

《高等微积分 2》第四周作业

1 计算偏导数.

(1) 设 $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $z = xy + xf(\frac{y}{x})$. 求 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

(2) 设 $f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, $z = f(x, \frac{x}{y})$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(3) 设 $f, g \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $z = xf(\frac{y}{x}) + yg(\frac{x}{y})$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(4) 设 $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$. 求 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$.

(5) 设 $f \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$, $u = f(x, xy, xyz)$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

这里, 我们称函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是 C^k 光滑的, 记作 $f \in C^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, 如果 f 的各个 k 阶 (偏) 导函数都存在且连续.

2 给定 C^1 光滑的函数 $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$. 求函数

$$F(u^2 - x^2, u^2 - y^2, u^2 - z^2)$$

对 x, y, z, u 的偏导数.

3 给定 $n \times n$ 的对称实矩阵 $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ (即对任何 i, j , 有 $A_{ij} = A_{ji}$). 定义二次函数 $Q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i x_j, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

(1) 求 Q 的微分.

(2) 设 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是 C^1 光滑的函数. 定义函数

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) e^{-\frac{1}{2}Q(x_1, \dots, x_n)}.$$

计算 g 的各个偏导数 $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}$.

4 设 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ 是 C^1 光滑的函数, 即 f 的各个偏导数都存在且连续.

(1) 对于给定的点 $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, 考虑关于 t 的一元函数

$$g(t) = f(tx, ty, tz).$$

求 $g'(t)$.

(2) 证明: 对任何 $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, 有

$$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) + x \int_0^1 f_x(tx, ty, tz) dt + y \int_0^1 f_y(tx, ty, tz) dt + z \int_0^1 f_z(tx, ty, tz) dt.$$

在本题 (3), (4) 小问中假设 f 满足: 对任何 $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ 都有

$$xf_x(x, y, z) + yf_y(x, y, z) + zf_z(x, y, z) = nf(x, y, z),$$

其中 n 是某个给定的正整数.

(3) 对于给定的点 $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, 考虑关于 t 的一元函数

$$h(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^n}.$$

求 $h'(t)$.

(4) 证明: 对任何 $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ 与 $t > 0$, 都有

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z).$$