清华大学试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　考试时间：2019 年 6 月 23 日 19：00—21：00

姓名______________学号 20____________班级________.

一 填空题（每空 3 分，共 30 分；答案均写在试卷上，注意标清题号）

1. 设 X 服从几何分布，$P(X=3\,|\,X>2)=0.4$，则 $P(X=3)=$__________，$E(X\,|\,2<X<5)=$__________。

2. 二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,1,4,0)$，则 $E\left(X^2\middle|2X+Y=2\right)=$________________________。

3. 随机变量 X 服从二项分布 $b(100,0.6)$，c 为任意实数，则 $E\left((X-c)^2\right)$ 的最小值为____________________。

4. 对正态总体 $N(\mu,1)$ 的参数 μ 做假设检验 $H_0:\mu=10, H_1:\mu>10$，显著性水平 $\alpha=0.1$，样本容量 $n=16$，检验统计量为样本均值 $\overline{X}$，则拒绝域为________________，现得到 $\overline{X}$ 的观测值为 11，则其对应的 p 值＝__________。

5. 设随机变量 $X\sim N(0,0.25)$，则随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度函数 $p_Y(y)=$ ____________________。

6. 总体分布服从 $N(\mu,\sigma^2)$，样本容量为 n，写出方差 σ^2 的 0.95 置信区间表达式________________________。

7. 利用切比雪夫不等式,估计一个有方差的随机变量落在与其期望左右不超过 3 个标准差的概率至少为________。

8. 已知期望为 $1/\lambda$ 的指数分布随机变量的方差为 $1/\lambda^2$，利用此结果计算积分 $\int_0^{+\infty}7x^2e^{-5x}dx=$__________________。

二. （16 分） 一份考卷共有 20 题，均为 4 个选项的选择题，每题 5 分。假设对于参加考试的某考生，考卷中 60% 的题目涉及的知识已基本掌握，此时答对的概率是 0.8；其他题目则在 4 个选项中随机地任选一个，试计算

（1） 任选一道考题，该考生回答正确的概率；

（2） 对于某一道该考生答对的题目，计算该考题涉及的知识是这名学生已基本掌握的概率；

（3） 该考生考试成绩的期望值；

（4） 该考生成绩在 70 分以上的概率（利用中心极限定理估计）。

三.（8 分）随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$，$X$ 和 Y 相互独立，

（1）求随机变量$W = XY$的分布函数；（2）判断X与W是否独立，并说明理由。

四．(12 分)随机变量$X_1 \sim U(0,2)$，$X_2 \sim U(0,1)$，X_1和X_2相互独立，$Y = 2X_1 + X_2$。

（1）求Y的分布函数；（2）计算X_1和X_2的期望和方差；（3）计算X_1和Y的相关系数$Corr(X_1, Y)$。

五．(8 分) $X_1, \cdots, X_n$为参数λ的泊松分布总体的一个样本，定义$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$及$\theta_0 = \begin{cases} 1, & X_1 = 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。

（1）求$E(\theta_0)$；（2）求$E(\theta_0 | S_n)$。

六 (18 分) 设总体$X \sim U(0,\theta)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本，$\bar{X}$为样本均值，S^2为样本方差，$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$为$X_1, X_2, \cdots, X_n$的次序统计量，

（1）求$X_{(1)}$和$X_{(n)}$各自的分布函数、期望和方差，以及$X_{(1)}$和$X_{(n)}$的协方差$Cov(X_{(1)}, X_{(n)})$；

（2）判断并解释$X_{(1)} + X_{(n)}$、$X_{(n)}$、$2\bar{X}$与$2\sqrt{3}S$是否为参数θ的无偏估计量，如果不是，是否可以做无偏校正。

七．(8 分)总体$X \sim N(\mu, 2^2)$，做假设检验$H_0: \mu = 10, H_1: \mu = 11,$显著性水平$\alpha = 0.05$，求当样本容量至少达到多少，可使第二类错误不超过$0.01$。

备注 1. 本考卷的样本均为简单随机样本，样本均值$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$，样本方差为$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$

备注 2. 正态总体的样本均值和样本方差相互独立，且$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，其中$n$为样本容量

备注 3. 解答中标准正态随机变量的分布函数和密度函数分别可用$\Phi(x)$和$\varphi(x)$表示

备注 4. $\Phi(1.28) = 0.9$, $\Phi(1.44) = 0.925$, $\Phi(1.65) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(2.33) = 0.99$

备注 5. 正态、χ^2、t等分布所需取值，均用（下侧）分位数表示，例如$X \sim \chi^2(n)$，则$P(X < \chi_\alpha^2(n)) = \alpha$

备注 6. $t_{0.75}(1) = 1, t_{0.75}(2) = 0.79, t_{0.8}(1) = 1.38, t_{0.8}(2) = 1.06, F_{0.5}(1,1) = 1, F_{0.5}(1,2) = 0.67, F_{0.75}(1,1) = 5.83$

备注 7. 分部积分公式$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$