《高等微积分 2》第十二周作业

1 (1) 设 S 是椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

请用二重积分表示 S 的面积 (不必计算该积分).

(2) 计算球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的面积.

2 设 Σ 为质量均匀的上半球面

$$\Sigma=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1,z\geq 0\}.$$

求出 Σ 的质心位置, 即计算

$$(\frac{\iint_\Sigma xdS}{\iint_\Sigma dS},\frac{\iint_\Sigma ydS}{\iint_\Sigma dS},\frac{\iint_\Sigma zdS}{\iint_\Sigma dS}).$$

3 给定 $a>b>0$, 定义曲面 T 为

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=b^2\}.$$

求 T 的面积.

4 令 S 为单位球面

$$S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}.$$

设 $p:[0,1]\to S$ 是 C^1 光滑映射

$$p(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad\forall t\in[0,1].$$

假设 $p(0)=(0,0,-1)$, $p(1)=(0,0,1)$, 且对任何 $0<t<1$ 有 $-1<z(t)<1$.

(1) 证明: 对任何 $t\in[0,1]$, 有 $x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+z(t)z'(t)=0$.

(2) 证明: 对任何 $0 < t < 1$, 有

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 \geq \frac{z(t)^2}{x(t)^2 + y(t)^2} z'(t)^2.$$

(3) 定义 p 的弧长为

$$L = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

证明: $L \geq \pi$.

(即使不能证明, 也可以直接使用前面小问的结论)

5 给定正数 $c < \sqrt{2}$. 设曲面 $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y \geq c\}$.

(1) 计算第一型曲面积分 $\iint_S x dS$, 其中 dS 表示面积微元.

(2) 计算第一型曲线积分 $\int_{\partial S} x dl$, 其中 ∂S 表示 S 的边界, dl 表示弧长微元.

6 设 $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ 是平面上的单位圆周, 取逆时针定向 (方向).

(1) 计算第二型曲线积分

$$B(u) = \oint_C \frac{-y dx + x dy}{(x^2 + y^2 + u^2)^{3/2}}.$$

(2) 计算极限

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} B(u) du.$$

7 计算

$$\oint_L xy dx + yz dy + zx dz,$$

其中 L 为曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

积分方向从 $(1, 0, 0)$ 沿着劣弧指向 $(0, 1, 0)$.

8 设 a, b, c 为给定的正数, S 为椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

取指向外面的定向. 对于正整数 n, 计算第二型曲面积分

$$I_n = \iint_S (x^n dy dz + y^n dz dx + z^n dx dy).$$