《高等微积分 2》第十四周作业

1 考虑 $\mathbf{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ 上的向量场

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(\frac{x}{M(x,y,z)^{3/2}},\frac{y}{M(x,y,z)^{3/2}},\frac{z}{M(x,y,z)^{3/2}}),$$

其中 $M(x,y,z)=(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2$.

(1) 求 $\mathbf{F}$ 的散度 $\nabla\cdot\mathbf{F}$, 其中对于向量场 $\mathbf{F}=(P,Q,R)$, 定义其散度为 $\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

(2) 设 S 是单位球面 $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$, 取指向外面的定向. 计算第二型曲面积分

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{M(x,y,z)^{3/2}}.$$

2 设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中光滑的定向曲面, 其定向由各点处的单位法向量

$$\mathbf{n}(x,y,z)=(\mathbf{n}_1(x,y,z),\mathbf{n}_2(x,y,z),\mathbf{n}_3(x,y,z))$$

描述. 我们假设 $\mathbf{n}(x,y,z)$ 在 S 的某个邻域中处处有定义, 是单位长度的, 且关于 (x,y,z) 是光滑变化的. 证明:

$$\int_{\partial S}(y\mathbf{n}_2+z\mathbf{n}_3)dx-y\mathbf{n}_1dy-z\mathbf{n}_1dz=-\iint_S(y\mathbf{n}_3-z\mathbf{n}_2)(\mathrm{div}\ \mathbf{n})dS,$$

其中我们把 $\mathbf{n}$ 的分量函数简记为 $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_3$, 用 $\mathrm{div}\ \mathbf{n}$ 表示 $\mathbf{n}$ 的散度, 用 dS 表示面积微元, 对 S 的边界 ∂S 赋予边界正定向.

3 设 $\mathbf{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的光滑矢量场, 满足 $\nabla\times\mathbf{F}\equiv 0$. 定义

$$\phi(x,y,z)=x\int_0^1 P(tx,ty,tz)dt+y\int_0^1 Q(tx,ty,tz)dt+z\int_0^1 R(tx,ty,tz)dt.$$

证明: $\nabla\phi=\mathbf{F}$.

4 给定 $\mathbf{R}^3$ 中的向量场

$$\mathbf{F} = (e^x \sin x + e^x \cos x, \quad e^y \sin z + e^z \cos y, \quad e^y \cos z + e^z \sin y).$$

(1) 证明: $\mathbf{F}$ 旋度 $\nabla \times \mathbf{F}$ 恒等于零.

(2) 求 $\mathbf{F}$ 的势能函数 (或称为原函数)$\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, 即要求 $\nabla \phi = \mathbf{F}$.

5 设 $\mathbf{B}(x,y,z) = (\mathbf{B}_1(x,y,z), \mathbf{B}_2(x,y,z), \mathbf{B}_3(x,y,z))$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的光滑矢量场, 满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} \equiv 0$. 定义

$$\mathbf{A}_1(x,y,z) = z\int_0^1 \mathbf{B}_2(tx,ty,tz)tdt - y\int_0^1 \mathbf{B}_3(tx,ty,tz)tdt,$$

$$\mathbf{A}_2(x,y,z) = x\int_0^1 \mathbf{B}_3(tx,ty,tz)tdt - z\int_0^1 \mathbf{B}_1(tx,ty,tz)tdt,$$

$$\mathbf{A}_3(x,y,z) = y\int_0^1 \mathbf{B}_1(tx,ty,tz)tdt - x\int_0^1 \mathbf{B}_2(tx,ty,tz)tdt,$$

令 $\mathbf{A}(x,y,z) = (\mathbf{A}_1(x,y,z), \mathbf{A}_2(x,y,z), \mathbf{A}_3(x,y,z))$. 证明: $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

6 (1) 求出微分方程

$$xy' + 3y = 0$$

的所有解 $y : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$.

(2) 求解微分方程的初值问题.

$$\begin{cases} xy' + 3y = x^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

7 (1) 给定连续函数 $P(x), Q(x)$, 求微分方程

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = 0$$

的所有解 $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

(2) 求解微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1+y^2}}{x}, \\ y(1) = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

8 求解微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y' = y - y^2 \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$