清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　概率论与数理统计　(A 卷)　2022 年 6 月 13 日

1. （10分）设随机事件A和B满足$P(A|B) = P(A|\bar{B})$且$0 < P(B) < 1$，判断A和B是否相互独立并说明理由。

2. （10分）盒中有九个乒乓球，其中只有五个是新的，第一次比赛时从盒中任取两个, 用后仍放回盒中，第二次比赛时再从盒中任取两个。

   (a) 求第二次取出的都是新球的概率；

   (b) 若已知第二次取出的都是新球，求第一次取到的都是新球的概率。

3. （20分）已知随机向量(X, Y)在三角形区域$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0, x + y < 1\}$内服从均匀分布。

   (a) 求X和Y的联合密度函数，并判断X和Y是否相互独立；

   (b) 求$Z = X + Y$的分布函数；

   (c) 求$E(Y \mid X)$；

   (d) 求$E(X \mid X < Y)$。

4. （10分）设$n \in \mathbb{N}$且随机变量X的概率密度为$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{n!e^x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

   求证：$P[X > 2(n+1)] \le \dfrac{1}{n+1}$。

5. （20分）设随机变量X服从参数为$\lambda > 0$（待定）的指数分布，$F(x)$为其分布函数，且已知$F(1/2) = 1/2$。

   (a) 求参数λ的值；

   (b) 求$\min\limits_{c \in \mathbb{R}} E(X - c)^2$；

   (c) 求$P\left[X > \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right]$；

   (d) 若随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，且均与X同分布，求$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2/n$依概率收敛的极限。

6. （10分）已知(X, Y)服从二元正态分布且$X \sim N(1, 3^2), Y \sim N(0, 4^2)$，$X$与$Y$的相关系数$\mathrm{Corr}(X, Y) = -1/2$。设$Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$，判断$X$与$Z$是否相互独立并给理由。

7. （20分）设总体X的概率密度为$p(x) = \begin{cases} e^{\theta - x}, & x > \theta, \\ 0, & x \le \theta, \end{cases}$ 其中$\theta > 0$为未知参数。从总体中抽取简单随机样本$x_1, x_2, \ldots, x_n$。

   (a) 求总体X的分布函数$F(x)$；

   (b) 求参数θ的矩估计和似然估计；

   (c) 讨论参数θ的矩估计和似然估计是否满足相合性和无偏性。