举例

例：求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

	0 0	0 1	1 0	1 1	f(x1,x2)
f1	0	0	0	0	0
f2	0	0	0	1	$x_1 \wedge x_2$
f3	0	0	1	0	$x_1 \wedge \neg x_2$
f4	0	0	1	1	x_1
f5	0	1	0	0	$\neg x_1 \wedge x_2$
f6	0	1	0	1	x_2
f7	0	1	1	0	$x_1 \bar{\vee} x_2$
f8	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$
f9	1	0	0	0	$\neg x_1 \wedge \neg x_2$
f10	1	0	0	1	$x_1 \leftrightarrow x_2$
f11	1	0	1	0	$\neg x_2$
f12	1	0	1	1	$x_2 \to x_1$
f13	1	1	0	0	$\neg x_1$
f14	1	1	0	1	$x_1 \to x_2$
f15	1	1	1	0	$\neg x_1 \vee \neg x_2$
f16	1	1	1	1	1

- $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$中n个布尔变量的不同的状态数为2^n
- 每个状态有0，1两种取值，
- 故$f(x_1,x_2,\ldots x_n)$的布尔函数个数为 2^{2^n}

$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 的布尔函数个数为 2^{2^n}

例。求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

解：设$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$不依赖于x_i的布尔函数类为$A_i, i = 1,2, \ldots, n$

不依赖于某个布尔变量的布尔函数个数为 $\mathrm{C}(\mathrm{n}, 1)2^{2^{n-1}}$

不依赖于2个布尔变量的布尔函数个数为 $\mathrm{C}(\mathrm{n}, 2)2^{2^{n-2}}$

……

不依赖于k个布尔变量的布尔函数个数为 $\mathrm{C}(\mathrm{n}, \mathrm{k})2^{2^{n-k}}$

根据容斥原理，满足条件的函数数目为：

$$|-A_1 \cap -A_2 \cap \cdots \cap -A_n|$$

$$= 2^{2^n} - C_n^1 2^{2^{n-1}} + C_n^2 2^{2^{n-2}} - \cdots + (-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}} + \cdots$$

$$+ (-1)^n C_n^n 2$$

定义：不依赖于

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 一个布尔函数，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 不依赖于变量 x_i 是指对于每一 $(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$ 都有

$$f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$$

$|-A_1\cap -A_2\cap\cdots\cap -A_n|$

$= 2^{2^n}-C_n^1 2^{2^{n-1}}+C_n^2 2^{2^{n-2}}-\cdots+(-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}}+\cdots+(-1)^n C_n^n 2$

n=2时，有$|-A_1\cap -A_2| = 2^{2^2}-C_2^1 2^2+C_2^2 2 = 16-8+2=10$

举例

例. 求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

	0 0	0 1	1 0	1 1	f(x1,x2)
f1	0	0	0	0	0
f2	0	0	0	1	$x_1 \wedge x_2$
f3	0	0	1	0	$x_1 \wedge \neg x_2$
f4	0	0	1	1	x_1
f5	0	1	0	0	$\neg x_1 \wedge x_2$
f6	0	1	0	1	x_2
f7	0	1	1	0	$(\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$
f8	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$
f9	1	0	0	0	$\neg x_1 \wedge \neg x_2$
f10	1	0	0	1	$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$
f11	1	0	1	0	$\neg x_2$
f12	1	0	1	1	$x_1 \vee \neg x_2$
f13	1	1	0	0	$\neg x_1$
f14	1	1	0	1	$\neg x_1 \vee x_2$
f15	1	1	1	0	$\neg x_1 \vee \neg x_2$
f16	1	1	1	1	1

- $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 中n个布尔变量的不同的状态数为2^n
- 每个状态有0，1两种取值，
- 故$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$的布尔函数个数为2^{2^n}

用替换公理等的举例证明(P152)

已知u和v是集合,下面证明 {u, v}也是集合。

由空集公理， ∅是集合。

由幂集公理，P(∅)={∅}是集合。

P ({∅})={∅, {∅}}也是集合。

令集合 t ={∅, {∅}}, 定义 $P(x, y)$为P(∅, u)=T

P({∅}, v)=T, 则 t 和 $P(x, y)$满足替换公理的前提,

由替换公理可得，存在由u和v构成的集合s ={u, v}。

$$(\forall x)(\exists!\, y)P(x,y) \rightarrow (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \wedge P(z,u)))$$