形式语言与自动机 作业1

1. 证：定义函数 $f(a)=y$，$f(b)=x$，$f(c)=z$

① 易知 $dom(f)=\{a,b,c\}=S$

② 由 f 定义 $f(a),f(b),f(c)$ 两两不等，

故 $\forall u,v\in S$，若 $u\neq v$ 则 $f(u)\neq f(v)$

即 f 为单射

③ 由 f 定义 $ran(f)=\{x,y,z\}=T$，故 f 为满射

综合①②　f 是一一映射

④
$$
\begin{aligned}
f(a*a)&=f(a)=y=y\circ y=f(a)\circ f(a)\\
f(a*b)&=f(b)=x=y\circ x=f(a)\circ f(b)\\
f(a*c)&=f(c)=z=y\circ z=f(a)\circ f(c)\\
f(b*a)&=f(b)=x=x\circ y=f(b)\circ f(a)\\
f(b*b)&=f(c)=z=x\circ x=f(b)\circ f(b)\\
f(b*c)&=f(a)=y=x\circ z=f(b)\circ f(c)\\
f(c*a)&=f(c)=z=z\circ y=f(c)\circ f(a)\\
f(c*b)&=f(c)=z=z\circ y=f(c)\circ f(a)\\
f(c*c)&=f(b)=x=z\circ z=f(c)\circ f(c)
\end{aligned}
$$

故 $\forall u,v\in S$ 有 $f(u*v)=f(u)\circ f(v)$

综合以上，S 和 T 是同构的

2. 证 ① 由 f 定义 $dom(f)=A^*$

② 考虑到 $u=00$，$v=11$ 时

$f(u)=f(00)=0=f(11)=f(v)$

则 f 不为单射

③ $f(0)=0$，$f(1)=1$，且 $0,1\in A^*$

故 $\forall v\in A$ $\exists u\in A^*$ 使得 $f(u)=v$

所以 f 为满射

④ $\forall u,v\in A^*$

i) $f(u)=0$，$f(v)=0$，则 u,v 均有偶数个1，$u\cdot v$ 也有偶数个1

则 $f(u\cdot v)=0=0+0=f(u)+f(v)$

ii) $f(u)=0$，$f(v)=1$

则 u,v 一个有偶数个1，一个有奇数个1，

$u\cdot v$ 也有奇数个1

则 $f(u\cdot v)=1=0+1=f(u)+f(v)$

iii) $f(u)=1$，$f(v)=0$

与 ii) 同理 $f(u\cdot v)=1=1+0=f(u)+f(v)$

iv) $f(u)=1$，$f(v)=1$

则 u,v 均有奇数个1，$u\cdot v$ 有偶数个1、

则 $f(u\cdot v)=0=1+1=f(u)+f(v)$

综合 i)～iv) $\forall u,v\in A^*$ $f(u\cdot v)=f(u)*f(v)$

综合①③④ f 是同态映射，但 f 不为单射，故 f 不为同构映射

3.
① $abaabaaabaa = ab \cdot aa \cdot baa \cdot ab \cdot aa$ 故此字符串属于L^*

② $aaaabaaaa = aa \cdot aa \cdot baa \cdot aa$ 故此字符串属于L^*

③ $baaaaabaaaab$ 不属于L^*

④ $baaaaabaa = baa \cdot aa \cdot ab \cdot aa$ 故此字符串属于L^*

综上：第1.2.4个字符串属于L^*