《高等微积分 2》第十五周作业

这是课程的最后一次作业, 不再上交批阅, 仍请大家仔细思考.

1 设 α 是给定的实数.

(1) 求出微分方程

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

的所有解.

(2) 求出微分方程

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = e^{\alpha x} \sin x$$

的所有解.

2 设 α, β 是给定的实数, $\beta \neq 0$.

(1) 求出微分方程

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2) y = 0$$

的所有解.

(2) 求出微分方程

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2) y = e^{\alpha x}$$

的一个解 y^*.

(3) 求出微分方程

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2) y = e^{\alpha x}$$

的所有解.

3 (1) 求出微分方程

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

的所有解.

(2) 求出微分方程

$$y'' + 2y' + 2y = \sin x$$

的一个解.

(3) 求出微分方程

$$y'' + 2y' + 2y = \sin x$$

的所有解.

4 设函数 $y : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ 满足微分方程 $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$.

(1) 定义函数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为 $f(t) = y(e^t)$. 请求出 f 满足的二阶常系数线性微分方程.

(2) 求出所有满足题目条件的函数 $y(x)$.

5 (Liouville 定理) 设 $a(t), b(t), c(t), d(t), x_i(t), y_i(t)$ 都是区间 $[a, b]$ 上的 C^1 函数, 满足

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

定义 $(x_1(t), y_1(t)), (x_2(t), y_2(t))$ 的 Wronski 行列式为

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}.$$

证明: $W(t)$ 满足如下微分方程

$$\frac{d}{dt}W(t) = (a(t) + d(t))\, W(t),$$

注意 $a(t) + d(t)$ 为系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

的 trace. 这个结果可以推广至 n 维, 称为 Liouville 定理.