

作业 3

授课老师: 贺飞

你的姓名 (你的学号)

助教: 韩志磊、徐志杰、谢兴宇

在开始完成作业前, 请仔细阅读以下说明:

- 我们提供作业的 \LaTeX 源码, 你可以在其中直接填充你的答案并编译 PDF (请使用 `xelatex`)。当然, 你也可以使用别的方式完成作业 (例如撰写纸质作业后扫描到 PDF 文件之中)。但是请注意, 最终的提交一定只是 PDF 文件。提交时请务必再次核对, 防止提交错误。
- 在你的作业中, 请务必填写你的姓名和学号, 并检查是否有题目遗漏。请重点关注每次作业的截止时间。截止时间之后你仍可以联系助教补交作业, 但是我们会按照如下公式进行分数的折扣:

$$\text{作业分数} = \text{满分} \times (1 - 10\% \times \min(\lceil \text{迟交周数} \rceil, 10)) \times \text{正确率}.$$

- 本次作业为独立作业, 禁止抄袭等一切不诚信行为。作业中, 如果涉及参考资料, 请引用注明。

Problem 1: Hoare 逻辑

1-1 试证明如果霍尔三元组 $\{\varphi\} \text{ if } (p) \{st_1\} \text{ else } \{st_2\} \{\psi\}$ 是有效式, 则霍尔三元组 $\{\varphi \wedge p\} st_1 \{\psi\}$ 和 $\{\varphi \wedge \neg p\} st_2 \{\psi\}$ 都是有效式。

Solution ■

1-2 证明下面的霍尔三元组是有效式:

$$\{\exists t. x = 3t\} \text{ while}(x > 0) \{x := x - 1\} \{(\exists t. x = 3t) \wedge x \leq 0\}$$

Solution ■

Problem 2: 循环

2-1 在扩展 IMP 语言中, 下面两个语句是否语义等价, 如果等价请给出证明, 否则给出反例。

- $?p$
- $\text{if}(p) \text{ skip else } ?\text{false}$

Solution ■

2-2 repeat-until 是另一种常见的循环形式，它的定义如下：

$$\text{repeat } st \text{ until}(p) \equiv st; (? \neg p; st)^*; ?p$$

证明下面的推理规则是可靠的：

$$\frac{\{\varphi\} \text{ st } \{\varphi'\} \quad \{\varphi' \wedge \neg p\} \text{ st } \{\varphi'\}}{\{\varphi\} \text{ repeat } st \text{ until}(p) \{\varphi' \wedge p\}}$$

Solution ■

Problem 3: 数组

3-1 基于数组理论 \mathcal{T}_A （及其扩展）编码以下陈述：

1. 数组 a 可以被从某个位置分成非空的两半，前一半的元素均小于后一半的元素；
2. 若对数组 a 和 b 的同一位置进行相同更新操作之后，数组 a 和 b 的完全相同，那么 a 和 b 仅有可能在该位置上有不同元素。

Solution ■

3-2 在扩展 IMP 语言中，证明下面的霍尔三元组是有效式：

$$\begin{aligned} & \{m < a[0] \wedge i = 0\} \\ & \text{while } (i < n) \{ \text{if } (m < a[i]) \{ m := a[i] \} \text{ else } \{\text{skip}\}; i := i + 1 \} \\ & \{\forall k. (0 \leq k < n \rightarrow m \geq a[k])\} \end{aligned}$$

Solution ■