《高等微积分 2》第十六周习题课

1 给定正数 a, b, 求解微分方程

$$y' = \sqrt{\frac{a^3}{b^2 y - a^3}}.$$

2 给定正数 k, 求解微分方程

$$y' = \frac{ky\sqrt{y^2+1}}{x}.$$

3 求解初值问题.

$$\begin{cases} y' = 4y\sin 2x \\ y(\pi) = e \end{cases}$$

4 设 $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ 连续, $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ 可微, 且满足

$$\varphi'(x) + f(x)\varphi(x) \le 0, \quad \forall x \ge 0.$$

证明:

$$\varphi(x) \le \varphi(0)\exp(-\int_0^x f(t)dt), \quad \forall x \ge 0.$$

5 四只虫子都只能以恒定的速度 v 运动, 在 $t = 0$ 时刻它们分别位于某个边长为 a 的正方形的四个顶点处. 从此刻起所有虫子都 (时刻) 瞄准它逆时针方向的下一个虫子开始运动, 当它们相遇于一点时停止运动.

(1) 需要多长时间相遇?

(2) 求每个虫子的运动轨迹.

6 求解微分方程 $y' + y = xy^3$.

7 (Ricatti 方程) 形如 $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$ 的微分方程, 一般不能用初等方法解出 (Liouville 1841).

(1) 设 $y_1(x)$ 是 Ricatti 方程的一个特解. 证明: Ricatti 方程的一般解都可以写成 $y = y_1 + u$, 其中 u 是某个贝努利方程的解.

(2) 用上述方法解微分方程 $y' = 1 - x^2 + y^2$.

8 (1) 设 f 是给定的连续函数, 求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x})$.

(2) 设 P, Q 是给定的连续函数, 求解微分方程 $yP(xy) + xQ(xy)y' = 0$.

(3) 设 f 是给定的连续函数, 求解微分方程 $y'' = f(y)$.

9 考虑二阶线性齐次微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

其中 p, q 是 $[a, b]$ 上的连续函数. 证明: 存在函数 u, 使得如果令 $y(x) = u(x)z(x)$, 则上述微分方程等价于 $z'' + Q(x)z = 0$ 的形式.

10 设 $a > 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续且有界. 证明: 微分方程 $y' + ay = f(x)$ 的解在区间 $[0, +\infty)$ 上有界.

11 设 $p(x), q(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $q(x) < 0, \forall x \in [a, b]$.

(1) 设 $y(x)$ 是二阶微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的非零解 (即 $y(x)$ 不恒等于零). 证明: 函数

$$f(x) = y(x) \cdot y'(x) \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}$$

在 $[a, b]$ 上严格单调递增.

(2) 设 $y(x)$ 是二阶微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的非零解. 证明: $y(x)$ 在 $[a, b]$ 上最多只有一个零点.