《高等微积分 2》第十一周作业

1 给定 $0 < a < b, 0 < c < d$, 设四条曲线 $xy = a$, $xy = b$, $y = cx$ 以及 $y = dx$ 在第一象限内围成的平面区域为 D. 计算 D 的面积.

2 设四条曲线 $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4, \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 以及 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$ 在第一象限内围成的平面区域为 D. 计算积分

$$\iint_D \frac{xy}{x^2 - y^2} dxdy.$$

3 给定 $a, b, c > 0$, 令

$$V = \{(x, y, z) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0\}.$$

计算三重积分

$$\iiint_V z dxdydz.$$

4 考虑三维区域

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \leq 1\}.$$

计算 V 的体积.(提示: 把 V 的定义式配方, 然后适当换元)

5 设 f 在矩形区域 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续, 且有连续的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}$.

(1) 证明: 对任何 $x_0 \in [a, b]$, 有

$$\int_c^d f(x_0, y) dy = \int_c^d f(a, y) dy + \int_a^{x_0} dx \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy.$$

(2) 对每个 $x \in [a, b]$, 定义函数 $g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. 证明: $g'(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy$.

6 设 D 是 Oxy 平面中的区域, 其面积为 S. 定义以 D 为底面, $(0,0,1)$ 为顶点的锥体为

$$V = \{(1-t)(u,v,0) + t(0,0,1) | (u,v,0) \in D, t \in [0,1]\}.$$

求 V 的体积, 要求答案用 S 表示.

7 给定非负整数 a, b, c. 令

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

计算三重积分

$$\iiint_Q x^a y^b z^c dxdydz.$$