高等微积分1 第九次作业

1. pf: 设 $f(x)=x^p$ 则 $f'(x)=px^{p-1}$

$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}$

$\Rightarrow \forall x>0 \quad f''(x)=p(p-1)x^{p-2}\geq 0$

$\Rightarrow f$ 在 $(0,+\infty)$ 是下凸的

由 Jensen 不等式 $\quad \forall x_1,\dots x_n>0$

$$f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)\leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)^p\leq \frac{x_1^p+\dots+x_n^p}{n}.$$

2. (1) $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$f''(x)\geq 0$ 时 $\quad -\sin x\geq 0 \Rightarrow x\in[-\pi+2k\pi,2k\pi]\ (k\in\mathbb{Z})$

$f''(x)\leq 0$ 时 $\quad -\sin x\leq 0 \Rightarrow x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]\ (k\in\mathbb{Z})$

即 $f(x)$ 在 $[-\pi+2k\pi,2k\pi]$ 下凸，在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]\ (k\in\mathbb{Z})$ 上凸

拐点为 $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

(2) $f(x)=\frac{1}{1+e^x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^3}[e^x-1]$

$f''(x)\geq 0$ 时 $\quad \frac{e^x}{(1+e^x)^3}(e^x-1)\geq 0 \Rightarrow x\in[0,+\infty)$

$f''(x)\leq 0$ 时 $\quad \frac{e^x}{(1+e^x)^3}(e^x-1)\leq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,0]$

即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 下凸，在 $(-\infty,0]$ 上凸，拐点为 $x=0$

(3) pf: $a_1,\dots,a_n\geq 1$

$\Rightarrow \ln a_1,\dots \ln a_n\geq 0$，设 $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$

由(2) $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 下凸 $\Rightarrow$ 由 Jensen 不等式 $\quad f\left(\frac{\ln a_1+\dots+\ln a_n}{n}\right)\leq \frac{f(\ln a_1)+\dots+f(\ln a_n)}{n}$

$$\Rightarrow f\left(\tfrac{1}{n}\ln(a_1\cdots a_n)\right)\leq \frac{f(\ln a_1)+\dots+f(\ln a_n)}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e^{\frac{1}{n}\ln(a_1\cdots a_n)}}\leq \frac{\frac{1}{1+a_1}+\dots+\frac{1}{1+a_n}}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a_1}+\dots+\frac{1}{1+a_n}\geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}.$$

3. pf: $\quad f''$ 在 $[a,b]$ 处非负 $\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 下凸

$\Rightarrow f(x)\leq f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad \forall x\in[a,b]$

而 $f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 是一次函数

① $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq 0 \quad f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\leq f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(b)$

$f(x)\leq f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\leq f(b)$

$x=b$ 时可取等，则此时 f 在 $[a,b]$ 上最大值在 b 处取得

② $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq 0 \quad f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\leq f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a)$

$f(x)\leq f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\leq f(a)$

$x=a$ 时可取等，则此时 f 在 $[a,b]$ 上最大值在 a 处取得

综上：f 在 $[a,b]$ 上最大值一定在区间端点 a 或 b 处取得

4. (1) f在区间$[a,b]$上可积，当且仅当f在$[a,b]$上有界且f在$[a,b]$上间断点构成的集合为零测集

(2) Pf: ① f在$[a,b]$上可积 $\Rightarrow \exists M\in\mathbb{R}\ \ \forall x\in[a,b]\ \ |f(x)|\leq M$

$\Rightarrow |f|$在$[a,b]$上有界

考虑到 $g(x)=|x|$在$[a,b]$连续

则$\forall x_0\in[a,b]$ s.t. f在x_0处连续

则 $|f|=g\circ f$在x_0处连续

$\Rightarrow \{f\text{连续点}\}\subseteq\{|f|\text{连续点}\}$

$\Rightarrow Disc(f)\supseteq Disc(|f|)$

$Disc(f)$零测 $\Rightarrow Disc(|f|)$零测

$\Rightarrow |f|$在$[a,b]$上可积.

② f在$[a,b]$上可积 $\Rightarrow \exists M'\in\mathbb{R}\ \ \forall x\in[a,b]\ \ |f(x)|\leq M'$

$\Rightarrow$ 取$M=M'^2\ \ \forall x\in[a,b]\ \ |f^2(x)|\leq M$

$\Rightarrow f^2$在$[a,b]$上有界

考虑到连续性四则运算

$\forall x_0\in[a,b]$ s.t. f在x_0处连续

$\Rightarrow f^2$在x_0处连续

$\Rightarrow \{f\text{连续点}\}\subseteq\{f^2\text{连续点}\}$

$\Rightarrow Disc(f)\supseteq Disc(f^2)$

$Disc(f)$零测 $\Rightarrow Disc(f^2)$零测

$\Rightarrow f^2$在$[a,b]$上可积.

(3) 不一定可积.

举出反例 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ $\quad |f(x)|=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

以$I=[-1,1]$为例进行说明

$|f(x)|$处处连续且有界，则$|f(x)|$在$[-1,1]$上可积.

对于$f(x)$ 将$[-1,1]$进行剖分 $-1=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$

在每个分段中选出 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\quad(1\leq i\leq n)$.

① 将每个分段选作$\xi_i\in\mathbb{Q}$ 则$f(\xi_i)=1$

$$\sum_{\max|\Delta x_i|\to0} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{\max|\Delta x_i|\to0}\Delta x_i=2$$

② 将每个分段选作$\xi_i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 则$f(\xi_i)=-1$

$$\sum_{\max|\Delta x_i|\to0} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{\max|\Delta x_i|\to0}-\Delta x_i=-2$$

则 $\lim\limits_{\max|\Delta x_i|\to0} f(\xi_i)\Delta x_i$不存在. $f(x)$在$[-1,1]$上Riemann不可积.

此为$|f|$在$[a,b]$可积，f在$[a,b]$不可积的一个例子

5. 令 $F(t)=\int_a^t f(t)dt$ 由微积分基本定理：f连续，则F处处可导且$F'=f$.

由Newton-Leibniz公式 $G(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt=F(v(x))-F(u(x))$

F,v,u处处可导 $\Rightarrow G(x)=F\circ v(x)-F\circ u(x)$处处可导.

$G'(x)=F'\circ v(x)\cdot v'(x)-F'\circ u(x)\cdot u'(x)$

$=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x)$.

6.(1) $\int_a^1 \ln x\,dx = \int_a^1 (x)'\ln x\,dx = x\ln x\Big|_a^1 - \int_a^1 dx = -a\ln a - 1 + a$

(2) $\lim\limits_{a\to0^+}\int_a^1 \ln x\,dx = \lim\limits_{a\to0^+}(-a\ln a - 1 + a) = \lim\limits_{a\to0^+}(-\frac{\ln a}{\frac{1}{a}}) - 1 = \lim\limits_{a\to0^+}(-\frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}}) - 1 = \lim\limits_{a\to0^+} a - 1 = -1$

(3)

$$\int_a^b \ln x\,dx = x\ln x\Big|_a^b - \int_a^b dx = b\ln b - a\ln a - b + a$$

$$\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \ln x\,dx = \frac{i+1}{n}\ln\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\ln\frac{i}{n} - \frac{1}{n}$$

① $\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \ln x\,dx = \frac{i+1}{n}\ln\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\ln\frac{i}{n} - \frac{1}{n}$

$= \frac{i}{n}(\ln\frac{i+1}{n} - \ln\frac{i}{n}) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\ln\frac{i+1}{n}$

$= \frac{i}{n}[\ln(\frac{i+1}{i}) - \frac{1}{i}] + \frac{1}{n}\ln\frac{i+1}{n}$

$\le \frac{1}{n}\ln\frac{i+1}{n}$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \ln x\,dx \le \sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\ln\frac{i+1}{n}$

$\Rightarrow \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,dx \le \frac{1}{n}(\ln\frac{2}{n} + \ln\frac{3}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n})$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,dx \le \frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n})$.

② $\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \ln x\,dx = \frac{i+1}{n}\ln\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\ln\frac{i}{n} - \frac{1}{n}$

$= \frac{i+1}{n}(\ln\frac{i+1}{n} - \ln\frac{i}{n}) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\ln\frac{i}{n}$

$= \frac{i+1}{n}(\ln\frac{i+1}{i} - \frac{1}{i+1}) + \frac{1}{n}\ln\frac{i}{n}$

$\ge \frac{1}{n}\ln\frac{i}{n}$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \ln x\,dx \ge \sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\ln\frac{i}{n}$

$\Rightarrow \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,dx \ge \frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \cdots + \ln\frac{n-1}{n}) = \frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n})$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{1}{x}) = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,dx = \lim\limits_{a\to0^+}\int_a^1 \ln x\,dx = -1$

由(3) $\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,dx \le \frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n}) \le \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,dx$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,dx) = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,dx = -1$

由夹逼Thm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln(\frac{n!}{n^n})^{\frac{1}{n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = -1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

7.(1) 先证左边: $f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2 \ge f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$

在[a,b]区间积分 $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b[f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})]\,dx$

$= f(\frac{a+b}{2})(b-a) + f'(\frac{a+b}{2})[(\frac{1}{2}b^2 - \frac{a+b}{2}b) - (\frac{1}{2}a^2 - \frac{a+b}{2}a)]$

$= f(\frac{a+b}{2})(b-a)$

再证右边 f''在[a,b]处处非负 $\Rightarrow f$ 下凸

$\Rightarrow f(x) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad \forall x\in[a,b]$

在[a,b]区间积分 $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]\,dx$

$= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}[(\frac{1}{2}b^2 - ab) - (\frac{1}{2}a^2 - a^2)]$

$= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

综上: $(b-a)f(\frac{a+b}{2}) \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

(2) 先证左边： $f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2>f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$

对$[a,b]$积分 $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})]dx=f(\frac{a+b}{2})(b-a)$

再证右边 $f''>0 \Rightarrow f'$ 在$[a,b]$严格↑

由微分中值Thm $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)$ $\exists\xi\in(a,x)$

$\frac{f(b)-f(x)}{b-x}=f'(\eta)$ $\exists\eta\in(x,b)$

$\xi<\eta \Rightarrow f'(\xi)<f'(\eta) \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$.

$\Rightarrow f(x)<f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ $\forall x\in(a,b)$

对$[a,b]$积分 $\int_a^b f(x)dx<\int_a^b[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ #

补证引理 $\forall x\in(a,b)$ $f(x)<g(x)$ 则 $\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$

取剖分 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 取剖分中的点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

$f(\xi_i)<g(\xi_i)$

$\Rightarrow$ Riemann和 $\sum f(\xi_i)\Delta x_i<\sum g(\xi_i)\Delta x_i$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\sum_{\max|\Delta x_i|\to0}f(\xi_i)\Delta x_i<\sum_{\max|\Delta x_i|\to0}g(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b g(x)dx$.

(3) 先证左边： $f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2>f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{M}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2$

对$[a,b]$积分 $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{M}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2]dx$

$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{M}{24}(b-a)^3$

再证右边： 设 $g(x)=f(x)-\frac{M}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2$

$g'(x)=f'(x)-M(x-\frac{a+b}{2})$

$g''(x)=f''(x)-M>0 \Rightarrow g$ 在$[a,b]$处处有正二阶导

由(2) $\int_a^b g(x)dx<(b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2}$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx-\frac{M}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{M}{2}\cdot2(b-a)(\frac{a-b}{2})^2$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{8}M(b-a)^3+\frac{1}{24}M(b-a)^3$

$=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{M}{12}(b-a)^3$

(4)

$\exists\xi\in[a,b]$ $f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2$

对$[a,b]$积分 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2]dx$

$=\int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx+\int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})dx+\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2dx$

$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$

(5) $f''\in C([a,b])$ 由最值定理 f''在$[a,b]$上有最值 设x_1为f''最大值点、x_2为f''最小值点

由(3) $f''(x)\geq f''(x_2) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx\leq(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f''(x_2)}{12}(b-a)^3$ ①

与(1)相似地 $g''(x)$处处非正 $\Rightarrow g''(x)$上凸 $\Rightarrow (b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2}\leq\int_a^b f(x)dx$

与(3)相似地 设 $g(x)=f(x)-\frac{f''(x_1)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2 \Rightarrow g''(x)=f''(x)-f''(x_1)\leq0$

类似地 $\int_a^b f(x)dx\geq(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f''(x_1)}{12}(b-a)^3$ ②

由① : $f''(x_2)\leq[-\int_a^b f(x)+(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}]\frac{12}{(b-a)^3}$

由② : $f''(x_1)\geq[-\int_a^b f(x)+(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}]\frac{12}{(b-a)^3}$

由Darboux Thm : f'在$[a,b]$可导 $f''(x_2)\leq f''(x_1)$

$\Rightarrow \exists\eta\in[a,b]$ s.t. $f''(\eta)=[-\int_a^b f(x)+(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}]\frac{12}{(b-a)^3}$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{12}(b-a)^3f''(\eta)$