第 八 讲

CFG的应用与文法的二义性

CFG的应用与文法的二义性

- CFG的应用
- CFG的转换
- 文法二义性
- 二义性的消去方法
- CFG的构造方法
- CFG的构造实例

CFG的应用与文法的二义性

- CFG的应用
- CFG的转换
- 文法二义性
- 二义性的消去方法
- CFG的构造方法
- CFG的构造实例

CFG的应用

- Regular Expressions
  - Take a single instance of a string: 10/Apr/2021
  - Use regex to generalize the pattern:
    (..)/(···)/(···.) ➔ AB/789/A1B2
    (.+)/(.+)/(.+) ➔ ABCD/432/00
    (\d+)/([a-zA-Z]+)/(\d+) ➔ 10/Apr/2021

Use parentheses to specify fields to extract.

CFG的应用

- Regular Expressions: Meta Characters

	Description	Example	Match	No Match
.	Any character except \n	...	abc	abn abc\d
[]	Any character inside brackets	[cb.]ar	bar .ar	jar
*	>=0 or more of last symbol	[pb]*ark	bbpark ark	dark
+	>=1 last symbol	[pb]+ark	bbpark bark	dark ark
?	Last symbol optional	s?he	she he	the
|	Before or after	we|us	we us	e s

CFG的应用

- Regular Expressions: Meta Characters

	Description	Example	Match	No Match
[]	Any character inside brackets	[A-Z.]ar	Bar .ar	jar
[^]	Any character not inside brackets	[^a-z]ar	Bar :ar	car
\	Escapes next character	\[hi\]	[hi]	hi
^	Beginning of line	^ark	ark two	dark
$	End of line	ark$	Noahs ark	arkk

CFG的应用

- Regular Expressions

Shorthand Characters

Bracket Form	Shorthand	Description
[a-zA-Z0-9_]	\w	Alphanumeric character
[^\w]	\W	Not an alphanumeric char
[0-9]	\d	Digit
[^\d]	\D	Not a digit
[\t\n\f\r\p{Z}]	\s	Whitespace
[^\s]	\S	Not whitespace

CFG的应用

A BNF grammar of sentences in PL

```
S := <Sentence> ;
<Sentence> := <AtomicSentence> | <ComplexSentence> ;
<AtomicSentence> := 'TRUE'|'FALSE'|'P'|'Q'|'S' ;
<ComplexSentence> := '(' <Sentence> ')' |
          <Sentence> <Connective> <Sentence> |
          'NOT' <Sentence> ;
<Connective> := '∧' | '∨' | '→'| '↔' ;
```

Grammar of sentences in PL is a CFG

CFG的应用

A BNF for FOL

```
S := <Sentence> ;
<Sentence> := <AtomicSentence> | <Sentence> <Connective> <Sentence> |
<Quantifier> <Variable>,... <Sentence> |'¬' <Sentence> | '(' <Sentence> ')';
<AtomicSentence> := <Predicate> '('<Term>, ... ')' ;
<Term> := <Function> '(' <Term>, ... ')' | <Constant> | <Variable>;
<Connective> := '∧'| '∨'| '→'| '↔';
<Quantifier> := '∃'| '∀';
<Constant> := 'A'| 'X1'| 'John'| ... ;
<Variable> := 'a'| 'x'| 's'| ... ;
<Predicate> := 'Before'| 'HasColor'| '='| ... ;
<Function> := 'Mother'| 'LeftLegOf'| ... ;
```

Grammar of FOL is also a CFG

CFG的应用

Syntax of LTL

- $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi\wedge\varphi \mid (\varphi) \mid$
  $\mid \varphi U\varphi \mid X\varphi \mid F\varphi \mid G\varphi \mid \varphi W\varphi \mid \varphi R\ \varphi$
- Basic temporal operators:
  - X (O, "next time")
  - U (" until ")
  - F (◊, "sometime " , "eventually ")
  - G (□, "always" , "henceforth ")
  - W Weak-until
  - R Release

It is easy to show that the Syntax of LTL is also the CFG

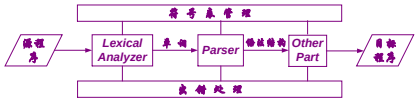
上下文无关文法的应用

- 程序设计语言语法描述和分析
  Yacc (yet another compiler's compiler)
- 文档格式描述和处理
  DTD (Document Type Definition)

上下文无关文法的应用

- 编译/解释程序 (*Compiler / Interpreter*)

- 词法分析器 (*Lexical Analyzer*)与语法解析器(*Parser*)



Yacc 源程序式样

声明节
定义文法中使用的单词 (利用*%token* 命令) 以及一些 C 代码相关的声明；

%%
语法规则节
定义语法规则及语义动作. *Yacc*中的产生式格式为非终结符: 符号串 {C语句表示的语义动作}；
%%

支撑函数节
规则节用到的局部 *C* 函数定义

Yacc 语法规则描述

$E \rightarrow EOE$
$E \rightarrow (E)$
$E \rightarrow v$
$E \rightarrow d$
$O \rightarrow +$
$O \rightarrow *$

```
%token VARIABLE  DATA
%%
Exp : Exp Op Exp  {...}
    | '(' Exp ')'    {...}
    | 'VARIABLE' {...}
    | 'DATA' {...}
    ;
Op  : '+'          {...}
    | '*'          {...}
    ;
%%
yylex() {...}
```


标记语言

- 标记语言 (*markup languages*)
  - HTML(*HyperText Markup Language*)

如 <P>The things I <EM>hate</EM>:
<OL>
<LI>Moldy bread
<LI>People who drive too slow in the fast lane
</OL>

The things I *hate*:
- **Moldy bread**
- **People who drive too slow in the fast lane**

标记语言

Case Study: Transcript

标记语言

Convert HTML into DataFrame

```
import pandas as pd
# convert it pandas DataFrame
df = pd.DataFrame(columns=headers, data=data)
# check some rows
df.head()
```

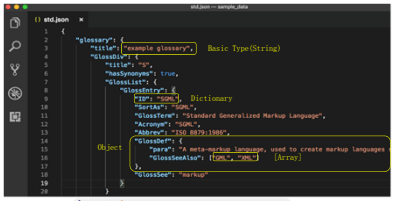
	课程号	课序号	课程名	学分	学时	成绩	绩点	替代课程	课程属性	特殊课程标志	学年学期	考试时间
0	12090043	4	军事理论与技能训练	3	144	B+	3.6		必修		2015-2016-3	20160820
1	02070012	91	党的知识概论	2	32	P	N/A		任选		2016-2017-1	20170115
2	10421055	5	微积分A(1)	5	80	A-	4.0		必修		2016-2017-1	20170115
3	10421094	13	线性代数(1)	4	78	A	4.0		必修		2016-2017-1	20170115
4	10450012	3	现代生物学导论	2	32	B+	3.6		限选		2016-2017-1	20170115

标记语言

- 标记语言 (*markup languages*)
  - HTML(*HyperText Markup Language*)
  - SGML(Standard Generalized Markup Language)
    ISO 8879 国际标准
  - XML(eXtensible Markup Language)
    SGML 的一个子集，用户通过DTD(Document Type Definition) 可以自定义 tag 的类型.

标记语言

- JavaScript Object Notation(JSON)

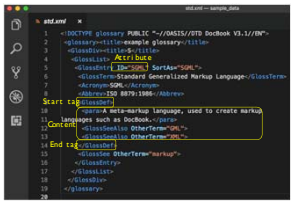


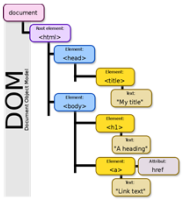
- Recursive datatype
  - Data inside of data
- Value is a:
  - A basic type:
    - String
    - Number
    - True/False
    - Null
  - Array of Values
  - A dictionary of Key: Value pairs

```
import json
with open('std.json', 'r') as f:
    data = json.load(f)
```


标记语言

- XML is a standard for **hierarchical** representations of data






```
from bs4 import BeautifulSoup
file = open('std.xml', encoding='utf-8').read()
soup = BeautifulSoup(file, 'xml')
```

Handle XML file with bs4 as you wish!

标记语言和文档类型定义

- DTD 的格式

  <!DOCTYPE name-of-DTD
  [list of element definitions]>
  <!ELEMENT element-name
  (description of the element)>

description of the elements 实质上是一个正则表示:

- 基本表示式可以是其它*element-name*;
- 可以是一个代表任意文本的特殊项 \#PCDATA.
- 正则表示的算符记号类似于*UNIX*正则表示式.

CFG的应用与文法的二义性

- CFG的应用
- CFG的转换
- 文法二义性
- 二义性的消去方法
- CFG的构造方法
- CFG的构造实例

DTD 格 式

<!DOCTYPE name-of-DTD
[list of element definitions]>

<!ELEMENT element-name
(description of the element)>

DTD 例

```
<!DOCTYPE PcSpecs [
   <!ELEMENT PCS (PC*)>
   <!ELEMENT PC (MODEL, PRICE, PROCESSOR, RAM, DISK+)>
   <!ELEMENT MODEL (\#PCDATA)>
   <!ELEMENT PRICE (\#PCDATA)>
   <!ELEMENT PROCESSOR (MANF, MODEL, SPEED)>
   <!ELEMENT MANF (\#PCDATA)>
   <!ELEMENT SPEED (\#PCDATA)>
   <!ELEMENT RAM (\#PCDATA)>
   <!ELEMENT DISK (HARDDISK | CD | DVD)>
   <!ELEMENT HARDDISK (MANF,MODEL,SIZE)>
   <!ELEMENT SIZE (\#PCDATA)>
   <!ELEMENT CD (SPEED)>
   <!ELEMENT DVD (SPEED)>
]>
```

DTD 例

```
<!DOCTYPE PcSpecs [
  <!ELEMENT PCS (PC*)>
  <!ELEMENT PC (MODEL, PRICE, PROCESSOR, RAM, DISK+)>
  <!ELEMENT MODEL (\#PCDATA)>
  <!ELEMENT PRICE (\#PCDATA)>
  <!ELEMENT PROCESSOR (MANF, MODEL, SPEED)>
  <!ELEMENT MANF (\#PCDATA)>
  <!ELEMENT SPEED (\#PCDATA)>
  <!ELEMENT RAM (\#PCDATA)>
  <!ELEMENT DISK (HARDDISK | CD | DVD)>
  <!ELEMENT HARDDISK (MANF,MODEL,SIZE)>
  <!ELEMENT SIZE (\#PCDATA)>
  <!ELEMENT CD (SPEED)>
  <!ELEMENT DVD (SPEED)>
]>
```

```
<PCS>
  <PC>
    <MODEL>4560</MODEL>
    <PRICE>$2295</PRICE>
    <PROCESSOR>
      <MANF>Intel</MANF>
<MODEL>Pentium</MODEL>
      <SPEED>800MHz</SPEED>
    </PROCESSOR>
    <RAM>256</RAM>
    <DISK><HARDDISK>
      <MANF>Maxtor</MANF>
      <MODEL>Diamond</MODEL>
<SIZE>30.5Gb</SIZE>
      </HARDDISK></DISK>
    <DISK><CD>
      <SPEED>32x</SPEED>
    </CD></DISK>
  </PC> <PC> ... </PC>
</PCS>
```


HTML部分语法

Part of an HTML Grammar

Char → a | A |...

Text → ε | Char Text

Doc → ε | Element Doc

Element → Text |<EM> Doc </EM> |
<P> Doc | <OL> List </OL> | ...

ListItem → <LI> Doc

List → ε | ListItem List

```
<P>The things I <EM>hate</EM>:
    <OL>
    <LI>Moldy bread
    <LI>People who drive too slow in the fast lane
    </OL>
```


DTD转化CFG

DTD 实际上是一个上下文无关文法

将右部含正则表示的产生式转化为一般上下文无关文法的产生式.

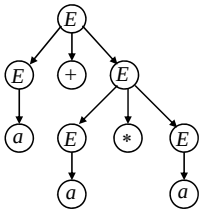
DTD转化CFG

<!ELEMENT PROCESSOR (MANF, MODEL, SPEED)>
Processor →Manf Model Speed
<!ELEMENT DISK (HARDDISK | CD | DVD)>
Disk →HardDisk | CD | DVD
<!ELEMENT PC (MODEL, PRICE, PROCESSOR, RAM, DISK+)>
PC →Model Price Processor Ram Disks
Disks→Disk | Disk Disks

CFG的应用与文法的二义性

- CFG的应用
- CFG的转换
- 文法二义性
- 二义性的消去方法
- CFG的构造方法
- CFG的构造实例

例



(1) (2) (3) (4)

$E \to E+E \mid E*E \mid (E) \mid a$

$w = a+a*a$

$E \Rightarrow^1 E+E \Rightarrow^4 a+E \Rightarrow^2 a+E*E$
$\Rightarrow^4 a+a*E \Rightarrow^4 a+a*a$

最左推导

例

(1) (2) (3) (4)

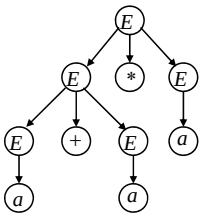
$E \to E+E \mid E*E \mid (E) \mid a$

$w = a+a*a$

$E \Rightarrow^2 E*E \Rightarrow^1 E+E*E \Rightarrow^4 a+E*E$

$\Rightarrow^4 a+a*E \Rightarrow^4 a+a*a$

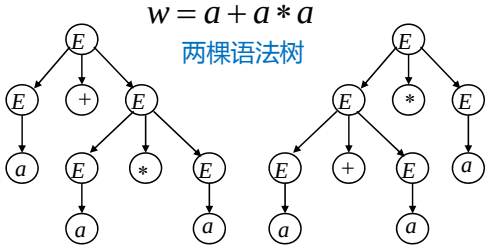
最左推导



$E \to E+E \mid E*E \mid (E) \mid a$

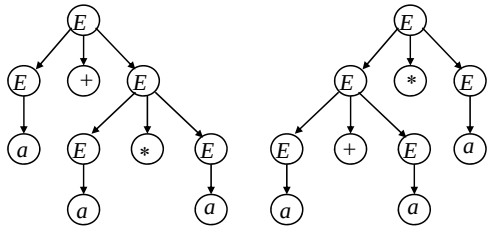
$w = a+a*a$

两棵语法树



文法的二义性

存在字符串 $w = a+a*a$ ，有两棵不同的语法树



文法： $E \to E+E \mid E*E \mid (E) \mid a$ 是二义的

文法的二义性

换言之：

文法G有二义性表明了：

存在某个字符串，有至少两种最左（或者最右）推导。

文法G： $E \to E+E \mid E*E \mid (E) \mid a$

$E \Rightarrow^1 E+E \Rightarrow^4 a+E \Rightarrow^2 a+E*E$

$\Rightarrow^4 a+a*E \Rightarrow^4 a+a*a$

$E \Rightarrow^2 E*E \Rightarrow^1 E+E*E \Rightarrow^4 a+E*E$

$\Rightarrow^4 a+a*E \Rightarrow^4 a+a*a$

由于 $a + a * a$ 有两种不同的最左推导，则文法G是二义的。

文法的二义性

- 二义文法概念

CFG $G = (V, T, S, P)$ 称为二义的，如果对某个 $w \in T^*$, 存在根结点都为开始符号 S 的两棵不同的分析树, 其产物都是 w.

CFG G, 如果对每一 $w \in T^*$, 仅存在一棵这样的分析树，则*G* 为无二义的文法.

文法的二义性

- 定理
  对 *CFG* $G = (V, T, S, P)$ 和 $w \in T^*$，w 具有两棵不同的分析树，当且仅当存在两个不同的从开始从 S 到 w 的最左推导。
- 文法二义性的的另一种定义
  CFG $G = (V, T, S, P)$ 称为二义的，如果存在某个 $w \in T^*$, 有两个不同的从开始符号 S 到 w 的最左推导。

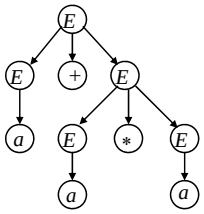
用途: 方便证明文法的无二义性。

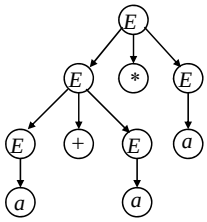
文法的二义性

为什么要讨论文法的二义性？

$a + a * a$

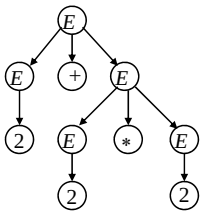
取 $a = 2$

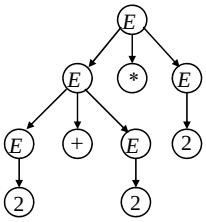




文法的二义性

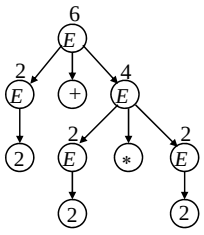
$2 + 2 * 2$



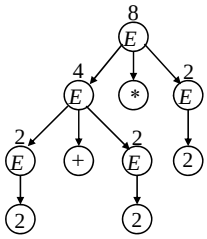


文法的二义性

$2 + 2 * 2 = 6$

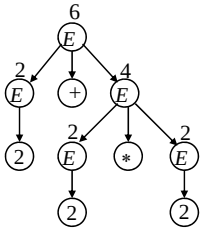


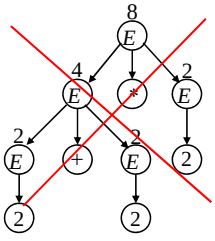
$2 + 2 * 2 = 8$



文法的二义性

$2 + 2 * 2 = 6$ 正确结果





文法的二义性

- 二义性的判定

一个 *CFG* 是否为二义的问题是不可判定的，即不存在解决该问题的算法。

CFG的应用与文法的二义性

- CFG的应用
- CFG的转换
- 文法二义性
- 二义性的消去方法
- CFG的构造方法
- CFG的构造实例

二义性消除

没有通用的办法可以消除文法的二义性。对某些特定的文法，可以找到消除二义性的办法。

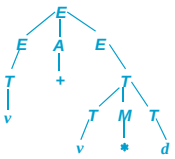
二义性消除

对于右上图的文法，采用算符优先级方法将其变换为左下图的文法，对于该文法，串:

$v + v * d$

存在唯一的分析树.

$E \to EOE \mid (E) \mid v \mid d$
$O \to + \mid *$



$E \to E A E \mid T$
$T \to T M T \mid (E) \mid v \mid d$
$A \to +$
$M \to *$

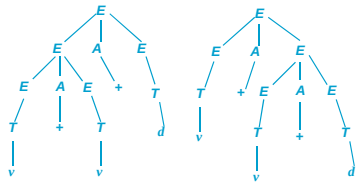
二义性消除

右上图的文法仍然是二义文法，串:

$v + v + d$

存在不同的分析树(下图)。

$E \to E A E \mid T$
$T \to T M T \mid (E) \mid v \mid d$
$A \to +$
$M \to *$



二义性消除

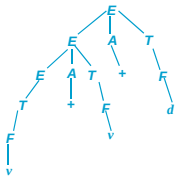
采用左结合方法将右上图的文法变换为左下图，串:

$v + v + d$

存在唯一的分析树（右下图）

$E \to E A E \mid T$
$T \to T M T \mid (E) \mid v \mid d$
$A \to +$
$M \to *$

$E \to E A T \mid T$
$T \to T M F \mid F$
$F \to (E) \mid v \mid d$
$A \to +$
$M \to *$



二义性消除

悬挂else二义性

$S \to \varepsilon \mid iS \mid iSeS$

字符串：iie

二义性消除

悬挂else二义性

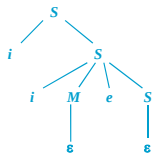
$S \to \varepsilon \mid iS \mid iSeS$

采用最近嵌套方法消除悬挂 else 二义性

将文法变换为下面的文法

$S \to \varepsilon \mid iS \mid iMeS$
$M \to \varepsilon \mid iMeM$

串 iie 存在唯一的分析树（右图）



固有二义语言

如果上下文无关语言 L 的所有文法都是二义的，则称 L 是固有二义的(*inherently ambiguous*)

某些上下文无关语言只有二义文法

固有二义语言

例:

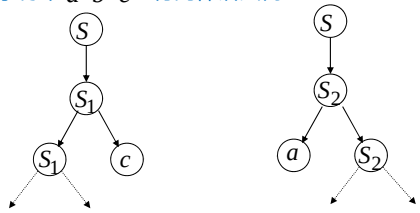
$$L = \{a^n b^n c^m\} \cup \{a^n b^m c^m\}$$

$S \to S_1 \mid S_2$　$S_1 \to S_1 c \mid A$　$A \to aAb \mid \varepsilon$　$S_2 \to aS_2 \mid B$　$B \to bBc \mid \varepsilon$

固有二义语言

例:

字符串 $a^n b^n c^n$ 有两棵语法树



固有二义语言

例:

语言

$$L = \{a^n b^n c^m\} \cup \{a^n b^m c^m\}$$

是固有二义的

CFG的应用与文法的二义性

- CFG的应用
- CFG的转换
- 文法二义性
- 二义性的消去方法
- CFG的构造方法
- CFG的构造实例

上下文无关文法的构造

- 给定一个上下文无关语言 L，要构造其上下文无关文法 G 是一项困难的工作，因为没有针对这一问题的统一解法。
- 如果语言 L 是正则的，文法G的构造比较容易。
- 对于非正则语言，构造文法要困难的多。
  - 需要考虑文法中的递归结构。
  - 使用新定义的变量，必须保证递归的完整和结束。

上下文无关文法的构造

例 1：构造上下文无关文法 G，接受 L

$L = \{w = w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

解:

$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$

上下文无关文法的构造

例 2：构造上下文无关文法 G，接受 L

$L = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

解:

$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$

$\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\} \subset \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$.

区别在于少了集合 {0, 1}.

上下文无关文法的构造

引理: 如果 w 有 n 个 0 和 $n+1$ 个 1 ，那么存在一个 1 满足 $w = \alpha 1 \beta$，使得 α 和 β 中 0 和 1 的数量相等。

证明: 令 $w = a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}$， $a_i \in \{0, 1\}$.

如果 $a_1 = 1$, 那么 $w = 1\beta$. 结论得证.

如果 $a_1 = 0$, 定义函数 f : $f(0) = 0$, 对于 $i = 1, 2, \ldots, 2n$,

$$f(i) = \begin{cases} f(i-1) - 1, & \text{if } a_i = 0 \\ f(i-1) + 1, & \text{if } a_i = 1 \end{cases}$$

上下文无关文法的构造

令 $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_k$, $1 \le k \le 2n+1$, 那么：

$$f(k) = n_1(\alpha) - n_0(\alpha)$$

并且 $f(k+1)$ 比 $f(k)$ 多一或者少一。因为

$f(1) = -1$, $f(2n+1) = 1$,

存在最小的k, 满足 $3 \le k \le 2n+1$, 使得：

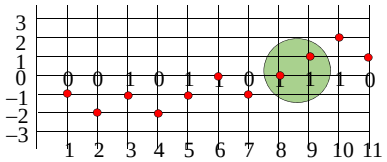
$a_k = 1$, $f(k) = 1$ 且 $f(k-1) = 0$

令 $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_{k-1}$. 那么 α 中 0 和 1 的数量相等。

证毕！

上下文无关文法的构造

例如, w = 00101101110. 考虑 $f(n)$ 的图像.



$f(1)$ 的值是 −1. 有 $f(8) = 0$ 且 $f(9) = 1$, $a_9 = 1$. 且 α = 00101101 拥有同样数量的 0 和 1.

CFG的应用与文法的二义性

- CFG的应用
- CFG的转换
- 文法二义性
- 二义性的消去方法
- CFG的构造方法
- CFG的构造实例

CFG构造实例

例 3: 构造 CFG G 满足

$L = L(G) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid n_0(w) = n_1(w)\}$.

解答:

方法 1: 先看如下的 CFG

$S \to 01S \mid 0S1 \mid S01 \mid 10S \mid 1S0 \mid S10 \mid \varepsilon$

虽然这个文法生成的字符串中有相同数量的 0 和 1，但是无法生成字符串00111100.

该文法是不正确. 怎样描述该语言的 CFG 呢？

CFG构造实例

方法 2 :

字符串 w 开头可能是 0, 在之后的某个位置有 1. 在 0 和 1 之间有一个或者更多的 0,1 对。

如果字符串的开头是 1, 构造方法类似.

构造如下的文法 :

$S \to 0S1S \mid 1S0S \mid \varepsilon$

但是, 我们只知道 $L(G) \subset L$.

CFG构造实例

通过归纳法证明 $L \subset L(G)$:

1) $\varepsilon \in L$,

$S \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon$. 因此, $\varepsilon \in L(G)$

2) $w \in L$, 并且 $|w| \le 2n$, 假设

$S \overset{*}{\Rightarrow} w$, $w \in L(G)$

3) 如果 $v \in L$, 且 $|v| = 2(n+1)$.

CFG构造实例

a) 如果 $v = 0w \in L$. 那么 w 中有 n 个 0 和 $n+1$ 个 1。 根据引理， 存在 1 满足 $w = \alpha 1 \beta$, 且 α 和 β 中 0 和 1数量相等。则有

$S \Rightarrow 0S1S \overset{*}{\Rightarrow} 0\alpha 1S \overset{*}{\Rightarrow} 0\alpha 1\beta = v \in L(G)$.

b) 如果 $v = 1w \in L$. 那么 w 中有 n 个 1 和 $n+1$ 个 0。 与 a)同理，有

$S \Rightarrow 1S0S \overset{*}{\Rightarrow} 1\alpha 0S \overset{*}{\Rightarrow} 1\alpha 0\beta = v \in L(G)$.

证毕！

CFG构造实例

方法3:

另一种解决例3的方法. CFG 如下所示：

$S \to 0B \mid 1A \mid \varepsilon$, $B \to 1S \mid 0BB$, $A \to 0S \mid 1AA$

对于任意字符串 w, 有三种情况：

(a) w 中 0 的数量和 1 的数量相等，通过 S 生成；

(b) w 中 0 的数量比 1 的数量多一个，通过 A 生成；

(c) w 中 0 的数量比 1 的数量少一个，通过 B 生成。

CFG构造实例

方法4:

文法 G ：

$$S \to SS \mid 0S1 \mid 1S0 \mid \varepsilon$$

课后练习

✧ 必做题:

- P-204 *Ex.*5.3.3
- P-205 Ex.5.3.4(*b*),(*c*)
- P-205 *Ex.*5.3.5
- P-214 *Ex.5.4.2*
- P-214 *Ex.5.4.3*
- P-215 *Ex.5.4.7* (*a*)

✧ 思考题:

- P-215 *Ex.5.4.7* (*b*)

That's all for today.

Thank You