《高等微积分 2》第七周习题课

1 (1) 求出所有实数 a, b 及正数 α, 使得如下极限式成立:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\alpha} = 0.$$

(2) 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数, $f(0,0) = 0$. 设 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = A, \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = B$, 定义三元函数 $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ 为

$$H(x,y,z) = \begin{cases} \frac{f(xz,yz)}{z}, & \text{如果} z \neq 0, \\ Ax + By, & \text{如果} z = 0. \end{cases}$$

证明: H 是 $\mathbf{R}^3$ 上的连续函数.

2 (1) 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数. 证明: 对任何 $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, 有

$$f(x,y) = f(0,0) + x\int_0^1 f_x(tx,ty)dt + y\int_0^1 f_y(tx,ty)dt.$$

(2) 设 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是 C^1 光滑映射, 满足对任何 $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ 有

$$|\frac{\partial g(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}| \leq K, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

证明: 对任何两点 $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)$, 有

$$|g(x_1,...,x_n) - g(y_1,...,y_n)| \leq nK\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

3 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是连续函数, 且 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$.

(1) 证明: 存在 $R>0$, 使得 f 在 $\{(x,y)|x^2+y^2>R^2\}$ 上的取值或者恒正, 或者恒负.

(2) 证明: 或者有 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=+\infty$, 或者有 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=-\infty$.

(3) 假设 f 处处可微. 证明: 存在 (x_0,y_0), 使得 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$.

(4) 假设 f 处处可微. 证明: 对任何 a,b, 存在 (x_0,y_0), 使得 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=a, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=b$. (提示: 考虑 $g(x,y)=f(x,y)-ax-by$, 然后利用第 (3) 问的结论).

4 (作业题) 设 $\mathbf{R}^n$ 的坐标为 $x_1,...,x_n$, $\mathbf{R}^m$ 的坐标为 $y_1,...,y_m$. 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 与 $g:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ 都是光滑函数 (即它们的各个高阶偏导函数都存在且连续), 设 f 的各个分量为 $f=(f_1,...,f_m)$. 定义函数 $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为 $h=g\circ f$, 具体的说即

$$h(x_1,...,x_n)=g(f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n)).$$

请用 f,g 的高阶偏导函数表示 h 的 2 阶偏导函数.

5 (作业题) 设 x,y,z 满足方程 $x^3+y^3+z^3+xyz=4$.

(1) 证明: 在点 $(1,1,1)$ 附近, z 可以表示成 x,y 的隐函数.

(2) 把上述隐函数记作 $z=z(x,y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)}, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1)}$.

(3) 求 $z(x,y)$ 在 $(1,1)$ 附近带皮亚诺余项的泰勒公式, 要求展开至二次项, 即要求余项形如 $o\big((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\big)$.

6 (作业题) 设 $f,g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 的各个 2 阶偏导函数都存在且连续, $g(x_0,y_0)=0, g_y(x_0,y_0)\neq 0$. 设方程 $g(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 附近确定 C^2 光滑的隐函数 $y=y(x)$. 定义函数 $h:U\to\mathbf{R}$ 如下:

$$h(x)=f(x,y(x)),$$

其中 U 是 x_0 的某个邻域, $y=y(x)$ 在 U 中有定义.

(1) 求导函数 $h'(x)$.

(2) 求 2 阶导函数 $h''(x)$.

7 (复习)(1) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 的收敛半径, 其中 $(2n+1)!!=(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot...\cdot 3\cdot 1$ 表示双阶乘.

(2) 证明: $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数.

8 (复习)(1) 给定实数 θ, 把函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}$ 表示成关于 x 的幂级数.

(2) 定义函数 $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}d\theta$, 把函数 $f(x)$ 表示成关于 x 的幂级数.