图最晚启动时间 $\tau(v_i)$，允许延误时间 $t(v_i)=\tau(v_i)-\pi(v_i)$ ° 中国邮路：总权和最小的欧拉回路（可重复）

° L是G最佳邮路 $\Leftrightarrow$ ① G每条边最多重复一次 ② 任意一回路上重复边长度不超过该回路的一半（$\Rightarrow$ 易证 $\Leftarrow$ 取两个满足条件邮路，设G1中将有重复边为 Q_1，G_2 为 Q_2，在 Q_1,Q_2 组成图中，结点度数均为偶，故可分成若干回路，由条件2，每个回路 $\pi(C_1)\le\pi(C_2)\le\pi(C_1)$，故相同

° 中国邮路构造算法（奇偶点图上作业法）：找出度数为奇的点，根据条件①找重复边，之后有回路不满足条件2则取对称差直至全满足条件2）

° 有向图中国邮路：若某点入度/出度为0则不存在 ° 有向图中国邮路算法：建立超发、超收点后求k短路（无向图也可以Floyd后最小权匹配）

° 林：不含任何回路的图 ° 树：连通的林，用T表示 ° 树枝：树中的边 ° 树叶：度数为1的点 ° 分支结点（内结点）：度数大于1的结点

° 树：① G是树（连通/无回路） ② 任意两顶点之间有惟一路径 ③ G无回路，$m=n-1$ ④ G连通，$m=n-1$ ⑤ G连通且G中任何边均为桥 ⑥ G无回路，但任何两个不同顶点之间加一条新边得到唯一一个含新边的回路 （②$\Rightarrow$③ 归纳 ④$\Rightarrow$⑤ 归纳 ③$\Rightarrow$④ 反证）

° 余树：$E(G)-E(T)$ 得到的图 支撑树生成：破圈、避圈

° 支撑树：树T是图G的支撑子图 ° 弦：若 $e\in E(G)$ 有 $e\in E(T)$ 则称树枝，否则称弦

° 余子式 M_{ij}：行列式去掉i行j列的行列式 代数余子式：$(-1)^{i+j}M_{ij}=A_{ij}$ ° 有向图关联矩阵B $rank=n-1$（证 ① $rank<n$ ② 前 $l(<n-1)$ 行线性相关则前l行每列要么±1，要么全0，行列变换 $\begin{bmatrix}P&0\\0&Q\end{bmatrix}$ 这说明图不连通） ° 基本关联矩阵 B_k：G的关联矩阵B中划去任一行，$rank\,B_k=n-1$

° B_k 是有向连通图G基本关联矩阵，C是G回路，则C对应各列在 B_k 中线性相关 ° B_k 任一(n-1)阶子阵行列式 $\ne0\Leftrightarrow$ 各列对应的边构成支撑树

° Binet-Cauchy $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times m}$ $(m\le n)$ $|AB|=\sum|A_i||B_i|$ ° B_0 为 $B(G)$ 任一k阶方阵则 $|B_0|=\pm1$ 或0（分为0与±1的）

° 设 B_k 为G中某一关联矩阵则不同树个数 $\det|B_kB_k^T|$ $\Rightarrow$ 不含某边则删，必含某边则收缩 ° K_n 支撑树 $\begin{vmatrix}n-1&-1&\cdots&-1\\-1&\ddots&&\\\vdots&&n-1&\\-1&&&n-1\end{vmatrix}=n^{n-2}$

° 根树：有向树中某结点入度为0，其余点入度为1，则称为以 v_0 为根的外向树/根树 ° 有向图以 v_k 为根树的数目是 $|\bar{B}_kB_k^T|$，其中 $\bar{B}_k$ 为 B_k $(1\to0)$ 后的矩阵（证 $|\bar{B}_kB_k^T|=\sum|\bar{B}_i||B_i|$ 后者保证是支撑树，前者保证其余点入度为1，注意，若 B_i 对应外向树，则每列有且仅有1个-1，可通过行、列变换化为 $\begin{bmatrix}-1&&*\\&\ddots&\\&&-1\end{bmatrix}$ 上三角阵，$|\bar{B}_i|=|B_i|$）

° 完全回路矩阵 C_e $C_{ij}=\begin{cases}\pm1&e_j\in C_i\\0&\text{其它}\end{cases}$ $\begin{array}{c}C_1\\C_2\\\vdots\\C_n\end{array}\underset{e_1\ldots e_m}{\begin{bmatrix}&\end{bmatrix}}$ 完全回路最多 $2^{m-n+1}-1$ 回路

° 基本回路矩阵 C_f 生成树确定后，每条余树边对应的回路（注：回路方向与余树边一致） $(m-n+1)\times m$ C_f 可写作 $[I\ C_{f12}]$

° 基本回路：每条余树边对应的回路 $BC_e^T=0$（若B与 C_e 边次序一致）（证：分回路与点 v_i 的位置讨论）$\Rightarrow B_kC_e^T=0$

° 回路矩阵：连通图中 $(m-n+1)$ 个互相独立的回路组成的

° $rank\,C_e=m-n+1$（① $rank\,C_f=m-n+1$ 故 $C_e\ge m-n+1$ ② $BC_e^T=0$ 故 $rank\,B+rank\,C_e\le m$） ° 回路矩阵C某一 $(m-n+1)$ 阶子阵非奇异 $\Leftrightarrow$ 这些边对应一个余树

° ① C_f 是回路矩阵 ② $BC^T=0$（B，C边次序一致） ③ $C=PC_f$（P非奇异，C_f，C边次序一致） $\Rightarrow C=[C_{11}\ C_{12}]$ C_{11} 非奇异只需 C_{12} 构成树，若 C_{12} 中有回路（证 $\Leftarrow$ 基本回路矩阵 $C_f=[\underset{\text{余树边}}{I}\ \underset{\text{树枝}}{C_{f12}}]$ 将C中边次序与 C_f 一致 $C=[C_{11}\ C_{12}]=PC_f=[P\ PC_{f12}]$，则经行变换，回路不含 C_{11} 中边 $C'=\begin{bmatrix}C_1'&C_2'\\0&C_2''\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ C_{11} 奇异，矛盾） ° 基本关联矩阵 $B_k=[B_{11}\ B_{12}]$ 与基本回路矩阵 $C_f=[I\ C_{f12}]$ 边对应，$C_{f12}=-B_{11}^TB_{12}^{-T}$

° 完全割集矩阵 S_e：全部割集构成的矩阵 $S_{ij}=\begin{cases}+1,&e_j\in S_i\text{且方向一致}\\-1,&e_j\in S_i\text{且方向相反}\\0,&\text{else}\end{cases}$ $\begin{array}{c}S_1\\\vdots\\S\end{array}\underset{e_1\ldots e_m}{\begin{bmatrix}&\end{bmatrix}}$ 最多 $\frac{1}{2}(2^n-2)=2^{n-1}-1$ 个不同割集（将点集2分）

° 基本割集：只包含某一条树枝和若干余树边的割集（方向与树枝相同） ° 基本割集矩阵 S_f 全部基本割集构成的矩阵 $(n-1)\times m$

° 基本回路矩阵可写 $C_f=[I\ C_{f12}]$ 基本割集矩阵可写 $S_f=[S_{f12}\ I]$ ° $S_eC_e^T=0$（若 S_e 与 C_e 边次序一致） ° $rank\,S_e=n-1$

° 割集矩阵：$(n-1)$ 个互相独立的割集构成的矩阵 ① S_f 是割集矩阵 ② $SC^T=0$（S，C边次序一致） ③ $S=PS_f$（P非奇异，S，S_f 边次序一致）

° 割集矩阵S某 $(n-1)$ 阶子阵行列式非0 $\Leftrightarrow$ 这些边对应一个树 ° $S_f=[\underset{\text{余树}}{S_{f11}}\ \underset{\text{树}}{I}]$ 与 $C_f=[\underset{\text{余树}}{I}\ \underset{\text{树}}{C_{f12}}]$ 边次序一致则 $S_{f11}=-C_{f12}^T=B_{12}^{-1}B_{11}$

° 树根：根树中入度为0的结点 叶结点：入度为1出度为0，内结点：入度为1出度不为0 分支点：内点+树根 层数：树根到结点路径长 树高：层数最大值 ° 祖先、后代（可不邻接） ° 父亲、儿子、兄弟 ° 有序树：根树中每个结点的孩子都指定次序 ° k叉树：每个分支点至多k个孩子 ° k叉正则树：每个分支点恰有k个孩子 ° k叉满正则树：每个叶结点层数均为树高的k叉正则树 ° 带权路径长度 $\sum w_il_i$

° 最优二叉树：叶结点权重相同且带权路径长度最小的二叉树 ° 前缀：符号串 $a_1\ldots a_n$ 的前缀是 $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3\ldots$ 等 ° 前缀码：$A=\{b_1\ldots b_n\}$ 是符号串集合 $\forall i\ne j$ b_i,b_j 互不为前缀则A为前缀码 ° 若T是正则二叉树，则(二元)前缀码唯一 ° 最佳前缀码不唯一（最小权选法，左右位置均可）

° 可嵌入平面：能把G画在一个平面上使任何两条边都不相交 ° 平面图：可平面图在平面上的一个嵌入 ° Jordan曲线 ° 连接int J与ext J的连线与J相交

° 边界 ° 面的次数 $deg(R)$：边界长度 ° 若e不是割边，则必为两个域公共边界

° K_5 是非平面图（ ） ° 面/域 ° 无限面/外部面，有限面/内部面 ° 测地投影 ° 欧拉：$n-m+r=2$（连通平面图）（归纳并分类：树则去树叶 $n--,m--$；非树破圈 $m--,r--$） ° k个连通分支平面图：$n-m+r=k+1$

° $\sum deg(R_i)=2m$ ° 简单连通平面图无割边，每个域边界数至少为t则 $m\le\frac{t(n-2)}{t-2}$（割边和重边会使 $t=2$，自环 $t=1$）$\Rightarrow$ K_5，$K_{3,3}$ 非平面图 ° 极大平面图：不相邻结点间加任何边均为非平面图（简单图）

° 简单连通平面图是极大平面图 $\Leftrightarrow$ 每个面次数均为3（$\Rightarrow t\le3$，若 $\exists t>3$，则域上 v_1 与 v_3 应连，v_2，v_4 连，在外部域上交叉，$\Leftarrow$ 两不相邻结点至少一个在内部，由Jordan）

° 简单平面连通图 $\Rightarrow\delta\le5$（最小度） ° 极小非平面图：删去任意一边即为平面图（K_5，$K_{3,3}$）

° 极大平面图 $\Rightarrow 3r=2m\Rightarrow m=3n-6, r=2n-4$ ° 简单平面连通图 $\Rightarrow m\le3n-6$，$r\le2n-4$ ° 同胚：反复插入或消去2度结点后是同构的 ° 边的收缩

结点数最少的非平面图 K_5，边数最少 $K_{3,3}$ ° 重边、自环不影响平面性 ° $m<9$ 或 $n<5$ 则平面 ° 对偶图，D过程 ° 平面图一定有唯一对偶图 G^*

° 库拉图斯基：① 平面图 $\Leftrightarrow$ 不含 K_5，$K_{3,3}$ 同胚子图 ② 平面图 $\Leftrightarrow$ 不含可收缩到 K_5，$K_{3,3}$ 子图 ° C是G初级回路，S^* 是 G^* 中 e_i 对应的 e_i^* 集合，则 S^* 是 G^* 一个割集（割集 $\Leftrightarrow$ 对偶图中回路）

° 对偶图 $m=m^*$，$n=r^*$，$r=n^*$，$d_{G^*}(v_i^*)=deg(R_i)$ ° 自对偶图：$G^*\cong G$（n阶轮图是自对偶图） ° G色数 $\chi(G)$：点着色最少色数 ° k着色、k-可着色

° G有对偶图 $\Leftrightarrow$ G为平面图（$\Rightarrow$ 证逆否，用库拉图斯基） ° G域可2着色 $\Leftrightarrow$ G有欧拉回路（点度数=对偶图域的边界数，$\Rightarrow$ 还需 $(G^*)^*$） ° $\chi(G)\le\Delta(G)+1$（归纳n）

° 非空图 $\chi(G)=2\Leftrightarrow$ 无奇回路 ° $\overline{G_{ij}}=G+e_{ij}$，$G_{ij}$ 为 v_i 与 v_j 收缩后的图 ° $\chi(G)=\min\{\chi(\overline{G_{ij}}),\chi(G_{ij})\}$

° Brooks：若G不是完全图也不是奇圈则 $\chi(G)\le\Delta(G)$ ° Powell ° 边色数 $\chi'(G)$，面色数 $\chi''(G)$

° 色数多项式 $f(K_n,t)=t(t-1)\cdots(t-n+1)$ $f(T_n,t)=t(t-1)^{n-1}$ ° i，j不相邻则 $f(G,t)=f(\overline{G_{ij}},t)+f(G_{ij},t)$

° 轮图 $\chi(W_n)=\Delta(W_n)$ $(n\ge4)$ ° 完全图奇数 $\chi'(K_n)=n$，偶数 $\chi'(K_n)=n-1$（奇数n组平行边，偶数 K_{n-1} 构造 $K_5\to K_6$）

° Viking：简单图 $\Delta(G)\le\chi'(G)\le\Delta(G)+1$ ° 任何一个3正则平面图可四色则任意平面图均4色

° 五色定理：每个平面图5-面可着色（证：G^* 归纳结点数n，$\because\delta\le5\therefore$ 设1，3连则2-4不连换色，否则1，3换色）

° 如果平面图有Hamilton回路则四色成立（3个面不相互邻接则为2内2） ° 匹配、饱和点、非饱和点 ° 极大匹配M：匹配中不能加边 最大匹配M：$|M|\ge|M'|$

° 交互道路：属于M与不属于M的边交互 ° 可增广路：两端点均是不饱和点 ° M为G最大匹配 $\Leftrightarrow$ G不含M增广路径（$\Rightarrow$，$\Leftarrow$ 设 $H=M_1\oplus M_2$，若为交错链则个数相等，若为交错路径也为相等）

° 完全匹配：二分图中 $|V_1|\le|V_2|$ 且 $|M|=|V_1|$ ° 完美匹配：$|V_1|=|V_2|$ 且 $|M|=|V_1|$ ° Hall：G中有完全匹配 $\Leftrightarrow$ V_1 中任k个结点至少与k个 V_2 相邻 $(k=1\ldots|V_1|)$（证无孤立结点）

° k条件：V_1 中每个结点至少关联k条边，V_2 中至多k条边 $(\exists k)\Rightarrow$ G有完全匹配（左边m则 $m\cdot k$ 条边，右边至少m，由Hall）（若 $s\ge r$ 再任 $r\ge s$ Hall）

° 覆盖：选取一些行和列 ° König：最大匹配数=最小覆盖数

° X→Y最大匹配数是 $|X|-\delta(G)$ 其中 $\delta(G)=\max_{A\subseteq X}\delta(A)$，$\delta(A)=\max\{0,|A|-|\Gamma(A)|\}$

° 流/可行流：① 容量约束、守恒条件 ° 割切 ° 割切容量 $C(S,\bar{S})=\sum w_{正向边}$ ° 最大流量=最小割切容量（证：构造点集S，扩张最大流图，结合 $\max w\le\min C(S,\bar{S})$）

° 无割边的平面图除一个域外，其余各域边界数都可以被d整除，则G的域不可被2着色

Warshall kij $O(n^3)$ 便宜算法 $O(n^2)$ 分支与界法 $O(n!)$ Dijkstra 先赋初值 $O(n^2)$ Ford $O(mn)$ 最多n-1次迭代

拓扑排序 $O(m)$ Kruskal $O(m+p\log m)$ p：迭代次数 Prim $O(n^2)$ 稠密图Prim Huffman $O(n\log n)$

Powell染色 FF/EK $O(nm^2)$ Hungary $O(mn)$

$(Q,+)$ 与 $(Z,+)$ 同构 × $(R,+)$ 与 $(R^+,\times)$ 同构 √

$(Q,+)$ 与 $(Q^+,\times)$ 同构 × $(R,+)$ 与 $(R^*,\times)$ 同构 ×

稳定匹配：X每次都向未拒绝它的最佳Y请求，Y保留最佳的请求并拒绝其他

代数结构

◦ 基数 $|S|$：元素个数 ◦ 幂集 $P(S)$：全部子集集合 2^S ◦ f 左可逆 $\Leftrightarrow$ f 是单射 f 右可逆 $\Leftrightarrow$ f 是满射 f 可逆 $\Leftrightarrow$ f 是双射 $\Rightarrow$ 逆映射唯一

◦ 二元关系：A、B 笛卡尔积 $A\times B$ 的任一子集 R（若 $a\in A$ $b\in B$ 则 aRb） ◦ 等价关系：二元关系满足 ① 自反性 ② 对称性 ③ 传递性 $(\sim)$

◦ 等价类 $\bar{a}=\{x\in A|x\sim a\}$，$a$ 为代表元 ◦ $\sim$ 是 A 上等价关系，$\forall a,b\in A$ 若 $\bar{a}\neq\bar{b}$ 则 $\bar{a}\cap\bar{b}=\phi$ ◦ 等价类族 $\bar{A}=\{\bar{a}|a\in A\}$ 商集 $A/\sim$

◦ 自然映射 ν：$a\to\bar{a}$ 是 $A\to A/\sim$ 映射，是满射 ◦ 集合 A 的一个划分可确定一个等价关系（$R=\{(x,y)|x\in A_i$ 且 $y\in A_i$ $\exists A_i\}$） ◦ n 元运算：映射 $f: A^n\to A$

◦ 代数系统 = 非空集合 + 代数运算 $f_1\cdots f_s$（封） ◦ $(X,\cdot)$ 满足结合律则 $\forall m,n\in N_+$ 1) $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$ 2) $(x^m)^n=x^{mn}$（归纳法）广义结合律、指数律

◦ 单位元 ◦ 代数系统有左单位元 + 右单位元 $\Rightarrow$ 单位元唯一 ◦ 代数系统：x 有左/右逆元 + $(X,\cdot)$ 有结合律 $\Rightarrow$ x 逆元唯一且 $(x^{-1})^{-1}=x$

◦ 若 $(X,\cdot)$ 中每个元素均有逆元 则有消去律 ◦ 同类型：$V_1=(X,o_1,\dots o_s)$ $V_2=(\bar{X},\bar{o}_1,\dots\bar{o}_s)$ 且 o_i 与 $\bar{o}_i$ 均为 k_i 元运算 ◦ 同构 = 同态 + f 是双射

◦ 同态 $\exists f: A\to B$ $\forall a,b\in A$ 有 $f(a\cdot b)=f(a)*f(b)$ ◦ 子代数：$(R,\cdot)$ 是 $(S,\cdot)$ 子代数 $\Leftrightarrow$ $R\subseteq S$ 且 f 对 R 封闭 ◦ f 是 $(X,\cdot)\to(Y,*)$ 同态，则 $(f(X),*)$ 是子代数

且称 $(f(X),*)$ 是 f 作用下 $(X,\cdot)$ 的同态象 ◦ f 是同态 1) f 单则 f 是单一同态 2) f 满则 f 是满同态 3) f 双则 f 是同构 ◦ 若 f 是满同态则

$(X,\cdot)$ 与 $(f(X)=Y,*)$ 下列性质一致：1) 可交换/结合 2) $(X,\cdot)$ 中有单位元 3) $x\in X$ 有逆元 x^{-1} ◦ 自同态 $f: X\to X$ 自同构 $f: X\to X$

◦ 半群：满足结合律的代数系统（封结） ◦ 幺群：含幺半群（封结幺） ◦ 交换幺群：幺群 + 交换律 ◦ n 次幂：若有广义结合律则

$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ $(a^n)^m=a^{nm}$ 定义 $a^0=e$，若 a 可逆则逆元为 a^{-1}，定义 $a^{-n}=(a^{-1})^n$ ◦ 循环幺群 $\forall a\in M$ 有 $a=g^m$ $(m\in N)$，g 为生成元

◦ (子)半群/(子)幺群同态象仍是(子)半群/(子)幺群

◦ 循环幺群是可交换幺群 ◦ 子半群 $T\subseteq S$ 且 T 在 $\cdot$ 下封闭 ◦ 子幺群 $T\subseteq S$，T 在 $\cdot$ 下封闭且 $e\in T$ ◦ 阿贝尔群：交换群

◦ 群：每个元素均可逆的幺群（封结幺逆） ◦ 满足消去律的有限半群是群（无限半群不成立，证 $gG=G$） ◦ 半群 G 有左单位元且 $\forall a\in G$ $\exists a^{-1}$ 左逆元 $a^{-1}a=e$ 则 G 为群

◦ Klein 四元群 $(a\cdot a=e$ $a\cdot b=c)$ ◦ 平凡群：只含单位元 ◦ 群的阶：群集合的基数 ◦ 半群 G 中 $\forall a,b$ $ax=b$，$ya=b$ 均有解，则 G 为群（证 $xa=a$，$am=b$）

（证 $ge=ege=(g^{-1})^{-1}g^{-1}gg^{-1}g=g$，$gg^{-1}=egg^{-1}=(g^{-1})^{-1}g^{-1}gg^{-1}=e$） ◦ 元素的阶（周期）：$a\in G$ $\exists k\in N_+$ 使 $a^k=e$ 则最小的 k 为阶，记为 $O\langle a\rangle$

◦ 设 G 为一个群则 $\forall a,b\in G$ 恒有 $(a^{-1})^{-1}=a$，$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ ◦ 子群：H 是 G 的一个非空子集，H 仍构成群，则 H 是 G 子群，记为 $H<G$

◦ a 是群 G 中 r 阶元素则 1) $a^k=e\Leftrightarrow r|k$ 2) $O\langle a\rangle=O\langle a^{-1}\rangle$ 3) $r\leq|G|$ ◦ 循环群 $\forall a\in G$ 有 $a=g^m$ $(m\in Z)$，g 为生成元，记作 $G=\langle a\rangle$

◦ 平凡子群：G，$\{e\}$ ◦ G 的非空子集 H 是 G 的子群 $\Leftrightarrow$ $\forall a,b\in H$ 有 $ab^{-1}\in H$ ◦ 无限阶循环群 $G=\langle a\rangle=\{e,a,a^{-1},a^2,a^{-2}\dots\}$ ◦ 所有循环群均同构于 $(Z,+)$ $(Z_n,+)$

◦ n 阶循环群：若 $|a|=n$ $(O(a)=n)$ 则 $G=\langle a\rangle=\{e,a,a^2\dots a^{n-1}\}$ ◦ 则有 $\varphi(n)$ 个生成元（证：$b=a^p\Rightarrow b^m=a^{mp}=a\Rightarrow a^{mp-1}=a^0=e$，裴蜀定理 $(a,b)=1\Leftrightarrow ax+by=1$ 有解）

◦ 设 $G=\langle a\rangle$ 1) $O\langle a\rangle=\infty$ 则生成元只有 a,a^{-1} 2) $O\langle a\rangle=n$ ◦ $|G|=n$ 则 n 每个因子 d 对应且仅对应一个 d 子群

◦ 循环群子群仍是循环群；2) 若 G 无限则 H 无限 3) 若 $|G|=n$ 有限，a^k 是 H 中 a 的最小正幂，则 $|H|=n/k$ 例：$(Z_{14},+)$ 子群 Z_{14}，$\langle 0\rangle\langle 2\rangle\langle 7\rangle$ 例：证同构 i) 双射 ii) $f(a\cdot b)=\dots$

（证：设 $\langle a^m\rangle$ 是另一个，$md=pn\Rightarrow m=\frac{pn}{d}$ 即 $a^m\in\langle a^{\frac{n}{d}}\rangle$，$H_1\subset H$ 而 $|H_1|=|H|$ 故 $H_1=H$）

◦ G 是群 $\exists f$ 双射 $f(a\cdot b)=f(a)*f(b)\in G'$，$G'$ 是群（群的判定） ◦ 一一变换群 $E(A)$：所有一一变换构成的群

◦ 变换 $f: A\to A$ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots \end{bmatrix}$ 且有恒等变换 ◦ 一一变换：f 是双射（满射 $\Rightarrow$ 双射） ◦ 置换群：由置换构成的群 ◦ S_n：所有 A 的 n 元置换集合（$|S_n|=n$）

◦ 变换群：一一变换群的子群 ◦ 置换：有限集合的一一变换 ◦ 变换幺群 $M(A)$ 中有 n^n 个变换，而 $|S_n|=n!$

◦ n 次对称群：S_n 对于置换乘法构成的群 ◦ n 元置换群：S_n 的子群 ◦ 不相交的轮换：α,β 轮换元素全不相同 ◦ α,β 不相交则 $\alpha\beta=\beta\alpha$

◦ 轮换：$(i_1 i_2\cdots i_l)$ 长度为 l ◦ 恒等置换 $l=1$ ◦ 对换 $l=2$ ◦ 逆序：$i_1 i_2\dots i_n$ 是 $1\dots n$ 排列，$i_k>i_l$ 且 $k<l$ 则称 $i_k i_l$ 为一个逆序

◦ 任何置换都可表示为不相交轮换的乘积 $|S_4|=24=1+6+8+6+3$

◦ 奇/偶置换：$\sigma(j)=i_j$ 则 $N(\sigma)=$ 排列 $i_1\dots i_n$ 中逆序数，置换奇偶指 $N(\sigma)$ 奇偶 ◦ 偶置换 × 偶 = 偶，奇 × 奇 = 偶，奇 × 偶 = 奇

◦ 交错群 A_n：S_n 中所有偶置换集合构成的群 $|A_n|=\frac{1}{2}n!$ $(\forall n\geq 2)$ ◦ Cayley：任意群 G 与一个变换群同构

（证：构造 $f_a: X\to ax$ i) 证 $\{f_i\}$ 可构成群 ii) F 是双射 iii) F 同构）

◦ 左陪集 $a\in G$ $aH=\{ah|h\in H\}$ ◦ 左陪集性质：1) $|aH|=|H|$ 2) $a\in H$ 则 $aH=H$ 3) $\forall x\in aH$ 有 $xH=aH$，a 是 aH 陪集代表

4) $aH=bH\Leftrightarrow a\in bH$ $(\Leftrightarrow b\in aH)\Leftrightarrow a^{-1}b\in H$ $(\Leftrightarrow b^{-1}a\in H)$ 5) $aH\neq bH$ 则 $aH\cap bH=\phi$（$G=\bigcup_{a\in G}aH$，aH 是 G 的一个划分）

◦ 指数：群 G 关于子群 H 的左陪集个数，记作 $[G:H]$ ◦ Lagrange：$[G:1]=[G:H][H:1]$（$|G|=[G:H]|H|$）

◦ Lagrange 推论 1) 有限群 $|G|=n$，$\forall x\in G$ x 阶是 n 因子 2) 阶为素数 p 的群是循环群 3) $|AB|=\frac{|A||B|}{|A\cap B|}$（$AB=\{ab|{a\in A \atop b\in B}\}$，A、B 是 G 子群）

（证 3）令 $S_1=\{a_1B\dots a_mB\}$，$D=A\cap B$，$S_2=\{a_1D\dots a_nD\}$ $\sigma: a_iB\to a_iD$ $\forall a_i,a_j\in A$ $a_iB=a_jB\Leftrightarrow a_ia_j^{-1}\in B\Leftrightarrow a_ia_j^{-1}\in D\Leftrightarrow a_iD=a_jD$，$\sigma$ 双射，$[AB:B]=[A:D]$）

◦ 正规子群 $aH=Ha$，记作 $H\lhd G$ ◦ 正规子群等价性质 $H\lhd G\Leftrightarrow\forall g\in G$，$gHg^{-1}=H\Leftrightarrow\forall g\in G$，$gHg^{-1}\subseteq H\Leftrightarrow\forall g\in G$，$h\in H$ $ghg^{-1}\in H$

（证 $4\Rightarrow 1$ $gh_1g^{-1}=h_2\Rightarrow gh_1=h_2g\in Hg\Rightarrow gH\subseteq Hg$） ◦ A、B 是 G 子群 1) 若 $A\lhd G$，$B\lhd G$ 则 $A\cap B\lhd G$，$AB\lhd G$

2) 若 $A\lhd G$，$B\leq G$ 则 $A\cap B\lhd B$，$AB\leq G$ ◦ H 是正规子群，则 G/H 构成商群（陪集乘法，$aHbH=\{ah_1bh_2|\forall h_1,h_2\in H\}$）

（证 $ah_1bh_2=abh_1'h_2\in abH$） 技巧 H 正规则 $gh'=h'g$

图论

（构造、数学归纳、反证、用二分图等特殊性质） 二分图

◦ 图的阶：顶点个数，$|E|=0$ 空图，$|V|=1$ 平凡图 ◦ 混合图：有有向&无向边 ☆ 无向图中 · 关联次数：某点是某边端点的次数 · 邻点集

· 最大度 $\Delta(G)$ · 最小度 $\delta(G)$ · 简单图：无重边、自环 · 多重图：有重边、无自环 · 伪图：有重边、有自环 · 度数列

正则图

☆ 有向图中 · 边的始点、终点 · 直接前驱集（内邻集），直接后继集（外邻集） ◦ 非空简单图中存在度相同的顶点

◦ 有向完全图：$m=n(n-1)$ $\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1$ $\Delta=\delta=2(n-1)$ ◦ k-正则图：每点度数为 k 的无向简单图 ◦ 无向圈图 ◦ 有向圈图

◦ 轮图 W_n W_4 W_5 ◦ 完全二分图 $K_{m,n}$ $|V_1|=m$，$|V_2|=n$ V_1、V_2 中每个顶点相互连接 ◦ 二分图：两个非空子集 V_1、V_2，每边由 V_1 中一点 + V_2 中一点组成

例：两个结点的图是二分图 × 二分图有可能有大于一种划分方式 √ ◦ 生成子图/支撑子图：顶点集不变 ◦ V' 的导出子图 $G[V']$：$V'\subseteq V$ 结点间所有相连边

◦ E' 的导出子图 $G[E']$：E' 所有关联顶点 ◦ 同构 例：K_4 非同构生成子图有 11 个 $1+1+2+3+2+1+1$ ◦ 邻接矩阵：$a_{ij}=1$ if $(V_i,V_j)\in E$，有向图不一定对称

邻接矩阵可自环，扩展 0-1 矩阵可重边 ◦ 权矩阵 ◦ 关联矩阵：无向图中 $m_{ij}=V_i$ 与 e_j 关联次数 $(0,1,2)$，可自环可重边；有向图中 $m_{ij}=\pm 1,0$，

不可自环可重边（始点 1 → 终点 −1） ◦ 边列表：两个 m 维向量 A、B，若 $e_k=(V_i,V_j)$ 则 $A(k)=i$，$B(k)=j$ ◦ 正向表：A 为 n+1 维，B 为 m 维

◦ 逆向表：A 为 i 作为终点的序号编号（与正向表相反） ◦ 邻接表 $V_0\xrightarrow{e_1}V_3$ | V_0 | | → | 3 | e_0 | ∧ |（每次插入新结点，插入表头与第一个之间）

◦ 十字链表：| 顶点 | 第一条入边 | 第一条出边 |||||| 边起点 | 边终点 | 下一个相同终点的边 | 下一个相同起点的边 |（有向图）

◦ 邻接多重表：| 顶点 | 第一条边 |||||| 顶点 i | 顶点 i 下一条边 | 顶点 j | 顶点 j 下一条边 |

◦ 通路：$V_0e_1V_1e_2V_2\dots e_lV_l$，$l$ 为通路长度 ◦ 回路/圈：通路 $V_0=V_l$（奇圈：l 为奇） ◦ 无向简单图，圈 $l\geq 3$，有向简单图，圈 $l\geq 2$

◦ 简单通路：通路边各异 ◦ 复杂通路：非简单通路 ◦ 初级通路：通路点各异（初级回路除端点） ◦ 无向图中 $\forall v_i$ 有 $deg(v_i)\geq 2\Rightarrow$ 有圈

◦ 无向路连通：有通路 ◦ 有向图 u 可达 v（单向）；u、v 相互可达 ◦ 有向图弱连通（/连通）：对应无向图连通；单向连通：u 可达 v 或 v 可达 u

强连通：u、v 相互可达 ◦ 极大连通子图/连通支：连通子图不是任何连通子图的真子图 ◦ 点割集：删去 V_1 任何真子集仍连通，而删 V_1 不连通

◦ 割点：点割集中只有一个元素 ◦ 连通度：至少删几个结点不连通（不连通图为 0） ◦ 边割集：同点割集 ◦ 桥/割边、边连通度

◦ 连通图 v 是割点 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 点 u、w 使 u、w 任一条路径通过 v ◦ 连通图中 e 是割边 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 点 u、v 使任一条 u-v 均过 e $\Leftrightarrow$ e 不在 G 的任一圈上

例：任意给定 (n+1) 项递增自然数列… 方法：设 $a(i)$ 为以 i 为始点的最长通路长为 l 的结点数 $\exists a(i)\geq n+1$

◦ 欧拉通路：经每条边恰一次的通路 ◦ 欧拉回路 ◦ 欧拉图：有欧拉回路 ◦ 半欧拉图：有欧拉通路无欧拉回路

◦ 无向连通图有欧拉回路 $\Leftrightarrow 2|d_i$（证 $\Leftarrow$，回路构造法，构一个删一个至完）（构造欧拉图算法） ◦ 连通图中 k 个奇度数点，则 k/2 笔画（k/2 个简单通路组成 E(G)）

◦ 有向连通图中各结点正负度相等则存在欧拉回路 ◦ 有向连通图中只有两个点正负度不相等，一个 $d^+-d^-=1$，一个 $d^--d^+=1$ 则有欧拉通路

◦ 哈密顿通路/回路 ◦ 哈密顿图：具有哈密顿回路 半哈密顿图：具有哈密顿通路的图