形式语言与自动机

第十二周作业

习题7.2.1

(b) 对任意正整数 m 取 $z=a^m b^m c^m$

$z=uvwxy$，其中 $vx\neq\varepsilon$，$|vwx|\leq m$，则 vwx 中不可能同时含 a、c

① 设 vwx 中含 a，则 vwx 不含 c，$vx\neq\varepsilon$，则 vx 必含 a 或 b

∴ 则 $uv^0wx^0y=uwy$ 中 a 或 b 个数变少，c 不变，因此 $n_a<n_c$ 或 $n_b<n_c$

$k=0$，$uwy\notin L$

② 设 vwx 中含 c，则 vwx 不含 a，$vx\neq\varepsilon$ 则 vx 必含 b 或 c

i) vx 含 b，取 $k=0$ uwy 中 b 个数变少，a 不变，有 $n_b\neq n_a$，因此 $uwy\notin L$

ii) vx 含 c，取 $k=2$ uv^2wx^2y 中 c 个数变多，a 不变，有 $n_c>n_a$，因此 $uv^2wx^2y\notin L$

③ 设 vwx 中不含 a 且不含 c

则 $|vwx|=m$ 且 $vwx=b^m$，因此 $k=0$ $uv^0wx^0y=uwy$ 减少 b 的个数

$n_b<n_c$，$k=0$，$uv^0wx^0y\notin L$

以上①②③包含了 vwx 的所有可能，均有 $\exists k$ s.t. $uv^kwx^ky\notin L$，则 L 不是 CFL.

(c) 对任意正整数 m，取一个大于 m 的素数 p，则 $z=0^p\ (p>m)\in L$.

$z=uvwxy$，其中 $vx\neq\varepsilon$，$|vwx|\leq m$.

不妨设 $v=0^a$，$x=0^b$ $(a+b\geq 1)$

$k=p+1$ $uv^kwx^ky=uv^{p+1}wx^{p+1}y=0^p0^{pa}0^{pb}=0^{p(a+b+1)}$.

则 $a+b+1\mid p(a+b+1)$，即 $uv^kwx^ky\notin L$，因此 L 不是 CFL.

(e) 对任意正整数 m，取 $z=a^m b^m c^{2m}$

$z=uvwxy$，其中 $vx\neq\varepsilon$，$|vwx|\leq m$，则 vwx 中不可能同时含 a、c

① 设 vwx 中含 a，则 vwx 不含 c，$vx\neq\varepsilon$，则 vx 必含 a 或 b

则 $uv^0wx^0y=uwy$ 中 a 或 b 个数变少，c 不变，$2m=n_c>2n_a$ 或 $2m=n_c>2n_b$

$k=0$ $uwy\notin L$

② 设 vwx 中含 c，则 vwx 不含 a，$vx\neq\varepsilon$，则 vx 必含 b 或 c

i) vx 含 b 取 $k=0$ uwy 中 b 个数变少，a 不变，有 $n_a\neq n_b$，$uwy\notin L$

ii) vx 含 c 取 $k=2$ uv^2wx^2y 中 c 个数变多，a 不变 $n_c>2m=2n_b$，

因此 $uv^2wx^2y\notin L$

③ 设 vwx 中不含 a 也不含 c

则 $|vwx|=m$ 且 $vwx=b^m$，因此 $k=0$ $uv^kwx^ky=uwy$ 减少 b 个数

$n_a\neq n_b$，$uv^0wx^0y\notin L$

以上①②③包含 vwx 所有可能，均有 $\exists k$ s.t. $uv^kwx^ky\notin L$，则 L 不是 CFL.

习题 7.3.1

(b) 对于原来的 CFL，我们找到一个对应的 CFG 并化为 CNF，
设 CNF 对应的是 $G=(V,T,S,P)$
我们对 P 研究，P 有 $A\to BC$ 和 $A\to x$ 两种形式

我们采用这样一种方法构造新文法，设 P' 初始为空

我们将 S 替换为 S'，(S,S') 压入栈，对栈 stack 依次进行如下操作

取出栈中元素 (A,A')，查看 A 在 P 中的产生式

若 $A\to BC$ 则在 P' 中加入 $A'\to BC'$ 并删去

将 C' 压入栈（如果 C 未被压入过）

若 $A\to a$，则在 P' 中加入 $A'\to\varepsilon$

若 $A\to x\ (x\neq a)$ 则不对 A' 添加新产生式

则 $G'=(V\cup V',T,S',P'\cup P)$ 即我们所求

下证：$L/a=L(G')$ 因为对于 L 中每一个 w，若 $S\overset{*}{\Rightarrow}w$，对于中间过程 $S\Rightarrow S_0\cdots S_k$

我们将终结符放到最后一步替换（CNF 所以这是可以做到的）

则 $P'\cup P$ 可以对应推出 $S'\Rightarrow S_0\cdots S_k'$，

归纳法 基础 $S\Rightarrow AB$ 对应 $S'\Rightarrow AB'$

设小于等于 k 步的推导均有 $S\overset{*}{\Rightarrow}S_0\cdots S_k$ 对应 $S'\overset{*}{\Rightarrow}S_0\cdots S_k'$

k+1 步时 若 $S_k\to AB$ 由 P' 构造过程，有 $S_{k}'\to AB'$，因此

$S\overset{*}{\Rightarrow}S_0\cdots S_{k-1}AB$ 对应 $S'\overset{*}{\Rightarrow}S_0\cdots S_{k-1}AB'$

$S_0\cdots S_{k-1}$ 替换终结符时 $S_0\cdots S_{k-1}$ 一致，

$S_0\cdots S_k'$ 与 $S_0\cdots S_k$ 替换终结符时 $S_0\cdots S_k$ 替换后为 $wx\ (x\in T)$，

S_k' 与 S_k 出现差异，设 $S_0\cdots S_k$ 替换后为 wx $(x\in T)$，$S_0\cdots S_k'$ 替换为 w

则 ① $x=a$ $S_k\to a$ 对应 $S_k'\to\varepsilon$，因此 $S_0\cdots S_k'$ 替换为 w

② $x\neq a$ $S_k\to x$ 无对应 S_k' 产生式，因此 S' 无法推导出句子

结合①②我们知道，L 中任意以 a 结尾的 wa 在 $L(G')$ 中均可对应推导出 w，不以 a 结尾的在 $L(G')$ 中无法推导出

注意，这种对应是一一对应，因此 $L(G')=L/a$，即为 L/a 找到了一套 CFG，L/a 是 CFL。

习题 7.3.2

(a) L_1: $S_1\to PC$; $P\to aPbb\mid\varepsilon$; $C\to cC\mid\varepsilon$

L_2: $S_2\to AQ$; $Q\to bQcc\mid\varepsilon$; $A\to aA\mid\varepsilon$.

则 L_1、L_2 均是 CFL.

(b) $L_1=\{w\in\{a,b,c\}^*\mid 2n_a=n_b\}$ $L_2=\{w\in\{a,b,c\}^*\mid 2n_b=n_c\}$

则 $L=L_1\cap L_2=\{w\in\{a,b,c\}^*\mid 4n_a=2n_b=n_c\}=\{a^nb^{2n}c^{4n}\mid n\geq 0\}$

对任何正整数 m，取 $z=a^mb^{2m}c^{4m}\in L$ 令 $z=uvwxy$，$vx\neq\varepsilon$，$|vwx|\leq m$

则 vwx 不能同时含 a 与 c，① 设 vwx 不含 a，则 vx 含 b 或 c，取 $k=0$ $uv^kwx^ky=uwy$

b 或 c 的数目减少而 a 数目不变，故 $4n_a\neq n_c$ 或 $4n_b\neq 2n_b$，即 $uv^kwx^ky\notin L$

② 设 vwx 不含 c，则 vx 含 a 或 b，取 $k=0$ $uv^kwx^ky=uwy$，a 或 b 数目减少

而 c 的数目不变，故 $4n_a\neq n_c$ 或 $2n_b\neq n_c$，即 $uv^kwx^ky\notin L$.

综合①② $\exists k$ s.t. $uv^kwx^ky\notin L$，则 L 不是 CFL.

习题 7.3.6

设L是CFL，$G=(V,T,P,S)$是对应的CFG，构造$G^R=(V,T,P^R,S)$

其中P^R是对每个P中的产生式 $A\to\alpha$ $(A\in V,\ \alpha\in(V\cup T)^*)$ 经变形 $A\to\alpha^R$ 后加入P^R的

从而P中产生式和P^R中产生式有一一对应关系

下面证明G^R中所有句型都是G句型的反转，对推导步数进行归纳

基础：G^R一步推导出的句型是G一步推导出句型的反转，这由产生式的构造可以直接看出

归纳：假设G^R中k步推导 $S\overset{k}{\Rightarrow}S_k\ldots S_0$ 有 G中k推导对应 $S\overset{k}{\Rightarrow}S_0\ldots S_k$

设第$(k+1)$步利用 $S_i\to A_l\ldots A_1$ (P^R)，对应P中产生式为 $S_i\to A_1\ldots A_l$.

则 G^R中推导 $S\overset{k}{\Rightarrow}S_k\cdots S_i\cdots S_0\Rightarrow S_k\cdots A_l\ldots A_1\cdots S_0$.

G中对应 $S\overset{k}{\Rightarrow}S_0\ldots S_i\ldots S_k\Rightarrow S_0\ldots A_1\ldots A_l\ldots S_k$.

因此第$(k+1)$步推导的G^R句型也是G句型的反转.

综上：G^R推导出所有句子都是G句子的反转，即 $L(G^R)=L^R$，L^R也是CFL.