1 特征值和特征向量

1. (a) 求下列矩阵的特征多项式，特征值和特征向量:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   (b) 找出一个相似变换(利用特征向量)把上面两个矩阵对角化.

2. 证明:
   (a) 不同特征值对应的特征向量是线性无关的。
   (b) 考虑相似变换$B = P^{-1}AP$， 证明: A和B的特征多项式是一样的。

3. 证明: AB 和 BA 的特征多项式是相同的。

4. 求所有只和自己相似的2阶矩阵。(就是任何相似变换都把自己变成自己)。对于一般的n阶矩阵呢?

5. 考虑两个n阶对易矩阵$AB = BA$,
   (a) 假设x是A的特征值的一个特征向量. 证明:
      i. $B^k x$ 是A的特征向量，对应的特征值为λ.
      ii. $(x, Bx, \ldots)$ 生成一个线性子空间，记这个空间的维数为m, 证明: $x, Bx, ..., B^{m-1}x$是这个线性子空间的一组基. m是否等于λ的几何重数?
   (b) 证明: 如果A和B都有n个线性无关特征向量，那么我们可以选择一组线性无关的向量，使得每一个向量同时是A和B的特征向量。这也意味着，A和B可以同时用相似变换对角化!

6. 矩阵特征值的一些性质：
   (a) 假设矩阵的秩是r，证明： 矩阵最多有r个非0特征值。
   (b) 可逆矩阵是不是都可以对角化？ 如果是，请证明。如果不是，请给出一 个反例。
   (c) 逆矩阵的特征值等于矩阵A的特征值的倒数（考虑代数重数)，(要证明相 对应的特征值的代数重数是一样的)

2 对称矩阵

1. 求下列对称矩阵的正交对角化

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. 证明：对称矩阵的秩等于非零特征值的数目（这里的数目包括重数).