CH5 留数.

奇点的分类 $\begin{cases}\text{孤立奇点.}\\ \\ \\ \text{非孤立奇点.}\end{cases}$

定义：若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则 z_0 为 $f(z)$ 一个奇点.

例1：

例2：

可去奇点的判定方法：

极点：

本性奇点：

11.19.

第五章书 3~4 题
第六章书 2~3 题
共6题.

定理1: 解析函数零点孤立性原理.

若 $f(z)$ 在 z_0 解析, $f(z_0)=0$, $f(z)\neq 0$, 则 $\exists \delta>0$, n 是正整数, $\varphi(z)$ 在 z_0 解析, $\varphi(z_0)\neq 0$

使 $f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内成立

证明:

因 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则有 $\delta>0$, 当 $|z-z_0|<\delta$ 时, 有 $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$,

因 $f(z_0)=0$ 且 $f(z_0)\neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists n$ 为正整数使得 $f^{(j)}(z_0)=0$, $j=0,1,\cdots,n-1$, $f^{(n)}(z_0)\neq 0$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{f^{n}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(z_0)(z-z_0)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$$

$$=(z-z_0)^n\underbrace{\left[\frac{f^{n}(z_0)}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(z_0)(z-z_0)}{(n+1)!}+\cdots\right]}_{\varphi(z)}$$

$$=(z-z_0)^n\varphi(z)$$

$\varphi(z_0)=\frac{f^{n}(z_0)}{n!}\neq 0$ $\quad$ $\varphi(z)=\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ $\quad$ $z\neq z_0$ 时

$\varphi'(z)=\frac{(z-z_0)^n f'(z)-f(z)n(z-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^{2n}}$ $\quad$ $z\neq z_0$ 时. $\Rightarrow$ z_0 为 $\varphi(z)$ 的一个孤立奇点.

$\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\varphi(z_0)=\frac{f^{n}(z_0)}{n!}$ 存在且有限 $\Rightarrow$ z_0 是 $\varphi(z)$ 的可去奇点 $\Rightarrow$ $\varphi(z)$ 在 z_0 解析.

由 CH1 EX29: $\varphi(x)$ 在 z_0 的一个 δ 邻域内处处不为 0.

定理2. 解析函数唯一性原理.

若 D 是一区域, $z_0\in D$ $\quad$ $f(z_0)$ $g(z_0)$ 在 D 内处处可导且存在 $\{z_k\}\subset D$, $z_k\to z_0$ 使得 $f(z_k)=g(z_k)$, $k=1,2,\cdots$

则 $f(z)\equiv g(z)$, $\forall z\in D$

证明:

令 $h(z)=f(z)-g(z)$ $\Rightarrow$ $h(z)$ 在 z_0 解析.

$h(z_k)=0$ $\quad k=1,2,\cdots$

$\lim_{k\to+\infty}h(z_k)=h(z_0)=0$. $\Rightarrow$ z_0 为 $h(z)$ 的一个非孤立零点.

由定理1: $h(z)\equiv 0$ $\Rightarrow$ $f(z)\equiv g(z)$ $\quad \forall z\in D$

洛必达法则：$f(x).\ g(x)$ 在 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 内一阶可导且导数连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（有限或无穷），则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

定理：若 $f(z_0)=g(z_0)$ $f(z)\not\equiv 0$ $g(z)\not\equiv 0$，且 $f(z).\ g(z)$ 在 z_0 解析.

则有：$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=\begin{cases}\text{有限复数}\ (\neq 0,\ n=m)\\ 0 \quad n>m\\ \infty \quad n<m\end{cases}$

$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$ $g(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$ $\varphi(z_0)\neq 0$ $\psi(z_0)\neq 0$ $\Rightarrow$ 自己证明.

零因子：$f(x)g(x)=0$ $\Rightarrow$ $f(x)\equiv 0$ 或 $g(x)\equiv 0$ $\Rightarrow$ 它们互为零因子.

不排除考试可能 $\Rightarrow$

命题：解析函数无零因子，即若 $f(z).\ g(z)$ 解析，且 $f(z)g(z)\equiv 0\Rightarrow f(z)\equiv 0$ 或 $g(z)\equiv 0$, $\forall z\in D$.

证明：若 $f(z)\equiv 0$，显然

若 $f(z)\not\equiv 0$, $\Rightarrow\exists z_0\in D$，使 $f(z_0)\neq 0$

CH1 EX.29 $\Rightarrow\exists\delta>0$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，$f(z)\neq 0$

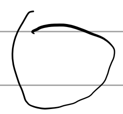
又 $f(z)g(z)\equiv 0\Rightarrow\forall z$, $|z-z_0|<\delta$ 时 $g(z)\equiv 0$, $g(z_0)=0$

$\Rightarrow z_0$ 为 $g(z)$ 的一个非孤立零点，由定理1 $\Rightarrow g(z)\equiv 0$

复合闭路定理：$f(z_0)$ 在 XX 闭曲线 C 上连续，在 C 内只有有限个奇点 $z_1, z_2, \cdots z_n$

$\Rightarrow\oint_C f(z)dz=\sum\limits_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz$ C_k: $z=z_k+\varepsilon e^{i\theta}$ $0\le\theta<2\pi$

$\oint_{C_k}f(z)dz=f(z)=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}C_m(z-z_k)^m$ $0<|z-z_k|<\varepsilon$ 时.



?

例1. $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 其中 $P(z).\ Q(z)$ 在 z_0 解析. $P(z_0)\neq 0$ $Q(z_0)=0$, 但 $Q'(z_0)\neq 0$

则 $C_{-1}=\underbrace{Res}_{\text{留数}}[f,z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

例：求积分 $J_n=\oint_{|z|=r>1}\frac{dz}{1+z^n}$，n是正整数.

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{nz_k^{n-1}}$$

$n=1$ 时 $J_n=\oint_{|z|=r>1}\frac{dz}{1+z}=I_1=2\pi i$ $I_n=\oint\frac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$

$n\geq 2$ 时 $J_n=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{nz_k^{n-1}}=\frac{-2\pi i}{n}\underbrace{(\sum_{k=1}^{n}z_k)}_{=0}=0$

$1+z_k^n=0\Rightarrow z_k^n=-1\Rightarrow\frac{1}{z_k^{n-1}}=-z_k$

$z^n+1=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n-(\sum_{k=1}^{n}z_k)z^{n-1}+\cdots+(-1)^n\prod_{k=1}^{n}z_k$

$$\Rightarrow J_n=\begin{cases}2\pi i & n=1\\ 0 & n\geq 2.\end{cases}$$

$f(z)=\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{C_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\cdots$ $C_{-n}\neq 0$ $n\geq 2$.

$\Rightarrow (z-z_0)^n f(z)=C_{-n}+C_{-(n-1)}(z-z_0)+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{n-1}+\cdots$

$n!\,C_{-1}=[(z-z_0)^n f(z)]^{(n)}\big|_{z=z_0}\Leftrightarrow C_{-1}=\frac{[(z-z_0)^n f(z)]^{(n)}}{n!}\Big|_{z=z_0}.$

跟考题有关 ⇒

例：$J_n=\oint_{|z|=r>0}\frac{1-\cos 4z^5}{z^n}dz$ n是正整数.

$\Rightarrow\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}2\pi i$

3 求积分$\oint_{|z|=r>0}\frac{1-cos2z^6}{z^n}dz, n\in\mathbb{N}$
解：参照第三章例1

可能考. ⇒

例：

1 求积分$\oint_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz$
解：方法一：被积函数有在积分区域内有2个奇点$0,-1$，因此

$$\oint_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz=2\pi i(Res[\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z},0]+Res[\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z},-1])$$

其中在$z_0=0$处将被积函数展开为洛朗级数

$$\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}=z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n}\times\sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{3+n-m}}{m!}$$

其洛朗级数中z^{-1}系数，满足$3+n-m=-1$即$m=4+n$

$$Res[\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z},0]=c_{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4)!}=e^{-1}-(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6})=e^{-1}-\frac{1}{3}$$

由一阶奇点求留数的方法可知$Res[\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z},-1]=\frac{(-1)^3e^{-1}}{1}=-e^{-1}$ 因此积分结果为$2\pi i(e^{-1}-\frac{1}{3}-e^{-1})=-\frac{2\pi i}{3}$
方法二：作变量替换$\frac{1}{z}$，注意到积分方向由逆时针改变为顺时针，因此变量替换后要加上负号

$$\oint_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz=-\oint_{|z|=\frac{1}{r}<1}\frac{e^z}{z^2(1+z)}d\frac{1}{z}=\oint_{|z|=\frac{1}{r}<1}\frac{e^z}{z^4(1+z)}dz$$

在积分区域内，只有0是被积函数的奇点，原式$=2\pi iRes[\frac{e^z}{z^4(1+z)},0]$

$$\frac{e^z}{z^4(1+z)}=\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\times\sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{n!}z^{n+m-4}$$

其洛朗级数中z^{-1}系数，满足$n+m-4=-1$即$m=3-n\geqslant 0$，所以$n\leqslant 3$
$Res[\frac{e^z}{z^4(1+z)},0]=c_{-1}=\frac{(-1)^3}{0!}+\frac{(-1)^2}{1!}+\frac{(-1)^1}{2!}+\frac{(-1)^0}{3!}=\frac{-1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{-1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$
因此积分结果为$2\pi ic_{-1}=-\frac{2\pi i}{3}$