高代选讲 第十二周作业

1. pf: 先证 $\lim_{k\to\infty}\|A_k\|=0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}A_k=0$

$\forall i,j \quad |(a_k)_{ij}| \leq \max_{i,j}|(a_k)_{ij}| = \|A_k\|$ 而 $\lim_{k\to\infty}\|A_k\|=0$

由夹逼定理 $\lim_{k\to\infty}|(a_k)_{ij}|=0$

而 $-|(a_k)_{ij}| \leq (a_k)_{ij} \leq |(a_k)_{ij}|$

由夹逼定理 $\lim_{k\to\infty}(a_k)_{ij}=0 \quad \forall i,j$

因此 $\lim_{k\to\infty}A_k=0$.

再证 $\lim_{k\to\infty}A_k=0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\|A_k\|=0$

$\lim_{k\to\infty}A_k=0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}(a_k)_{ij}=0 \quad \forall i,j$.

绝对值函数连续，因而 $\lim_{k\to\infty}|(a_k)_{ij}|=0 \quad \forall i,j$

考虑到 $0 \leq \|A_k\| = \max_{i,j}|(a_k)_{ij}| \leq \sum_i\sum_j|(a_k)_{ij}|$

而 $\lim_{k\to\infty}\sum_i\sum_j|(a_k)_{ij}| = \sum_i\sum_j\lim_{k\to\infty}|(a_k)_{ij}| = 0$

则由夹逼定理 $\lim_{k\to\infty}\|A_k\|=0$

2. pf: (1) 证 $Af(A)=f(A)A$，设 $F(x)$ 是 $f(A)$ 的定义多项式

先证 $xf(x)$ 与 $xF(x)$ 在 A 的谱上有相同值，设 $m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_s)^{d_s}$

则 $\forall 1\leq i\leq s,\ 0\leq j\leq d_i-1 \quad (xf(x))^{(j)}|_{x=\lambda_i} = (f^{(j-1)}(x)+xf^{(j)}(x))|_{x=\lambda_i}$

$= f(\lambda_i)^{(j-1)}+\lambda_i f^{(j)}(\lambda_i) = F(\lambda_i)^{(j-1)}+\lambda_i F^{(j)}(\lambda_i)$

$= (xF(x))^{(j)}|_{x=\lambda_i}$

则 $xf(x)$ 与 $xF(x)$ 在 A 谱上有相同值， $Af(A)=AF(A)$

同理：$f(A)A=F(A)A$

又因为 $F(x)$ 是多项式 $\quad AF(A)=F(A)A$

因此 $Af(A)=AF(A)=F(A)A=f(A)A$.

(2) 证 $f(A)=g(A)+h(A)$，设 $F、G、H$ 分别为 $f、g+h$ 的定义多项式

设 $m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_s)^{d_s}$

则 $\forall 1\leq i\leq s,\ 0\leq j\leq d_i-1$

$(G(x)+H(x))^{(j)}|_{x=\lambda_i} = G^{(j)}(\lambda_i)+H^{(j)}(\lambda_i) = g^{(j)}(\lambda_i)+h^{(j)}(\lambda_i)$

$= (g(x)+h(x))^{(j)}|_{x=\lambda_i} = f^{(j)}(x)|_{x=\lambda_i} = F(\lambda_i)$

则 $F(x)$ 与 $G(x)+H(x)$ 谱上值相同 $\Rightarrow F(A)=G(A)+H(A)$

而由定义 $f(A)=F(A)$，$g(A)=G(A)$；$h(A)=H(A)$

有 $f(A)=g(A)$

(3) 证 $f(A)=g(A)h(A)$，设 $F、G、H$ 是 $f、g、h$ 的定义多项式

设 $m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_s)^{d_s}$

$\forall\ 1\le i\le s,\ 0\le j\le d_i-1$

$$(G(x)H(x))^{(j)}\big|_{x=\lambda_i}=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}G^{(k)}(\lambda_i)H^{(j-k)}(\lambda_i)=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}g^{(k)}(\lambda_i)h^{(j-k)}(\lambda_i)$$

$$=(g(x)h(x))^{(j)}\big|_{x=\lambda_i}=f^{(j)}(\lambda_i)=F^{(j)}(\lambda_i)$$

即 F 和 GH 在 A 谱上的值相同 $\Rightarrow F(A)=G(A)H(A)$

由定义 $f(A)=F(A)$，$g(A)=G(A)$，$h(A)=g(A)$.

有 $f(A)=g(A)h(A)$

(4) 证 $f(A)=\begin{pmatrix}f(A_1)&&\\&\ddots&\\&&f(A_s)\end{pmatrix}$，设 F 是 f 的定义多项式

设 $m_{A_i}(x)=(x-\lambda_{i1})^{d_{i1}}\cdots(x-\lambda_{it})^{d_{it}}$，并设 $m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_t)^{d_t}$

由 $m_{A_i}(x)\mid m_A(x)$ 知 $\{\lambda_{i1}\ldots\lambda_{it}\}\subseteq\{\lambda_1\ldots\lambda_t\}$ 且对应次数相等或更低

因此 $\forall\ 1\le i\le s,\ 1\le j\le i_t,\ 0\le k\le d_{it}-1$

$$f^{(k)}(\lambda_j)=F^{(k)}(\lambda_j)$$

因此 f 和 F 在 A_i 谱上有相同值，有 $f(A_i)=F(A_i)$

考虑到 $F(A)=\begin{pmatrix}F(A_1)&&0\\&\ddots&\\0&&F(A_s)\end{pmatrix}$ (后附证明)　又有 $f(A)=F(A)$

则 $f(A)=F(A)=\begin{pmatrix}F(A_1)&&\\&\ddots&\\&&F(A_s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(A_1)&&\\&\ddots&\\&&f(A_s)\end{pmatrix}$

附证 $F(A)=\begin{pmatrix}F(A_1)&&0\\&\ddots&\\0&&F(A_s)\end{pmatrix}$，设 $F(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$，

先归纳证 $A^k=\begin{pmatrix}A_1^k&&0\\&\ddots&\\0&&A_s^k\end{pmatrix}$　$k=1$ 时 $A=\begin{pmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_s\end{pmatrix}$ 显然成立.

设 $k=n$ 时 $A^k=A^n=\begin{pmatrix}A_1^n&&\\&\ddots&\\&&A_s^n\end{pmatrix}$

则 $k=n+1$ 时 $A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}A_1^n&&\\&\ddots&\\&&A_s^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1^{n+1}&&\\&\ddots&\\&&A_s^{n+1}\end{pmatrix}$ □

因此 $F(A)=\sum_{i=0}^{m}a_iA^i=\sum_{i=0}^{m}a_i\begin{pmatrix}A_1^i&&\\&\ddots&\\&&A_s^i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum a_iA_1^i&&\\&\ddots&\\&&\sum a_iA_s^i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F(A_1)&&\\&\ddots&\\&&F(A_s)\end{pmatrix}$ □

3、 $\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&1\\1&\lambda-1&1\\-1&0&\lambda\end{pmatrix}$　$\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda+(\lambda-1)=(\lambda-1)^3$

则 $m_A(x)\mid(x-1)^3$　$A-I=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$　$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$　$(A-I)^3=0$，故 $m_A=(x-1)^3$

$e^x=e+\frac{e}{1!}(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+o((x-1)^2)$ 则 e^A 的定义多项式为 $e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2$

$$e^A=eI+e(A-I)+\frac{e}{2}(A-I)^2=e\left(\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=e\begin{pmatrix}2&0&-1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$\sin x=\sin 1+\frac{\cos 1}{1!}(x-1)-\frac{\sin 1}{2!}(x-1)^2+o((x-1)^2)$ 则 $\sin x$ 定义多项式为 $\sin 1+\cos 1(x-1)+\frac{\sin 1}{2}(x-1)^2$

$$\sin A=\sin 1\,I+\cos 1(A-I)+\frac{\sin 1}{2}(A-I)^2=\begin{pmatrix}\sin 1&&\\&\sin 1&\\&&\sin 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos 1&0&-\cos 1\\-\cos 1&0&-\cos 1\\\cos 1&0&-\cos 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\-\sin 1&0&\sin 1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin 1+\cos 1&0&-\cos 1\\-\sin 1-\cos 1&\sin 1&\sin 1-\cos 1\\\cos 1&0&\sin 1-\cos 1\end{pmatrix}$$

$\cos x=\cos x-\frac{\sin 1}{1!}(x-1)-\frac{\cos 1}{2!}(x-1)^2+o((x-1)^2)$ 则 $\cos x$ 定义多项式为 $\cos 1-\sin 1(x-1)-\frac{\cos 1}{2}(x-1)^2$

$$\cos A=\cos 1\,I-\sin 1(A-I)-\frac{\cos 1}{2}(A-I)^2=\begin{pmatrix}\cos 1&&\\&\cos 1&\\&&\cos 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin 1&0&\sin 1\\\sin 1&0&\sin 1\\-\sin 1&0&\sin 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\\cos 1&0&-\cos 1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin 1+\cos 1&0&\sin 1\\\sin 1+\cos 1&\cos 1&\sin 1-\cos 1\\-\sin 1&0&\sin 1+\cos 1\end{pmatrix}$$