高代选讲 第三次作业

练习 8.1.13

证明：$\forall v\in V$，设 $v=v_1+v_2$，其中 $v_1\in W$，$v_2\in W^\perp$

则 $\langle v_1, JJ^*v\rangle = \langle v_1, J(J^*v)\rangle$

$= \langle v_1, J^*v\rangle$ （$J^*v\in W$，故 $J(J^*v)=J^*v$）

$= \langle Jv_1, v\rangle$

$= \langle v_1, v\rangle$ （$v_1\in W$，故 $Jv_1=v_1$）

$= \langle v_1, v_1+v_2\rangle$

$= \langle v_1, v_1\rangle + \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_1\rangle$

$\Rightarrow \langle v_1, JJ^*v - v_1\rangle = 0$

$\Rightarrow JJ^*v - v_1 \in W^\perp$

而 $JJ^*v = J^*v\in W$，$v_1\in W$

显然有 $JJ^*v=v_1$，因此 JJ^* 将任何 $v\in V$ 投影成 W 方向分量

即 JJ^* 是到 W 的正交投影 □.

练习 8.1.15

证明：设 $a=a_1+a_2$，$b=b_1+b_2$，其中 $a_1, b_1\in M$，$a_2, b_2\in M^\perp$.

则有 $\langle P_M(a), b\rangle = \langle a_1, b\rangle = \langle a_1, b_1+b_2\rangle = \langle a_1, b_1\rangle + \langle a_1, b_2\rangle = \langle a_1, b_1\rangle$

$\langle a, P_M(b)\rangle = \langle a, b_1\rangle = \langle a_1+a_2, b_1\rangle = \langle a_1, b_1\rangle + \langle a_2, b_1\rangle = \langle a_1, b_1\rangle$

故 $\langle P_M(a), b\rangle = \langle a, P_M(b)\rangle$ □.

练习 8.2.2 (2)

证明：设 $f: U\to V$，$g: V\to W$，则 $\forall x, y\in V$

$\langle (g\circ f)^*(x), y\rangle_u = \langle y, (g\circ f)^*(x)\rangle_u$

$= \langle g\circ f(y), x\rangle_w$

$= \langle f(y), g^*(x)\rangle_v$

$= \langle y, f^*\circ g^*(x)\rangle_u$

$= \langle f^*\circ g^*(x), y\rangle_u$

$\Rightarrow \langle (g\circ f)^*(x) - f^*\circ g^*(x), y\rangle_u = 0$

取 $y=(g\circ f)^*(x)-f^*\circ g^*(x)$ （由 y 的任意性）

$\Rightarrow (g\circ f)^*(x) = f^*\circ g^*(x) \quad \forall x\in V$

即 $(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$ □

练习 8.2.4

证明: $\forall p, q \in \mathbb{R}[x]$

$$\langle Mp(x), q(x)\rangle = \langle xp(x), q(x)\rangle = \int_0^1 xp(x)q(x)dx$$

$$\langle p(x), Mq(x)\rangle = \langle p(x), xq(x)\rangle = \int_0^1 p(x)xq(x)dx = \int_0^1 xp(x)q(x)dx$$

故 $\langle Mp(x), q(x)\rangle = \langle p(x), Mq(x)\rangle \Rightarrow M$ 是对称变换

假设 M 有特征值和特征向量，则

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t $Mp(x) = \lambda p(x)$

$\Rightarrow xp(x) = \lambda p(x)$

由 x 的任意性知，这样的 λ 不存在，推出矛盾

故 M 没有特征值和特征向量 □.

练习 8.2.6

证明: ① "$1 \Rightarrow 2$" 的证明

f 是正交变换 $\Rightarrow \forall x \in V,\ \langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x\rangle$

$\Rightarrow \forall x \in V,\ \|f(x)\|^2 = \|x\|^2$

考虑到 $\|f(x)\| \geq 0,\ \|x\| \geq 0$

故 $\|f(x)\| = \|x\|,\ \forall x \in V$，$f$ 是保距变换

② "$2 \Rightarrow 3$" 的证明，设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 V 的一组正交归一基，$\dim V = n$

$\forall i \neq j$ 由 f 是保距变换 $\|f(e_i+e_j)\|^2 = \langle f(e_i+e_j), f(e_i+e_j)\rangle$

$$= \langle f(e_i)+f(e_j), f(e_i)+f(e_j)\rangle$$

$$= \langle f(e_i), f(e_i)\rangle + \langle f(e_i), f(e_j)\rangle + \langle f(e_j), f(e_i)\rangle + \langle f(e_j), f(e_j)\rangle$$

$$= \|f(e_i)\|^2 + \|f(e_j)\|^2 + 2\langle f(e_i), f(e_j)\rangle$$

$$= \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 + 2\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = 2 + 2\langle f(e_i), f(e_j)\rangle$$

而 $\|f(e_i+e_j)\|^2 = \|e_i+e_j\|^2 = 2 \quad (i \neq j)$

故 $2 + 2\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = 2 \Rightarrow \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = 0,\ \forall i \neq j$

而 $\|f(e_i)\| = \|e_i\| = 1$ 则 $\{f(e_i)\}_{i=1}^n$ 两两正交且归一

设 $c_1 f(e_1) + \cdots + c_n f(e_n) = 0$

则 $\langle f(e_i), c_1 f(e_1) + \cdots + c_n f(e_n)\rangle = 0$

$\Rightarrow c_i \langle f(e_i), f(e_i)\rangle = c_i = 0,\ \forall i$.

因此 $\dim \operatorname{span}\{f(e_i)\}_{i=1}^n = n = \dim V$

而 $\operatorname{span}\{f(e_i)\}_{i=1}^n \subseteq V$，故 $\operatorname{span}\{f(e_i)\}_{i=1}^n = V$

即 $\{f(e_i)\}_{i=1}^n$ 构成一组正交归一基.

③ "3 ⇒ 1" 的证明：

由已知 $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle, \forall i,j$

$\forall x,y\in V$，设 $x=\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$，$y=\sum_{j=1}^{n} b_j e_j$

则
$$
\begin{aligned}
\langle f(x), f(y)\rangle &= \langle f(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i), f(\sum_{j=1}^{n} b_j e_j)\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} a_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} b_j f(e_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle f(e_i), f(e_j)\rangle \cdot a_i b_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle \cdot a_i b_j \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j\rangle \\
&= \langle x, y\rangle \quad \square
\end{aligned}
$$

练习 8.2.7

1、证明：先证 "⇒"

$\forall x,y\in V \quad \langle f^*f(x), y\rangle = \langle y, f^*f(x)\rangle = \langle f(y), f(x)\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ ①

其中已用练习 8.2.6 结论，由此得到 $\langle f^*f(x)-x, y\rangle = 0$.

令 $y=f^*f(x)-x$，则 $\|f^*f(x)-x\|^2=0 \Rightarrow f^*f(x)=x$，$\forall x\in V$

即 $f^*f = id_V$

$\langle ff^*(f(x)), f(y)\rangle = \langle f^*(f(x)), y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$

其中已用①式结论，由此得到 $\langle ff^*(f(x))-f(x), f(y)\rangle = 0$

而 f 将 V 标准正交基映成标准正交基，即 f 对应矩阵满秩，f 可逆

$\forall v\in V$，取 $x=f^{-1}(v)$，$y=f^{-1}(ff^*(f(x))-f(x))$ (即 $f(y)=ff^*(f(x))-f(x)$)

则有 $\langle ff^*(v), ff^*(v)\rangle = 0$

$\Rightarrow ff^*(v)=0 \quad \forall v\in V$

因此有 $ff^*=id_V$.

再证 "⇐" $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f^*f(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \forall x,y\in V$.

则 f 是正交变换 □

2、证明： 1. 中已证 f 正交变换 $\Leftrightarrow ff^*=f^*f=id_V$

则只需证 $ff^*=f^*f=id_V \Leftrightarrow f$ 对应标准正交基下矩阵是正交矩阵

设 f 对应标准正交基下矩阵为 A，则 f^* 对应 A^T

则 $ff^*=f^*f=id_V \Leftrightarrow AA^T=A^TA=I_n \Leftrightarrow A$ 是正交矩阵 □