1 行列式的练习

1. (a) 计算下列2阶矩阵的行列式

$$\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}, \tag{1}$$

   (b) 计算下列3阶矩阵的行列式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \tag{2}$$

   (c) 计算下列4阶矩阵的行列式

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 9 \end{bmatrix} \tag{3}$$

2. 证明：二阶矩阵的行列式为0， 当且仅当行列式的秩小于二。

3. 三阶矩阵的每个元素都是正一或者负一，求行列式可能取的最大值。

4. 考虑一个$2n \times 2n$的分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

   (a) 如果A可逆，且$AC = CA$, 求证 $detM = det(AD - CB)$.

   (b) 如果$AC \neq CA$, 举出一个反例 $detM \neq det(AD - CB)$.

5. 考虑分块矩阵的行列式.

   (a) 给定一个分块矩阵$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$. 这里$A$是一个$m \times m$的矩阵，$B$是一个$m \times n$的矩阵. 求证: $|M| = |A||D|$.

   (b) 考虑一个一般的分块矩阵$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$， 这里$A$是一个$m \times m$的矩 阵，$D$是一个$n \times n$的矩阵， B是一个$m \times n$的矩阵， C是$n \times m$的矩 阵. 假设A和D可逆，求证 a): $|M| = |D||A - BD^{-1}C|$, b): $|M| = |A||D - CA^{-1}B|$.

6. 计算下列矩阵的伴随矩阵，并用Cramer法则求逆矩阵.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{4}$$

7. 用Cramer法则计算下列方程的解:

(a)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix} \tag{5}$$

(b)

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 11 & 5\\ 1 & 1 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -3\\ -3\end{bmatrix} \tag{6}$$

8. 假设 A是一个3阶方阵,

$$A=\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix} \tag{7}$$

求$(A^*)^*$.

9. 对于一个$n\times n$的矩阵，我们定义了它的伴随矩阵A^*,
   (a) 证明: $AA^*=A^*A=|A|I_{n\times n}$.
   (b) 证明: A^*可逆当且仅当A可逆.
   (c) 证明: $|A^*|=|A|^{n-1}$.
   (d) 假设A可逆，求$(A^*)^*$.

10. 证明: 行列式用任何行或者任何列展开的公式满足行列式函数的三个性质。

11. 证明: 若A不可逆，那么其伴随矩阵的秩是0或者1.

12. 矩阵A是

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix} \tag{8}$$

求 $det(\lambda I-A)$.