十六周作业：

1. $\{X_n\}$ 独立同分布，其同分布为 $P(X_n=\frac{2^k}{k^2})=\frac{1}{2^k}$，$k=1,2\ldots$

$\{X_n\}$ 服从大数定律吗？

解：$E(X_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}<\infty$

$E(X_n)$ 存在，所以由辛钦知，$\{X_n\}$ 服从大数定律

大数：$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)|<\varepsilon)=1$ $\quad\forall\varepsilon>0$.

辛钦：$\{X_n\}$ 独立同分布，数学期望存在，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律

2.

用蒙特卡罗方法计算定积分：$I=\int_0^{\infty}e^{\sin((\ln x))-x^2}dx$

平均值 or 随机投点.

区间和上下界都无，无法化为 $[0,1]\times[0,1]$ 内的

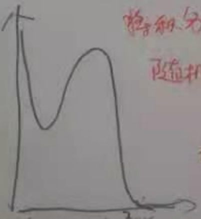
随机投点 (pass) ×

$I=\int_0^{\infty}e^{\sin(\ln(x))-x^2}e^{x}e^{-x}dx$

平均值法！

积分化为某个随机变量的期望值函数

最简单，指数分布



$=\int_0^{\infty}e^{\sin(\ln(x))-x^2+x}p(x)\,dx$ ，$p(x)=e^{-x}$

$=E(e^{\sin(\ln x)-x^2+x})$

随机数：按 $p(x)=e^{-x}$ 分布的电脑统一试

$J=\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}f(x_i)$ ：Mathematica ：0.65355

0.65345

$f(x)=e^{\sin(\ln x)-x^2+x}$

True value 0.65405

$\{X_n\}$ 独立同分布，

$E(X_i^k)=\alpha_k$，记：当 n 充分大时

3. $E(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \alpha_2$，

$\mathrm{Var}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i^2) = \frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}$.

$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 近似服从正态分布，指出参数

林德伯格—莱维中心极限定理：独立同分布，若其数学期望和方差存在，则 $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ 趋于正态分布。

X_n 独立同分布，X_n^2 也独立同分布，期望是 α_2，方差是 $\alpha_4-\alpha_2^2$ 有限

4. $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \cancel{\frac{1}{n-1}\sum_i \left(x_i - \frac{\sum_j x_j}{n}\right)^2}$

期望为 μ，方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$

$x_1 \ldots x_n$ 样本，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$ 方差，记

$= \cancel{\frac{1}{n^2(n-1)}\sum_{i,j}(nx_i - x_j)^2}$ $\quad S^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2$

$\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j$ ①

↓

每个 x_i 平等

$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$ ②

①+② 得 $\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (n\bar{x})^2$

$= n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$ $\quad n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

$= n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) = \cancel{n\sigma^2}$ □

~~抽样分布~~

（第一次作统计量）

5. 设 X_1, X_2, X_3 服从均匀分布 $U(0,\theta)$，试证 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 及 $4X_{(1)}$ 都是 θ 的无偏估计，试问哪个更有效？

分布公式：$P_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}p(x)$

$$f_1(x)=\frac{3!}{2!1!}\cdot(1-F(x))^{n-1}p(x)=3\left(\frac{\theta-x}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{\theta}=\frac{3}{\theta^3}(\theta-x)^2, \quad 0<x<\theta$$

$$f_3(x)=3\cdot\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\frac{1}{\theta}=\frac{3}{\theta^3}x^2, \quad 0<x<\theta$$

$$E(X_{(1)})=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x(\theta-x)^2dx=\frac{\theta}{4} \qquad E(X_{(3)})=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^3dx=\frac{3}{4}\theta$$

均无偏

$$E(X_{(1)}^2)=\frac{1}{10}\theta^2 \qquad E(X_{(3)}^2)=\frac{3}{5}\theta^2$$

$$Var(4X_{(1)})=\frac{3}{5}\theta^2, \quad Var\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right)=\frac{\theta^2}{15}, \quad Var\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right)<Var(4X_{(1)})$$

即 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 更有效

6. 设总体概率函数如下，$x_1 \dots x_n$ 是样本，试求未知参数 θ 最大似然估计：

(a) $p(x;\theta)=\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, \quad 0<x<1, \theta>0$

(b) $p(x;\theta)=\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, \quad x>c, \theta>1, c>0$ 已知。

(a) $L(\theta)=(\sqrt{\theta})^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, \quad \ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)(\ln x_1+\cdots+\ln x_n)$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{2\theta} + \cancel{(\sqrt{\theta}-1)}(\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n)\frac{1}{2\sqrt{\theta}} = 0$$

$$\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^{-2}, \quad \left.\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\hat{\theta}} = \left.\left(-\frac{n}{2\theta^2} - \frac{\sum \ln x_i}{4\theta^{3/2}}\right)\right|_{\hat{\theta}}$$

$$= -\frac{3(\sum \ln x_i)^4}{4n^3} < 0$$

所以 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计.

(b) $L(\theta) = \theta^n c^{n\theta}(x_1 x_2 \cdots x_n)^{-(\theta+1)}$，对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta + n\theta\ln c - (\theta+1)(\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n).$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + n\ln c - (\ln x_1 + \cdots + \ln x_n) = 0.$$

$$\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \ln c\right)^{-1}.$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0.$$ 这说明 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计

密度函数：$F(m,n)$ $(0,+\infty)$ $(0,+\infty)$.

7. $$P_F(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\cancel{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} y^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

$X \sim F(n,m)$. 证 $Z = \frac{n}{m}X \Big/ \left(1+\frac{n}{m}X\right)$ 服从贝塔分布，并指出参数.

$Z = \frac{\frac{n}{m}x}{1+\frac{n}{m}x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单增. $\frac{dz}{dx} = \left(1 - \frac{1}{1+\frac{n}{m}x}\right)' = \frac{n}{m}\cdot\frac{1}{(1+\frac{n}{m}x)^2} > 0$

$\Downarrow$ 所以

反函数 $x = \frac{mz}{n(1-z)}$, $\frac{dx}{dz} = \frac{m}{n(1-z)^2}$ $\quad F_Z(Z\le z) = F_X(X \le x)$

$$\therefore P_Z(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{mz}{n(1-z)}\right)^{\frac{n}{2}-1} \quad \left(\frac{dF_Z}{dz} = \frac{dF_X}{dz} = \frac{dF_X}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}\right)$$

$$\left(1+\frac{z}{1-z}\right)^{-\frac{m+n}{2}} \frac{m}{n(1-z)^2} = C z^{\frac{n}{2}-1}(1-z)^{\frac{m}{2}-1}$$

$$\alpha \quad \beta$$

$$Beta(\tfrac{n}{2}, \tfrac{m}{2}) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$\therefore Z \sim Be(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$ $\quad 0<z<1$

8. 设总体X的密度函数为 $\lambda e^{-\lambda x} I_{(x>0)}$，其中 $\lambda>0$ 为位置参数，$x_1, \dots, x_n$ 为抽自此总体的简单随机样本，求 λ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

枢轴量法 构造样本的函数，使之不依赖于参数 未知参数 其分布函数对所有的取值都相同

解：由指数分布和伽马分布的关系知 $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim Ga(n, \lambda)$，根据伽马分布的性质，$2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \sim Ga(n, \frac{1}{2}) = \chi^2(2n)$， $0<\alpha<1$

从而 $P(\chi^2_{\alpha/2}(2n) \le 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \le \chi^2_{1-\alpha/2}(2n)) = 1-\alpha$

因此可得 λ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left[\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2n\bar{x}}, \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2n\bar{x}}\right]$

等尾置信区间

$P(\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n)) = 1-\alpha$ 定义

χ^2分布的 $1-\alpha/2$ 分位数

$$Ga(\alpha, \lambda): p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \lambda \ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

$G(1, \lambda) = \exp(\lambda)$

Scaling property: $cGa(\alpha, \lambda) = Ga(\alpha, \lambda/c)$

$X \sim Ga(\alpha, \lambda)$

$cX \sim Ga(\alpha, \lambda/c)$

χ^2 定义: $X \sim \Gamma(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(k)$