

1 初等变换

1. 用初等变换求下列矩阵的 LU 分解:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 19 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 20 & 6 & 31 \\ -2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & 7 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad (1)$$

如果可能的话, 求 LDU' 分解。

2. 用初等变换求下列矩阵的逆:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

2 其他问题

1. 如果一个 $n \times n$ 的矩阵 A 可逆, 那么它的 LU 分解里的 U 矩阵有什么样的性质?
2. 分块矩阵的初等变换。对于一个分块矩阵 $A = (a_{ij})$, 这里 a_{ij} 是一个矩阵。

(a) M 是一个分块矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3)$$

这里 A 是一个 $r_1 \times r_1$ 的矩阵, D 是一个 $r_2 \times r_2$ 的矩阵。请找到一个分块矩阵 E 使得 EM 是一个上三角的分块矩阵。并同时给出: 1) 如果可以这样做的话, M 需要满足什么条件? 2) 写成变换后的上三角矩阵的形式。