12.2 集合的等势

定理12.2.1

- 对任意的集合A，有

$$P(A) \approx A_2$$

$$P(A) \approx A_2$$

- 证明*：　这里2 $= \{0,1\}$，所以A_2是所有函数 $f: A \to \{0,1\}$组成的集合。

> A的特征函数χ_A定义为：
> $$\chi_A : E \to \{0,1\}, \chi_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

- 构造函数 $H: P(A) \to A_2$,
- 对于任意 $B \in P(A)$，$H(B) = \chi_B(x): A \to \{0,1\}$。
- 其中$\chi_B(x)$是以A为全集时B的特征函数。
- 1. 证H是单射的；
- 设B_1，$B_2 \in P(A)$ 且$B_1 \neq B_2$，则
  $H(B_1) = \chi_{B_1} \neq \chi_{B_2} = H(B_2)$，所以，$H$是单射的。
- 2. 证H是满射的；
- 对任意的$g \in A_2$，$g: A \to \{0,1\}$，存在集合
  $B = \{x \mid x \in A \wedge g(x) = 1\}$，则 $B \subseteq A$，即存在
  $B \in P(A)$，且$H(B) = g(x)$。所以，H是满射的。

12.2 集合的等势

定理12.2.3 康托定理(1890)

（1） $\neg N \approx R$ ，

（2） 对任意的集合A， $\neg A \approx P(A)$。

有理数就像夜空里的星星，
而无理数则像无边的黑暗

对角线方法（1891年）

- **Cantor's Diagonal Method**
- 假设你把实数区间（0，1）里的所有数按照某种顺序排列起来
- $a_1 = 0.\underline{0}147574628\cdots$
  $a_2 = 0.3\underline{7}21111111\cdots$
  $a_3 = 0.23\underline{2}3232323\cdots$
  $a_4 = 0.000\underline{4}838211\cdots$
  $a_5 = 0.0516\underline{0}00000\cdots$
  ………

小数点后第一位不等于 a_1 的第一位，
小数点后第二位不等于 a_2 的第二位，
……
总之小数点后第 i 位不等于 a_i 的第 i 位。
这个数属于实数区间 (0, 1)，但它显然不在你的列表里，因为它和你列表里的每一个数都有至少一位是不同的。
我们就证明了实数区间是不可数的。

- 证明:
- （1） 只要证明 $\neg N \approx [0,1]$ 即可。
- 为此只要证明对任何函数 $f: N \to [0,1]$, 都存在 $x \in [0,1]$, 使$x \notin ran(f)$, 即任何函数$f: N \to [0,1]$都不是双射的。
- 反证：假设存在一个双射函数 $f: N \to [0,1]$
  则[0,1]中的元素必与N中的元素一一对应，
  那么[0,1]中的元素必可排列成如下的形式：
  $$ranf = [0,1] = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$$
- 设每个x_i的小数形式是
  $$0.a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ij}\cdots, 且 a_{ij} \in \{0,1,\cdots 9\}$$
- 对任意一个$f: N \to [0,1]$, 顺序列出f 值

对任意的集合A， $\neg A \approx P(A)$.

对任意一个$f: N \to [0,1]$, 顺序列出f 值

$$f(0) = x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$$

$$f(1) = x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$$

$$f(2) = x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$$

$$f(3) = x_4 = 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots$$

$$\ldots$$

$$f(n-1) = x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots$$

$$\ldots$$

- 依假设

任一[0,1]中的实数均应出现在上表中的某一行

- 关键：如何找出一个[0,1]区间的小数，并证明该小数不在上表中出现。
- Cantor 提出按对角线构造一个新的小数x^*

$$x^* = 0.a_{11}^* a_{22}^* a_{33}^* \cdots a_{ii}^* \cdots$$

使得 $a_{ii}^* \neq a_{ii} \quad (i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$

显然 $x^* \in [0, 1]$, 然而 x^*又不在上表中。

$\because x^*$与上表中的任一x_i至少总有一位数字相异。

于是$x^* \notin ran(f)$，即f不可能是满射，故不存在双射函数 $f : N \to [0,1]$。

对任意的集合A，$\neg A \approx P(A)$

（2）对任意的函数 $g: A \to P(A)$，构造集合

$B = \{x \mid x \in A \land x \notin g(x)\}$。

- 显然，$B \subseteq A$，$B \in P(A)$。对任意的$x \in A$，有$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$，则$B \neq g(x)$。
- 所以$B \notin ran(g)$，但$B \in P(A)$，
- 所以g不是满射的。当然也不是双射的。
- 不存在双射函数$g: A \to P(A)$。

证明的核心在于**构造一个**$B \subset A$ 使得$B \notin \mathrm{range}(g)$，其定义即为$\forall x, x \in A \to B \neq g(x)$

为此，我们给出B的构造$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$。

那么对于$\forall x \in A$，我们都有$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$，这就足以说明$\forall x \in A, B \neq g(x)$，也就完成了我们的证明。

可以看到，该证明**并不关心**B是否为$\emptyset$，但我们不妨以$B = \emptyset$为例子看看发生了什么：

从$B = \emptyset$我们得到了$\forall x \in A, x \in g(x)$，也就是说$g(x)$至少有$x$这个元素，所以$g(x) \neq \emptyset, \forall x \in A$进而$g(x) \neq B, \forall x \in A$即$B \notin \mathrm{range}(g)$

例：$A = \{1,2,3\}, g(1) = \{1\}, g(2) = \{2\}, g(3) = \{3\}, B = \emptyset$

但是$g(x) \neq \emptyset$，所以$B \neq g(x)$。

- 例：

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$P(A) = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

- 设$B = \{1, 2\}$,　　显然, $B \subseteq A, B \in P(A)$

　$g(x) = \{3\}$　　满足$B = \{x | x \in A \wedge x \notin g(x)\}$

　$B \neq g(x)$,　$B \notin ran(g)$,　$g: A \rightarrow P(A)$,

- 总之，不管给出的函数g为何种情形，均可按此法构造集合B，B是$P(A)$中的元素，但不在g的值域中。
- 所以g不是满射的。

- $R \approx N_2$

  证明: 只需证$R \le N_2$, 且$N_2 \le R$

  (1) 先证$R \le N_2$. 为此只需证$(0, 1) \le N_2$.

  构造函数$H: (0, 1) \to N_2$,

  对$\forall z \in (0, 1)$, 有$H(z) \in N_2 = \{f \mid f: N \to \{0, 1\}\}$

  其中z表示二进制无限小数

  $$H(z): N \to \{0, 1\}$$

  $\forall n \in N$, 取$H(z)(n)$为z的小数点后的第n位数

  显然, $z_1 \ne z_2$时, $H(z_1) \ne H(z_2)$

$\therefore$ H为单射, $\therefore$ $(0, 1) \le N_2$.

(2) 证$N_2 \leq R$. 只需证$N_2 \leq [0, 1]$,

设$G: N_2 \to [0,1]$

$$\forall f \in N_2 = \{f \mid f: N \to \{0, 1\}\}$$

则f的函数值确定一个[0, 1]区间上的实数, 例如 f(0), f(1), f(2), f(3), …依次为1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, … 时, 取十进制数

$y=0.10111000\ldots$, 则$y \in [0, 1]$

即$G(f)=0.101110\ldots$

显然G是单射. $\therefore N_2 \leq [0, 1]$

- 推论: $\aleph_1 = \mathrm{card}(R) = \mathrm{card}(N_2) = 2^{\aleph_0}$.

$|R\times R|=|R|$

$$|R\times R| = |\,(0,1]\times(0,1]\,| = |\,(0,1]\,| = |R|$$

将 $x\in(0,1]$表示为十进小数，注意有些x 的表示不唯一，如0.35 也可以表示为$0.34\dot{9}$。我们取后一种表达式，这种表达式的特征是不会在某一位后全是0，所以这种表达式称为x 的十进无限小数表达式，它是唯一的。特别地，1 的十进无限小数表达式是$0.\dot{9}$。这样，任给$x\in(0,1]$，都有$x = 0.a0a1a2\cdots\cdots$。

$$|(0,1]\times(0,1]| = |(0,1]|$$

任给$<x, y>\in(0,1]\times(0,1]$，将$x, y$分别表示为

$x = 0.a0a1a2\cdots\cdots$和$y = 0.b0b1b2\cdots\cdots$，

取$z = 0.a0b0a1b1a2b2\cdots\cdots$，

构造$(0,1]\times(0,1]$到$(0,1]$的映射

g：$(0,1]\times(0,1]\rightarrow(0,1]$ $g(x, y) = z$

则g是单射，所以

$|(0,1]\times(0,1]|\le|(0,1]|$。

又f：$(0,1]\rightarrow(0,1]\times(0,1]$ $f(x) = <x, 1>$是单射，所以$|(0,1]|\le|(0,1]\times(0,1]|$。