清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　　概率论与数理统计　(A 卷)　　2021 年 6 月 16 日

1. （10分）某人有两盒火柴，每盒火柴都有n根，每次用火柴时他在两盒中任取一盒并从中抽出一根，求用完一盒时另一盒还剩r根（$1 \le r \le n$）的概率。

2. （10分）设随机变量X的绝对值不大于1且$P(X=-1)=1/8$，$P(X=1)=1/4$；已知在$-1<X<1$发生的条件下，X在区间$(-1,1)$内的任一子区间上取值的概率与该子区间长度成正比，试求X的概率分布函数。

3. （20分）设随机变量X满足$E(X)=0$以及$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$。对任意正数a，求证：

   (a) 对任意正数b，下式成立，

   $$P(X \ge a) \le \frac{E[(X+b)^2]}{(a+b)^2}.$$

   (b) 下述单边Chebyshev不等式成立，

   $$P(X \ge a) \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}.$$

4. （10分）设随机向量(X,Y)具有联合密度函数

   $$p(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1, |y|<1, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

   判断X与Y是否相互独立，X^2与Y^2是否相互独立，并说明理由。

5. （10分）设X和Y独立同分布，都服从标准正态分布$N(0,1)$，求$E(\min\{X,Y\})$。

6. （20分）设有一种福利彩票，彩票每张面额5元，仅有两种奖项，中一等奖概率为0.1，奖金为20元，中二等奖概率为0.3，奖金为5元，假设甲每周购买一张该种彩票，直到中奖为止。求

   (a) 甲平均购买彩票次数；

   (b) 甲最终所获平均利润。

7. （20分）设$X_1,\ldots,X_n$为来自均匀总体$U(0,\theta)$的简单随机样本，其中$\theta>0$是未知参数，令

   $$Y=\max\{X_1,\ldots,X_n\}-\min\{X_1,\ldots,X_n\}.$$

   (a) 有人说Y是θ的一个相合估计，试判断正误并说明理由；

   (b) 设$x_1,\ldots,x_{300}$是一组容量$n=300$的样本观测值，求θ的置信水平为90%的置信区间。