离散数学 第四周作业

9. (1) 设命题A为"沈阳队第一"，B为"上海队第二"，C为"北京队第三"，D为"天津队第四"

原推理关系即为 $(C\to(B\to D))\wedge(\neg A\vee C)\wedge B\Rightarrow A\to D$

用推理规则证

(1)	$C\to(B\to D)$	前提引入
(2)	$\neg A\vee C$	前提引入
(3)	$A\to C$	(2)置换
(4)	$A\to(B\to D)$	(1)(3)三段论
(5)	A	附加前提引入
(6)	$B\to D$	(4)(5)分离
(7)	B	前提引入
(8)	D	(6)(7)分离
(9)	$A\to D$	条件证明规则

即原推理关系得证

(2) 设命题A为"国家对农产品补贴"，B为"国家对农产品进行控制"，C为"农产品短缺"，D为"农产品过剩"

原推理关系即为 $(\neg A\to B)\wedge(B\to C)\wedge(C\vee D)\Rightarrow(\neg D\to A)$

用归结推理法证，将 $(\neg A\to B)\wedge(B\to\neg C)\wedge(C\vee D)\wedge\neg(\neg D\to A)$ 化为合取范式

$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee\neg C)\wedge(C\vee D)\wedge\neg D\wedge\neg A$，子句集 $S=\{A\vee B, \neg B\vee\neg C, C\vee D, \neg D, \neg A\}$

(1)	$A\vee B$	
(2)	$\neg B\vee\neg C$	
(3)	$C\vee D$	
(4)	$\neg D$	
(5)	$\neg A$	
(6)	B	(1)(5)归结
(7)	$\neg C$	(2)(6)归结
(8)	D	(3)(7)归结
(9)	$\square$	(4)(8)归结

即原推理关系得证

10. 设命题A为"合同有效"，B为"张三应受罚"，C为"张三破产"，D为"银行给张三贷款"

前提可表示为 $A\to B$，$B\to C$，$D\to\neg C$，A，D

用推理规则证

(1)	$A\to B$	前提引入
(2)	$B\to C$	前提引入
(3)	$A\to C$	(1)(2)三段论
(4)	$D\to\neg C$	前提引入
(5)	A	前提引入
(6)	C	(3)(5)分离
(7)	D	前提引入
(8)	$\neg C$	(4)(7)分离
(9)	$C\wedge\neg C$	(6)(8)
(10)	矛盾	

故前提间存在矛盾

11. 反证法，若存在 $Q_k\to P_k=F$，则 $Q_k=T$，$P_k=F$ ①

$\forall i\neq k$ $\neg(Q_i\wedge Q_k)=T$，则 $\neg Q_i\vee\neg Q_k=T$，即 $\neg Q_i\vee F=T$ 即 $Q_i=F$ $(\forall i\neq k)$

而 $\forall i\neq k$ $P_i\to Q_i=T$ 则 $P_i=F$ $(\forall i\neq k)$ ②

由①② $\forall i=1,\dots,n$ 有 $P_i=F$

因此 $P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n=F$，这与条件矛盾，故假设不成立

$\therefore$ $Q_i\to P_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 必为真

12、(1) 求证 $(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to R)\Rightarrow R$

化为合取范式 $(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)\vee\neg R$

建立子句集 $S=\{P\vee Q,\ \neg P\vee R,\ \neg Q\vee R,\ \neg R\}$

归结过程

(1) $P\vee Q$
(2) $\neg P\vee R$
(3) $\neg Q\vee R$
(4) $\neg R$
(5) $\neg P$ (2)(4)归结
(6) $\neg Q$ (3)(4)归结
(7) P (1)(6)归结
(8) □ (5)(7)归结

证明结束

(2) 求证 $(S\to\neg Q)\wedge(P\to Q)\wedge(R\vee S)\wedge(R\to\neg Q)\Rightarrow\neg P$

化为合取范式 $(\neg S\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(R\vee S)\wedge(\neg R\vee\neg Q)\wedge P$.

建立子句集 $S=\{\neg S\vee\neg Q,\ \neg P\vee Q,\ R\vee S,\ \neg R\vee\neg Q,\ P\}$

归结过程

(1) $\neg S\vee\neg Q$
(2) $\neg P\vee Q$
(3) $R\vee S$
(4) $\neg R\vee\neg Q$
(5) P
(6) Q (2)(5)归结
(7) $\neg S$ (1)(6)归结
(8) $\neg R$ (4)(6)归结
(9) S (3)(8)归结
(10) □ (7)(9)归结

证明结束

1. (1) 证明 $\vdash\neg(P\wedge Q)\to(\neg P\vee\neg Q)$

(1) $\vdash\neg\neg P\to P$ 定理3.2.6
(2) $\vdash\neg\neg(\neg P\vee\neg Q)\to(\neg P\vee\neg Q)$ (1)代入 $\frac{P}{\neg P\vee\neg Q}$
(3) $\vdash\neg(P\wedge Q)\to(\neg P\vee\neg Q)$ (2)定义2

(2) 证明 $\vdash(\neg P\vee\neg Q)\to\neg(P\wedge Q)$

(1) $\vdash P\to\neg\neg P$ 定理3.2.5
(2) $\vdash(\neg P\vee\neg Q)\to\neg\neg(\neg P\vee\neg Q)$ (2)代入 $\frac{P}{\neg P\vee\neg Q}$
(3) $\vdash(\neg P\vee\neg Q)\to\neg(P\wedge Q)$ (2)定义(1)

(3) 证明 $\vdash P\to(Q\vee P)$

(1) $\vdash P\to(P\vee Q)$ 公理2
(2) $\vdash(P\vee Q)\to(Q\vee P)$ 公理3
(3) $\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$ 定理3.2.1
(4) $\vdash((P\vee Q)\to(Q\vee P))\to((P\to(P\vee Q))\to(P\to(Q\vee P)))$ (3)代入 $\frac{Q}{P\vee Q},\frac{R}{Q\vee P}$
(5) $\vdash(P\to(P\vee Q))\to(P\to(Q\vee P))$ (2)(4)分离
(6) $\vdash P\to(Q\vee P)$ (1)(5)分离

(4) 证明 $\vdash Q\to(P\to Q)$

(1) $\vdash P\to(P\vee Q)$ 公理2
(2) $\vdash Q\to(Q\vee\neg P)$ (1)代入 $\frac{P}{Q},\frac{Q}{\neg P}$
(3) $\vdash(P\vee Q)\to(Q\vee P)$ 公理3
(4) $\vdash(Q\vee\neg P)\to(\neg P\vee Q)$ (3)代入 $\frac{P}{Q},\frac{Q}{\neg P}$
(5) $\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$ 定理3.2.1
(6) $\vdash((Q\vee\neg P)\to(\neg P\vee Q))\to((Q\to(Q\vee\neg P))\to(Q\to(\neg P\vee Q)))$ (5)代入 $\frac{Q}{Q\vee\neg P},\frac{R}{\neg P\vee Q},\frac{P}{Q}$
(7) $\vdash(Q\to(Q\vee\neg P))\to(Q\to(\neg P\vee Q))$ (4)(6)分离
(8) $\vdash Q\to(\neg P\vee Q)$ (2)(7)分离
(9) $\vdash Q\to(P\to Q)$ 定义1