《高等微积分 1》第五次作业

1 给定多项式 $f(x)=x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+...+a_1x+a_0$. 证明: 如果 $a_0<0$, 则 $f(x)=0$ 至少有两个实数根.

2 设 $f\in C(\mathbf{R})$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 证明: f 在 $\mathbf{R}$ 上有最小值, 即存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得对任何 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x_0)\leq f(x)$.

3 设 $P(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 是实数系数的多项式. 证明: $P(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有最小值, 即存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得对任何 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $P(x)\geq P(x_0)$.

4 给定实数 α, 设 $f(x)=x^\alpha$. 试确定 f 在区间 $[1,+\infty)$ 上是否一致连续.

5 当 $x\to+\infty$ 时, 如下五个函数都是无穷大. 请将它们按照阶的高低排序, 并说明理由.

$$x^\alpha(\alpha>0),\quad a^x(a>1),\quad \ln x,\quad [x]!,\quad x^x,$$

其中 $[x]!$ 表示 x 的整数部分的阶乘.

6 设函数 $f:[0,1]\Rightarrow[0,1]$ 严格单调递增, 且满足:

(1) 对任何实数 $b\geq1$, 有 $f(\frac{1}{b})<\frac{1}{b+1}$;

(2) 对任何 $t>1$, 存在 $M\geq1$, 使得当 $b\geq M$ 时, 总有 $f(\frac{1}{b})>\frac{1}{b+t}$.

定义数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 为

$$0<a_1<1,\quad a_{n+1}=f(a_n),\quad \forall n\geq1.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$.