离散数学2第九周作业

3.

Pf：设G边数m_1，$\bar{G}$边数m_2

假设G，$\bar{G}$均为平面图，利用反证法

由G是简单平面图 $m_1 \le 3n-6$ ①

$\bar{G}$ ··· $m_2 \le 3n-6$ ②

①+② 得 $m \le 6n-12$ ③

而 m_1+m_2 是 $G+\bar{G}$ 边数，$G+\bar{G}$ 为完全图，有 $m=\frac{1}{2}n(n-1)$ ④

将④代入③ $\frac{1}{2}n(n-1) \le 6n-12$

$\Rightarrow n^2-13n+24 \le 0$ ，$\forall n>10$

这显然是不可能的，因此假设错误，G，$\bar{G}$必有一个非平面图

7.

Pf：假设图G是平面图，有5个域且任两个域间至少有一边界

我们对G做如下检查：

对于无内部域的连通支，删去各节点和边，则总域数不变，任两域间均有边界

以此得到G'，G'各连通支均有内部域，且G'是G子图，也为平面图

则G'必为连通的

因为若G'不连通，各连通支内部域间显然无法有边界，因此G'连通

对G'进行对偶图的获取，得$(G')^*$

G'有5个域且域两两至少有一边界

$\Rightarrow$ $(G')^*$中有5个节点，且节点间两两必有一边

因此$(G')^*$有K_5的子图，这说明$(G')^*$为非平面图

而另一方面 $((G')^*)^* = G'$，说明了$(G')^*$有对偶图，即$(G')^*$为平面图

产生了矛盾，假设不成立，即满足题设的平面图不存在