离散数学第十一周作业

1. (1) $A \cap B = \{0, 2\}$

$R = \{<0,0>, <0,2>, <2,0>, <2,2>\}$

(2) $R = \{<1,1>, <4,2>\}$

2. $A \cup B = \{<1,2>, <1,3>, <2,4>, <3,3>, <4,2>\}$

$A \cap B = \{<2,4>\}$

$dom(A) = \{1,2,3\}$

$dom(B) = \{1,2,4\}$

$ran(A) = \{2,3,4\}$

$ran(B) = \{2,3,4\}$

$dom(A \cup B) = \{1,2,3,4\}$

$ran(A \cap B) = \{4\}$

3. (1) 求证 $dom(R \cup S) = dom(R) \cup dom(S)$

$\forall x$ $\quad x \in dom(R \cup S)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(<x,y> \in R \cup S)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(<x,y> \in R \vee <x,y> \in S)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(<x,y> \in R) \vee (\exists y)(<x,y> \in S)$

$\Leftrightarrow x \in dom(R) \vee x \in dom(S)$

$\Leftrightarrow x \in dom(R) \cup dom(S)$ 得证

(2) 求证 $dom(R \cap S) \subseteq dom(R) \cap dom(S)$

$\forall x$ $\quad x \in dom(R \cap S)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(<x,y> \in R \cap S)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(<x,y> \in R \wedge <x,y> \in S)$

$\Rightarrow (\exists y)(<x,y> \in R) \wedge (\exists y)(<x,y> \in S)$

$\Leftrightarrow x \in dom(R) \wedge x \in dom(S)$

$\Leftrightarrow x \in dom(R) \cap dom(S)$

4. $A = \{1,2,3\}$ 则有 $2^{3^2} = 512$ 种不同关系

$|A| = n$ 则 A 上有 2^{n^2} 种不同关系

5. $R_1 = \emptyset$ $R_2 = \{<a,d>\}$ $R_3 = \{<b,d>\}$ $R_4 = \{<c,d>\}$ $R_5 = \{<a,d>, <b,d>\}$ $R_6 = \{<a,d>, <c,d>\}$ $R_7 = \{<b,d>, <c,d>\}$ $R_8 = \{<a,d>, <b,d>, <c,d>\}$

6. 递推定义 定义三元关系: $A_1RA_2RA_3$ 为 $(A_1RA_2)RA_3$

其中 $B = (A_1RA_2)$、 BRA_3 是两个二元关系

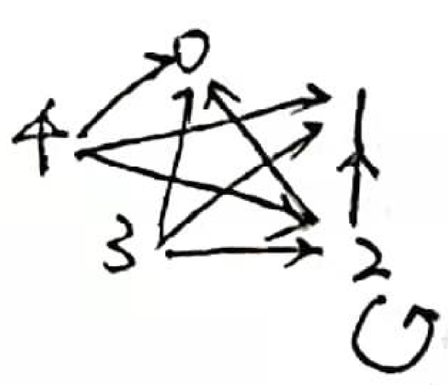
以此类推, 假设定义好 $(n-1)$ 元关系 $A_1RA_2R \cdots RA_{n-1}$

定义 n 元关系 $A_1RA_2R \cdots RA_n$ 为 $(A_1RA_2R \cdots RA_{n-1})RA_n$

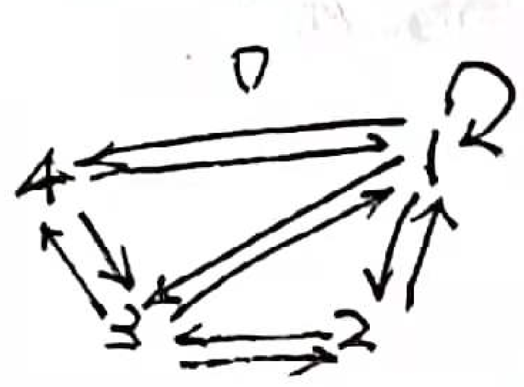
其中 $B = (A_1RA_2R \cdots RA_{n-1})$ 是 $(n-1)$ 元关系

BRA_n 是二元关系

7. (1)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(3)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



10. 证明 $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

$\forall\langle x,y\rangle \quad \langle x,y\rangle\in R\circ(S\cup T)$

$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x,z\rangle\in S\cup T\wedge\langle z,y\rangle\in R)$

$\Leftrightarrow (\exists z)((\langle x,z\rangle\in S\vee\langle x,z\rangle\in T)\wedge\langle z,y\rangle\in R)$

$\Leftrightarrow (\exists z)((\langle x,z\rangle\in S\wedge\langle z,y\rangle\in R)\vee(\langle x,z\rangle\in T\wedge\langle z,y\rangle\in R))$

$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x,z\rangle\in S\wedge\langle z,y\rangle\in R)\vee(\exists z)(\langle x,z\rangle\in T\wedge\langle z,y\rangle\in R)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(R\circ S)\vee\langle x,y\rangle\in(\cancel{S}R\circ T)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$

综上：$R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$