2018 年秋季《高等微积分 1》期末参考答案

本试卷分两页, 共七道试题, 各题分值如下: 第 1 题 $5+10$; 第 2 题 $5+5$; 第 $3,4$ 题每小问 5 分; 第 5 题 $5+10$; 第 6 题 15 分; 第 7 题 $5+10$.

1 (1) 给定正数 α, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x$.

(2) 求函数 $\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺余项的泰勒公式, 要求余项形如 $o(x^{2n+1})$, 其中 n 是给定的正整数.

解. (1) 利用 $\frac{?}{\infty}$ 型洛必达法则, 可得

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = 0.$$

(2) 熟知 $f(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y}}=(1-y)^{-\frac{1}{2}}$ 在 $y=0$ 处的 Taylor 公式为

$$(1-y)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{i}(-y)^i + o(y^n) = 1+\sum_{i=1}^{n} \frac{(2i-1)!!}{i!\cdot 2^i} y^i + o(y^n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2i)!}{(i!\cdot 2^i)^2} y^i + o(y^n), \quad \text{as } y\to 0,$$

由此可知 $f(x^2)$ 的 Taylor 公式为

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2i)!}{(i!\cdot 2^i)^2} x^{2i} + o(x^{2n}), \quad \text{as } x\to 0.$$

注意到 $(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, 从而有

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \arcsin 0 + \sum_{i=0}^{n} \frac{(2i)!}{(i!\cdot 2^i)^2} \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(2i)!}{(i!\cdot 2^i)^2(2i+1)} x^{2i+1} + o(x^{2n+1}), \quad \text{as } x\to 0.\end{aligned}$$

□

2 (1) 给定正实数 a, b, 计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{(ax+b(1-x))^2} dx$.

(2) 给定非负整数 n, 计算不定积分 $\int x^n \ln x dx$.

解. (1) 当 $a = b$ 时, 所求的积分为 $\int_0^1 \frac{1}{a^2} dx = \frac{1}{a^2}$. 当 $a \neq b$ 时, 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\int_0^1 \frac{1}{(ax+b(1-x))^2} dx = \frac{(ax+b(1-x))^{-1}}{-(a-b)}|_0^1 = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{-(a-b)} = \frac{1}{ab}.$$

综上所述, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{(ax+b(1-x))^2} dx = \frac{1}{ab}.$$

(2) 利用不定积分的分部积分公式, 有

$$\begin{aligned}\int x^n \ln x dx &= \int (\frac{x^{n+1}}{n+1})' \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)' dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.\end{aligned}$$

□

3 (1) 设 a 是非零实数, 判断级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{n!(2n)!} a^n$ 的收敛发散性.

(2) 设 θ 是给定的实数, 判断级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ 的收敛发散性.

(3) 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的每一项都是正数. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(4) 设 λ 是给定的实数, 判断无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4} dx$$

的收敛发散性.

解. (1) 令 $x_n = \frac{(4n)!}{n!(2n)!} a^n$, 则对 $a \neq 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(4n+3)(4n+1)}{n+1} |a| = +\infty,$$

从而存在 $N \in \mathbf{Z}$, 使得对任何 $n \geq N$, 有 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1$. 这样就有

$$|x_n| \geq |x_N| > 0, \quad \forall n \geq N.$$

特别的, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不收敛到零, 所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{n!(2n)!} a^n$ 发散.

(2) 当 $\theta \in \pi\mathbf{Z}$ 时, 该级数的每项都为零, 当然收敛. 当 $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$ 时, 数列 $\{\sin(n\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列满足

$$|\sin\theta + ... + \sin(n\theta)| = |\frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}| \leq \frac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

因而是有界的; 数列 $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且趋于零. 这样, 由 Dirichlet 判别法, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ 是收敛的.

综上所述, 对任何 θ, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ 都收敛.

(3) 必要性. 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+a_n) = 0$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n) = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(1+a_n)} = e^0 = 1,$$

可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 这样, 由 Heine 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln(1+x))'}{x'} = 1, \tag{1}$$

利用正项级数比较判别法的极限形式, 可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

充分性. 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 此时 (1) 式也成立, 利用正项级数比较判别法的极限形式, 可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 收敛.

(4) 无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4} dx$ 收敛的充分必要条件是 $\lambda \geq 0$, 理由如下.

当 $\lambda = 0$ 时, 所考虑的无穷积分为 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, 熟知它是收敛的.

当 $\lambda > 0$ 时, 有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2-\lambda x^4}}{e^{-x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\lambda x^4}} = 0,$$

由比较判别法可知, 此时无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4} dx$ 收敛.

当 $\lambda < 0$ 时, 有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2-\lambda x^4}}{1} = \lim_{x\to\infty} e^{(-\lambda)x^4-x^2} = +\infty,$$

而无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} 1dx$ 发散, 由比较判别法的极限形式可知此时无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4}dx$ 发散.

□

4 设实数 a, b 满足 $|a| < 1$, $|ab| < 1$. 考虑函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$.

(1) 求出上述函数级数的收敛域.

(2) 判断上述函数级数的和函数在其收敛域中是否处处可导.

解. (1) 对每个 x, 有 $|a^n \cos(b^n x)| \le |a|^n$, 由条件 $|a| < 1$ 可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a|^n$ 收敛, 由比较判别法可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$ 绝对收敛. 这样, 函数级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$ 的收敛域为 $\mathbf{R}$.

(2) 考虑逐项求导所得的函数级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a^n \cos(b^n x))' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-a^n b^n \sin(b^n x))$. 注意到

$$|-a^n b^n \sin(b^n x)| \le |ab|^n, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

由条件 $|ab| < 1$ 可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |ab|^n$ 收敛, 由 Weierstrass M-判别法可得函数级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a^n \cos(b^n x))'$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛. 这样, 利用函数级数和函数逐项求导的定理, 可知函数级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$ 的和函数在 $\mathbf{R}$ 上处处可导.

□

5 (1) 叙述带拉格朗日 (Lagrange) 余项的泰勒公式.

(2) 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上处处有 $(n+1)$ 阶导函数, $a \ne b$ 是给定的实数. 定义函数

$$F(x) = f(x) + \frac{f^{(1)}(x)}{1!}(b-x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(b-x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

证明: 存在 ξ 介于 a, b 之间, 使得

$$F(b) - F(a) = (b-a) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n.$$

解. (1) 设 I 是开区间, $f: I \to \mathbf{R}$ 在 I 上处处有 n 阶导数, 则对 I 中任何两点 a, b, 存在 ξ 介于 a, b 之间, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

(2) 直接求导, 可得

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i+1)}(x)}{i!}(b-x)^i + \frac{f^{(i)}(x)}{i!} i(b-x)^{i-1}(-1) \\
=&f'(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i+1)}(x)}{i!}(b-x)^i - \frac{f^{(i)}(x)}{(i-1)!}(b-x)^{i-1} \\
=&\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n.
\end{aligned}$$

这样, F 处处可导, 利用 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 a, b 之间, 使得

$$F(b) - F(a) = (b-a) \cdot F'(\xi) = (b-a) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n.$$

□

6 对每个非负整数 n, 对每个给定的实数 x, 考虑定积分 $\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \cos(xt)dt$, 并把它的值记作 $I_n(x)$, 即有

$$I_n(x) = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \cos(xt)dt, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

证明: 对整数 $n \geq 2$, 有

$$x^2 I_n(x) = 2n(2n-1)I_{n-1}(x) - 4n(n-1)I_{n-2}(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

证明: 分两种情况讨论.

(1) 当 $x \neq 0$ 时, 两次使用分部积分公式, 可知对正整数 $n \geq 2$ 有

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n (\frac{\sin(xt)}{x})' dt \\
&= \left((1-t^2)^n \frac{\sin(xt)}{x} \right) |_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} n(1-t^2)^{n-1}(-2t)\frac{\sin(xt)}{x} dt \\
&= 2n \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-1} t \cdot (\frac{-\cos(xt)}{x^2})' dt \\
&= \left(2n(1-t^2)^{n-1} t \frac{-\cos(xt)}{x^2} \right) |_{-1}^{1} - 2n \int_{-1}^{1} \left((1-t^2)^{n-1} t \right)' \cdot \frac{-\cos(xt)}{x^2} dt \\
&= 2n \int_{-1}^{1} \left((n-1)(1-t^2)^{n-2}(-2t)t + (1-t^2)^{n-1} \right) \frac{\cos(xt)}{x^2} dt \\
&= 2n \int_{-1}^{1} \left((2n-1)(1-t^2)^{n-1} - 2(n-1)(1-t^2)^{n-2} \right) \frac{\cos(xt)}{x^2} dt \\
&= \frac{2n(2n-1)}{x^2} I_{n-1}(x) - \frac{4n(n-1)}{x^2} I_{n-2}(x).
\end{aligned}$$

即有

$$x^2 I_n(x) = 2n(2n-1) I_{n-1}(x) - 4n(n-1) I_{n-2}(x), \quad \forall x \neq 0.$$

(2) 当 $x = 0$ 时, 利用换元公式有

$$I_n(0) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = \int_{\pi}^{0} (1-\cos^2\theta)^n (-\sin\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \sin^{2n+1}\theta d\theta = 2J_{2n+1},$$

其中 $J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta d\theta$, 它满足递推关系 $J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$, $\forall m \geq 2$. 由此可验证对 $n \geq 2$, 有

$$2n(2n-1) I_{n-1}(0) - 4n(n-1) I_{n-2}(0) = 4n(2n-1) \left(J_{2n-1} - \frac{2n-2}{2n-1} J_{2n-3} \right) = 0.$$

综合以上两种情况, 就完成了证明. □

7 设 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ 是连续函数, 且对任何 $x \in [0,1]$, 有 $f(x) > 0$. 设

$$\int_0^1 f(x) dx = A, \quad \int_0^1 f(x)^2 dx = B.$$

(1) 证明: 对于每个正整数 n, 存在唯一的序列 $0 < x_1 < ... < x_n \leq 1$, 使得

$$\int_0^{x_k} f(t) dt = \frac{kA}{n}, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

(2) 对于每个给定的正整数 n, 设 $0 < x_1 < ... < x_n \leq 1$ 是满足第 (1) 问结论的序列, 定义

$$S(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S(n)$, 要求把结果用 A, B 表示.

解. (1) 定义函数 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则对任何 $x \in [0,1]$ 有 $g'(x) = f(x) > 0$. 由此可知, g 是严格单调递增的连续函数, 从而 g 是从 $[0,1]$ 到 $[0,A]$ 的双射. 所求的 x_k 满足 $g(x_k) = \frac{kA}{n}$, 它们唯一存在, 由 $x_k = g^{-1}(\frac{kA}{n})$ 给出.

(2) 利用定积分的定义, 有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) &= \frac{1}{A}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n} f(g^{-1}(\frac{k}{n}A))\right) \\
&= \frac{1}{A}\int_0^A f(g^{-1}(y))dy \\
&= \frac{1}{A}\int_0^1 f(g^{-1}(g(x)))g'(x)dx \\
&= \frac{1}{A}\int_0^1 f(x)^2 dx \\
&= \frac{B}{A},
\end{aligned}$$

其中第三个等号用到了定积分的换元公式. □