2018 年秋季《高等微积分 1》期末考试

2019 年 1 月 12 日 8 : 00-10 : 00

本试卷分两页, 共七道试题, 各题分值如下: 第 1 题 $5+10$; 第 2 题 $5+5$; 第 3, 4 题每小问 5 分; 第 5 题 $5+10$; 第 6 题 15 分; 第 7 题 $5+10$.

1 (1) 给定正数 α, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha}\ln x$.

(2) 求函数 $\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺余项的泰勒公式, 要求余项形如 $o(x^{2n+1})$, 其中 n 是给定的正整数.

2 (1) 给定正实数 a,b, 计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{(ax+b(1-x))^2}dx$.

(2) 给定非负整数 n, 计算不定积分 $\int x^n \ln x dx$.

3 (1) 设 a 是非零实数, 判断级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{n!(2n)!}a^n$ 的收敛发散性.

(2) 设 θ 是给定的实数, 判断级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ 的收敛发散性.

(3) 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都是正数. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(4) 设 λ 是给定的实数, 判断无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4}dx$$

的收敛发散性.

4 设实数 a,b 满足 $|a|<1$, $|ab|<1$. 考虑函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n\cos(b^n x)$.

(1) 求出上述函数级数的收敛域.

(2) 判断上述函数级数的和函数在其收敛域中是否处处可导.

5 (1) 叙述带拉格朗日 (Lagrange) 余项的泰勒公式.

(2) 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上处处有 $(n+1)$ 阶导函数, $a \neq b$ 是给定的实数. 定义函数

$$F(x) = f(x) + \frac{f^{(1)}(x)}{1!}(b-x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(b-x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

证明: 存在 ξ 介于 a, b 之间, 使得

$$F(b) - F(a) = (b-a) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n.$$

6 对每个非负整数 n, 对每个给定的实数 x, 考虑定积分 $\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \cos(xt)dt$, 并把它的值记作 $I_n(x)$, 即有

$$I_n(x) = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \cos(xt)dt, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

证明: 对整数 $n \geq 2$, 有

$$x^2 I_n(x) = 2n(2n-1)I_{n-1}(x) - 4n(n-1)I_{n-2}(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

7 设 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ 是连续函数, 且对任何 $x \in [0,1]$, 有 $f(x) > 0$. 设

$$\int_0^1 f(x)dx = A, \quad \int_0^1 f(x)^2 dx = B.$$

(1) 证明: 对于每个正整数 n, 存在唯一的序列 $0 < x_1 < ... < x_n \leq 1$, 使得

$$\int_0^{x_k} f(t)dt = \frac{kA}{n}, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

(2) 对于每个给定的正整数 n, 设 $0 < x_1 < ... < x_n \leq 1$ 是满足第 (1) 问结论的序列, 定义

$$S(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S(n)$, 要求把结果用 A, B 表示.