



例1: 求下式的前束范式

$$\neg((\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b) \rightarrow R(x)))$$

可按下述步骤实现:

(1) 消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$; 得

$$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y, b) \vee R(x)))$$

(2) \neg 内移 (反复使用摩根律)

$$\begin{aligned} &\text{得 } (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y, b) \vee R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$

$$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$$



(3) 量词左移（使用分配等值式）得

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \wedge (\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$

(4) 变元易名（使用变元易名分配等值式）

$$\begin{aligned} & (\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \wedge (\exists z)\neg Q(z, b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y) \wedge \neg Q(z, b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z) \end{aligned}$$



例3: 求公式 $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$ 的Skolem标准形。

将一公式化成Skolem标准形, 首先也要求出前束形。

该例已是前束形, 便可直接求Skolem标准形

首先将最左边的 $(\exists x)$ 消去, 而将谓词P中出现的所有变元x均以论域中的某个常项a(未在P中出现过)代入。

进而消去从左边数第二个存在量词 $(\exists u)$, 因 $(\exists u)$ 的左边有全称量词 $(\forall y)(\forall z)$, 而将谓词P中出现的所有变元u均以y, z的某个二元函数 $f(y, z)$ (未在P中出现过)代入。



$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$$

最后按同样的方法消去存在量词 $(\exists w)$ ，因 $(\exists w)$ 的左边有全称量词 $(\forall y)(\forall z)$ 和 $(\forall v)$ ，需将谓词 P 中出现的所有变元 w 均以 y 、 z 、 v 的某个三元函数 $g(y, z, v)$ (未在 P 中出现过也不同于 $f(y, z)$)代入。

这样便得到消去全部存在量词的Skolem标准形

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y,z), v, g(y,z,v))$$