概统 第三周作业

2、设 A、B 分别为甲、乙种子发芽，且 A、B 独立

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times0.9=0.72$

(2) $P(A\cup B)=1-(1-P(A))(1-P(B))=1-0.2\times0.1=0.98$

(3) $P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)$

$=P(A)(1-P(B))+(1-P(A))P(B)=0.8\times0.1+0.2\times0.9=0.26$

4、(1) $P_1=P(A\cup B\cup C)=1-(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))=1-0.7\times0.8\times0.8=0.552$

(2) $P_2=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.3\times0.2\times0.2=0.012$

(3) $P_3=P(A)+P(\bar{A})P(BC)=0.3+0.7\times(0.2\times0.2)=0.328$

8、(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$\Rightarrow P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.9-0.4+0=0.5$

(2) $P(A\cup B)=1-(1-P(A))(1-P(B))$

$\Rightarrow 0.9=1-0.6(1-P(B))$

$\Rightarrow P(B)=\frac{5}{6}\approx0.833$

(3) $A\subset B\Rightarrow A\cup B=B$

$\Rightarrow P(B)=P(A\cup B)=0.9$

19、(1) 设前两局甲均胜为 A，前两局甲乙各胜一局且第三局甲胜为 B，P_1 为三局两胜甲的胜率

$P_1=P(A)+P(B)=0.6^2+2\times0.6\times0.4\times0.6=0.36+0.288=0.648$

(2) 设前三局甲均胜为 A'，前三局甲胜二乙胜一且第四局甲胜为 B'，
前四局甲胜二乙胜二且后一局甲胜为 C'，P_2 为五局三胜甲的胜率

$P_2=P(A')+P(B')+P(C')=0.6^3+3\times0.6^2\times0.4\times0.6+6\times0.6^2\times0.4^2\times0.6$

$=0.216+1.2\times0.216+0.96\times0.216$

$=3.16\times0.216=0.68256$

$P_1<P_2$

故选五局三胜对甲更有利

21. 我们不妨从一般情况出发，先研究第(3)问甲胜的概率

甲胜有m种情况，A_i表示在乙胜i局情况下甲最终获胜，则i范围为 $0\le i\le m-1$

A_i发生时，最后一局甲必胜　前$(n+i-1)$局甲乙获胜分布是一种排列，

一共有$\binom{n+i-1}{i}$种排列可能，故

$$P(A_i)=\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+i-1}\times\frac{1}{2}=\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+i}$$

故 $P(\text{甲胜})=\sum_{i=0}^{m-1}P(A_i)=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+i}$

另一种做法是考察前$(n+m-1)$局，即使乙胜也可以继续，则共有$\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n+m-1}{i}$个甲胜的可能结果，且概率均为$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m-1}$，因此 $P(\text{甲胜})=\frac{1}{2^{n+m-1}}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n+m-1}{i}$

考虑到 $2^{n+m-1}=\sum_{i=0}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{i}$，故 $P(\text{乙胜})=\frac{1}{2^{n+m-1}}\sum_{i=m}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{i}$

(1)　甲、乙可互换，两个人平等，则 $P(\text{甲胜})=P(\text{乙胜})=\frac{1}{2}$，赌本平分

(2)　$P(\text{甲胜})=\frac{1}{2^4}\left(\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}\right)=\frac{11}{16}$，　$P(\text{乙胜})=\frac{5}{16}$

故甲拿$\frac{11}{16}$，乙拿$\frac{5}{16}$

(3)　甲拿 $\frac{\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n+m-1}{i}}{\sum_{i=0}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{i}}=\frac{\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n+m-1}{i}}{2^{n+m-1}}$，乙拿 $\frac{\sum_{i=m}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{i}}{2^{n+m-1}}$

24.

$$1-P(B)=P(\bar{B})=P(A\bar{B})+P(\bar{A}\bar{B})=(P(A)-P(AB))+P(\bar{A}\bar{B})$$

$$\Rightarrow\quad P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)\ ①$$

而

$$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}=1$$

$$\Rightarrow P(AB)(1-P(B))+P(B)(1-P(A)-P(B)+P(AB))=(1-P(B))P(B)$$

$$\Rightarrow P(AB)-P(B)P(AB)+P(B)-P(A)P(B)-P^2(B)+P(B)P(AB)=P(B)-P^2(B)$$

$$\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

$\Rightarrow$ A, B 独立.

25. 反证法，假设A,B不相容，即AB互斥，则$P(AB)=0$.

又因为A,B独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)=0$.

即$P(A)=0$或$P(B)=0$.

而$P(A)\ne0$且$P(B)\ne0$是已知条件，推出矛盾.

故假设不成立，AB相容