离散数学(1)
Discrete Mathematics

第三章 命题逻辑的公理化

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

主观题 10分

Setting

上节课有什么疑问吗？欢迎投稿。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

单选题 1分

Setting

简而言之，命题逻辑的公理系统是

A 用来建立公理的系统

B 由公理产生推理规则的系统

C 用来完善已有公理的系统

D 从精选的几条公理出发，根据规定的演绎规则，推导出一系列定理的形式符号系统

Submit

复习：公理系统的概念

- 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做公理系统（**axiom system**）。
- 公理系统自成体系，是一个抽象符号系统。又称之为形式系统。

复习：公理系统的结构

1. 初始符号

公理系统内允许出现的全体符号的集合。

2. **形成规则**

公理系统内允许出现的合法符号序列的形成方法与规则

3. **公理**

精选的最基本的重言式，作为推演其它所有重言式的依据。

4. **变形规则**

公理系统所规定的推理规则。

5. **建立定理**

所有的重言式和对它们的证明。

复习：具有代表性的命题逻辑的公理系统

系统名称	年代	公理总条数	彼此独立的条数
Russell公理系统	1910	5	4
Frege公理系统	1879	6	3
Hilbert—Bernays	1934	15	
王浩算法	**1959**	1 (10条变形规则)	
自然演绎系统		0 (5条变形规则)	

复习：罗素(Russell)公理系统

1. 初始符号

$A, B, C, \ldots$（大写英文字母, 表示命题）

$\neg, \vee$（表示联结词）

( )（圆括号）

$\vdash$（断言符），写在公式前，如$\vdash A$表示A是所要肯定的，或说A是永真式。

由Frege最先引入。

复习：罗素(Russell)公理系统

2. 形成规则

(1) 符号π是合式公式（π为命题，如$A, B, C\ldots$）

(2) 若A, B是合式公式，则$(A \vee B)$是合式公式

(3) 若A是合式公式，则$\neg A$是合式公式。

(4) 只有符合(1) (2) (3)的符号序列才是合式公式。

复习：罗素(Russell)公理系统

3，定义

(1) $(A \to B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$。

(2) $(A \wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A \vee \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$定义为$((A \to B) \wedge (B \to A))$ 。

复习：罗素(Russell)公理系统

4. 公理

公理1　$\vdash((P\vee P)\rightarrow P)$（重言律）　　**等幂律**

公理2　$\vdash(P\rightarrow(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3　$\vdash((P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P))$ (类似析取交换律）

公理4　$\vdash((Q\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R)))$

如果y<z,那么x+y<x+z

基本推理公式15

复习：罗素(Russell)公理系统

5. 变形(推理)规则

- **代入规则**

如果 $\vdash \boldsymbol{A}$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$（将合式公式$\boldsymbol{A}$中出现的符号π处处都代以合式公式$\boldsymbol{B}$）。

- **分离规则**

如果 $\vdash \boldsymbol{A}$，$\vdash \boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$，那么 $\vdash \boldsymbol{B}$。

- **置换规则**

定义的左右两边可互相替换。设公式$\boldsymbol{A}$，替换后为$\boldsymbol{B}$，则如果 $\vdash \boldsymbol{A}$，那么 $\vdash \boldsymbol{B}$。

复习：罗素(Russell)公理系统

6. 定理的推演

定理的证明必须依据公理或已证明的定理，同时证明的过程（符号的变换过程）必须依据变形规则。

公理1 $\vdash((P \vee P) \to P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P \to (P \vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P \vee Q) \to (Q \vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R)))$

复习：证明实例

$\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ 定理3.2.1

定理3.2.2 $\vdash P \to P$

证明：

(1)	$\vdash P \to P \vee Q$	公理2
(2)	$\vdash P \to P \vee P$	(1)代入$\frac{Q}{P}$
(3)	$\vdash P \vee P \to P$	公理1
(4)	$\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$	定理3.2.1
(5)	$\vdash (P \vee P \to P) \to ((P \to P \vee P) \to (P \to P))$	(4)代入$\frac{Q}{P \vee P}$，$\frac{R}{P}$
(6)	$\vdash (P \to P \vee P) \to (P \to P)$	(3), (5)分离
(7)	$\vdash P \to P$	(2), (6)分离

证毕

证明实例：$\vdash(P\wedge Q)\rightarrow(Q\wedge P)$

(1) $\vdash(P\rightarrow Q)\rightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P)$ 定理3.2.7

(2) $\vdash((P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P))\rightarrow(\neg(Q\vee P)\rightarrow\neg(P\vee Q))$ 代入$\frac{P}{P\vee Q},\frac{Q}{Q\vee P}$

(3) $\vdash(P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P)$ 公理3

(4) $\vdash\neg(Q\vee P)\rightarrow\neg(P\vee Q)$ (2)(3)分离

(5) $\vdash\neg(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow\neg(\neg Q\vee\neg P)$ 代入$\frac{P}{\neg Q},\frac{Q}{\neg P}$

(6) $\vdash(P\wedge Q)\rightarrow(Q\wedge P)$ 定义2

(1) $(A\rightarrow B)$ 定义为 $(\neg A\vee B)$。

(2) $(A\wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A\vee\neg B)$。

(3) $(A\leftrightarrow B)$定义为$((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$ 。

公理1 $\vdash((P\vee P)\rightarrow P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P\rightarrow(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R)))$

复习：3.3 公理系统的完备性和演绎定理

- 完备性：
  公理系统的完备性是指，是否所有的重言式或所有成立的定理都可由所建立的公理系统推导出来。

  形象地说，完备性是指所建立的系统所能推演出的定理少不少。
- 可靠性
  公理系统的可靠性是指，非重言式或者不成立的公式是否也可由所建立的公理系统推导出来。

  形象地说，可靠性是指所建立的系统所能推演出的定理多不多。

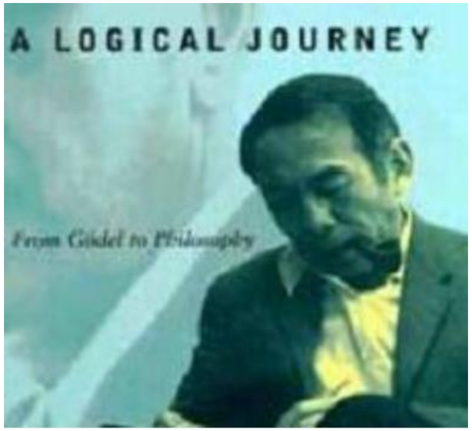
  不具备可靠性的系统是不能使用的。

第三章主要内容（续2）

- 介绍命题逻辑的另一公理系统——王浩算法；
- 给出该算法的具体结构；
- 举例说明使用该算法进行定理推演的过程；

王浩算法：定理证明自动化系统

王浩算法是利用计算机来实现定理证明的机械化方法，由美籍华裔科学家王浩于1959年提出。



王浩算法及其影响（一）

- 1958年，王浩编写了三个处理一阶逻辑的程序，其中包括一些当时未解决的问题。
- 程序用**SAP**语言（一种汇编语言）编写，
- 在**IBM 704**机器上实现。
- 王浩使用该程序，将数学原理（**Principia Mathematica)**一书中一阶逻辑部分的全部定理（共约**350**条），在不到**9**分钟内证明完毕。

Seven (Flies) in **One Blow**

H. Wang, "Toward Mechanical Mathematics," in *IBM Journal of Research and Development*, vol. 4, no. 1, pp. 2-22, Jan. 1960.

The gallant tailor: seven (flies) in one blow.

IBM 704: 220 theorems (in the propositional calculus) in three minutes.

Hao Wang

Toward Mechanical Mathematics

Abstract: Results are reported here of a rather successful attempt at proving all theorems, totalling near 400, of *Principia Mathematica* which are strictly in the realm of logic, viz., the restricted predicate calculus with equality. A number of other problems of the same type are discussed. It is suggested that the

王浩算法及其影响（二）

我真希望，在Whitehead和我浪费了十年时间用手算来证明这些定理之前，就知道有这种可能性。我愿相信，演绎逻辑中的一切都能由机器来完成。

—— **B.Russell(1872-1970，英国)**

1950年Nobel文学奖获得者

《西方哲学史》《人类的知识—它的极限和范围》

《我的心路历程》《Principia Mathematica》作者

王浩算法及其影响（三）

Turing机器首次用类似计算机的模型进行阐述，始见于王（浩）的论文中。该文所包含的结果，如用过去的方式来表示将会困难得多。

—— M. Minsky

美国MIT计算机系教授，人工智能创始人之一

1969年Turing奖获得者

代表作《The Society of Mind》

王浩算法及其影响（四）

1972年美国洛克菲勒大学授予Godel名誉学位，王浩在授予仪式上为Godel致贺词。

1977年10月，王浩应邀在中科院做了6次关于数理逻辑的学术讲演，讲演内容的中译本《数理逻辑通俗讲话》于1983年由科学出版社出版(校图书馆有此书)。

王浩算法：定理证明自动化系统

作为命题逻辑的一个公理系统，王浩算法的结构组成与罗素系统类似，下面重点给出与罗素系统的主要差别：

王浩算法与罗素系统的主要差别

(1) 初始符号中的联结词扩充为5个常用联结词，分别是 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;

为方便描述推理规则和公理，引入公式串 $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$。

(2) 定义了相继式。即，如果 α 和 β 都是公式串，则称 $\alpha \xrightarrow{s} \beta$ 是相继式。其中 α 为前件, β 为后件;

前件：“,” － ∧　后件：“,” － ∨

$\alpha \xrightarrow{s} \beta$ 为真，记为 $\alpha \ {}_{s}\!\!\Rightarrow \beta$

(3) 公理只有一条：如果

公式串 α 和 β 的公式都只是命题变项 A，B，…，$\alpha \ {}_{s}\!\!\Rightarrow \beta$ 是公理（为真）的充分必要条件是 α 和 β 中至少含有一个相同的命题变项;

王浩算法与罗素系统的主要差别

(4) 变形（推理）规则共有**10**条，分别包括**5**条前件规则和**5**条后件规则；

(5) 定理推演的过程将所要证明的定理写成相继式形式；

然后反复使用变形规则，消去全部联结词以得到一个或多个无联结词的相继式

若所有无联结词的相继式都是公理，则定理得证，否则定理不成立。

$\boxed{A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B\text{与}A_1 \Rightarrow A_2 \to B}$

变形规则（前件规则1-3）

前件规则：

$\neg\Rightarrow$ 　如果$\alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow X, \gamma$
　　那么$\alpha, \neg X, \ \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

$\wedge\Rightarrow$ 　如果$X, \ Y, \ \alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$
　　那么$\alpha, X \wedge Y, \ \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

$\vee\Rightarrow$ 　如果$X, \alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$ 而且$Y, \alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$
　　那么$\alpha, X \vee Y, \ \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

若$A\Rightarrow C$且$B\Rightarrow C$同时成立，则$A\vee B\Rightarrow C$

变形规则（前件规则4-5）

(4) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$ 同时成立，则 $A \Rightarrow B \wedge C$

前件规则：

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \to B$

$\to\Rightarrow$　　如果Y, α, β s⇒ γ

而且α, β s⇒ X, γ

那么α, X→Y, β s⇒ γ

$\leftrightarrow\ \Rightarrow$　　如果X，Y，α, β s⇒ γ

而且α, β s⇒X, Y, γ

那么α, X↔Y, β s⇒ γ

若 $A \Rightarrow C$ 且 $B \Rightarrow C$ 同时成立，则 $A \vee B \Rightarrow C$

变形规则（后件规则1-3）

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \to B$

若 $A \Rightarrow B$且$A \Rightarrow C$同时成立，则$A \Rightarrow B \wedge C$

后件规则：

$\Rightarrow\neg$　　如果$X, \alpha \ s\Rightarrow \beta, \gamma$

　　　　那么$\alpha \ s\Rightarrow \beta, \neg X, \gamma$

$\Rightarrow\wedge$　　如果 $\alpha \ s\Rightarrow X, \beta, \gamma$, 而且 $\alpha \ s\Rightarrow Y, \beta, \gamma$

　　　　那么 $\alpha \ s\Rightarrow \beta, X \wedge Y, \gamma$

$\Rightarrow\vee$　　如果 $\alpha \ s\Rightarrow X, Y, \beta, \gamma$

　　　　那么 $\alpha \ s\Rightarrow \beta, X \vee Y, \gamma$

变形规则（后件规则4–5）

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$

若 $A \Rightarrow B$且$A \Rightarrow C$同时成立，则$A \Rightarrow B \wedge C$

后件规则：

$\Rightarrow\rightarrow$　　如果$X, \alpha\ s\Rightarrow Y, \beta, \gamma$

那么$\alpha\ s\Rightarrow \beta, X \rightarrow Y, \gamma$

$\Rightarrow\leftrightarrow$　　如果$X, \alpha\ s\Rightarrow Y, \beta, \gamma$

而且$Y, \alpha\ s\Rightarrow X, \beta, \gamma$

那么$\alpha\ s\Rightarrow \beta, X \leftrightarrow Y, \gamma$

$\Rightarrow\neg$　　如果$X, \alpha\ s\Rightarrow \beta, \gamma$

那么$\alpha\ s\Rightarrow \beta, \neg X, \gamma$

定理推演

定理证明所使用的算法：

(1)　将所要证明的定理$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$

写成相继式形式：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \ s\Rightarrow B$$

并从这个相继式出发。

(2) 反复（反向）使用变形规则，消去全部联结词以得到一个或多个无联结词的相继式。

(3) 若所有无联结词的相继式都是公理，则命题得证，否则命题不成立。

$\rightarrow\Rightarrow$ 如果Y, α, β $\overset{s}{\Rightarrow}$ γ
而且α, β $\overset{s}{\Rightarrow}$ X, γ
那么α, X→Y, β $\overset{s}{\Rightarrow}$ γ

定理推演举例和说明

例1 证明 $(\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P$ 成立

证明: (1) $\neg Q \wedge (P\rightarrow Q) \overset{s}{\Rightarrow} \neg P$ （写成相继式）

(2) $\neg Q , (P\rightarrow Q) \overset{s}{\Rightarrow} \neg P$ ($\wedge \Rightarrow$) 前件规则2

(3) $P\rightarrow Q \overset{s}{\Rightarrow} Q , \neg P$ ($\neg \Rightarrow$) 前件规则1

(4) $Q \overset{s}{\Rightarrow} Q,\neg P$ 而且 $\overset{s}{\Rightarrow} Q , \neg P , P$ ($\rightarrow \Rightarrow$)前件规则4

(5) $P , Q \overset{s}{\Rightarrow} Q$ 而且 $P \overset{s}{\Rightarrow} Q , P$ ($\Rightarrow \neg$) 后件规则1

(5)中两个相继式都已无联接词，而且 $\overset{s}{\Rightarrow}$ 两端都有共同的命题变项，从而都是公理，定理得证。

$\Rightarrow\neg$ 如果X, α $\overset{s}{\Rightarrow}$ β, γ
那么α $\overset{s}{\Rightarrow}$ β, ¬ X, γ

定理推演举例和说明

对算法的一些说明：

(1)　如例1中因(5)是公理,自然成立；

对(5)使用规则$\Rightarrow\neg$(正向)便得(4)；

对(4)使用规则$\rightarrow\ \Rightarrow$(正向)便得(3)；

对(3)使用规则$\neg\ \Rightarrow$(正向)便得(2)。

对例2同样可做类似的解释。

读懂该例，便可大致理解王浩算法的证明思路。

(1) $\neg Q \wedge (P\rightarrow Q)\ s\Rightarrow \neg P$	(写成相继式）
(2) $\neg Q, (P\rightarrow Q)\ s\Rightarrow \neg P$	($\wedge\ \Rightarrow$) 前件规则2
(3) $P\rightarrow Q\ s\Rightarrow Q, \neg P$	($\neg\ \Rightarrow$) 前件规则1
(4) $Q\ s\Rightarrow Q, \neg P$ 而且 $s\Rightarrow Q, \neg P, P$	($\rightarrow\ \Rightarrow$)前件规则4
(5) $P, Q\ s\Rightarrow Q$ 而且 $P\ s\Rightarrow Q, P$	($\Rightarrow\ \neg$) 后件规则1

定理推演举例和说明

(2) 证明方法是从所要证明的定理出发，反向使用推理规则（消联结词），直到公理的过程。

(3) 对证明的解释，是反过来从公理出发，经正向使用推理规则（加联结词），直到所要证明的定理。

(4) 限于命题逻辑的定理证明，仅使用五个常用的联结词以及重言蕴涵符号就已足够，引入符号串和相继式完全是为描述推理规则以及公理的方便。

(5) 由所建立的王浩算法可证明命题逻辑的所有定理，从而是完备的公理系统。算法是可实现的机械方法，可用此算法用计算机来证明命题逻辑中描述的定理。

(6) 算法的另一优点是当所证公式不是定理时，也可以得到相应结果。当消去所有联结词后，得到的相继式中有的不是公理时，便知所要证明的并不是定理。

定理推演举例和说明（例2，选读）

例2 证明$((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S)) \rightarrow (S \vee R)$成立

证明:

(1) $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \;{}_s\!\Rightarrow (S \vee R)$ （写成相继式）

(2) $P \vee Q$， $P \rightarrow R, Q \rightarrow S \;{}_s\!\Rightarrow (S \vee R)$ ($\wedge$=>)

(3) $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \;{}_s\!\Rightarrow S, R$ (=>$\vee$)

(4a) $P, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \;{}_s\!\Rightarrow S, R$ 而且

(4b) $Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \;{}_s\!\Rightarrow S, R$ ($\vee$=>)

定理推演举例和说明（例2，选读）

(5a) P, R, Q→S $_s$⇒ S, R 而且

(5b) P, Q→ S $_s$⇒ P, S, R ((4a)→=>)

(6a)P, R, S $_s$⇒ S, R 而且

(6b) P, R $_s$⇒ Q,S, R ((5a)→=>)

(7a) P, S $_s$⇒ P, S, R

(7b) P $_s$⇒ Q, P, S, R ((5b)→=>)

(4a) P, P →R, Q →S $_s$⇒ S, R

定理推演举例和说明（例2，选读）

(8a) $Q, R, Q \rightarrow S \ {}_{s}\!\Rightarrow S, R$

(8b) $Q, Q \rightarrow S \ {}_{s}\!\Rightarrow P, S, R$ ((4b)→=>)

(9a) $Q, R, S \ {}_{s}\!\Rightarrow S, R$而且

(9b) $Q, R \ {}_{s}\!\Rightarrow Q, S, R$ ((8a)→=>)

(10a) $Q, S \ {}_{s}\!\Rightarrow P, S, R$而且

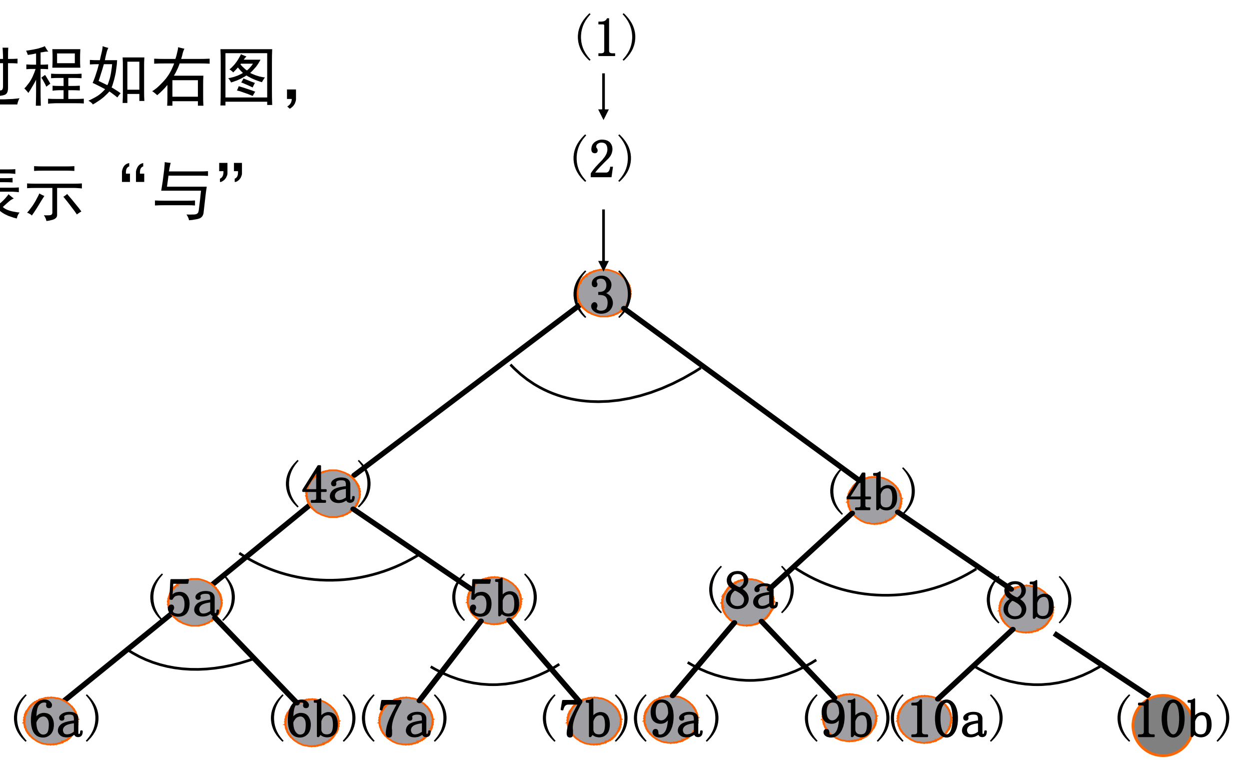
(10b) $Q \ {}_{s}\!\Rightarrow Q, P, S, R$ ((8b)→=>)

(4b) $Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \ {}_{s}\!\Rightarrow S, R$

定理推演举例和说明

证明过程如右图，

圆弧表示“与”



3.5 自然演绎系统（自学）

- 自然演绎系统也是一种逻辑演算体系，与公理系统的明显区别在于它的出发点只是一些变形规则而没有公理，是附有前提的推理系统。
- 自然演绎系统可导出公理系统的所有定理，同时自然演绎系统的所有定理也可由重言式来描述，从而可由公理系统导出。

3.5.1 初始符号

除罗素公理系统的符号外，引入

$\Gamma=\{A_1, \ldots, A_n\}=A_1, \ldots, A_n$

表示有限个命题公式的集合；

$\Gamma \vdash A$

表示Γ，A之间有形式推理关系，Γ为形式前提，A为形式结论，或说使用推理规则可由Γ得A。

3.5.2 形成规则(同罗素公理系统)

- 根据形成规则得到的符号序列称合式公式。

(1) 符号π是合式公式（π为命题，如A, B, C...）

(2) 若A, B是合式公式，则$(A \vee B)$是合式公式

(3) 若A是合式公式，则$\neg A$是合式公式。

(4) 只有符合(1) (2) (3)的符号序列才是合式公式。

3.5.3 变形规则

（1） $A_1, \ldots, A_n \vdash A_i (i=1,\ldots,n)$。肯定前提律

（2）如果$\Gamma \vdash A$，$A \vdash B$，则$\Gamma \vdash B$。传递律

（3）如果$\Gamma, \neg A \vdash B$且$\Gamma, \neg A \vdash \neg B$，则$\Gamma \vdash A$。反证律

（4）$A \to B$，$A \vdash B$。蕴涵词消去律（分离规则）

（5）如果Γ，$A \vdash B$，则$\Gamma \vdash A \to B$。蕴涵词引入律。

3.5.4　公理

- 自然演绎系统的公理集为空集.

(1) 包含规则：若 $A\in\Gamma$ 则 $\Gamma\vdash A$ 。特别地 $A\vdash A$。

– 包含规则也称为前提引入规则。

(2) 前提附加：若 $\Gamma\vdash A$ 则 $\Gamma, B\vdash A$ 。

– 前提附加规则也称为弱化规则。

– $\Gamma, B\vdash A$ 是 $\Gamma\cup\{B\}\vdash A$ 的简写。

(3) 否定引入：若 $\Gamma\vdash A$ 则 $\Gamma\vdash \neg\neg A$。

(4) 否定消去：若 $\Gamma, \neg A\vdash B$ 且 $\Gamma, \neg A\vdash \neg B$ 则 $\Gamma\vdash A$。

– 否定消去也称为反证法

(5) 合取引入：若 $\Gamma\vdash A$ 且 $\Gamma\vdash B$ 则 $\Gamma\vdash A\wedge B$。

(6) 合取消去：若 $\Gamma\vdash A\wedge B$ 则 $\Gamma\vdash A$ 且 $\Gamma\vdash B$。

(7) 析取引入：若 $\Gamma\vdash A$ 或 $\Gamma\vdash B$ 则 $\Gamma\vdash A\vee B$。

(8) 析取消去：若 $\Gamma, A\vdash C$ 且 $\Gamma, B\vdash C$ 则 $\Gamma, A\vee B\vdash C$

– 析取消去的另外描述形式：若 $\Gamma\vdash A\vee B$，$\Gamma, A\vdash C$ 且 $\Gamma, B\vdash C$ 则 $\Gamma\vdash C$。

(9) 蕴涵引入：若 $\Gamma, A\vdash B$ 则 $\Gamma\vdash A\to B$ 。（CP 规则）

(10) 蕴涵消去：若 $\Gamma\vdash A\to B$ 且 $\Gamma\vdash A$ 则 $\Gamma\vdash B$ 。

(11) 等价引入：若 $\Gamma, A\vdash B$ 且 $\Gamma, B\vdash A$ 则 $\Gamma\vdash A\leftrightarrow B$。

– 或：若 $\Gamma\vdash A\to B$ 且 $\Gamma\vdash B\to A$ 则 $\Gamma\vdash A\leftrightarrow B$。

(12) 等价消去：若 $\Gamma\vdash A\leftrightarrow B$ 且 $\Gamma\vdash A$ 则 $\Gamma\vdash B$ 。

– 或：若 $\Gamma\vdash A\leftrightarrow B$ 则 $\Gamma\vdash A\to B$ 且 $\Gamma\vdash B\to A$。

(13) 等值替换：若 $A\vdash B, B\vdash A$ 且 $\Gamma\vdash \Phi(A)$, 则 $\Gamma\vdash \Phi(B)$; $\Phi(A)$ 描述 N 的一个含子式 A 的公式。

3.5.5 定理

定理3.5.1　$A\to B,\ B\to C \vdash A\to C$

证明：

(1) $A\to B,\ B\to C,\ A \vdash A\to B$　规则1+前提附加

(2) $A\to B,\ B\to C,\ A \vdash A$　规则1 +前提附加

(3) $A\to B,\ A \vdash B$　规则4

(4) $A\to B,\ B\to C,\ A \vdash B$　(1)+(2)合取引入,(3)，规则2

(5) $A\to B,\ B\to C,\ A \vdash B\to C$　规则1+前提附加

(6) $B, B\to C \vdash C$　规则4

(7) $A\to B,\ B\to C,\ A \vdash C$　(4)+(5)合取引入,(6)，规则2

(8) $A\to B,\ B\to C \vdash A\to C$　规则5

(2) 前提附加：若 $\Gamma \vdash A$ 则 $\Gamma, B \vdash A$ 。

– 前提附加规则也称为弱化规则。

- 上述定理在罗素公理系统中被描述成

$$\vdash ((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C)$$

- 在定理的证明中，不涉及公理，而将A→B，B→C作为条件，使用推理规则来作推理，推理过程比用公理的情形容易。

- 可以证明罗素公理系统与自然演绎系统是等价的，因此，自然演绎系统也是完备的.

第三章主要内容（续4）

- 概括介绍了**非标准逻辑**的概念；
- 给出了几个典型的**多值逻辑**和**模态逻辑**。

3.6 非标准逻辑（自学）

- 前面的命题逻辑通常称作标准（古典）的命题逻辑，而除此之外的命题逻辑可统称作**非标准逻辑**。
- 其中一类是与古典逻辑有相违背之处的非标准逻辑，如多值逻辑，模糊逻辑等。$P \vee \neg P$
- 另一类是古典逻辑的扩充，如模态逻辑，时态逻辑等。

3.6.1 多值逻辑

- 在古典命题逻辑中，命题定义的取值范围仅限于真和假两种，故又称作二值逻辑。
- 多值逻辑将命题定义的取值范围推广到可取多个值。
- 因此，多值逻辑是普通二值逻辑的推广，并在此基础上研究如何给出各种取值含义的解释以及命题运算规律是否保持等问题。

多值逻辑

- 已有的多值逻辑研究以三值逻辑为主，具有代表性的包括
- Kleene 逻辑（**1952**）T，F，U；$P \vee \neg P \neq T$
- Lukasiewicz 逻辑（**1920**）；
- Bochvar 逻辑（**1939**）等。

3.6.2 模态逻辑

- 考虑必然性和可能性的逻辑是模态逻辑
- 引入“可能的世界”作为参量（条件），必然真表示所有可能的世界下为真，而可能真表示在现实世界下为真，不要求所有可能的世界下为真。存在的问题是可能的世界如何描述还有待研究。
- 有一种观点认为，命题逻辑是用来描述永恒或绝对真理的，模态逻辑和谓词逻辑则是描述非永恒或相对真理的。

3.6.3 不确定性推理与非单调逻辑

- 不确定性推理与非单调逻辑是人工智能系统中经常使用的知识表示和推理方法
- 首先，标准逻辑是单调的。一个正确的公理加到理论T中得到理论T'，$T \subset T'$。如果$T \vdash P$必有$T' \vdash P$。即随着条件的增加，所得结论也必然增加。
- 而对于非单调逻辑，一个正确的公理加到理论T中，有时反而会使预先所得到的一些结论失效。

第三章小结

- 本章介绍了命题逻辑的公理化，是命题逻辑理论的系统化和抽象化，主要内容总结如下：
- 介绍了命题逻辑的公理系统的概念和基本结构，并以具有代表性的罗素公理系统为例，详细介绍了一个命题逻辑公理系统的构成；
- **给出公理**，通过定理推演的实例，使用公理系统进行定理证明的过程和方法。
- 此外，对公理系统的完备性、可靠性和演绎定理做简要的叙述。

复习-命题演算

- 命题演算形式系统

  - 语法
    - 命题公式
    - 等值公理
    - 等值公式
    - 推理形式
  - 语义
    - 真值指派
    - 公式的值
    - 永真式

- 可靠性：凡是推出来的都是正确的
- 完备性：凡是正确的都可以推出来

离散数学(1)
Discrete Mathematics

第四章 谓词逻辑的基本概念

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

第四章 谓词逻辑的基本概念

命题逻辑的局限性 & 引入谓词逻辑的必要性

举例1：

P：张三是学生

Q：李四是学生

P，Q 两个独立的命题，未能反映或突出二者的共性与特点。

因此，有必要深入研究它们的形式结构和逻辑关系。

命题逻辑的局限性 & 引入谓词逻辑的必要性

举例2：

P：凡有理数都是实数

Q：$3/8$是有理数

R：$3/8$是实数

利用命题逻辑，仅能形式化为（$P \wedge Q$）$\rightarrow R$

显然，对于任意的P，Q，R 来说，这个推理形式不是重言式，即，在命题逻辑中无法给出完整准确的描述。

问题的提出

- 需要进一步分析推理结构
  - 上述推理中，各命题之间的关系在于简单命题的成分之间

- 需要进一步分解简单命题
- 简单命题的符号化

主谓宾

简单命题的结构

主语	谓语	宾语
↑	↑	↑
讨论对象	对象的性质或关系	讨论对象
↓	↓	↓
个体词(组)	谓词	个体词(组)

- 个体词，谓词

命题逻辑与谓词逻辑

- 命题逻辑存在的问题
  – 问题出在“凡”字
  – 没有表达出个体和总体之间的内在联系和数量关系

凡有理数都是实数

- 关系
  – 谓词逻辑是命题逻辑的推广
  – 命题逻辑是谓词逻辑的特殊情形
- 例子

P(x)表示“x是学生”　P(张三)

例1：分析下列各命题的个体词和谓词

- π是无理数
- 张三与李四同在软件学院
- x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）
- π的平方是非负的
- 所有实数的平方都是非负的
- 有一个比2^{1000}大的素数

π是无理数

- 解

个体：π（代表圆周率）

谓词：... 是无理数，表示“π”的性质

张三与李四同在软件学院

- 解

个体：张三、李四

谓词：…与…同在软件学院，表示张三和李四的关系

个体：张三

谓词： …与李四同在软件学院，表示张三的性质

个体：李四

谓词：张三与…同在软件学院，表示李四的性质

x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）

个体：x、y、z

谓词：…和…的和等于…

个体：x、z

谓词：…和y的和等于…

个体：y

谓词：x和…的和等于z

谓词可以表示：1）单个个体的性质（一元谓词）；2）两个个体词之间的关系（2元谓词）；3）n个个体之间的关系或性质（n元谓词）

π的平方是非负的

个体：π

谓词： …的平方是非负的

个体：π的平方

谓词： …是非负的

"π的平方"是一个复合个体，需要进一步分解

个体：π

函数：…的平方

谓词：…是非负的

所有实数的平方都是非负的

个体：每一个实数

函数：…的平方

谓词：…是非负的

"所有"是什么

量词：所有

有一个比2^{1000}大的素数

个体：一个素数

谓词：…比2^{1000}大

“有一个”是什么

量词：有一个

4.1 谓词和个体词

- 谓词逻辑：区分主语、谓语，引入变元，
  引入谓词、量词
- 可将谓词逻辑理解为
  命题逻辑 + {个体词，谓词，量词，函数}
- 这里讨论的是一阶谓词逻辑，或称狭谓词逻辑。
  – 限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项
- 谓词逻辑的三要素
  – 个体词，谓词和量词
  – 函数

4.1 谓词和个体词

4-1-1　个体词（主词）

- 个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体。
  - 张三，李四
- 在一个命题中，个体词通常是表示思维对象的词，又称作主词。

4.1 谓词和个体词

4-1-2 个体常项与个体变项

- 将表示具体或特定客体的个体词称作个体常项，用小写字母a, b, c,…表示；
- 将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项，用小写字母x, y, z, …表示；
- 并称个体变项的取值范围为个体域或论域，以D表示。
- 约定有一个特殊的个体域，它由世间一切事物组成，称之为总论域。

4.1 谓词和个体词

4-1-3 谓词(Predicate)

- 谓词是用来刻划个体词的性质或多个个体词间关系的词。

  $P(x), Q(x,y)$

- 谓词又可看作是由给定的个体域到集合{**T**, **F**}上的一个映射。

4.1 谓词和个体词

4-1-4 谓词常项与谓词变项

- 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项;
- 表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项。
- 谓词常项与谓词变项都用大写英文字母$P, Q, R, \ldots$表示，可根据上下文区分。

4.1 谓词和个体词

4-1-5 一元与多元谓词

- 在一个命题中，如果个体词只有一个，这时表示该个体词性质或属性的词便是一元谓词，以 P(x), Q(x), ...表示。
- 如果一个命题中的个体词多于一个，则表示这几个个体词间关系的词便是多元谓词，以P(x, y), Q(x, y, z), ...等表示。

4.1 谓词和个体词

- 一般地，用P(a)表示个体常项a具有性质P，用P(x)表示个体变项x具有性质P。
- 用P(a, b)表示个体常项a, b具有关系P，用P(x, y)表示个体变项x, y具有关系P。
- 更一般地，用$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示含n ($n \geq 1$)个命题变项$x_1, x_2, \ldots, x_n$的n元谓词。

4.1 谓词和个体词

4-1-6 谓词逻辑与命题逻辑

- 有时将不带个体变项的谓词称作零元谓词。当此时的零元谓词又为谓词常项时，零元谓词即化为命题。
- 因此，命题逻辑中的命题均可以表示成零元谓词，或认为一个命题是没有个体变项的零元谓词。

4.2 函数和量词

4-2-1 谓词逻辑中的函数

- 在谓词逻辑中可引入函数，它是某一个体域（不必是实数）到另一个体域的映射。
- 谓词逻辑中的函数一般不单独使用，而是嵌入在谓词中。约定函数符号用小写字母表示。

函数举例

- 如函数 $father(x)$ 表x的父亲，若 $P(x)$ 表 x 是教师
- 则 $P(father(x))$ 就表示x的父亲是教师。
- 当x的取值确定后，$P(father\ (x))$ 的值或为真或为假。
- “张三的父亲和母亲是同学”可描述成 $CLASSMATE(father$ (张三) , $mother$ (张三))
  - 谓词$CLASSMATE(x, y)$表示x和y是同学
  - $father(x)$、$mother(x)$是函数。

4.2 函数和量词

4-2-2 量词(Quantifier)

- 表示个体数量的词称为**量词**。
- 量词是对个体词所加的限制或约束的词。
- 量词分为**全称量词**和**存在量词**两种。

4. 2. 2 全称量词(Universal quantifier)

- 思考：下列语句是命题吗?(1)与(3)之间，(2)与(4)之间有什么关系?

（1） $x > 3$

（2） 2x+1是整数;

(3) 对所有的 $x \in R, x > 3;$

(4) 对任意一个 $x \in Z$, 2x+1是整数.

4-2-2 全称量词

- 日常生活和数学中常用的“所有的”，“一切的”，“任意的”，“每一个”，“凡”等词可统称为全称量词；
- 将它们符号化为“∀”，并用$(\forall x)$, $(\forall y)$等表示个体域中所有的个体。
- 用$(\forall x)P(x)$,$(\forall y)Q(y)$等分别表示个体域中所有个体都有性质P和性质Q。

全称量词

全称量词的定义

- 命题$(\forall x)P(x)$当且仅当对论域中的所有x，$P(x)$均为真时方为真。
- 而$(\forall x)P(x) = F$成立，**当且仅当至少**存在一个$x_0 \in D$，使$P(x_0) = F$。
- 注意$((\forall x)P(x)) = F$与

  $(\forall x)(P(x) = F)$的区别

  $P(x)$表示x是**女生**

4-2-3 存在量词(Existential quantifier)

- 思考：下列语句是命题吗？(1)与(3)，(2)与(4)之间有什么关系？
- (1)$2x+1=3$；
- (2)x能被2 和3 整除；
- (3)存在一个$x_0 \in R$，使$2x_0+1=3$；
- (4)至少有一个$x_0 \in Z$，x_0能被2 和3 整除.

4-2-3 存在量词

- 日常生活和数学中常用的“存在一个”，“有一个”，“有些”，“有的”等词可统称为**存在量词**，将它们符号化为“$\exists$”；
- 用$(\exists x)$,$(\exists y)$等表示个体域中有的个体；
- 用$(\exists x)P(x)$,$(\exists y)Q(y)$等分别表示在个体域中存在个体具有性质P，存在个体具有性质Q。

全称量词和存在量词的含义归纳

	何时为真	何时为假
$\forall x P(x)$	对个体域中的每个x，$P(x)$都为真	至少存在一个x，使$P(x)$为假
$\exists x P(x)$	个体域中至少有一个x，使$P(x)$为真	对个体域中的每个x，$P(x)$都为假

练习

1.判断下列语句是全称命题还是特称命题：

(1)没有一个实数α，$\tan\alpha$无意义. 全称

(2)存在一条直线其斜率不存在. 特称

(3)所有圆的圆心到其切线的距离都等于半径吗？不是命题

(4)任意圆外切四边形，其对角互补. 全称

(5)有的指数函数不是单调函数. 特称

4-2-4 约束变元与自由变元

- 量词所约束的范围称为量词的辖域。
- 在公式$(\forall x)A$和$(\exists x)A$中，A为相应量词的辖域。
- 在$(\forall x)$和$(\exists x)$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现。
- 所有约束出现的变元称为约束变元。
- A中不是约束出现的其它变元均称为自由变元。

辖域例子

量词的优先级高于逻辑联结词

- $(\forall x)P(x)\vee Q(y)$
- $(\forall x)P(x)\vee Q(x)$
- $(\forall x)(\ P(x,y) \rightarrow Q(x,z)\ )$
- $(\forall x)(\ P(x) \rightarrow Q(y)\ ) \rightarrow (\exists y)(\ H(x) \wedge L(x,y,z)\ )$
- $\forall x\exists y\forall z(A(x,y)\rightarrow B(x,y,z))\wedge C(t)$

∀z的辖域

∃y的辖域

∀x的辖域

说明

对约束变元和自由变元有如下几点说明：

(1) 对约束变元用什么符号表示无关紧要。

(2) 一个谓词公式如果无自由变元，它就表示一个命题。

3) 一个n元谓词$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，若在前边添加k个量词，使其中的 k个个体变元变成约束变元，则此 n元谓词就变成了n-k元谓词。

4.3 合式公式

4-3-1 一阶谓词逻辑

- 在所讨论的谓词逻辑中，限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项，也不讨论谓词的谓词。

非一阶示例：$\forall p(p \rightarrow Q(x))$，$\exists Q(Q(x) \rightarrow P(x))$

- 在这样的限定范围内的谓词逻辑称为一阶谓词逻辑。一阶谓词逻辑是相对于高阶谓词逻辑而言的。

4.3 合式公式

4-3-2 一阶谓词逻辑的符号集

- 个体常项：$a, b, c, \ldots$（小写字母）。
- 个体变项：$x, y, z, \ldots$ （小写字母）。
- 命题变项： $p, q, r, \ldots$ （小写字母）。
- 谓词符号：$P, Q, R, \ldots$ （大写字母）。
- 函数符号： $f, g, h, \ldots$ （小写字母）。
- 联结词符号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 。
- 量词符号： $\forall, \exists$ 。
- 括号与逗号：（ ） ，

4-3-3 合式公式定义

(1) 命题常项、命题变项、和原子谓词公式（不含联结词的谓词公式）是合式公式。

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式。

(3) 若A,B是合式公式，而无变元x在A,B的一个中是约束的而在另一个中是自由的，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式（最外层括号可省略）。

(4) 若A是合式公式，则$(\forall x)A$, $(\exists x)A$也是合式公式

（此处教材限制较严）

(5) 只有有限次地应用(1)-(4)构成的符号串才是合式公式。

谓词逻辑中的合式公式也称为谓词公式，简称公式。

4.4 自然语句的形式化

- 利用计算机进行推理的基础工作。
- 在分析的基础上，将问题分解成一些合适的谓词表示；即先做一些谓词（函数）设定；
- 然后使用量词、联接词将设定的谓词构成合式公式。

符号化：π是无理数

- 解

个体：π（代表圆周率）

谓词：... 是无理数，以F表示

符号化：$F(\pi)$

张三与李四同在软件学院

个体：张三、李四

谓词：…与…同在软件学院，以G表示

符号化： G(张三,李四)

个体：张三

谓词： …与李四同在软件学院，以G'表示

符号化： G'(张三)

个体：李四

谓词：张三与…同在软件学院，以G''表示

符号化： G''(李四)

x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）

个体：x、y、z

谓词：…和…的和等于…，以R表示

符号化：$R(x,y,z)$

个体：x、z

谓词：…和y的和等于…，以R'表示

符号化：$R'(x, z)$

个体：x、y、z

函数：…与…的和，以f表示

谓词：…等于…，以R''表示

符号化：$R''(f(x,y),z)$

所有实数的平方都是非负的

个体：每一个实数，以x表示

函数：...的平方，以f表示

谓词：...是非负的，以R表示

"所有"是什么？

量词：所有，以$\forall$表示

符号化：$(\forall x)R(f(x))$

所有实数的平方都是非负的

另解：

个体：每一个数，以z表示

谓词：是一个实数，以R’表示

函数：...的平方，以f表示

谓词：...是非负的，以R表示

量词：所有，以∀表示

符号化：$(\forall z)(\ R'(z)\rightarrow R(f(z))\ )$

有一个比2^{1000}大的素数

个体：一个素数，以x表示

谓词：…比2^{1000}大，以P_1表示

“有一个”是什么？

量词：有一个，以∃表示

符号化： $(\exists x)\ P_1(x)$

还可以表示为：$(\exists x)\ (\ P_2(x) \wedge P_1(x)\ )$

x： 一个数　　　P_2: …是一个素数

4.4.1 “所有的有理数都是实数”的形式化

分析：所有的有理数都是实数

即对任一事物而言，如果它是有理数，则它是实数。

即对任一x而言，如果x是有理数，那么x是实数。

设$P(x)$：x是有理数，$Q(x)$：x是实数，

这句话的形式描述应为

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

4. 4. 1 “所有的有理数都是实数”的形式化

- 因为x的论域是一切事物的集合, 所以x是有理数是一个条件。
- 需注意这句话不能形式化为

$$(\forall x)(P(x)\land Q(x))$$

上式的意思是说， 对所有的x， x是有理数而且又是实数.

- “所有的...都是...”， 这类语句的形式描述只能使用“$\rightarrow$”而不能使用“$\land$”。

八股原则

4.4.2 “有的实数是有理数”的形式化

- 同前 $P(x)$：x是有理数，$Q(x)$：x是实数

  则这句话的形式描述应为

  $$(\exists x)(Q(x) \wedge P(x))$$

- 需注意的是不能使用

  $$(\exists x)(Q(x) \rightarrow P(x))$$

4.4.3 "没有无理数是有理数"的形式化

- 该句中有否定词，对任一x而言，如果x是无理数，那么x不是有理数。
- 设$A(x)$: x是无理数，

  $B(x)$：x是有理数，

这句话的形式描述为

$$\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

“没有无理数是有理数”的形式化

其它逻辑上等价的描述包括

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

$$(\forall x)(B(x) \rightarrow \neg A(x))$$

设$A(x)$: x是无理数，

$B(x)$：x是有理数，

4.4.4 命题符号化（1）

- 在个体域分别限制为(a)和(b)条件时，将下面两个命题符号化

(1)凡是人都呼吸

(2)有的人用左手写字

其中: (a) 个体域D_1为人类集合；

(b) 个体域D_2为全总个体域.

4.4.4 命题符号化(1)

解 (a) 令$F(x)$: x呼吸. $G(x)$: x用左手写字

在D_1中除人外，再无别的东西，因而

(1) 符号化为 $(\forall x)\, F(x)$

(2) 符号化为 $(\exists x)\, G(x)$

(1)凡是人都呼吸
(2)有的人用左手写字
其中: (a) 个体域D_1为人类集合；
(b) 个体域D_2为全总个体域.

4. 4. 4 命题符号化（1）

(b) D_2中除有人外，还有万物， 因而在 (1)，(2)符号化时，必须考虑将人分离出来。令$M(x)$: x是人在D_2中，

用于表明x的特性

(1)对于宇宙间一切事物而言，如果事物是人，则他要呼吸; (2)在宇宙间存在着用左手写字的人.

(1)，(2)的符号化形式分别为

$(\forall x)\ (M(x)\rightarrow F(x))$ 和 $(\exists x)(M(x)\wedge G(x))$

其中$F(x)$与$G(x)$的含义同(a)中.

(1)凡是人都呼吸

(2)有的人用左手写字

令$F(x)$: x呼吸．$G(x)$: x用左手写字

其中: (a) 个体域D_1为人类集合；

(b) 个体域D_2为全总个体域.

在谓词演算中，命题的符号表达式与论域有关系。

1.每个自然数都是整数。

(1).如果论域是自然数集合N，令 I(x)：x是整数，则命题的表达式为 $\forall x I(x)$。

(2).如果论域扩大为全总个体域时，上述表达式$\forall x I(x)$表示“所有客体都是整数”，显然这是假的命题，此表达式已经不能表达原命题了。

因此需要添加谓词N(x)：x是自然数，用于表明x的特性，于是命题的符号表达式为 $\forall x(N(x)\rightarrow I(x))$

2.有些大学生吸烟。

(1).如果论域是大学生集合S，令A(x)：x吸烟，则命题的表达式为 $\exists x A(x)$

(2).如果论域扩大为全总个体域时，上述表达式$\exists x A(x)$表示“有些客体吸烟”，就不是表示此命题了，故需要添加谓词 S(x)：x是大学生，用于表明x的特性，于是命题的表达式为 $\exists x(S(x) \wedge A(x))$

- 从上述两个例子可以看出，命题的符号表达式与论域有关。当论域扩大时，需要添加用来表示客体特性的谓词，称此谓词为特性谓词。特性谓词往往就是给定命题中量词后边的那个名词。如上面两个例子中的“所有*自然数*”、“有些*大学生*”。
- 特性谓词的添加方法如下：
  - 如果前边是全称量词，特性谓词后边是蕴含联结词“→”；如果前边是存在量词，特性谓词后边是合取联结词“∧”。 **八股原则**

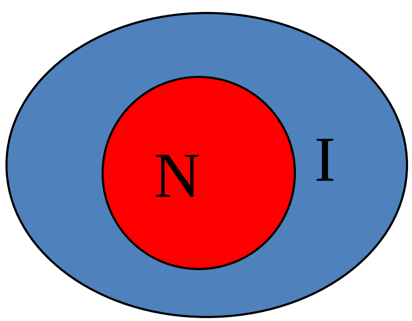
如何添加特性谓词，与前边的量词有关。

- 为什么必须这样添加特性谓词？

1. 每个自然数都是整数。
2. 有些大学生吸烟。

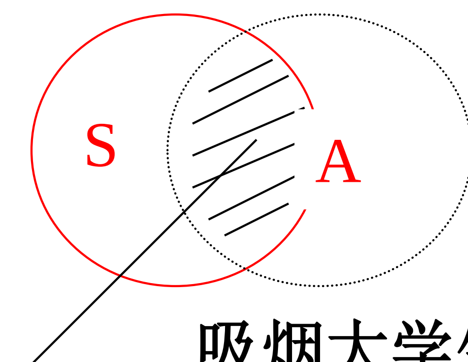
令N：自然数集合，I：整数集合，

S：大学生集合，A：烟民的集合。



I包含N

$\forall x(N(x) \rightarrow I(x))$



吸烟大学生

吸烟大学生是S与A的交集

$\exists x(S(x) \wedge A(x))$

4.4.4 命题符号化（2）

1）对于任意的x，均有$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

2）存在x，使得$x+5=3$

其中：(a) 个体域$D_1=\mathbf{N}$ (b) $D_2=\mathbf{R}$

解

(a) 令 $F(x)$: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $G(x)$: $x+5=3$ 则有

命题1)为 $(\forall \mathrm{x})\ F(x)$，命题2)为 $(\exists \mathrm{x})\ G(x)$

在D_1内，命题1）为真，命题2）为假

(b) 在D_2内，符号化形式相同。命题1）为真，命题2）为真

说明

从4. 4. 4的几个例子可以看出

- 在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同.
- 同一个命题，在不同个体域中的真值也可能不同.

命题符号化，并讨论真值

（1）每个人都长着黑头发。

解： 由于本题未指明个体域，因而应用总论域，并令 $H(x)$: x是人。

令**B(x): x长着黑头发**。则命题（1）符号化为

$$(\forall x)\ (H(x) \rightarrow B(x))$$

设a为某金发姑娘，则$H(a)$为真，而$B(a)$为假，所以$H(a) \rightarrow B(a)$为假，故上式所表示的命题为假。

命题符号化，并讨论真值

(2) 有的人登上过月球。

解：　令$H(x)$: x是人，$M(x)$: x登上过月球。

有的人登上 过月球 符号化为

$$(\exists x)\ (H(x) \wedge M(x))$$

设a是1969年完成阿波罗登月计划的美国人，则 $H(a) \wedge M(a)$为真，所以上式命题为真。

命题符号化，并讨论真值

(3)没有人登上过木星

解：令$H(x)$: x是人, $J(x)$: x登上过木星。

没有人登上过木星符号化为

$$\neg(\exists x)\,(H(x)\wedge J(x))$$

到目前为止，还没有任何人登上过木星，所以对任何人a，$H(a)\wedge J(a)$均为假，因而$(\exists x)\,(H(x)\wedge J(x))$为假，故上式命题为真。

命题符号化，并讨论真值

(4)在校学习的大学生不都住在学校

解：令$S(x)$: x是大学生，$L(x)$: x住在学校。

在校学习的大学生未必都住在学校

符号化为

$$\neg(\forall x)(S(x) \rightarrow L(x))$$

容易讨论，(4)中命题为真。

$$(\exists x)(S(x) \land \neg L(x))$$

n（$n \geq 2$）元谓词的符号化

例　将下列命题符号化：

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

解　本题未指明个体域。故默认为总论域。

出现二元谓词，故引入两个个体变项x与y

令 R(x): x是兔子;　T(y): y是乌龟;

F(x, y): x比y跑得快;

S(x, y): x与y跑得同样快

这4个命题分别符号化为

（1）兔子比乌龟跑得快。

$$(\forall x)(\forall y)(R(x) \wedge T(y) \rightarrow F(x, y))$$

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

$$(\exists x)(R(x) \wedge (\forall y)(T(y) \rightarrow F(x, y)))$$

R(x): x是兔子;　T(y): y是乌龟;
F(x, y): x比y跑得快;
S(x, y): x与y跑得同样快

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快

$$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x)\land T(y)\rightarrow F(x,y))$$

（4）不存在跑得同样快的两只兔子

$$\neg(\exists x)(\exists y)(R(x)\land R(y)\land S(x,y))$$ X

$$\neg(\exists x)(\exists y)(R(x)\land R(y)\land\neg E(x,y)\land S(x,y))$$

$E(x,y)$：x,y是相同的

R(x): x是兔子;　T(y): y是乌龟;
F(x, y): x比y跑得快;
S(x, y): x与y跑得同样快

有些语句的形式化可能有多种形式

“并不是所有的兔子都比乌龟跑的快。”

令$R(x)$：x是兔子，$T(y)$：y是乌龟，$F(x, y)$：x比y跑得快

这句话可形式化为

$$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x)\wedge T(y)\rightarrow F(x, y))$$

也可以形式化为 $(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge T(y)\wedge\neg F(x, y))$

若令$E(x, y)$：x与y跑得同样快, 则还可符号化为(注意与原句有差别)

$$(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge T(y)\wedge E(x, y))$$

例：不管白猫黑猫，抓到老鼠就是好猫

设$C(x)$：x是猫　　$B(x)$：x是黑的

$W(x)$：x是白的　$G(x)$：x是好的

$M(y)$：y是老鼠

$K(x,y)$：x抓住y

命题的表达式为:

$$\forall x\,(\,C(x)\wedge(W(x)\vee B(x))\rightarrow(\,\exists y(M(y)\wedge K(x,y))\rightarrow G(x)\,)\,)$$

$$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$$

4.4.5 自然数集的形式描述

论域是自然数集，将下列语句形式化：

1. 对每个数， 有且仅有一个相继后元。
2. 没有这样的数， 0是其相继后元。
3. 对除0而外的数，有且仅有一个相继前元。

* 可将这三句话作为建立自然数集合的公理。

引入谓词：$E(x, y)$表示 $x = y$,

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元， $f(x) = x+1$。

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$。

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

- 语句1需注意“唯一性”的描述，常用的办法是如果存在两个则它们必相等。
- 即若对每个x都存在y，y是x的相继后元，而且对任一z，如果z也是x的相继后元，那么y和z必相等。

于是对语句1的描述为

$$(\forall x)(\exists y)(\ E(y, f(x)) \wedge (\forall z)(\ E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)\ )\ )$$

对每个数，有且仅有一个相继后元。

引入谓词：$E(x, y)$表示 $x = y$，
函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元，$f(x) = x+1$
函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$

关于“唯一性”的一般描述

“唯一性”的一般描述：

常用的办法是：

先表示存在一个，同时如果还能找到另一个的话，则它们一定相等。

一般描述可表述为：

$(\exists x)(\ P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \rightarrow E(x, y))\ \ )$

其中 $E(x, y)$表示 $x = y$。

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

语句 2. 没有这样的数，0是其相继后元。

描述比较简单，即，

不存在这样的x，它的相继后元等于0。可写成

$$\neg(\exists x)E(0, f(x)) \quad 或$$

$$(\forall x)\neg E(0, f(x))$$

引入谓词：$E(x, y)$表示 $x = y$,

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元， $f(x) = x+1$

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

语句3. 对除 0 而外的数, 有且仅有一个相继前元。

需注意的是对“除 0 而外”的描述，可理解为如果 $x \neq 0$，则...的形式。

于是语句3可描述为

$$(\forall x)\,(\neg E(x, 0) \rightarrow (\exists y)(E(y, g(x)) \wedge$$
$$(\forall z)(E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z))))$$

除$\neg E(x, 0)$外，与语句1的结构完全相同

$$(\forall x)(\exists y)(\ E(y, f(x)) \wedge (\forall z)(\ E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)\ )\ )$$

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元， $f(x) = x+1$

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$

4.4.6 “至少有一偶数是素数”与“至少有一偶数并且至少有一素数”的形式化

需注意两者的区别

记 $A(x)$ 表示x是偶数，$B(x)$ 表示x是素数，则两句话可分别形式描述为

$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$ 与

$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

这两个逻辑公式并不等值。

4.4.6 （续）

同样，“一切事物它或是生物或是非生物”

与“或者一切事物都是生物，或者一切事物都是非生物”

的形式化也是不同的，可分别形式描述为：

$$(\forall x)(A(x)\overline{\vee}B(x))$$

$$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$$

这两个逻辑公式也不等值。

4.4.6 （续）

“一切素数都是奇数”与

“若一切事物都是素数，那么一切事物都是奇数”

分别形式化为：

$$(\forall x)(A(x) \to B(x))$$

与 $(\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$

两者显然也不等值。

4.4.9 “函数$f(x)$在$[a, b]$上的点x_0处连续”的形式描述

“函数$f(x)$在$[a, b]$上的点x_0处连续”的形式描述（可考虑加一些函数设定）

$$(\forall\varepsilon)(\varepsilon>0\rightarrow(\exists\delta)(\delta>0\wedge(\forall x)$$

$$(|x-x_0|<\delta\rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)))$$

P(x, ε): x的绝对值小于ε

$$(\forall\varepsilon)(\varepsilon>0\rightarrow(\exists\delta)(\delta>0\wedge(\forall x)$$

$$(P(x-x_0, \delta)\rightarrow P(f(x)-f(x_0), \varepsilon))))$$

4.4.10 对谓词变元多次量化的分析

(1) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) = (\forall x)((\forall y)P(x,y))$

(2) $(\forall x)(\exists y)P(x,y) = (\forall x)((\exists y)P(x,y))$

(3) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) = (\exists x)((\forall y)P(x,y))$

(4) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) = (\exists x)((\exists y)P(x,y))$

4.5 有限域下公式的表示法

4-5-1 有限域下全称量词和存在量词的表示

将论域限定为有限集，不失一般性，用$\{1,2, \ldots, k\}$来表示，这时全称量词和存在量词可化为如下公式：

$$(\forall x)P(x) = P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \lor P(2) \lor \ldots \lor P(k)$$

这种情况下可以说，**全称量词是合取词的推广；存在量词是析取词的推广。**

4.5 有限域下公式的表示法

- 在有限域下，可将$(\forall x)P(x)$化成由合取词来描述的命题公式。
- 在有限域下，可将$(\exists y)P(y)$化成由析取词来描述的命题公式。
- 但是**在无限域下，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。**

4.5 有限域下公式的表示法

- 严格地说，在无穷集$\{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$上

  $$P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \wedge \ldots$$

  $$P(1) \vee P(2) \vee \ldots \vee P(k) \vee \ldots$$

  都是没有定义的, 不是合式公式。

- 一般而言，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。

4.5.2 在{1, 2}域上多次量化公式(4-1)

$(\forall x)(\forall y)\, P(x, y)$

$= (\forall y)\, P(1, y) \land (\forall y) P(2, y)$

$= (P(1, 1) \land P(1, 2)) \land (P(2, 1) \land P(2, 2))$

$(\exists x)(\forall y)\, P(x, y)$

$= (\forall y) P(1, y) \lor (\forall y) P(2, y)$

$= (P(1, 1) \land P(1, 2)) \lor (P(2, 1) \land P(2, 2))$

4.5.2 在{1, 2}域上多次量化公式(4-2)

$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

$= (\exists x)P(x, 1) \wedge (\exists x)P(x, 2)$

$= (P(1, 1) \vee P(2, 1)) \wedge (P(1, 2) \vee P(2, 2))$

$(\exists x)(\exists y)P(x, y)$

$= (\exists y)P(1, y) \vee (\exists y)P(2, y)$

$= (P(1, 1) \vee P(1, 2)) \vee (P(2, 1) \vee P(2, 2))$

4.5.2 在域{1, 2}上多次量化公式(4-3)

- 将$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$写成析取范式可明显看出它与$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$ 的差别：

$$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$$

$$= (P(1, 1)\wedge P(1, 2))\vee(P(2, 1)\wedge P(2, 2))\vee$$

$$(P(1, 1)\wedge P(2, 2))\vee(P(2, 1)\wedge P(1, 2))$$

$$= (\exists x)(\forall y)P(x, y)\vee$$

$$(P(1, 1)\wedge P(2, 2))\vee(P(2, 1)\wedge P(1, 2))$$

$$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$$

$$= (\forall y)P(1, y)\vee(\forall y)P(2, y)$$

$$= (P(1, 1)\wedge P(1, 2))\vee(P(2, 1)\wedge P(2, 2))$$

4.5.2 在域{1, 2}上多次量化公式(4-4)

- 从而有

  $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$

- 当对有的谓词公式难于理解时, 可在有限域{1, 2}上转换成命题逻辑公式做些分析, 常会帮助理解。

$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

$= (\exists x)(\forall y)P(x, y) \vee (P(1, 1) \wedge P(2, 2)) \vee (P(2, 1) \wedge P(1, 2))$

- $P(x, y)$表示x和y是好朋友

  $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$ 存在万人迷

  $(\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$ 所有人都有朋友

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-1 普遍有效公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

例: $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \to P(y)$ (y是x个体域中的一个元素)

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \to (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

$$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$$

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-2 不可满足公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为假，则称A为不可满足的公式。

例: $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)$

解释一下什么叫“任何解释？”

给定的个体域D：**命题变项** p, 个体变项x，谓词变项P，函数f

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-3 可满足公式

设A为一个谓词公式，若至少存在一个解释使A为真，则称A为可满足的公式

- 普遍有效的公式一定是可满足的公式
- $(\exists x)P(x)$ 在任一非空的个体域中可满足

公式的可满足性和普遍有效性依赖于个体域中个体的个数

- $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x)$

  在D1上不可满足，但在D2上可满足

- $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)\neg P(x)$

  在D1上普遍有效，但在D2上则不一定。

D1 = {0}; D2= {0,1}
令P(0) =1, P(1)=0

总结：谓词逻辑的基本概念

- 4.1 谓词*和个体词
- 4.2 函数和量词*
- 4.3 合式公式
- 4.4 自然语句的形式化*
- 4.5 有限域下公式的表示法
- 4.6 公式的普遍有效性

什么是谓词

- **谓词逻辑：区分主语、谓语，引入变元，**
  引入谓词、量词

- **可将谓词逻辑理解为**
  命题逻辑 + {个体词，谓词，量词，函数}

- **这里讨论的是一阶谓词逻辑，**
  或称狭谓词逻辑。

概念

- 个体词（主词）
- 将表示具体或特定客体的个体词称作个体常项，用小写字母$a, b, c,$…表示；
- 而将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项，用小写字母$x, y, z,$ …表示。
- 并称个体变项的取值范围为个体域或论域， 以D表示。
- 约定有一个特殊的个体域，它由世间一切事物组成，称之为总论域。

概念

- **谓词(Predicate)**
- **谓词是用来刻划个体词的性质或多个个体词间关系的词。** $P(x),\ Q(x,y)$
- **谓词又可看作是由给定的个体域到集合{T, F}上的一个映射。**
- **表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项;**
- **表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项。**
- **谓词常项与谓词变项都用大写英文字母*P, Q, R,…*表示，可根据上下文区分。**

概念

- 多元谓词
  - 命题逻辑中的命题均可以表示成零元谓词，或认为一个命题是没有个体变项的零元谓词。
- 量词
  - 全称量词和存在量词
- 一阶谓词：在所讨论的谓词逻辑中，限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项。

非一阶示例：$\forall p(p \rightarrow Q(x))$， $\exists Q(Q(x) \rightarrow P(x))$

4-3-2 一阶谓词逻辑的符号集

- 个体常项：$a, b, c, \ldots$（小写字母）。
- 个体变项：$x, y, z, \ldots$ （小写字母）。
- 命题变项： $p, q, r, \ldots$ （小写字母）。
- 谓词符号：$P, Q, R, \ldots$ （大写字母）。
- 函数符号： $f, g, h, \ldots$ （小写字母）。
- 联结词符号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 。
- 量词符号：$\forall, \exists$ 。
- 括号与逗号：（ ） ，

4-3-3 合式公式定义

(1) 命题常项、命题变项、和原子谓词公式（不含联结词的谓词公式）是合式公式。

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式。

(3) 若A,B是合式公式，而无变元x在A,B的一个中是约束的而在另一个中是自由的，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式（最外层括号可省略）。

(4) 若A是合式公式，则$(\forall x)A$, $(\exists x)A$也是合式公式

（此处教材限制较严）

(5) 只有有限次地应用(1)-(4)构成的符号串才是合式公式。

谓词逻辑中的合式公式也称为谓词公式，简称公式。

4.4 自然语句的形式化

- 在分析的基础上，将问题分解成一些合适的谓词表示；即先做一些谓词（函数）设定；
- 然后使用量词、联接词将设定的谓词构成合式公式。
- “所有的…都是…”，这类语句的形式描述只能使用“$\rightarrow$”而不能使用“$\wedge$”。
- 例：所有的有理数都是实数 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
- 有的实数是有理数 $(\exists x)(Q(x) \wedge P(x))$
- 没有无理数是有理数 $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

几种描述

- “唯一性”

先表示存在一个，同时如果还能找到另一个的话，则它们一定相等。

$$(\exists x)(P(x) \land (\forall y)(P(y) \rightarrow E(x, y)))$$

其中 $E(x, y)$ 表示 $x = y$。

自然数集的形式描述

。。。。。。

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn