回顾:

① 利用Taylor展开可以得到常见初等函数在矩阵处取值
(利用谱来定义一次)

② Jordan标准型 一阶常微分方程组中的应用.

③ V^* 对偶空间, 对偶基.

V/F $\quad e_1, \cdots e_n$ $\qquad V^* = \mathrm{Hom}(V, F)$ 线性函数 ($V \to F$ 线性映射)

$$\varphi: V^* \longrightarrow F^n \qquad (n = \dim V)$$

$$f \longrightarrow \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix}$$ 线性同构

$$? \longrightarrow \text{标准基} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

对偶基. $e^1, \cdots e^n$ $\qquad e^i(e_j) = \delta_{ij}$ $\quad 1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$

$$\ln(e^A e^B) \neq A + B$$

$$= A + B + \underline{\underline{?}} + \underline{\underline{?}} + \cdots$$

(Campbell-Baker-Hausdorff Formula)

注: $V^* \times V \xrightarrow{\Phi} F$ 赋值映射.

$(f, v) \to f(v)$ (对于每一个分量都是线性)

第一分量 $\Phi(\alpha f+\beta g, v) \overset{?}{=} \alpha\Phi(f,v)+\beta\Phi(g,v)$ ✓

$\Phi(\alpha f+\beta g, v) = (\alpha f+\beta g)(v) = \alpha f(v)+\beta g(v)$

$\alpha\Phi(f,v) = \alpha f(v)$, $\beta\Phi(g,v) = \beta g(v)$

双线性性

例: $V=$ 次数 <3 的实系数多项式

基 $(1, x, x^2)$

$$\boxed{ax^2+bx+c = (1,x,x^2)\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}}$$

问: V^* 相对 $(1, x, x^2)$ 的对偶基?

用 (e^1, e^2, e^3) 表示对偶基.

$e^1(1)=1 \quad e^1(x)=0 \quad e^1(x^2)=0$

$\Longrightarrow e^1(ax^2+bx+c) = a\,\underbrace{e^1(x^2)}_{=0} + b\,\underbrace{e^1(x)}_{=0} + c\,\underbrace{e^1(1)}_{=1}$

$= c$

$e^1: V \to \mathbb{R}$

$\underbrace{ax^2+bx+c}_{=f(x)} \to c = f(0)$

$e^2(1)=0 \quad e^2(x)=1 \quad e^2(x^2)=0$

$e^2: V \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax^2+bx+c \to b = f'(0)$

$$\boxed{e^i(e_j)=\delta_{ij}}$$

$e^1, e^2, e^3 : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$e^1 : f \longrightarrow f(0)$

$e^2 : f \longrightarrow f'(0)$

$e^3 : f \longrightarrow \frac{f''(0)}{2!}$

$\quad\;\; \parallel$

$ax^2+bx+c \longrightarrow a$

V 次数 $< n$ 实系数多项式

$(e_1 \cdots e_n) = (1, x, \cdots x^{n-1})$

$(e^1 \cdots e_n)$ 同上

问：$V \longrightarrow V^* \longrightarrow (V^*)^*$

如何理解 V^* 上的线性函数？

$V \longleftrightarrow (e_1 \cdots e_n)$

$V^* \longleftrightarrow (e^1, \cdots e^n)$

$(m_1, \cdots m_n)$

$m_i(e^j) = \delta_{ij}$

$$\begin{cases} m_1(e^1) = 1 \quad m_1(e^2) = \cdots = m_1(e^n) = 0 \\ e^1(e_1) = 1 \quad e^2(e_1) = \cdots = e^n(e_1) = 0 \end{cases}$$

e_1, m_1 有点类似

定义：$V \xrightarrow{\varepsilon} V^{**}$

$x \longrightarrow \varepsilon(x) := \varepsilon_x$ 记作

$\varepsilon_x \in V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, F)$

$\varepsilon_x(f) = f(x)$

$f \in V^*$

① ε是线性映射？

$$\varepsilon(\alpha x+\beta y) \overset{?}{=} \alpha\varepsilon(x)+\beta\varepsilon(y)$$

$$\varepsilon_{\alpha x+\beta y} \qquad \alpha\varepsilon_x \qquad \beta\varepsilon_y$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varepsilon} & V^{**} \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longrightarrow & \varepsilon_x \end{array}$$

$$\boxed{\varepsilon_x(f) = f(x)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x \in \mathrm{Hom}(V^*, F) = V^{**}$$

$$V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, F) \ni \varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_{\alpha x+\beta y}$$

$\forall f \in V^*$

若 $\varepsilon_{\alpha x+\beta y}(f) = \alpha\varepsilon_x(f) + \beta\varepsilon_y(f)$

则 $\varepsilon_{\alpha x+\beta y} = \alpha\varepsilon_x + \beta\varepsilon_y$ 成立

$$LHS = f(\alpha x+\beta y) \quad = \quad RHS = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

相等. f是线性映射.

② ε是双射

$$(e_1, \cdots e_n) \longrightarrow (\varepsilon_{e_1}, \cdots \varepsilon_{e_n})$$

$$\varepsilon_{e_i}(e^j) = e^j(e_i) = \delta_{ij}$$

基 $\longrightarrow$ 基

结论: $V \longrightarrow V^{**}$ 线性同构.

$$V^{**} \longrightarrow F^n$$

$$\psi$$

$$g \longrightarrow \begin{pmatrix} g(e^1) \\ \vdots \\ g(e^n) \end{pmatrix}$$

利用 $(e_1 \cdots e_n)$ 对偶基 $(e^1, \cdots e^n)$ 来定义

$\uparrow$

构成 V^* 的一组基.

$\varepsilon_x(f) = f(x)$

$$\varepsilon_{e_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{e_1}(e^1) \\ \vdots \\ \varepsilon_{e_1}(e^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1(e_1) \\ \vdots \\ e^n(e_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_{e_n} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

W n维空间$/F$ $(w_1, \cdots w_n)$

W^* $(w^1, \cdots w^n)$

$$W^* \longrightarrow F^n \quad \longleftarrow \text{线性同构}$$

$$f \longrightarrow \begin{pmatrix} f(w_1) \\ \vdots \\ f(w_n) \end{pmatrix}$$

证: $V \quad (e_1 \cdots e_n) \quad (t_1 \cdots t_n) \qquad (t_1 \cdots t_n) = (e_1 \cdots e_n) A$

$V^* \quad (e^1, \cdots e^n) \quad (t^1 \cdots t^n) \qquad (t^1 \cdots t^n) = (e^1 \cdots e^n)\ ?$

$= (A^{-1})^T$

$$\left(\begin{array}{l} (t_1, t_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1, e_1 + e_2) \\ (t^1, t^2) = (e^1, e^2)\ ? \end{array} \right.$$

$$? = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad = (ae^1 + ce^2, be^1 + de^2)$$

$$a e^1(e_1) + c e^2(e_1) = a, \quad e^2(e_1) = 0$$

$$\begin{cases} t^1(t_1) = 1 \\ t^1(t_2) = 0 \\ t^2(t_1) = 0 \\ t^2(t_2) = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow \begin{array}{l} (ae^1 + ce^2)(e_1) = 1 \\ (ae^1 + ce^2)(e_1 + e_2) = 0 \end{array} \\ \Rightarrow \begin{array}{l} (be^1 + de^2)(e_1) = 0 \\ (be^1 + de^2)(e_1 + e_2) = 1 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + c = 0 \\ b = 0 \\ b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(HW: $(t^1 \cdots t^n) = (e^1 \cdots e^n)(A^{-1})^T$)

$V^{**} \quad (\varepsilon_{e_1} \cdots \varepsilon_{e_n}) \quad (\varepsilon_{t_1} \cdots \varepsilon_{t_n}) \qquad \left(\left[(A^{-1})^T\right]^{-1}\right)^T = A$

$(\varepsilon_{t_1} \cdots \varepsilon_{t_n}) = (\varepsilon_{e_1} \cdots \varepsilon_{e_n})\ ?$

$V^* \to V^{**}$

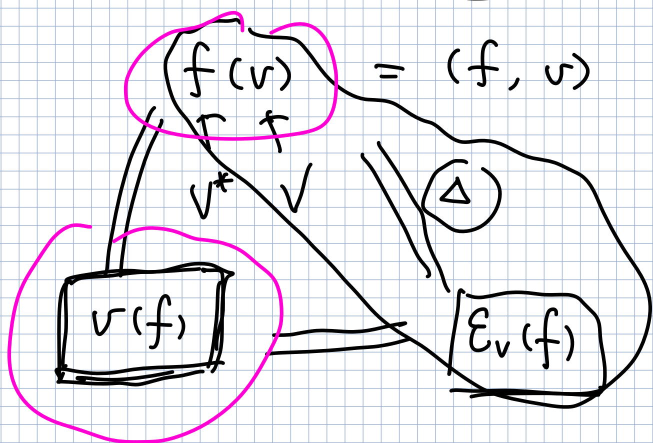
$(e^1, \cdots e^n) \to (\varepsilon_{e_1} \cdots \varepsilon_{e_n})$ 对偶基

$$\mathcal{E}_{e_i}(e^j) \xlongequal{定义} e^j(e_i) = \delta_{ij}$$

对偶基的定义

V, V** 基变换规律一致

将 V, V** 等同起来.



$V \longrightarrow V^{**}$

$v \longrightarrow \mathcal{E}_v$

$$\boxed{V^{**} = V}$$

双线性型 $\quad V/F$

$f: V \times V \longrightarrow F$ $\quad$ 对两个分量都满足线性性

$(u, v) \longrightarrow f(u,v)$ $\quad$ 则称 f 为双线性型.

注：一般 $f(u,v) \neq f(v,u)$

问：该如何研究这一结构？

$x, y \in V$

$V \quad (e_1 \cdots e_n)$ $\qquad f(x, y)$

$x=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\quad y=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$$f(x,y)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j\,f(e_i,e_j)$$

f 的取值是由 $f(e_i,e_j)$ 来决定. 令 $f(e_i,e_j)=f_{ij}$

$$f(x,y)=(x_1\cdots x_n)\,F\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$ $F=(f_{ij})$

称 F 为双线性型 f 在基 $(e_1,\cdots e_n)$ 下的表示矩阵.

注: 反之亦成立, 任给矩阵 $F\in M_n(\mathbb{F})$

以及 $V/\mathbb{F}$ n 维空间. $(e_1,\cdots e_n)$

则存在 V 上一个双线性型 f. s.t f 在 $(e_1\cdots e_n)$

下表示矩阵为 F.

$f:\ V\times V\to \mathbb{F}$

$x,\ y\to ?\ :=\ (x_1\cdots x_n)F\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$x=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$y=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

固定 V $(\dim V = n)$ 及一组基 $(e_1 \cdots e_n)$

$\{V$ 上双线性型$\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} M_n(F)$ 线性同构.

$f \longrightarrow (e_1 \cdots e_n)$ 下表示矩阵

问: 这样同构建立依赖于基的选取

那么同构是如何依赖于基的选取.

HW 固定 V. n 维 $/F$. f V 上双线性型

$(e_1 \cdots e_n)$ F

$(t_1 \cdots t_n)$ F'

$(t_1 \cdots t_n) = (e_1 \cdots e_n) A$

$\Rightarrow$ F 与 F' 之间的关系?

双线性型 $\begin{cases} \text{对称} & f(x, y) = f(y, x) \\ \text{反对称} & f(x, y) = -f(y, x) \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} \text{对称矩阵} \\ \text{反对称矩阵} \end{cases}$

问: 如何推广对偶空间, 双线性性?

V^*

定义（张量） F数域 V/F 有限维 V^* 对偶空间

$p, q > 0$ 整数

$$V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V\times\cdots\times V}_{p} \times \underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{q}$$

所有 $p+q$ 重线性映射 $V^p\times(V^*)^q \to F$

称为 V上 (p,q)型张量. $p=0$ $(V^*)^q\to F$ 反变

$q=0$ 共变

例: $(1,0)$型张量 ($V\to F$线性映射) $= V^*$ 中元素

$(0,1)$型张量 ($V^*\to F$ 线性映射) $= V^{**} = V$中元素

$(2,0)$型张量 ($V\times V\to F$) $=$ V上双线性型

$(0,2)$ ⋯ — — V^*上⋯

问: $(1,1)$型张量?

$$f: V\times V^* \to F$$

固定 $x\in V$. $f(x,\cdot): V^*\to F$

$f(x,\cdot)\in V^{**} = V$ V^*

$\exists\, y$ (依赖于x) $\in V$ s.t. $f(x,\cdot) = \cdot(y) = (\cdot, y)$

换言之. $f: V\times V^* \to F$

$$x \in V \longrightarrow \mathcal{F}x \in V$$

s.t. $f(x,u) = u(\mathcal{F}x) = (u, \mathcal{F}x) \quad \forall u \in V^*$

HW: $\mathcal{F}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{F}x + \beta \mathcal{F}y$

$\Rightarrow \mathcal{F}: V \longrightarrow V$ 线性映射.

结论: $(1,1)$ 型张量 $\longleftrightarrow$ V 上线性变换.