《高等微积分 1》第十一次习题课材料

1 对非负整数 n, 考虑积分 $\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2} dx$, 人们可以证明当 $A \to +\infty$ 时, 极限 $\lim_{A\to+\infty} \left(\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2} dx \right)$ 存在, 记作

$$J_n = \lim_{A\to+\infty} \left(\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2} dx \right).$$

证明:

(1) 当 n 是奇数时, $J_n = 0$.

(2) 对每个非负整数 n, 都有

$$J_{n+2} = \frac{n+1}{2} J_n.$$

2 给定 $0 < a < b$. 设连续函数 $f : [a, b] \to [-1, 1]$ 满足 $\int_a^b f(x)dx = 0$. 证明:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \le \ln \frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

3 (1) 设 $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ 是连续映射, 且极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ 存在. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx.$$

(2) 设 $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 都是连续映射, 且 h 是周期为 $T > 0$ 的周期函数, 即对任何 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $h(x + T) = h(x)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T g(x)h(nx)dx = \frac{1}{T} \left(\int_0^T g(x)dx \right) \cdot \left(\int_0^T h(x)dx \right).$$

解. (1) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是 f 的变上限积分, 由于 f 连续, 对任何 $x\geq 0$ 有 $F'(x)=f(x)$. 利用定积分的换元公式, 以及 $\frac{?}{\infty}$ 型洛必达法则, 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(t)\frac{dt}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{F(n)}{n}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{1}\\&=\lim_{x\to+\infty}f(x)=L.\end{aligned}$$

(2) 定义 $A_n=\int_0^T g(x)h(nx)dx$, 则

$$\begin{aligned}A_n=&\sum_{i=1}^n\int_{\frac{(i-1)T}{n}}^{\frac{iT}{n}}g(x)h(nx)dx\\=&\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}g(\frac{t}{n})h(t)\frac{dt}{n}\\=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}g(\frac{t}{n})h(t)dt.\end{aligned}$$

定义

$$B_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}g(\frac{iT}{n})h(t)dt,$$

我们先来证明 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}B_n$. 由于 $g\in C([0,T])$, 则 g 在 $[0,T]$ 上一致连续, 即对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任何 $x_1,x_2\in[0,T]$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 则有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\epsilon$. 这样, 对任何 $n>\frac{T}{\delta}$, 有

$$|g(\frac{t}{n})-g(\frac{iT}{n})|<\epsilon,\quad\forall t\in[(i-1)T,iT],$$

由此可得

$$\begin{aligned}&|A_n-B_n|=|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}\left(g(\frac{t}{n})-g(\frac{iT}{n})\right)h(t)dt|\\\leq&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}|g(\frac{t}{n})-g(\frac{iT}{n})|\cdot|h(t)|dt<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}\epsilon\cdot|h(t)|dt\\=&\frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}|h(t)|dt=\frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^n\int_0^T|h(t)|dt=\left(\int_0^T|h(t)|dt\right)\cdot\epsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$.

其次, 利用 g 在 $[0,T]$ 上 Riemann 积分的定义, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(\frac{iT}{n})\cdot\frac{T}{n} = \int_0^T g(x)dx,$$

由此可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} B_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\frac{iT}{n})\int_{(i-1)T}^{iT} h(t)dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\frac{iT}{n})\int_0^T h(t)dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\frac{iT}{n})\right)\cdot\left(\int_0^T h(t)dt\right)\\ &=\frac{1}{T}\left(\int_0^T g(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^T h(t)dt\right).\end{aligned}$$

结合这两部分的结论, 即有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T g(x)h(nx)dx = \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^T h(x)dx\right).$$

□

4 判断下列广义积分的收敛发散性.

(1) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx.$

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(\ln x)^p}{1+x^2}dx$, 其中常数 $p>0$.

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx.$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$

(5) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx$, 其中常数 $p>0$.

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^a\sin x}{1+x^b}dx$, 其中常数 $b\geq 0$.

5 给定数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. 设 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列为

$$B_n = b_1 + ... + b_n, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

(1) 证明: Abel 恒等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i.$$

(2) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调数列, 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和满足

$$|B_i| \leq M, \quad \forall i \geq 1.$$

证明:

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq (|a_n| + |a_1 - a_n|)M.$$

(3)(Dirichlet 判别法) 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 设数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列有界, 即存在常数 $M > 0$ 使得

$$|\sum_{i=1}^{n} b_i| \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(4)(Abel 判别法) 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调且有界的数列, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

6 判断级数的收敛发散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+\mu)}}$, 其中常数 $\mu > 0$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+a^n}$, 其中常数 $a \neq -1$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! a^n}{n^n}$, 其中 $a > 0$.

(4) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$.

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^p}{1+n^2}$, 其中常数 $p>0$.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^q}$, 其中常数 $p,q>0$.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$, 其中常数 $\alpha>0$.

7 (Kummer 判别法) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两列正数, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ 发散. 定义数列:

$$k_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}.$$

(1) 如果存在 $\delta>0$ 和 $N\in\mathbb{Z}_+$, 使得对任何 $n\geq N$ 都有 $k_n\geq\delta$. 证明:

(1.a) $\forall n\geq N$, 有 $c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1} \geq \delta a_{n+1}$.

(1.b) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n a_n$ 存在.

(1.c) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 如果存在 $N\in\mathbb{Z}_+$, 使得对任何 $n\geq N$ 都有 $k_n\leq 0$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注: 在 Kummer 判别法中取数列 $\{c_n=1\},\{c_n=n\},\{c_n=n\ln n\}$, 所得到的判别法分别被称为 d'Alembert, Raabe, Bertrand 判别法.