《高等微积分 2》第九周作业

1 设 $f(x,y) = (2+\sin x)\cdot \sin y$, 令 $D = \{(x,y)|0 < x, y < 2\pi\}$.

(1) 求出 f 在 D 上的所有临界点.

(2) 判断上述每个临界点是否为 f 的极值点. 如果是的话, 请指出它是极大值点还是极小值点.

2 设 $f(x,y,z) = x+y+z+xyz$, 令 $B = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

(1) 证明: f 在 B 上有最大值.

(2) 利用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法求出 f 在 B 上的最大值.

3 设 x, y, z 满足两个约束条件 $x+y+z = 1, x^2+y^2+z^2 = 1$. 求函数 $f(x,y,z) = xyz$ 的最小值.

4 给定整数 $n \ge 2$, 定义 $(n-1)$ 维球面为

$$S = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}.$$

设 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是 C^1 光滑映射, $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in S$ 是 f 在 S 上的最大值点, 即对任何 $(x_1, ..., x_n) \in S$, 有

$$f(x_1, ..., x_n) \le f(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n).$$

证明: f 在 $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ 处的梯度方向平行于向量 $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$, 即存在实数 λ, 使得

$$(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})|_{(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)} = \lambda(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n).$$

5 设 n 元函数 $f(x_1, ..., x_n), g(x_1, ..., x_n)$ 与一元函数 $x_1(t), ..., x_n(t)$ 都是 C^2 光滑的. 定义函数

$$h(t) = f(x_1(t), ..., x_n(t)).$$

(1) 求 $h''(t)$, 请用 $f(x_1,...,x_n)$ 与 $x_1(t),...,x_n(t)$ 的高阶 (偏) 导函数表示.

(2) 令 $\mathbf{p}=(x_1(0),...,x_n(0))$. 假设 $\mathbf{p}$ 是函数 $f(x_1,...,x_n)$ 在约束条件 $g(x_1,...,x_n)=0$ 下的条件极值点. 请叙述此情形下的拉格朗日乘子法.

(3) 设 $\lambda\in\mathbf{R}$ 满足 (2) 中所述拉格朗日乘子法的结论, 定义 n 元函数 F 为

$$F(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)-\lambda\cdot g(x_1,...,x_n).$$

证明: 如果对任何 t, 都有 $g(x_1(t),...,x_n(t))=0$, 则

$$h''(0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}|_{\mathbf{p}}\cdot x_i'(0)\cdot x_j'(0).$$

6 设 $f,g\in C^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, 令 $D=\{(x,y)|g(x,y)\geq 0\}$. 设 $g(x_0,y_0)=0$ 且 $g_x(x_0,y_0),g_y(x_0,y_0)$ 不全为零, 且对任何 $(x,y)\in D$ 有 $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$. 证明: 存在非负实数 λ, 使得

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)-\lambda g_x(x_0,y_0)=0, \\ f_y(x_0,y_0)-\lambda g_y(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$