《高等微积分 1》第二次习题课材料

1 给定实数 a. 定义数列

$$a_0 = a, \quad a_n = \sin a_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2 设映射 $f : [0,1] \to [0,1]$ 满足: 存在实数 $0 < c < 1$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|, \quad \forall x, y \in [0,1].$$

(1) 证明: f 是连续映射.

(2) 任意给定 $a \in [0,1]$, 定义序列 $\{a_n\}_{n\ge 0}$ 为:

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = f(a_n), \quad \forall n \ge 0.$$

证明: 序列 $\{a_n\}_{n\ge 0}$ 收敛.

(3) 证明: 上述极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 是 f 的不动点 (称 b 为 f 的不动点, 如果 $f(b) = b$).

3 (讲评作业题) 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

(1) 证明: 对于正奇数 k, 有 $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$.

(2) 证明: 对于正偶数 k, 如果 $A > 0$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$.

4 函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x^2+2} - \sin\sqrt{x^2+1})$.

(2) 给定 $a > 1, k > 0$. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^k}{a^x}$.

(3) 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$. 求 a,b 的值.

(4) 极限 $\lim\limits_{x\to1}[\dfrac{1}{x}]$ 是否存在? 其中 $[\frac{1}{x}]$ 表示 $\frac{1}{x}$ 的整数部分.

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

(6) 求极限 $\lim\limits_{x\to0+}x^x$.

(7) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$.

(8) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

(9) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

5 (讲评作业题) (1) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的数列, 且极限为 A. 证明: 对任何正整数 n, 有 $a_n\le A$.

(2) 令 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$. 证明: 对正整数 n, 有

$$(1+\frac{1}{n})^n\le e\le(1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

(3) 利用 (2) 的结论, 证明: 对正整数 n, 有

$$\frac{(n+1)^n}{e^n}\le n!\le\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}.$$

(4) 利用 (3) 的结论, 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

6 (讲评作业题) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=K$.

(1) 定义函数 $h:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$ 为

$$h(y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+y)}{y}, & \text{如果}y\ne0\\ 1, & \text{如果}y=0.\end{cases}$$

证明: $\lim\limits_{x\to x_0}(h\circ f)(x)=1$.

(2) 利用 (1) 的结论, 证明:

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(1+f(x)) = K.$$

注意: 这个结论不是显然的. 因为, 不一定能找到 x_0 的去心邻域 $N^*(x_0,r)=B_r(x_0)\backslash\{x_0\}$, 使得在其中 $f(x)$ 处处非零, 这样, 利用简单的换元法计算上述极限是不严谨的.

7 给定 n 个正实数 $a_1,...,a_n$. 求极限 $\lim_{x\to 0}(\dfrac{a_1^x+...+a_n^x}{n})^{1/x}$. (提示: 利用第 6 题的结论)