

《高等微积分 2》第二周作业

1 设 f, g 是 $[a, b]$ 上的可积函数. 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right).$$

2 证明: U 是 \mathbf{R}^n 的开集当且仅当 U 可以表示成一族开球邻域的并.

3 计算极限.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2}.$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-3x^2y + y^3 - 4xy}{x^2 + y^2}.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 + x^2 + y^2)^{1/(x^2+y^2)} - e}{x^2 + y^2}, \text{ 其中 } e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(4) 求出所有实数 a, b 及正数 α , 使得如下极限式成立:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax + by}{(x^2 + y^2)^\alpha} = 0.$$

4 给定 $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$. 定义函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为

$$f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

证明: f 是连续函数.

5 设 D 是 \mathbf{R}^n 的子集, $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续函数. 定义函数 $h: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad \forall x \in D.$$

证明: h 是连续函数.