算法作业 1.

1. (a) 根据定义 $\exists n_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ s.t $\forall n \geq n_0$ 有 $2n+c_1n^2 \leq 2n+\Theta(n^2) \leq 2n+c_2n^2$

考虑到 $0 \leq 2n \leq 2n^2 \quad \forall n \geq 1$

故有 $c_1n^2 \leq 2n+\Theta(n^2) \leq (c_2+2)n^2 \quad \forall n \geq \max\{n_0, 1\}$

因此 $2n+\Theta(n^2) = \Theta(n^2)$

(b) 反证法，设存在 $f(n) \in \Theta(g(n)) \cap o(g(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$ 且 $f(n) \in o(g(n))$

① $f(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow \exists n_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ s.t $\forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

$\Rightarrow \exists c_1, n_0 \in \mathbb{R}^+$ s.t $\forall n \geq n_0 \quad f(n) \geq c_1 g(n)$

② $f(n) \in o(g(n)) \Rightarrow \forall c_3 \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_1 \in \mathbb{R}^+ \ \forall n \geq n_1, \ f(n) < c_3 g(n)$

$\Rightarrow$ 对于①中的 c_1 $\exists n_0' \in \mathbb{R}^+ \ \forall n \geq n_0', \ f(n) < c_1 g(n)$

取 $N = \max\{n_0', n_0\}$，由① $f(N) \geq c_1 g(N)$

由② $f(N) < c_1 g(N)$ 矛盾

故不存在 $f(n) \in \Theta(g(n)) \cap o(g(n))$

$\Rightarrow \Theta(g(n)) \cap o(g(n)) = \emptyset$

(c) 只需举一反例即可. 令 $g(n)=n$，只需说明 $\Theta(n) \cup o(n) \neq O(n)$

考虑函数 $f(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{if } n\text{为偶数} \\ n, & \text{if } n\text{为奇数} \end{cases}$

①证 $f(n) \in O(n)$

因为 $f(n) \leq n$ 显然成立

取 $c=1, n_0=1$，$\forall n \geq n_0 = 1$ 有 $f(n) \leq cn$ 故 $f(n) \in O(n)$

②证 $f(n) \notin \Theta(n)$

反证，假设 $f(n) \in \Theta(n)$

$\Rightarrow \exists c_1, c_2, n_0 \in \mathbb{R}_+$ s.t. $\forall n \geq n_0, \ c_1 n \leq f(n) \leq c_2 n$

n为偶数时有 $c_1 n \leq \sqrt{n}$，$\forall n \geq n_0$，即 $\sqrt{n} \leq \frac{1}{c_1}$，$\forall n \geq n_0$

而取 $n = 2\lceil \frac{1}{c_1^2} \rceil$ 有

$\sqrt{n} \geq \sqrt{2\lceil \frac{1}{c_1^2} \rceil} > \sqrt{\lceil \frac{1}{c_1^2} \rceil} \geq \frac{1}{c_1}$ 即 $\sqrt{n} > \frac{1}{c_1}$ 矛盾

故 $f(n) \notin \Theta(n)$

③证 $f(n) \notin o(n)$

反证，假设 $f(n) \in o(n)$

$\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}_+ \quad \exists n_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \geq n_0, \quad f(n) < cn$

取 $c = \frac{1}{2}$，$\exists n_0 \in \mathbb{R}_+ \ \forall n \geq n_0, \ f(n) < \frac{1}{2}n$

则 $f(2n_0) = 2n_0 < \frac{1}{2} 2n_0 = n_0$，这显然是不可能的

故 $f(n) \notin o(n)$

综上 $f(n) \notin \Theta(n) \cup o(n)$ 但 $f(n) \in O(n)$

则 $\Theta(n) \cup o(n) \neq O(n)$

(d) 先证明不等式：$a,b\in R_+$ 则有 $\frac{a+b}{2}\leq \max\{a,b\}\leq a+b$

证：当 $a\geq b$ 时 $\max\{a,b\}=a$

则 $\frac{a+b}{2}\leq\frac{2a}{2}=a=\max\{a,b\}\leq a+b$

当 $a<b$ 时 $\max\{a,b\}=b$

则 $\frac{a+b}{2}<\frac{2b}{2}=b=\max\{a,b\}\leq a+b$.

得证

回到本题，取 $c_1=\frac{1}{2}$，$c_2=1$，$n_0=1$，由不等式

$\forall n\geq n_0=1$ 有 $\frac{1}{2}(f(n)+g(n))\leq\max\{f(n),g(n)\}\leq f(n)+g(n)$

故 $\max\{f(n),g(n)\}=\Theta(f(n)+g(n))$

3-2

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k n$	n^ε	是	是	否	否	否
n^k	c^n	是	是	否	否	否
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	否	否	否	否	否
2^n	$2^{n/2}$	否	否	是	是	否
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$	是	否	是	否	是
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	是	否	是	否	是

3-3 序列 $2^{2^{n+1}}$ 2^{2^n} $(n+1)!$ $n!$ e^n $n2^n$ 2^n $(\frac{3}{2})^n$ $(\lg n)^{\lg n}$

$n^{\lg\lg n}$ $(\lg n)!$ n^3 n^2 $4^{\lg n}$ $n\lg n$ $\lg(n!)$ n $2^{\lg n}$

$\sqrt{2}^{\lg n}$ $2^{\sqrt{2\lg n}}$ $\lg^2 n$ $\ln n$ $\sqrt{\lg n}$ $\ln\ln n$ $2^{\lg^* n}$ $\lg^* n$ $\lg^*(\lg n)$

$\lg(\lg^* n)$ $n^{1/\lg n}$ 1

等价类 $\{2^{2^{n+1}}\}$ $\{2^{2^n}\}$ $\{(n+1)!\}$ $\{n!\}$ $\{e^n\}$ $\{n2^n\}$ $\{2^n\}$ $\{(\frac{3}{2})^n\}$

$\{(\lg n)^{\lg n}, n^{\lg\lg n}\}$ $\{(\lg n)!\}$ $\{n^3\}$ $\{n^2, 4^{\lg n}\}$ $\{n\lg n, \lg(n!)\}$

$\{n, 2^{\lg n}\}$ $\{\sqrt{2}^{\lg n}\}$ $\{2^{\sqrt{2\lg n}}\}$ $\{\lg^2 n\}$ $\{\ln n\}$ $\{\sqrt{\lg n}\}$ $\{\ln\ln n\}$

$\{2^{\lg^* n}\}$ $\{\lg^* n, \lg^*(\lg n)\}$ $\{\lg(\lg^* n)\}$ $\{n^{1/\lg n}, 1\}$

$f(n)=2^{2^{n+2}}|\sin\frac{n}{2}\pi|$

（n为偶数时 $f(n)=0$）.