《高等微积分 1》第九次习题课材料

1 设 f 处处有连续的 2 阶导函数, x_0 是给定的实数.

(1) 计算如下极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h^2}.$$

(2) 假设 $f''(x_0)\neq 0$, 设函数 $\theta:\mathbf{R}\to(0,1)$ 满足

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\cdot f'\left(x_0+\theta(h)\cdot h\right),\quad \forall h\in\mathbf{R}.$$

证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\dfrac{1}{2}$.

2 下列函数在哪些区间中是下凸函数? 在哪些区间中是上凸函数?

(1) $f_1(x)=x^{\alpha}$.

(2) $f_2(x)=a^{x}$.

(3) $f_3(x)=\log_a x$.

(4) $f_4(x)=\sin x$.

3 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 处处有二阶导数, 并且对任何 $x\in(a,b)$ 都有 $f''(x)>0$. 证明: f 在区间 $[a,b]$ 上的最大值一定在区间端点 a 或 b 处取得.

4 设 $x_1,...,x_n,\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbf{R}_+$, $\alpha_1+...+\alpha_n=1$. 定义函数 $g:\mathbf{R}\backslash\{0\}\to\mathbf{R}$ 为:

$$g(t)=(\alpha_1x_1^t+...+\alpha_nx_n^t)^{1/t}.$$

证明:

(1) $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$.

(2) $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=\max\{x_1,...,x_n\}$.

(3) $\lim_{t\to-\infty} g(t)=\min\{x_1,...,x_n\}$.

(4) 设 $a,b\in\mathbf{R}_+$. 证明: $\ln b\le\ln a+\frac{b-a}{a}$.

(5) 设 $y_1,...,y_n\in\mathbf{R}_+$. 利用 (4) 的结论, 证明:

$$(\alpha_1y_1+...+\alpha_ny_n)\ln(\alpha_1y_1+...+\alpha_ny_n)\le\alpha_1y_1\ln y_1+...+\alpha_ny_n\ln y_n.$$

(6) 利用 (5) 的结论, 证明: 对任何 $t\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$, 有 $g'(t)\ge 0$.

5 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导函数, f' 与 f'' 处处为正, $\xi\in(a,b)$ 且 $f(\xi)=0$. 定义数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为

$$x_0=b,\quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad \forall n\ge 0.$$

(1) 证明: $\xi<x_1<b$.

(2) 证明: $\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$.

(3) 令 $m=\min_{a\le x\le b} f'(x)$. 证明:

$$|x_n-\xi|\le\frac{|f(x_n)|}{m}.$$

(4) 证明: 对每个正整数 n, 存在 $c\in(\xi,x_n)$, 使得 $x_{n+1}-\xi=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(c)}{f'(x_n)}(x_n-\xi)^2$.

(5) 记 $M=\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$. 证明:

$$|x_{n+1}-\xi|\le\frac{M}{2m}\cdot|x_n-\xi|^2.$$

6 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数. 证明: 如果 $\int_a^b f(x)dx=0$, 则 f 在 $[a,b]$ 上恒等于 0.

7 设 $f\in C([a,b])$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi).$$

8 (简单版本的第一积分中值定理) 设 $f,g\in C([a,b])$ 且 g 在 $[a,b]$ 上处处非负. 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$ 使得:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

9 (简单版本的第二积分中值定理) 设 $f \in C([a,b])$, g 在 $[a,b]$ 上单调且处处可导. 证明: 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

10 (简单版本的 Riemann-Lebesgue 引理) 设 f 在 $[a,b]$ 上可导且导函数连续. 证明:

(1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0.$

(2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0.$