随机数学方法解答（提示版）

一．填空题

(1) $\frac{1}{3}$; **(2)** $\frac{2}{5}$; **(3)** $\frac{1}{3}$; **(4) 1**； **(5) 2**； **(6) 8**； **(7)** $x^2e^{(2\mu+\sigma^2)t}$ 。

二.

（1）$P(X_1=X_2)=P(X_1=1,X_2=1)+P(X_1=-1,X_2=-1)+P(X_1=0,X_2=0)=\frac{1}{3}$

（2）X_i^2 服从 0-1 分布， $\varphi_{X_i^2}(\theta)=\frac{2}{3}e^{i\theta}+\frac{1}{3}$，

$\varphi_Y(\theta)=\varphi_{X_1^2}(\theta)\varphi_{X_2^2}(-\theta)=\frac{2}{9}e^{i\theta}+\frac{2}{9}e^{-i\theta}+\frac{5}{9}$ 。

（3）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim B(n,\frac{2}{3})$， $P(\sum_{i=1}^{n}X_i^2=3)=C_n^3(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^{n-3}$.

三.

（1）$P(|X_1-X_2|\le\frac{1}{3})=\iint\limits_{|x-y|\le\frac{1}{3}}dxdy=\frac{5}{9}$

（2）

$$F_{U_n}(z)=[F_{X_i}(z)]^n=\begin{cases}0, & z<0,\\ z^n & 0\le z<1,\\ 1 & z\ge 1,\end{cases}$$

$$E(\bar{X}-U_n)=-\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}=-\frac{n-1}{2(n+1)}$$

（3）

$$P(n(1-U_n)\le x)=1-(1-\frac{x}{n})^n\to 1-e^{-x}$$

四.

（1）$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{1-x}^{1}2dy=2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

在 D 上， $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 和 Y 不独立。

（2）

$$F_Z(z)=\iint_{\{x+y\le z\}\cap D}2dxdy=\begin{cases}0, & z<1,\\ 1-(2-z)^2, & 1\le z<2;\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

（3）用 X 来预测 Y 时，其最佳的均方预测为 $E(Y\mid X)$，

$Y\mid X=x\sim U(1-x,1)$， $E(Y\mid X)=\dfrac{2-X}{2}$，即为线性预测。

（4）$U_n=U_0+\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 为对称随机徘徊，$Cov(U_5,U_8)=5$。

五.

（1）$Y=X_1+2X_2+3X_3$ 为正态（Gauss）分布，$EY=3, DY=31$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{62\pi}}e^{-\frac{(y-3)^2}{62}}$$

（2）(X_1,X_2) 为二元正态分布，$E(X_2\mid X_1)=1+\frac{1}{8}(X_1-1)$

X_1 与 $X_2-E(X_2\mid X_1)$ 的联合分布也为 Gauss 分布， $Cov(X_1,X_2-E(X_2\mid X_1))=0$

故相互独立。

（3）$F_Z(z)=P(\dfrac{X_1X_3+X_4}{\sqrt{X_1^2+1}}\le z)=\int_{-\infty}^{\infty}P(\dfrac{xX_3+X_4}{\sqrt{x^2+1}}\le z)f_{X_1}(x)dx$

由于 $\dfrac{xX_3+X_4}{\sqrt{x^2+1}}\sim N(0,1)$， $F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(z)f_{X_1}(x)dx=\Phi(z)$

六.

（1） $E(2^{N_t}\mid N_s=2)=E(2^{N_t-N_s}2^{N_s}\mid N_s=2)=4e^{\lambda(t-s)}$

（2） $E[\prod_{i=1}^{N_t}(1+\gamma_i)^2]=\sum_{k=0}^{\infty}E[\prod_{i=1}^{N_t}(1+\gamma_i)^2\mid N_t=k]P(N_t=k)=e^{\lambda t(2\alpha+\beta)}$