概统第一次作业

1.1.1 (1) $\Omega=\{(正,正,正),(正,正,反),(正,反,正),(正,反,反),(反,正,正),(反,正,反),(反,反,正),(反,反,反)\}$，其中"正"指抛出正面，"反"指抛出反面

1.1.3 (1) $\omega = ABC \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(4) $\omega = ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C}$

1.1.6
$A=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
$B=\{(1,1,1)\}$
$C=\{(0,0,0)\}$
$D=\phi$

1.2.1 (2)
$$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)\cdots(n-r+1)}{(r-1)!} + \frac{(n-1)\cdots(n-r)}{r!}$$
$$= \frac{(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}r + \frac{(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}(n-r)$$
$$= \frac{(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}(n-r+r)$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} \quad \square$$

(5) 不妨设 $a\le b$，则只需证
$$\binom{a}{0}\binom{b}{a}+\binom{a}{1}\binom{b}{a-1}+\cdots+\binom{a}{a}\binom{b}{0}=\binom{a+b}{a}$$

首先有 $(1+x)^{a+b}=(1+x)^a(1+x)^b$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{a+b}\binom{a+b}{k}x^k=\left(\sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j}x^j\right)$$

考虑 x^a 项的系数，则有
$$\binom{a+b}{a}=\binom{a}{a}\binom{b}{0}+\binom{a}{a-1}\binom{b}{1}+\cdots+\binom{a}{0}\binom{b}{a} \quad \square$$

1.2.11 (1) 设 A="最小号码为5"，B="最大号码为5"

$|\Omega|=\binom{10}{4}$

对于A，满足A发生的条件是取出一个5，同时剩下的球在 $\{6,7,8,9,10\}$ 中

故 $|A|=\binom{5}{3}$

故 $P(A)=\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{4}}=\dfrac{\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}}{\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}}=\dfrac{1}{21}$

(2) 对于B，满足B发生的条件是取出一个5，同时剩下的球在 $\{1,2,3,4\}$ 中

故 $|B|=\binom{4}{3}$

故 $P(B)=\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{4}}=\dfrac{\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}}{\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}}=\dfrac{2}{105}$

1.3.10 $A\cup B\supseteq A \Rightarrow P(A\cup B)\ge P(A)=1$ 而 $P(A\cup B)\le 1$ 故 $P(A\cup B)=1$

由容斥原理 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
$$\Rightarrow 1=1+P(B)-P(AB)$$
$$\Rightarrow P(AB)=P(B) \quad \square$$

1.3.16

$P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B)$ ①

$\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B} \Rightarrow P(\overline{A\cap B}) = P(\bar{A}\cup\bar{B})$ ②

由容斥原理 $P(\bar{A}\cup\bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\cap\bar{B})$ ③

由①②得 $P(\bar{A}\cup\bar{B}) = 1 - P(A\cap B)$

代入③

$P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1 - P(A\cap B)$

而 $P(A\cap B) = P(\bar{A}\cap\bar{B})$

则 $P(\bar{A}) + P(\bar{B}) = 1$

由 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$，$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

得 $1 - P(A) + 1 - P(B) = 1$

故 $P(B) = 1 - P(A) = 1 - p$