线性代数第四次作业

一、矩阵性质练习

1、证明：先证充分性，设 $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ $C=[c_1\, c_2 \cdots c_n]$

则 $A=BC=\begin{bmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & \cdots & b_1c_n \\ b_2c_1 & b_2c_2 & \cdots & b_2c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_mc_1 & b_mc_2 & \cdots & b_mc_n \end{bmatrix}$ ∵由题意，$b_1 \dots b_m$ 必不全为0

设 $b_k \neq 0$

则经过行变换 $E_{ki}(-\frac{b_i}{b_k})$ $(i\neq k)$，即将第k行的 $-\frac{b_i}{b_k}$ 倍加在第i行上，

此时第i行会全变为0，因此除第k行外各行均为0

A 行化简为 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_kc_1 & b_kc_2 & \cdots & b_kc_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 则A主元列为1，$rank A=1$

再证必要性，$rank A = dim Col A = 1$，设 $A=[w_1 \dots w_k]$

设不为0向量的一个列向量为 $\vec{w_k}$，$dim Col A=1$ 则其它列向量均与 w_k 线性相关，设 $i\neq k$ 时有 $w_i=c_iw_k$，$i=k$ 时 $w_k=w_k$ 则 $b_k=1$

可以构造两个矩阵

$B=[\vec{w_k}]$ $C=[c_1\; c_2 \cdots c_n]$ 则 $A=BC=[c_1w_k\; c_2w_k \cdots c_nw_k]=[w_1\; w_2 \dots w_k]$

且B、C不全为0，因此B、C即为所求，必要性得证

2、证明：对于C：$(C)_{ij}=(C^T)_{ji}=-(C^T)_{ij}$ $i=j$ 时 $(C^T)_{ij}=-(C^T)_{ij}$

必有 $(C)_{ii}=(C^T)_{ii}=0$ 即对角线为0。

设 $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} 0 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ -c_{12} & 0 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{1n} & -c_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

对于对角线上元素 $b_{ii}+0=a_{ii}$ $\Rightarrow b_{ii}=a_{ii}$，$c_{ii}=0$

$i\neq j$ 时 $\begin{cases} b_{ij}+c_{ij}=a_{ij} \\ b_{ij}-c_{ij}=a_{ji} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{ij}=\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} \\ c_{ij}=\frac{a_{ij}-a_{ji}}{2} \end{cases}$

因此B、C所有元素被唯一确定，任意一个方阵可以且仅可以被表示为一种 $A=B+C$ 形式

3、解：(a) 先证引理 $\forall n\geq 2$ $n\in \mathbb{Z}_+$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n=0$

$n=2$ 时 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 假设 $n=k$ 时 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

则 $n=k+1$ 时 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

由数学归纳法 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\forall n\geq 2$ 均成立。

则 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n=(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})^n=(aI+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^n I^i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{n-i}$

$=C_n^n a^n I + C_n^{n-1} a^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=a^nI+na^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & na^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$

$$A^2 + a_1 A + a_2 I = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 a & a_1 b \\ a_1 c & a_1 d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = 0 .$$

$$\begin{cases} a^2+bc+a_1 a + a_2 = 0 \\ ab+bd+a_1 b = 0 \\ ac+cd+a_1 c = 0 \\ bc+d^2+a_1 d + a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1 = -a-d} \\ \underline{a_2 = ad-bc} \end{cases} .\#$$

而 $Tr(A) = ad - bc$ $Tr(A^2) = a^2+2bc+d^2$

$\therefore a_1 = -Tr(A)$, $a_2 = \frac{1}{2}Tr^2(A) - \frac{1}{2}Tr(A^2)$ #

(c) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bd+cg & ab+be+ch & ac+bf+cl \\ ad+de+fg & bd+e^2+fh & cd+ef+fl \\ ag+dh+gl & bg+eh+hl & cg+fh+l^2 \end{bmatrix}$

$$Tr(A^3 + a_1 A^2 + a_2 A + a_3) = Tr(A^3) + a_1 Tr(A^2) + a_2 Tr(A) + a_3 Tr(I) .$$
$$= Tr(A^3) + a_1 Tr(A^2) + a_2 Tr(A) + 3a_3 = 0 \quad (*)$$

$Tr(A) = a+e+l$ $Tr(A^2) = a^2+e^2+l^2+2bd+2eg+2fh$

$$\begin{cases} (a^2+bd+cg)a + (ab+be+ch)d + (ac+bf+cl)g + a_1(a^2+bd+cg) + a_2 a + a_3 = 0 \quad ① \\ (a^2+bd+cg)d + (ad+de+fg)e + (ag+dh+gl)f + a_1(ad+de+fg) + a_2 d = 0 \quad ② \\ (ab+be+ch)a + (bd+e^2+fh)b + (bg+eh+hl)c + a_1(ab+be+ch) + a_2 b = 0 \quad ③ \end{cases}$$

②×b − ③×d 得

$$(a^2+bd+cg)bd + (ad+de+fg)be + (ag+dh+gl)bf - (ab+be+ch)ad - (bd+e^2+fh)bd$$
$$- (bg+eh+hl)cd + (bfg-cdh)a_1 = 0$$

$$bfg(e+a+l) - cdh(a+e+l) = -(bfg-cdh)a_1$$

$\Rightarrow a_1 = -a-e-l$

$\Rightarrow a_2 = ae+al+el-bd-fh-gc$

$\Rightarrow a_3 = ael+bfg+cdh-afh-bdl-ceg$ #

$a_1 = -Tr(A)$ $a_2 = \frac{1}{2}Tr^2(A) - \frac{1}{2}Tr(A^2)$

由(*)式: $a_3 = -\frac{1}{3}(Tr(A^3) + a_1 Tr(A^2) + a_2 Tr(A))$

$= -\frac{1}{3}(Tr(A^3) - Tr(A)Tr(A^2) + \frac{1}{2}Tr^3(A) - \frac{1}{2}Tr(A^2)Tr(A))$

$= -\frac{1}{3}Tr(A^3) + \frac{1}{2}Tr(A^2)Tr(A) - \frac{1}{6}Tr^3(A).$ #

证明:

4. 设该子空间为 V. $\dim V = d$, d 个线性无关的基向量分别为 $\vec{e_1}=\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{12}\\\vdots\\c_{1n}\end{bmatrix}$ … $\vec{e_d}=\begin{bmatrix}c_{d1}\\c_{d2}\\\vdots\\c_{dn}\end{bmatrix}$

将 $\{\vec{e_1}\dots\vec{e_d}\}$ 构成矩阵 $C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ c_{d1} & c_{d2} & \cdots & c_{dn}\end{bmatrix}$ $\quad \operatorname{rank} C = \dim \operatorname{Row} C = \dim\langle\vec{e_1},\dots\vec{e_d}\rangle = d$.

而 $\operatorname{rank} C + \dim \operatorname{Nul}(C) = n \Rightarrow \dim\operatorname{Nul}(C) = n - \operatorname{rank} C = n-d$,

即 $Cx=0$ 至少有 $\dim\operatorname{Nul}(C)=n-d$ 个线性无关的非零解

设这 $n-d$ 组非零解分别为 $x_1, x_2, \dots x_{n-d}$, 将之视为行向量构成矩阵 $A=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-d}\end{bmatrix}$

$$Cx_i = \begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_d\end{bmatrix}x = \begin{bmatrix}e_1x\\e_2x\\\vdots\\e_dx\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \forall 1\le i\le n-d,\ 1\le j\le d \quad e_jx_i = 0.$$

下证 $A=[x_1\ x_2\ \dots\ x_{n-d}]$ 即为所求

$$Ay = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-d}\end{bmatrix}y = \begin{bmatrix}x_1y\\x_2y\\\vdots\\x_{n-d}y\end{bmatrix} = 0$$

因 A 为 $(n-d)\times n$ 矩阵, 各行线性无关

则 $\operatorname{rank} A = \dim\operatorname{Row} A = n-d$

而 $\dim\operatorname{Nul} A + \operatorname{rank} A = n$

则 $\dim\operatorname{Nul} A = d$.

又因为线性无关的一组向量 $\{\vec{e_1},\dots\vec{e_d}\}$ 恰为 $Ay=0$ 的 d 个解

则 $\vec{e_1},\vec{e_2}\dots\vec{e_d} \subset \operatorname{Nul} A$, 又 $\vec{e_1}\dots\vec{e_d}$ 线性无关, 则 $\{\vec{e_1},\dots\vec{e_d}\}$ 是 $\operatorname{Nul} A$ 一组基

则 $\operatorname{span}\langle\vec{e_1},\dots\vec{e_d}\rangle = \operatorname{Nul} A = V$

即 $\mathbb{R}^n$ 的任意一子空间 V 一定是矩阵 A 的零空间

5. 证明: ① 证充分性, 即证存在可逆矩阵 T 使 $B=TA$, 则 $N(A)=N(B)$

$Bx=0$ 的解空间 等价于 $TAx=0$ 的解空间

则 $Ax=0 \Rightarrow TAx=0 \Rightarrow Bx=0$ 可得知 $N(A)\subset N(B)$

而 $Bx=0 \Rightarrow TAx=0 \Rightarrow T^{-1}TAx=T^{-1}\cdot 0 \Rightarrow Ax=0$ 可得知 $N(B)\subset N(A)$

综上: $N(A)=N(B)$

② 证必要性, 即证 $N(A)=N(B)$, 则存在可逆矩阵 T 使 $B=TA$

设 A 经行约化得到行约化阶梯形式矩阵 A', 且有 $T_1A=A'$

B 经行约化得到行约化阶梯形式矩阵 B', 且有 $T_2B=B'$.

因 T_1、T_2 是初等矩阵 故可逆

与①类似地可得: $N(A)=N(A')$, $N(B)=N(B')$

则 $N(A')=N(B')$

即 $A'x=0 \Leftrightarrow B'x=0$

反证法证明 $A'=B'$, 假设 $A'\neq B'$

考虑到 A', B' 主元列均只有 $n-\dim N(A)$ 个, 则主元列必不相同 ?

再讨论

可相同

$A'=[w_1\ \dots\ w_n]$ $\quad B'=[v_1\ \dots\ v_n]$ 设 w_k 为主元列而 v_k 为非主元列

则 $A'x=0$ 的一个解可以是 $x=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\beta\\\vdots\\0\end{bmatrix}\leftarrow k$ 显然不是 $B'x=0$ 的解. 则 $N(A')\neq N(B')$

矛盾. 假设不成立

故 $A'=B' \Rightarrow T_1A=T_2B \Rightarrow B=T_2^{-1}T_1A$.

$\therefore$ 存在可逆矩阵 $T=T_2^{-1}T_1$ 使 $B=TA$

6、(1) 必要性：由 Sylvester 不等式 $n=\mathrm{rank}(I)\le \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(I-A)$ ①

而 $A^2=A$，$\Rightarrow A(I-A)=0$ 则 $\mathrm{Col}(I-A)\subset \mathrm{Nul}A$

因此 $\mathrm{rank}(I-A)\le \dim \mathrm{Nul}A = n-\mathrm{rank}A$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(I-A)+\mathrm{rank}\le n$ ②

由①② $\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}(I-A)=n$ 得证.

充分性 $n=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(I-A)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & I-A\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A-I\end{bmatrix}$

$=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}A & 0\\ A-I & A-I\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}I & I-A\\ A-I & A-I\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}I & -A\\ A-I & 0\end{bmatrix}$

① $A-I=0$ 则 显然 $A(A-I)=0 \Rightarrow A^2=A$

② $A-I\ne 0$ 则

$n=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}I & -A\\ A-I & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & -A\\ 0 & A(A-I)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & A(A-I)\end{bmatrix}=\mathrm{rank}(I)+\mathrm{rank}(A(A-I))$

$=n+\mathrm{rank}(A(A-I))$

则 $\mathrm{rank}(A(A-I))=0 \Rightarrow A(A-I)=0 \Rightarrow A^2=A$

(2) 必要性：由 sylvester 不等式 $n\le \mathrm{rank}(2I)\le \mathrm{rank}(I+A)+\mathrm{rank}(I-A)$ ①.

而 $(A+I)(I-A)=0 \Rightarrow \mathrm{Col}(A+I)\subset \mathrm{Nul}(I-A)$

因此 $\mathrm{rank}(A+I)\le \dim N(I-A)=n-\mathrm{rank}(I-A)$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(I-A)\le n$ ②

由①② $\mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(I-A)=n$ 得证

充分性 $n=\mathrm{rank}(I+A)+\mathrm{rank}(I-A)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}I+A & 0\\ 0 & I-A\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}I+A & 0\\ I-A & I-A\end{bmatrix}$

$=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}2I & I-A\\ I-A & I-A\end{bmatrix}$

①若 $I+A=0$ 则 显然 $(I+A)(I-A)=0 \Rightarrow A^2=I$

② 若 $I+A\ne 0$ 则

$n=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}2I & I-A\\ I-A & I-A\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}2I & I-A\\ 0 & \frac{1}{2}(I-A)^2+I-A\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}2I & I-A\\ 0 & \frac{1}{2}(I-A)(I+A)\end{bmatrix}$

$=\mathrm{rank}(2I)+\mathrm{rank}(\frac{1}{2}(I+A)(I-A))=n+\mathrm{rank}(\frac{1}{2}(I+A)(I-A))$

则 $\mathrm{rank}(\frac{1}{2}(I+A)(I-A))=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(I+A)(I-A)=0$

$\Rightarrow A^2=I$.

2. 投影矩阵

7. 证明：先证必要性 即 A^TA 可逆 $\Rightarrow m\geq n$ 且 $\operatorname{rank}A=n$.

反证法假设 $m<n$ 或 $\operatorname{rank}A<n$ 若 $m<n$ 则 $\operatorname{rank}A\leq m<n$ 即恒有 $\operatorname{rank}<n$.

由 $\operatorname{rank}A+\dim N(A)$ 知 $\dim N(A)=n-\operatorname{rank}A>0$.

则 $\exists\ x\in\mathbb{R}^n$ 且 $x\neq 0$ s.t. $Ax=0$

$\Rightarrow A^TAx=0$ 即 $A^TAx=0$ 有在非零解

$\Rightarrow A^TA$ 不可逆（矛盾，假设不成立） 因此 $m\geq n$ 且 $\operatorname{rank}A\geq n$.

而 $\operatorname{rank}A\leq\min\{m,n\}=n$

则 $\operatorname{rank}A=n$.

综上：$\operatorname{rank}A=n$ 且 $m\geq n$.

再证充分性 即 $m\geq n$ 且 $\operatorname{rank}A=n\Rightarrow A^TA$ 可逆

反证法假设 A^TA 不可逆.

则 $A^TAx=0$ 有非零解 $\Rightarrow x^TA^TAx=0$ 有非零解

$(Ax)^TAx=0$ 有非零解

而 $Ax\in\mathbb{R}^n$ 则 $|Ax|^2=(Ax)^TAx=0$ 有非零解

则 $Ax=0$ 有非零解 $\Rightarrow\dim\mathrm{Nul}A>0$

而 $\dim\mathrm{Nul}A+\operatorname{rank}A=n\Rightarrow\dim\mathrm{Nul}A=0$（矛盾，假设不成立）

综上：A^TA 可逆

8. 证明：a) $P^2=(A(A^TA)^{-1}A^T)(A(A^TA)^{-1}A^T)=A[(A^TA)^{-1}(A^TA)](A^TA)^{-1}A^T=A(A^TA)^{-1}A^T=P$

而 $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$

则 $I=[(A^TA)(A^TA)^{-1}]^T=[(A^TA)^{-1}]^T(A^TA)^T=[(A^TA)^{-1}]^TA^TA$

则 $[(A^TA)^{-1}]^T=(A^TA)^{-1}$

$P^T=(A(A^TA)^{-1}A^T)^T=(A^T)^T[(A^TA)^{-1}]^TA^T=A(A^TA)^{-1}A^T=P$

即 $P^2=P^T=P$ 得证

b) 设 $\{v_1',\dots v_n'\}$ 构成 A'，对应投影矩阵为 P'

对于任意一个 $\vec{b}$ $\vec{p}=Ax=P\vec{b}$，$\vec{p}'=A'x'=P'\vec{b}$

而 $\operatorname{span}\langle v_1',\dots v_n'\rangle=\operatorname{span}\langle v_1\dots v_n\rangle$

则任意 $\vec{b}$ 在同一线性子空间上有唯一投影 $\vec{p}$，也只有唯一的 $\vec{e}=\vec{b}-\vec{p}$

于是 $\vec{p}=\vec{p}'\Rightarrow P\vec{b}=P'\vec{b}$

若 $P\vec{b}=0$ 则 $P'\vec{b}=0$ $\mathrm{Nul}P\subset\mathrm{Nul}P'$

若 $P'\vec{b}=0$ 则 $P\vec{b}=0$ $\mathrm{Nul}P'\subset\mathrm{Nul}P$ $\Rightarrow\mathrm{Nul}P=\mathrm{Nul}P'\Rightarrow\dim\mathrm{Nul}P=\dim\mathrm{Nul}P'$

$\Rightarrow n-\operatorname{rank}P=n-\operatorname{rank}P'$ 由第6题 $(P^2=P,P'^2=P)$ 则 $\operatorname{rank}(I-P)=\operatorname{rank}(I-P')$

而 $\vec{e}=\vec{b}-\vec{p}=\vec{b}-P\vec{b}=(I-P)\vec{b}=(I-P')\vec{b}$ ①

设 B、B' 分别是 $I-P$, $I-P'$ 的行约化所得的矩阵，且 $EB=I-P$，$E'B'=I-P'$ ②

又 $\operatorname{rank}(I-P)=\operatorname{rank}(I-P')\Rightarrow B=B'$ ③

由①②③ $EB\vec{b}=E'B\vec{b}$ 考虑到 E、E' 均为初等矩阵

$B\vec{b}=E^{-1}E'B\vec{b}$ 则 $E^{-1}E'$ 也为初等变换 于是 $E^{-1}E'=I$ 则 $I-P=I-P'\Rightarrow P=P'$

9. a) $A^TA=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&32\\32&77\end{bmatrix}$ $(A^TA)^{-1}=\frac{1}{54}\begin{bmatrix}77&-32\\-32&14\end{bmatrix}$

$P=A(A^TA)^{-1}A^T=\frac{1}{54}\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}77&-32\\-32&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\frac{1}{54}\begin{bmatrix}-51&24\\-6&6\\39&-12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-17&8\\-2&2\\13&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}15&6&-3\\6&6&6\\-3&6&15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{5}{6}\end{bmatrix}$

b) $\vec{p}=P\vec{b}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\8\\11\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}40\\52\\64\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{3}\\\frac{26}{3}\\\frac{32}{3}\end{bmatrix}$

10. 最小二乘法即需 $\sum_{i=1}^{n}(C+Dt_i-y_i)^2$ 有最小值

不妨设矩阵

$A=\begin{bmatrix}1&t_1\\1&t_2\\&\vdots\\1&t_n\end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$ 则只需使 $|Ax-b|^2$ 有最小值.

取最小值时 $x=(A^TA)^{-1}A^Tb$

$A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\1&4\\1&5\end{bmatrix}$ $A^TA=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\1&4\\1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&14\\14&54\end{bmatrix}$

$(A^TA)^{-1}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}54&-14\\-14&4\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}27&-7\\-7&2\end{bmatrix}$

$x=(A^TA)^{-1}A^Tb=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}27&-7\\-7&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\\11\\12\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}13&6&-1&-8\\-3&-1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\\11\\12\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}0\\25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}$

则 $C=0,\ D=\frac{5}{2}$

11. B在 span<$A_1,\dots A_n$>上的投影为

$P=Q(Q^TQ)^{-1}Q^TB$

而 $Q^TB=([A_1,A_2\dots A_n])^TB=\begin{bmatrix}A_1^T\\\vdots\\A_n^T\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}A_1^TB\\\vdots\\A_n^TB\end{bmatrix}$

对于 $\forall 1\le k\le n$ $A_k^TB=A_k^Tb-\frac{A_k^TA_1A_1^T}{A_1^TA_1}b-\dots\frac{A_k^TA_nA_n^T}{A_n^TA_n}b$

而 $A_1\dots A_n$ 相互垂直

则 $i\neq k$ 时 $A_k^TA_i=|\vec{A_k}\cdot\vec{A_i}|^2=0$

$\therefore A_k^TB=A_k^Tb-\frac{A_k^TA_k}{A_k^TA_k}A_k^Tb=A_k^Tb-A_k^Tb$

$\therefore Q^TB=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=0$

即 $P=Q(Q^TQ)^{-1}Q^TB=Q(Q^TQ)^{-1}0=0$

$\therefore$ B在 span<$A_1,\dots A_n$>上投影为 $\vec{0}$

因此 B 与向量组 Q 正交.

12、解：①选取 $\vec{v_1}$ 作为 $\vec{q_1}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$

②选取 $\vec{v_2}$ 作在 $\vec{q_1}$ 上的正交投影并得到 q_2

$$\vec{q_2}=\vec{v_2}-\frac{q_1^Tv_2}{q_1^Tq_1}\vec{q_1}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}-\frac{28}{14}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}$$

③选取 $\vec{v_3}$ 作在 span $<q_1,q_2>$ 上的正交投影并得到 q_3

$$\vec{q_3}=\vec{v_3}-\frac{q_1^Tv_3}{q_1^Tq_1}\vec{q_1}-\frac{q_2^Tv_3}{q_2^Tq_2}\vec{q_2}=\begin{bmatrix}7\\8\\5\end{bmatrix}-\frac{42}{14}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}-\frac{14}{21}\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7\\8\\5\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

得到 $\vec{q_1}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ $\vec{q_2}=\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}$ $\vec{q_3}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

归一化得

$$\vec{q_1}=\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{14}}{14}\\\frac{2\sqrt{14}}{14}\\\frac{\sqrt{14}}{14}\end{bmatrix}\quad \vec{q_2}=\begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{21}}{21}\\\frac{\sqrt{21}}{21}\\\frac{4\sqrt{21}}{21}\end{bmatrix}\quad \vec{q_3}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix}$$

13、证明：先证引理，Q是正交矩阵（$QQ^T=Q^TQ=I$）当且仅当Q各列正交归一

设 $Q=[e_1\dots e_n]$ 则 $Q^TQ=\begin{bmatrix}e_1^T\\e_2^T\\\vdots\\e_n^T\end{bmatrix}[e_1\dots e_n]=\begin{bmatrix}e_1^Te_1 & e_1^Te_2 & \cdots & e_1^Te_n\\e_2^Te_1 & e_2^Te_2 & & \vdots\\\vdots & \vdots & \ddots & \\e_n^Te_1 & e_n^Te_2 & \cdots & e_n^Te_n\end{bmatrix}$

Q各列正交归一 $\Leftrightarrow$ $\forall i,j\le n$ $\begin{cases}i\ne j\text{时 } e_i^Te_j=0\\ i=j\text{时 } e_i^Te_j=1\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $Q^TQ=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=I$

则引理得证

$QQ^T=Q^TQ=I \Rightarrow Q^{-1}=Q^T$

设 $A=[e_1\dots e_n]$ $B=[q_1\dots q_n]$ 均是正交归一化基构成的矩阵，且 $\exists E$ 使 $A=BE$.

$$E=B^{-1}A=B^TA=\begin{bmatrix}q_1^T\\\vdots\\q_n^T\end{bmatrix}[e_1\dots e_n]=\begin{bmatrix}q_1^Te_1 & q_1^Te_2 & \cdots & q_1^Te_n\\q_2^Te_1 & q_2^Te_2 & \cdots & q_2^Te_n\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\q_n^Te_1 & q_n^Te_2 & \cdots & q_n^Te_n\end{bmatrix}$$

设 $E=[v_1\dots v_n]$ 则 $|v_i|^2=(q_1^Te_i)^2+\cdots+(q_n^Te_i)^2=(\vec{q_1}\cdot\vec{e_i})^2+\cdots+(\vec{q_n}\vec{e_i})$

假设 $\vec{e_i}=c_{1i}\vec{q_1}+c_{2i}\vec{q_2}+\cdots c_{ni}\vec{q_n}$

则 $|e_i|^2=\vec{e_i}\cdot\vec{e_i}=(c_1\vec{q_1}+\cdots c_n\vec{q_n})(c_1\vec{q_1}+\cdots+c_n\vec{q_n})$

$=c_1^2+c_2^2+\cdots c_n^2=1$

则 $|v_i|^2=(c_1\vec{q_1}\cdot\vec{q_1})^2+(c_2\vec{q_2}\cdot\vec{q_2})^2+\cdots+(c_n\vec{q_n}\cdot\vec{q_n})^2=c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2=1$ ①

$i\ne j$ 时 $\vec{v_i}\cdot\vec{v_j}=(q_1^Te_iq_1^Te_j)+(q_2^Te_iq_2^Te_j)+\cdots+(q_n^Te_iq_n^Te_j)$

$=(\vec{q_1}\cdot\vec{e_i}\vec{q_1}\vec{e_j})+\cdots+(\vec{q_n}\cdot\vec{e_i}\vec{q_n}\vec{e_j})$.

而 $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=(c_{1i}\vec{q_1}+\cdots+c_{ni}\vec{q_n})(c_{1j}\vec{q_1}+\cdots+c_{nj}\vec{q_n})=c_{1i}c_{1j}+\cdots+c_{ni}c_{nj}=0$.

则 $\vec{v_i}\cdot\vec{v_j}=(c_{1i}\vec{q_1}\vec{q_1}c_{1j}\vec{q_1}\cdot\vec{q_1})+\cdots+(c_{ni}\vec{q_n}\vec{q_n}c_{nj}\vec{q_n}\vec{q_n})=c_{1i}c_{1j}+\cdots+c_{ni}c_{nj}=0$ ②

由①② $\{v_1\dots v_j\}$ 构成一组正交归一基，因此变换矩阵E是正交矩阵.

14、解：(1) $\vec{v_1}=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$ $\vec{v_2}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$ $\vec{v_3}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$

由Gram-Schmit分解：

$$\vec{q_1}=\vec{v_1}=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$$

$$\vec{q_2}=\vec{v_2}-\frac{\vec{q_1}\cdot\vec{v_2}}{|q_1|^2}\vec{q_1}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

$$\vec{q_3}=\vec{v_3}-\frac{\vec{q_1}\cdot\vec{v_3}}{|q_1|^2}\vec{q_1}-\frac{\vec{q_2}\cdot\vec{v_3}}{|q_2|^2}\vec{q_2}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

归一化得 $\vec{q_1'}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt9}{9}\\\frac{2\sqrt9}{9}\\\frac{2\sqrt9}{9}\end{bmatrix}$ $\vec{q_2'}=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt9}{9}\\-\frac{\sqrt9}{9}\\\frac{2\sqrt9}{9}\end{bmatrix}$ $\vec{q_3'}=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt9}{9}\\\frac{2\sqrt9}{9}\\-\frac{\sqrt9}{9}\end{bmatrix}$ $Q=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}\\\frac{2\sqrt9}{9}&-\frac{\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}\\\frac{2\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}&-\frac{\sqrt9}{9}\end{bmatrix}$

$$R=Q^{-1}A=Q^TA=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}\\\frac{2\sqrt9}{9}&-\frac{\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}\\\frac{2\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}&-\frac{\sqrt9}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt9&0&0\\0&\sqrt9&0\\0&0&\sqrt9\end{bmatrix}$$

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}\\\frac{2\sqrt9}{9}&-\frac{\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}\\\frac{2\sqrt9}{9}&\frac{2\sqrt9}{9}&-\frac{\sqrt9}{9}\end{bmatrix}}_{Q}\underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt9&0&0\\0&\sqrt9&0\\0&0&\sqrt9\end{bmatrix}}_{R}$$

(2) $$A=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{Q}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}_{R}$$

(3) $\vec{v_1}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\vec{v_2}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ $\vec{v_3}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

由Gram-Schmit分解

$$\vec{q_1}=\vec{v_3}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{q_2}=\vec{v_2}-\frac{\vec{q_1}\cdot\vec{v_2}}{|q_1|^2}\vec{q_1}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{q_3}=\vec{v_1}-\frac{\vec{q_1}\cdot\vec{v_1}}{|q_1|^2}\vec{q_1}-\frac{\vec{q_2}\cdot\vec{v_2}}{|q_2|^2}\vec{q_2}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

则 $Q=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$$R=Q^{-1}A=Q^TA=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

则 $$A=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{Q}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}_{R}$$ ✗

$$\begin{matrix}1/\sqrt3&2/\sqrt3&1/\sqrt3\\1/\sqrt3&2/\sqrt6&1/\sqrt6\\1/\sqrt3&0&1/\sqrt2\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sqrt3&2/\sqrt3&1/\sqrt3\\&2/\sqrt6&1/\sqrt6\\&&1/\sqrt2\end{bmatrix}$$