《高等微积分 2》第十三周习题课

1 给定三个互不相同的实数 A, B, C. 设函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 有连续的二阶导函数 $f^{(2)}(x)$, 计算二重积分

$$I = \iint_{x+y\leq 1, x,y\geq 0} f^{(2)}(Ax + By + C(1-x-y))dxdy$$

的值, 要求将结果用 $f(A), f(B), f(C)$ 表示.

2 定义 $\mathbf{R}^n$ 上的无穷积分为

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x_1, ..., x_n)dx_1 \cdots dx_n = \lim_{R\to+\infty} \int_{\overline{B}_R} f(x_1, ..., x_n)dx_1 \cdots dx_n,$$

其中 $\overline{B}_R = \{(x_1, ..., x_n) | \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2\}$. 设 $A = (A_{ij})$ 是给定的正定的对称实矩阵, $J_1, ..., J_n$ 是给定的实数. 计算 Gauss 积分

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{n} J_kx_k} dx_1 \cdots dx_n.$$

3 (1) 设曲面 S 有参数化 $\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$, 其中 $(s,t) \in D$. 令

$$M(s,t) = \begin{pmatrix} x_s & y_s & z_s \\ x_t & y_t & z_t \end{pmatrix}.$$

证明:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))\sqrt{\det\left(M(s,t) \cdot M(s,t)^T\right)}dsdt.$$

(2) 给定正交矩阵

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3}.$$

证明: 对连续函数 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, 有

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(x,y,z)dS \\ =&\iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)dS. \end{aligned}$$

(3) 设 S 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. 证明 Poisson 公式

$$\iint_S f(ax + by + cz)dS = 2\pi \int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}t)dt.$$

4 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} f(\frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}})dxdydz = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}t)dt.$$

5 把平面 $x + y + z = t$ 上位于球体 $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ 中的那部分曲面记成 $\Sigma(t)$. 证明: 对于 $|t| \le \sqrt{3}$, 有

$$\iint_{\Sigma(t)} (1 - x^2 - y^2 - z^2)dS = \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2.$$

6 给定正数 $c < \sqrt{2}$. 设曲面 $S = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y \ge c\}$.

(1) 计算第一型曲面积分 $\iint_S xdS$, 其中 dS 表示面积微元.

(2) 计算第一型曲线积分 $\int_{\partial S} xdl$, 其中 ∂S 表示 S 的边界, dl 表示弧长微元.

7 考虑单位开圆盘 $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 < 1\}$, 定义 D 中 C^1 曲线 $p : [0,1] \to D$ 的长度为

$$L(p) = \int_0^1 \frac{2}{1 - (x(t)^2 + y(t)^2)} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt,$$

其中 $p(t) = (x(t), y(t))$. 用这种方式定义了曲线长度后, 人们把 D 称之为 “双曲圆盘”.

假设 $p(0) = (0,0)$, $|p(1)| = r$. 证明: $L(p) \ge \ln \frac{1+r}{1-r}$.

提示: 由 Cauchy-Schwartz 不等式, 有

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \ge x(t)x'(t) + y(t)y'(t),$$

由此可得

$$\begin{aligned} L(p) &= \int_0^1 \frac{2}{1-(x(t)^2+y(t)^2)}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{2}{1-(x(t)^2+y(t)^2)} \cdot \frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}}dt \end{aligned}$$

8 设 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 是连续函数, $\vec{L}$ 是 C^1 光滑的定向曲线. 证明:

$$|\int_{\vec{L}} Pdx+Qdy+Rdz| \leq \int_L \sqrt{P^2+Q^2+R^2}dl.$$

9 设 a 是给定的正数. 证明:

$$\frac{8\pi}{9a^2} \leq \oint_{x^2+y^2=a^2} \frac{-ydx+xdy}{(x^2+xy+y^2)^2} \leq \frac{8\pi}{a^2},$$

其中积分路径取逆时针定向.

10 设 $C=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ 是平面上的单位圆周, 取逆时针定向 (方向).

(1) 计算第二型曲线积分

$$B(u) = \oint_C \frac{-ydx+xdy}{(x^2+y^2+u^2)^{3/2}}.$$

(2) 计算极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} B(u)du.$$

11 [Coarea 公式] `https://en.wikipedia.org/wiki/Coarea_formula`

设 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是光滑函数, 定义

$$V(R)=\{(x,y,z)|f(x,y,z)\leq R\}, \quad S(R)=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=R\}.$$

假设对任何 R, $V(R)$ 都是紧致的, 且 f 的梯度 ∇f 在 $S(R)$ 上处处非零, 则对连续函数 $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 有

$$\iiint_{V(R)} g(x,y,z)dxdydz = \int_{-\infty}^{R} dr \iint_{S(r)} \frac{g(x,y,z)}{|\nabla f|}dS.$$

证明: 取矩体 I 包含 $V(R)$, 将 I 剖分成若干个充分小的矩体之并 $I=\cup_k I_k$, 只需要证明

$$\iiint_{I_k\cap V(R)} g(x,y,z)dxdydz=\int_{-\infty}^{R}dr\iint_{I_k\cap S(r)}\frac{g(x,y,z)}{|\nabla f|}dS.$$

对于满足 $V(R)\cap I_k\neq\emptyset$ 的 I_k, 不妨设其中 f_z 处处非零, 则映射 $F(x,y,z)=(x,y,f(x,y,z))$ 在 I_k 中 Jacobi 矩阵处处可逆, 由反函数定理不妨设 F 在 I_k 上有 C^1 光滑的逆 $\Phi:\Omega\to I_k$. 由 $F\circ\Phi=\mathrm{Id}$ 可知 Φ 形如 $\Phi(u,v,w)=(u,v,z(u,v,w))$, 且 $z(u,v,w)$ 满足 $f(u,v,z(u,v,w))=w$. 考虑此等式对 u,v,w 的偏导, 可得

$$z_u=-\frac{f_x(u,v,z(u,v,w)}{f_z(u,v,z(u,v,w))},\quad z_v=-\frac{f_y(u,v,z(u,v,w)}{f_z(u,v,z(u,v,w))},\quad z_w=\frac{1}{f_z(u,v,z(u,v,w))}. \tag{1}$$

由换元公式与 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned}\iiint_{I_k\cap V(R)} g(x,y,z)dxdydz&=\iiint_{\Omega\cap\{w\leq R\}} g(u,v,z(u,v,w))\cdot|\det J(\Phi)|\cdot dudvdw\\&=\iiint_{\Omega\cap\{w\leq R\}} g(u,v,z(u,v,w))\cdot|z_w|\cdot dudvdw\\&=\int_{-\infty}^{R}dw\iint_{\Omega\cap\{w=r\}} g(u,v,z(u,v,w))\cdot|z_w|dudv\\&=\int_{-\infty}^{R}dw\iint_{\Omega\cap\{w=r\}}\frac{g(u,v,z(u,v,w))}{|f_z(u,v,z(u,v,w))|}dudv.\end{aligned}$$

注意到, Φ 诱导从 $\Omega\cap\{w=r\}$ 到曲面 $I_k\cap S(r)$ 的参数化, 由此可计算第一型曲面积分:

$$\begin{aligned}\iint_{I_k\cap S(r)}\frac{g(x,y,z)}{|\nabla f|}dS&=\iint_{\Omega\cap\{w=r\}}\frac{g\circ\Phi}{|\nabla f\circ\Phi|}\cdot\Big|(1,0,z_u)\times(0,1,z_v)\Big|dudv\\&=\iint_{\Omega\cap\{w=r\}}\frac{g\circ\Phi}{|\nabla f\circ\Phi|}\cdot\sqrt{z_u^2+z_v^2+1}dudv\\&=\iint_{\Omega\cap\{w=r\}}\frac{g(u,v,z(u,v,w))}{|f_z(u,v,z(u,v,w))|}dudv\quad(\text{利用(1)}).\end{aligned}$$

结合这两方面, 就证明了 Coarea 公式. □