1. 设事件 A,B 满足 $P(B)=0.4$，$P(\bar{A}\mid B)=0.7$，$P(\bar{A}\mid\bar{B})=0.3$，则 $P(B\mid A)=$______。

【答案】$\frac{2}{9}$

$$P(\bar{A})=P(B)P(\bar{A}\mid B)+P(\bar{B})P(\bar{A}\mid\bar{B})=0.4\times0.7+0.6\times0.3=0.46,$$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=0.54,\quad P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)}=\frac{0.4\times0.3}{0.54}=\frac{2}{9}$$

2. 设 $X\sim N(1,4)$，$P(X<a)=\Phi(2)$。则 $a=$______________。

【答案】 5

【解析】 若 $X\sim N(1,4)$，$\frac{X-1}{2}\sim N(0,1)$ 进行标准化，

$$P(X<a)=P\left(\frac{X-1}{2}<\frac{a-1}{2}\right)=\Phi\left(\frac{a-1}{2}\right)=\Phi(2)\Rightarrow a=5。$$

3. 随机变量 X 服从泊松分布，且已知 $P(X=1)=P(X=2)$，求 $P(X=4)=$____________。

【答案】 $\frac{2}{3}e^{-2}$

【解析】$p_k=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ ，$P(X=1)=e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1}=P(X=2)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2}$，$\lambda=2$

$$P(X=4)=e^{-2}\frac{2^4}{4!}=\frac{2}{3}e^{-2},$$

4. 二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)=\frac{1}{6\sqrt{3}\pi}\exp\left\{\frac{-2}{3}\left[\frac{x^2}{9}+\frac{xy-x}{6}+\frac{(y-1)^2}{4}\right]\right\}$，令 $U=3X+1, V=5-2Y$，则 U 和 V 的相关系数=__________。

【答案】 0.5

【解析】$(X,Y)\sim N(0,1,3^2,2^2,-0.5)$ ，$\rho(U,V)=-\rho(X,Y)=0.5$

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

5. 随机变量的联合密度函数 $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-(x+y)/2}}{4}, & x,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$Z=\begin{cases}2X+Y, & \text{若 } X\ge Y\\ 3X, & \text{若 } X<Y\end{cases}$，

则 $E\left(Z\mid X<Y\right)=$______________。

【答案】 3

$$E\left(Z\mid X<Y\right)=E\left(3X\mid X<Y\right)=\frac{3\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}x\frac{e^{-x/2}}{2}\frac{e^{-y/2}}{2}dy}{P\left(X<Y\right)}=6\int_0^{+\infty}x\frac{e^{-x/2}}{2}dx\int_x^{+\infty}\frac{e^{-y/2}}{2}dy$$

$$=6\int_0^{+\infty}x\frac{e^{-x/2}}{2}e^{-x/2}dx=3\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=3$$

6. 连续型随机变量 X,Y 的密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}1/4, & 0<|y|<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则条件密度函数

$p_{X|Y}\left(x|y\right)$ 为__________________，条件期望 $E\left(X|Y\right)$ 为__________________。

【答案】 $p_{X|Y}\left(x|y\right)=\dfrac{1}{2-|y|}\cdot I_{|y|<x<2},|y|<2$， $1+\dfrac{|Y|}{2}$

解：$p_X\left(x\right)=\dfrac{x}{2}\cdot I_{0<x<2}$， $p_Y\left(y\right)=\dfrac{2-|y|}{4}\cdot I_{|y|<2}$，

$$p_{X|Y}\left(x|y\right)=\frac{1}{2-|y|}\cdot I_{|y|<x<2},|y|<2 \qquad E\left(X\mid Y\right)=\frac{2+|Y|}{2}=1+\frac{|Y|}{2}$$

7. 二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,1,1,0.5)$，$E\left(X^2\mid X+Y=0\right)=$______________。

【答案】 $\dfrac{1}{4}$

解： $U=X-Y$ 和 $V=X+Y$，相互独立，

$$E\left(X^2\mid X+Y=0\right)=E\left(\left(\frac{U+V}{2}\right)^2\mid V=0\right)=\frac{1}{4}E\left(U^2+2UV+V^2\mid V=0\right)$$

$$=\frac{1}{4}E\left(U^2\right)=\frac{1}{4}E\left(X^2+Y^2-2XY\right)=\frac{1}{4}$$

8. 设 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，利用切比雪夫不等式估计，$P\left\{|X-\mu|\le 3\sigma\right\}\ge$__________。

【答案】 $\frac{8}{9}$

解：$P\left(|X-E(X)|\ge\varepsilon\right)\le\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$，　$P\left(|X-E(X)|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

$$P\left\{|X-\mu|\le 3\sigma\right\}\ge 1-\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{8}{9}$$

9. $x_1,\cdots,x_n$ 为期望 $1/\lambda$ 的指数分布总体的简单随机样本，已知 $X=2\lambda\left(x_1+\cdots+x_n\right)\sim\chi^2(2n)$，则参数 λ 的置信水平 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为________。

$$\left[\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2\left(x_1+\cdots+x_n\right)},\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2\left(x_1+\cdots+x_n\right)}\right],\qquad\left[\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2\bar{x}},\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2\bar{x}}\right]$$

二．解：（1）记 $A_n=\{t=n$ 时出现正面$\}$，利用全概率公式可得

$$p_n=P\left(A_n\right)=P\left(A_n|A_{n-1}\right)P\left(A_{n-1}\right)+P\left(A_n|\bar{A}_{n-1}\right)P\left(\bar{A}_{n-1}\right)=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{4}\left(1-p_{n-1}\right)$$

$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{3}{4}\left(1-p_{n-1}\right)$，利用初始条件 $p_0=\frac{1}{2}$，

$$p_1=\frac{1}{2}p_0+\frac{1}{4}\left(1-p_0\right)=\frac{3}{8},\quad p_2=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{4}\left(1-p_1\right)=\frac{11}{32}$$

（2）由题意可知，我们想求解 $P(A_1\mid A_2)$。根据贝叶斯公式得：

$$P(A_1\mid A_2)=\frac{P(A_2\mid A_1)P(A_1)}{P(A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}}{\frac{11}{32}}=\frac{6}{11}.$$

三．解：$y<0$ 时，Y 的分布函数 $F_Y(y)=0$；当 $y\ge 0$ 时，Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\frac{|X|}{2}\le y\right)=P(-2y\le X\le 2y)=P\left(\frac{-2y}{\sigma}\le\frac{X}{\sigma}\le\frac{2y}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{2y}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{2y}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{2y}{\sigma}\right)-1$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}2\Phi\left(\frac{2y}{\sigma}\right)-1, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases},$$

概率密度函数 $p_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{4}{\sigma}\varphi\left(\frac{2y}{\sigma}\right), & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{2y^2}{\sigma^2}}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$

$$E(Y)=\frac{\sigma}{2}E\left(\left|\frac{X}{\sigma}\right|\right)=\frac{\sigma}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}。$$

四． 解：设在时刻 0 到 1 之间，甲到达的时刻为 X，已到达的时刻为 Y，

则 (X,Y) 服从均匀分布， $p(x,y)=1\cdot I_{0<x,y<1}$

设甲的等待时间为 T，则 $T=\begin{cases}Y-X, & X\le Y\\ 1-X, & X>Y\end{cases}$,

$$E(T)=\iint\limits_{0<x<y<1}(y-x)p(x,y)dxdy+\iint\limits_{0<y<x<1}(1-x)p(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y(y-x)dx+\int_0^1 dx\int_0^x(1-x)dy=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\text{ 小时。}$$

或 $$=\iint\limits_{0<x<y<1}(y-x)p(x,y)dxdy+\iint\limits_{0<x<y<1}(1-y)p(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y(y-x+1-y)dx=\int_0^1 dy\int_0^y(1-x)dx=\frac{1}{3}\text{ 小时。}$$

五．解：(U,V)的联合分布列

$$\begin{array}{c|cc} X\backslash Y & 1 & 2 \\ \hline 1 & 4/9 & 2/9 \\ 2 & 2/9 & 1/9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} U\backslash V & 1 & 2 \\ \hline 1 & 4/9 & 0 \\ 2 & 4/9 & 1/9 \end{array}$$

U,V 的边缘分布列分别为 $U \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}$，$V \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}$

$$E(U) = 1\cdot\frac{4}{9} + 2\cdot\frac{5}{9} = \frac{14}{9}, \quad E\left(U^2\right) = 1\cdot\frac{4}{9} + 2^2\cdot\frac{5}{9} = \frac{24}{9},$$

$$Var(U) = E\left(U^2\right) - E(U)^2 = \frac{20}{81}$$

$$E(V) = 1\cdot\frac{8}{9} + 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{10}{9}, \quad E\left(V^2\right) = 1\cdot\frac{8}{9} + 2^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{12}{9},$$

$$Var(V) = E\left(V^2\right) - E(V)^2 = \frac{8}{81}, \quad E(UV) = 1\cdot\frac{4}{9} + 2\cdot\frac{4}{9} + 4\cdot\frac{1}{9} = \frac{16}{9}$$

$$Cov(U,V) = E(UV) - E(U)E(V) = \frac{16}{9} - \frac{10}{9}\cdot\frac{14}{9} = \frac{4}{81}$$

$$\rho(U,V) = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{Var(U)}\cdot\sqrt{Var(V)}} = \frac{4/81}{\sqrt{8/81}\cdot\sqrt{20/81}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

五．解：(U,V)的联合分布列

$$\begin{array}{c|cc} X\backslash Y & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1/9 & 2/9 \\ 1 & 2/9 & 4/9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} U\backslash V & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1/9 & 0 \\ 1 & 4/9 & 4/9 \end{array}$$

U,V 的边缘分布列分别为 $U \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/9 & 8/9 \end{pmatrix}$，$V \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5/9 & 4/9 \end{pmatrix}$

$$E(U) = 1\cdot\frac{8}{9} = \frac{8}{9}, \quad E\left(U^2\right) = 1\cdot\frac{4}{9} + 2^2\cdot\frac{5}{9} = \frac{24}{9}, \quad Var(U) = E\left(U^2\right) - E(U)^2 = \frac{20}{81}$$

$$E(V) = 1\cdot\frac{8}{9} + 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{10}{9}, \quad E\left(V^2\right) = 1\cdot\frac{8}{9} + 2^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{12}{9},$$

$$Var(V) = E\left(V^2\right) - E(V)^2 = \frac{8}{81}, \quad E(UV) = 1\cdot\frac{4}{9} + 2\cdot\frac{4}{9} + 4\cdot\frac{1}{9} = \frac{16}{9}$$

$$Cov(U,V) = E(UV) - E(U)E(V) = \frac{16}{9} - \frac{10}{9}\cdot\frac{14}{9} = \frac{4}{81}$$

$$\rho(U,V)=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{Var(U)}\cdot\sqrt{Var(V)}}=\frac{4/81}{\sqrt{8/81}\cdot\sqrt{20/81}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

六.（8 分）（1）写出一个随机变量具有无记忆性的概率表达式； （2）利用重期望公式和几何分布的无记忆性，计算参数为 p 的几何分布随机变量的期望和方差。

解：如果随机变量 X 满足，对任意 $s>0$ 和 $t>0$，有 $P\left(X>s+t \mid X>s\right)=P\left(X>t\right)$，

称随机变量 X 具有无记忆性。

设随机变量 $X\sim Ge(p)$，$0<p<1$， $P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$， $k=1,2,\cdots$， 设定义随机变量 $Y=\begin{cases}1, & X=1\\ 0, & X>1\end{cases}$，则由全期望公式

$$E(X)=E\left(E\left(X|Y\right)\right)=P(Y=1)\cdot E\left(X|Y=1\right)+P(Y=0)\cdot E\left(X|Y=0\right)$$

$$=P(X=1)\cdot E\left(X|X=1\right)+P(X>1)\cdot E\left(X|X>1\right)$$

$E\left(X|X=1\right)=1$， $E\left(X|X>1\right)=1+E(X)$

$$E(X)=P(X=1)\cdot E\left(X|X=1\right)+P(X>1)\cdot E\left(X|X>1\right)$$

$=p\cdot 1+(1-p)\cdot\left(1+E(X)\right)$，解得，$E(X)=\dfrac{1}{p}$。

$$E\left(X^2\right)=E\left(E\left(X^2|Y\right)\right)=P(X=1)\cdot E\left(X^2|X=1\right)+P(X>1)\cdot E\left(X^2|X>1\right)$$

注意到 $E\left(X^2|X=1\right)=1$， $E\left(X^2|X>1\right)=E\left((1+X)^2\right)=1+2E(X)+E\left(X^2\right)$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1+2(1-p)E(X)}{p}=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p},$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=\frac{1-p}{p^2}$$ 。

七．解：（1）$P\left(Y_k=T\right)=P\left(X\ge T\right)=1-F\left(T\right)=e^{-\lambda T}$， $Z\sim b\left(n,e^{-\lambda T}\right)$

（2）$e^{-\lambda T}=\dfrac{z}{n}$，解得 $\hat{\lambda}=\dfrac{\ln n-\ln z}{T}$，参数 λ 的估计量为 $\hat{\lambda}=\dfrac{\ln n-\ln Z}{T}$；

（3）似然函数 $L\left(\lambda;x_1,x_2,x_3\right)=\prod_{k=1}^{3}\lambda e^{-\lambda x_k}=\lambda^3e^{-\lambda\left(x_1+x_2+x_3\right)}=\lambda^3e^{-185\lambda}$

对数似然函数 $\ln L\left(\lambda;x_1,x_2,x_3\right)=3\ln\lambda-185\lambda$，对总体期望 $\dfrac{1}{\lambda}$ 求导，并令导数为 0，

$$\frac{d\ln L}{d\left(1/\lambda\right)}=\frac{d\left[-3\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)-185\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-1}\right]}{d\left(1/\lambda\right)}=-3\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-1}+185\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-2}=0,$$

解得 $\dfrac{1}{\hat{\lambda}}=\dfrac{185}{3}=95$。 这一组观测值对总体期望的最大似然估计值是 95。

八．解：（1）以 $\overline{x}$ 为检验统计量， $\overline{x}\sim N\left(\mu,\dfrac{1}{4}\right)$， $\dfrac{\overline{x}-\mu}{1/2}\sim N\left(0,1\right)$，

$$P\left(\frac{\overline{x}-\mu}{1/2}>u_{0.9}\right)=0.1\Rightarrow\overline{x}>\mu+\frac{1}{2}u_{0.9}=\mu+0.64$$，拒绝域的范围 $\left\{\overline{x}\,\middle|\,\overline{x}>10.64\right\}$

（2）$\mu=12$ 时，若出错是第二类错误。样本容量为 n 时，$\overline{x}\sim N\left(12,\dfrac{9}{n}\right)$，

$\dfrac{\overline{x}-12}{3/\sqrt{n}}\sim N\left(0,1\right)$，此时拒绝域为 $\left\{\overline{x}\,\middle|\,\overline{x}>10+\dfrac{3}{\sqrt{n}}u_{0.9}\right\}=\left\{\overline{x}\,\middle|\,\overline{x}>10+\dfrac{3.84}{\sqrt{n}}\right\}$

$$\beta=P\left(\overline{x}\le10+\frac{3.84}{\sqrt{n}}\,\middle|\,\mu=12\right)=P\left(\frac{\overline{x}-12}{3/\sqrt{n}}\le\frac{10+\frac{3.84}{\sqrt{n}}-12}{3/\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{3.84-2\sqrt{n}}{3}\right)$$

若使 $\Phi\left(\frac{3.84-2\sqrt{n}}{3}\right)\le 0.1$， 要求 $\frac{3.84-2\sqrt{n}}{3}\le u_{0.1}$， $n\ge 3.84^2\left(n\ge 15\right)$。

（3）写出 $n=36$ 时，$\bar{x}\sim N\left(\mu,\frac{1}{4}\right)$， $\bar{x}=11$ 的 p 值

$$p=P\left(\bar{x}>11\right)=P\left(\frac{\bar{x}-10}{1/2}>\frac{11-10}{1/2}\right)=P\left(\frac{\bar{x}-10}{1/2}>2\right)=1-\Phi\left(2\right)。$$