清華大學
Tsinghua University

第八章 群

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

内容回顾：代数系统的概念

定义7. 3. 3

- 设A是非空集合，$f_1, f_2, \cdots, f_s$分别是A的$k_1, k_2, \cdots k_s$元运算，$k_i (i = 1,2, \cdots s)$是正整数。
- 称集合A和运算$f_1, f_2, \cdots, f_s$所组成的系统为一个代数系统（或一个代数结构），简称为一个代数，用记号$(A, f_1, f_2, \cdots, f_s)$表示。
- 当A是有限集合时，也称该系统是有限代数系统。
- 两要素
  - 集合和代数运算（封闭的）

多选题 1分

Setting

关于代数系统(A, f)，下面哪些描述是正确的

A A是非空的

B f 是映射

C 运算满足封闭性

D 有单位元

Submit

如何判定一个给定的系统是代数系统？

- 集合是非空的
- 定义的运算应该满足映射成立条件
- 所有运算的封闭性

内容回顾：代数系统的概念

- 例： 设$Z_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots \overline{m-1}\}$是整数模$m$同余所确定的等价类集合，$Z_m$上的运算+定义如下：

$$\bar{i} + \bar{j} = \overline{(i + j)(\mathrm{mod}\, m)}$$

则$(Z_m, +)$是代数系统！

我们称该运算为模m加法运算。

内容回顾：交换律

- 代数系统$(X, \cdot)$中，如果$\forall x_i, x_j \in X$，
- 都有$x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i$成立，
- 则称$(X, \cdot)$对于二元运算$\cdot$适合交换律。

$(M_n(R), +)$

$(M_n(R), \times)$

内容回顾：指数律

定理7. 3. 1

- 若$(X, \cdot)$对二元运算·适合结合律，则对于任何正整数m和n，有
  1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
  2. $(x^m)^n = x^{m \times n}$

指数律！广义结合律

内容回顾：单位元

定义7. 3. 4

- 给定一个代数系统$V = (X, \cdot)$
- 如果$\exists e_L \in X$，使得$\forall x \in X$，都有$e_L \cdot x = x$，则称e_L是X上关于运算$\cdot$的一个左单位元。
- 若e既是左单位元又是右单位元，则称之为单位元。

内容回顾：逆元

定义7.3.5

- 设$V=(X,\cdot)$是有单位元e的代数系统，对于$x\in X$，
- 若$\exists x'\in X$，使得$x'\cdot x=e$，则称x是左可逆的，并称x'是x的一个左可逆元；
- 若$\exists x''\in X$，使得$x\cdot x''=e$，则称x是右可逆的，并称x''是x的一个右逆元；
- 若x既是左可逆的又是右可逆的，则说x是可逆元。

内容回顾：消去律

- 定义：代数系统$V=(X,\cdot)$上的二元运算$\cdot$，如果对$\forall a,b,c\in X$ 且$a\neq 0$

$$ab=ac \quad \Rightarrow \quad b=c$$
$$ba=ca \quad \Rightarrow \quad b=c$$

运算$\cdot$满足消去律！

内容回顾：同类型

定义7. 4. 1

- 设$V_1 = (X, o_1, o_2, \cdots, o_r)$和$V_2 = (Y, \overline{o_1}, \overline{o_2}, \cdots, \overline{o_r})$是两个代数系统，若$o_i$和$\overline{o_i}$都是$k_i$元运算，且$k_i (i = 1,2, \cdots, r)$是正整数
- 则说代数系统V_1和V_2是同类型的。

$(\ \{a,b\},\ \bullet\ )$

•	a	b
a	a	b
b	b	a

$(\ \{0,1\},\ \times\ )$

×	0	1
0	0	1
1	1	0

内容回顾：同构

定义7. 4. 2

- 设$(X, \cdot)$和$(Y, *)$是两个同类型的代数系统，$f: X \to Y$是一个双射。
- 如果$\forall a, b \in X$，恒有$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$
- 则称f是$(X, \cdot)$到$(Y, *)$的一个同构映射，并称$(X, \cdot)$与$(Y, *)$同构，用$X \cong Y$表示。

内容回顾：同构

- 另外设$Y=\{a,b,c,d\}$，并定义Y上的运算如下：

·	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

- $(Y,\cdot)$与$(Z_4,+)$是同类型的代数系统。现定义$f:Z_4\to Y$如下：$f:\ \bar{0}\to a,\bar{1}\to b,\bar{2}\to c,\bar{3}\to d$，可以判断f是同构映射，因此$Z_4\cong Y$

内容回顾：同态

定义7. 4. 3

- 设$(X, \cdot)$和$(Y, *)$是两个同类型的代数系统，$f: X \to Y$是一个映射。
- 如果$\forall a, b \in X$，恒有$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$
- 则称f是$(X, \cdot)$到$(Y, *)$的一个同态映射，简称同态。

内容回顾：同态

例

- 一个代数系统$V_1 = (Z, +, \times)$，其中Z是整数集合，$+$ 和 $\times$分别是一般的加法和乘法运算；另一个代数系统$V_2 = (Z_m, +_m, \times_m)$中，$Z_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$，其中$+_m$和 $\times_m$ 分别是模m的加法和乘法运算，即

$$\bar{x}_1 +_m \bar{x}_2 = \overline{x_1 + x_2}$$

$$\bar{x}_1 \times_m \bar{x}_2 = \overline{x_1 \times x_2}$$

- 定义映射$f: Z \to Z_m$，即$f(i) = \bar{i}$，则f是V_1到V_2的一个同态

内容回顾：同态

定义7. 4. 6

- 代数系统$(X, \cdot)$上的同态映射

$$f: X \to X$$

- 称为自同态，若f是同构映射，则称之为自同构。

内容回顾： 8.1 半群

定义8.1.1

- 设S是非空集合，$\cdot$是S上的一个二元运算，如果$\cdot$满足结合律，则代数系统$(S,\cdot)$称为半群(semigroup)。
- 换句话说，如果对于任意的$a,b,c \in S$，若$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$成立，则称$(S,\cdot)$为半群。

封结

内容回顾： 8.1 半群

- 例： $(R, +)$

  $\forall a, b, c \in R \qquad (a + b) + c = a + (b + c)$

  半群！

- 例： $(R, -)$

  $\forall a, b, c \in R \qquad (a - b) - c \neq a - (b - c)$

内容回顾： 8.1 半群

定义8.1.2

- 若半群$(M,\cdot)$中有单位元e存在，则称$(M,\cdot)$ 是一个含幺半群或简称幺群。
- 幺群有时会用三元组$(M,\cdot,e)$ 表示，方便起见，简称M为幺群，并常用ab表示$a\cdot b$，称为a与b的乘积。

封结幺

内容回顾： 8.1 半群

- 例： $(R, +)$

$$\forall a, b, c \in R \qquad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\forall a \in R \qquad a + 0 = 0 + a = a$$

半群！ 幺群！

内容回顾： 8.1 半群

定义8.1.3

- 设$(M,\cdot,e)$是一个幺群，若$\cdot$适合交换律，则称M是交换幺群。

- 例： $(R,+)$

$$\forall a,b,c \in R \qquad (a+b)+c=a+(b+c)$$

$$\forall a \in R \qquad a+0=0+a=a$$

半群！ 幺群！ 交换幺群！

内容回顾： 8.1 半群

定理8.1.1

- 如果二元运算·适合结合律，那么也适合广义结合律。
  - 根据定理显见

$$a^n a^m = a^{n+m} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

其中定义$a^0 = e$，即M中的单位元。

  - 如果a是M中的一个可逆元，那么一定有$a^{-1} \in M$，于是$a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1}$(n个)可以表示成

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = a^{-n}$$

因此上式中的m, n在整数范围内取值都是成立的。

若a可逆，则a^n也可逆

内容回顾： 8.1 半群

定义8.1.4

- 设$(M,\cdot,e)$是一个幺群，若存在一个元素$g \in M$，使得任意的$a \in M$，a都可以写成g的方幂形式，即$a = g^m$（m是非负整数），则称$(M,\cdot,e)$是一个循环幺群，并且称g是M的一个生成元。

8.1 半群

- 例： $(R,+)$

$$\forall a,b,c \in R \qquad (a+b)+c=a+(b+c)$$

$$\forall a \in R \qquad a+0=0+a=a$$

半群！ 幺群！ 交换幺群！ 循环幺群？ ×

- 例： $(N,+)$

循环幺群？ √

内容回顾： 8.1 半群

定理8.1.2 循环幺群是可交换幺群

- 证明：

  设g是循环幺群中的一个生成元，则对任意$a, b \in M$，有$a = g^m, b = g^n, (m, n \geq 0)$

  由于二元运算适合结合律，因此

  $$ab = g^m g^n = g^{m+n} = g^n g^m = ba$$

  所以循环幺群是可交换的。

内容回顾： 8.1 半群

定义8.1.5

- 设$(S,\cdot)$是一个半群，$T \subseteq S$，在运算$\cdot$的作用下如果T是封闭的，则称$(T,\cdot)$是$(S,\cdot)$的子半群。

定义8.1.6

- 设$(M,\cdot,e)$是一个幺群，$T \subseteq M$，在运算$\cdot$的作用下如果T是封闭的，且$e \in T$，则称$(T,\cdot,e)$是$(M,\cdot,e)$的子幺群。

内容回顾： 8.1 半群

定义8.1.7

- 设$(A,\cdot)$、$(B,*)$是两个半群。$f:A\to B$是A到B的映射，$\forall a,b\in A$,若$f(a\cdot b)=f(a)*f(b)$成立，则称f是从半群A到半群B的同态映射，简称同态。若 f 分别是单射、满射和双射时，分称 f 是单同态、满同态和同构。

内容回顾： 8.1 半群

定理8.1.3

- 设f是从代数系统$(A,\cdot)$到$(B,*)$的满同态，S是A的非空子集。$f(S)$表示S中的元素在f下的象的集合，即$f(S)=\{f(a)|a\in S\}$
- 那么
  1. 若$(S,\cdot)$是半群，则$(f(S),*)$也是半群。
  2. 若$(S,\cdot)$是幺群，则$(f(S),*)$也是幺群。

在满同态下，半群和幺群的性质保留

内容回顾： 8.1 半群

推论

- 设f是从半群$(A,\cdot)$到代数系统$(B,*)$的满同态，$(S,\cdot)$是$(A,\cdot)$的子半群。
- 则有
  1. $(B,*)$是半群。
  2. $(f(S),*)$是$(B,*)$的子半群。

半群、幺群、子半群的同态象，仍然是半群、幺群、子半群！

作业题

- 习题八：4

  （{O}，×）->（{0}，×）

- 习题八：11

  $(a, b)(c, d) = (ac, cb+d)$

第八章 群

8.1 半群

8.2 群、群的基本性质

8.3 循环群 群的同构

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

8.6 正规子群与商群

8.7 群的同态、同态基本定理

8.8 群的直积

8.2 群、群的基本性质

定义8.2.1

- 设G是非空集合，$\cdot$是G上的二元运算，若代数系统$(G,\cdot)$满足
  1. 适合结合律，即$\forall a,b,c \in G$,有$(ab)c = a(bc)$
  2. 存在单位元e，使得$\forall a \in G, ae = ea = a$
  3. G中的元素都是可逆元。即$\forall a \in G$,都$\exists a^{-1} \in G$，使得$aa^{-1} = a^{-1}a = e$
- 则称代数系统$(G,\cdot)$是一个群，或记为$(G,\cdot,e)$。
- 为了方便起见，常用G表示群$(G,\cdot,e)$

群的定义：封闭性、结合律、幺元、逆

封结幺逆 ⇨ 凤姐咬你

8.2 群、群的基本性质

定义8.2.2

- 设$(G,\cdot,e)$是含幺半群，e是其单位元，如果$\forall a \in G$,都$\exists a^{-1} \in G$，使得

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

成立，则称G是一个群。

- G是所有元素都可逆的含幺半群。

常用代数系统的比较

封

封结

封结幺

封结幺逆

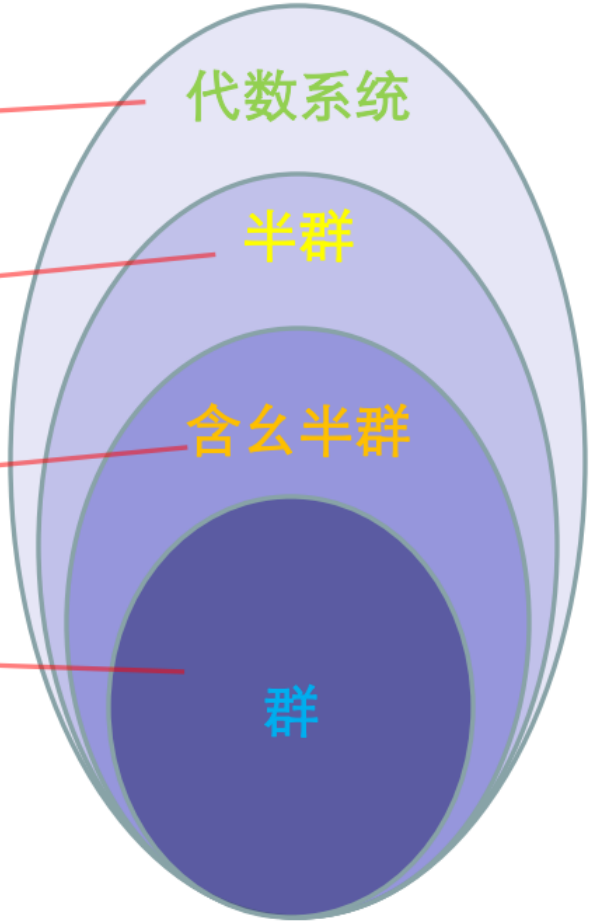
凤姐咬你

非空集合+代数运算

非空集合+代数运算+结合律

非空集合+代数运算+结合律+单位元

非空集合+代数运算+结合律+单位元+逆元



多选题 1分

Setting

下面哪个代数系统是群?

A $(Q, +)$，$(Z, +)$，$(R, +)$

B $(R-\{0\}, *)$

C $(P(S), \oplus)$

D $(N, +)$

E $(Z_n, +_n)$

提交

实例

- $(Q, +)$，$(Z, +)$，$(R, +)$ √ 逆元$-x$
- $(R-\{0\}, *)$ √ 逆元?
- $(P(S), \oplus)$ √ 逆元?
- $(N, +)$ X
- $(Z_n, +_n)$ √

逆元：

$x = 0,\ x^{-1} = 0$；

$x \neq 0,\ x^{-1} = n-x$

实例

- 设R={0°，60°，120°，180°，240°，300°}表示在平面上几何图形绕形心顺时针旋转角度的六种可能情况，设★是R上的二元运算，对于R中任意两个元素a和b,a★b表示平面图形连续旋转a和b得到的总旋转角度。并规定旋转360°等于原来的状态，就看作没有经过旋转。验证<R,★>是一个群。

★	0°	60°	120°	180°	240°	300°
0°	0°	60°	120°	180°	240°	300°
60°	60°	120°	180°	240°	300°	0°
120°	120°	180°	240°	300°	0°	60°
180°	180°	240°	300°	0°	60°	120°
240°	240°	300°	0°	60°	120°	180°
300°	300°	0°	60°	120°	180°	240°

解：由题意，R上的二元运算★的运算表如上所示，由表知，运算★在R上是**封闭的**。

对于任意a, b, c∈R，(a★b)★c表示将图形依次旋转a, b和c，而a★(b★c)表示将图形依次旋转b,c和a，而总的旋转角度都是a+b+c(mod 360),因此(a★b)★c= a★(b★c)，即★运算满足结合性。

0^0是幺元。

60^0，120^0，180^0逆元分别是300^0，240^0，180^0

因此(R, ★)是个群

练习

- 已知：在整数集 I 上的二元运算*定义为：$a,b \in I$,

$$a * b = a + b - 2$$

证明：$(I, *)$为群。

单位元：2
逆元：$x^{-1} = 4 - x$

1. 非空集合
2. 运算时封闭的
3. 满足结合律
4. 有单位元
5. 有逆元

群和消去律之间的关系

- 1）群满足消去律；2）有限半群若其上的运算满足消去律，则一定是群

有限半群上的运算若满足消去律，则为群

- 对于有限半群 $G=\{x_1,\ldots,x_n\}$，考察集合$x_1G=\{x_1x_1,\ldots,x_1x_n\}$。由封闭性有$x_1G\subset G$，由消去律知$\{x_1x_1,\ldots,x_1x_n\}$两两不同，故$x_1G=G$。同理$G=Gx_1$
- 由$x_1G=G$，故存在元素x_r满足$x_1x_r=x_1$。下证x_r为右单位元。对任意 $x\in G$ 由$G=Gx_1$有 $x=x'x_1$，进而 $xx_r=x'x_1x_r=x'x_1=x$ 故为右单位元。同理可证存在左单位元 x_l，可证单位元存在且唯一。
- 再利用$G=x_1G=Gx_1$且 G 中有单位元，立得x_1存在左逆元和右逆元，进而x_1可逆。由x_1一般性知G所有元素均可逆。

定理7.3.2

单选题 1分

设置

无限半群上的运算若满足消去律，那么该半群是否为群？

A 是

B 否

C 不知道

无限半群的反例：正整数乘法组成的半群

提交

8.2 群、群的基本性质

定义8.2.3

- 若群G的二元运算·满足交换律，即 $\forall a,b \in G$，都有$ab = ba$
- 则称G是交换群，或阿贝尔（Abel）群。

- 满足交换律的群是交换群！

8.2 群、群的基本性质

笑话

- 有人问一个法国四年级小朋友，3+4等于几？回答：不知道。
- 那4+3等于几？还是回答不知道。
- 那你小学都学了些什么呀？我知道3+4==4+3。
- 为什么呀？
- 因为加法是一个Abel群。

例题

- 设G={ e, a, b, c }，G上的运算由下表给出

适合结合律，有单位元，每个元素都有逆元素

	e	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*e*	*c*	*b*
b	*b*	*c*	*e*	*a*
c	*c*	*b*	*a*	*e*

特征：

1. 满足交换律
2. 每个元素都是自己的逆元
3. *a*, *b*, *c*中任何两个元素运算结果都等于剩下的第三个元素

克莱因（Klein） 四元群，也是可交换群

定义：平凡群、有限群、无限群

- 只含单位元的群称为平凡群

  $(\{0\},+)$是平凡群
- 规定集合G的基数为群$(G,\cdot)$的阶，当阶为某一整数时，该群为有限群；否则为无限群。

例

- $(Q^*,\cdot,1)$，其中Q^*是非0有理数，对于任意$a \in Q$，都有$1/a \in Q$，使$a \cdot (1/a) = (1/a) \cdot a = 1$。

  因此$(Q^*,\cdot,1)$是无限群.

实例：判断群的阶

- <Z,+>和<R,+>是
  - 无限群
- $<Z_n,.>$是
  - 有限群，也是 n 阶群.
- Klein四元群是
  - 4阶群
- 上述群都是交换群

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.1

- 设G是一个群，则
  1. G中的单位元唯一。 定理7.3.2
  2. G中每个元素都有唯一的逆元。 定理7.3.3
  3. 指数律成立：即$\forall a \in G, m$、n是任意整数，有

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

定理7.3.1

  4. 若$ab = ba$，则$(ab)^n = a^n b^n$

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.2

- 设半群$(G,\cdot)$有一个左单位元e, 且对$\forall a \in G$，都有左逆元$a^{-1} \in G$，使得$a^{-1}a = e$成立，则G是群。

- 证明：因为

$$ae = eae = ((a^{-1})^{-1}a^{-1})a(a^{-1}a) = (a^{-1})^{-1}(a^{-1}a)(a^{-1}a)$$
$$= (a^{-1})^{-1}(ea^{-1})a = ((a^{-1})^{-1}a^{-1})a = ea = a$$

- 所以e也是右单位元。

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.2

设半群$(G,\cdot)$有一个左单位元e, 且对$\forall a \in G$，都有左逆元$a^{-1} \in G$，使得$a^{-1}a = e$成立，则G是群。

证明（续）

- 以下证a^{-1}也是a的右逆元
- 设a'是a^{-1}的左逆元，于是有

$$aa^{-1} = eaa^{-1} = (a'a^{-1})aa^{-1} = a'(a^{-1}a)a^{-1} = (a'e)a^{-1} = a'a^{-1} = e$$

- 因此G是群！

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.2

- 设半群$(G,\cdot)$有一个左单位元e, 且对$\forall a \in G$，都有左逆元$a^{-1} \in G$，使得$a^{-1}a = e$成立，则G是群。

- 注意：定理中“$a^{-1}a = e$”中的e必须为一固定的左单位元。否则存在反例:
  此时a, b均是左单位元，但不构成群

$S = \{a, b\}$

	a	b
a	a	b
b	a	b

8.2 群、群的基本性质

- 定理8.2.3：设$(G,\cdot)$是半群，如果对G中任意两个元素a,b，方程$ax=b$和$ya=b$在G中都有解，则G是一个群。
- 证明：
  - $\because\ \forall a,b\in G,\quad ya=b$有解
  - $\therefore\ \forall a\in G,\quad ya=a$有解，不妨设某个解为$e$ $ea=a$
  - 对方程$ax=b$，设x'是其中的一个解，那么

    $\forall b\in G\quad eb=e(ax')=(ea)x'=ax'=b$

    所以e就是左单位元；
  - 此外，$\forall a\in G, ya=e$有解y'，

    所以y'是a的左逆元。
  - 由定理8.2.2，G是群。

例题

- 设群$G=(P(\{a,b\}),\oplus)$，其中$\oplus$为对称差. 解下列群方程

$$\{a\}\oplus X=\varnothing,\quad Y\oplus\{a,b\}=\{b\}$$

- 解

$$X=\{a\}^{-1}\oplus\varnothing=\{a\}\oplus\varnothing=\{a\},$$

$$Y=\{b\}\oplus\{a,b\}^{-1}=\{b\}\oplus\{a,b\}=\{a\}$$

例题

- 设$G = (\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \cdot\}$是$n$阶群，令

$$a_iG = \{a_i \cdot a_j \mid j=1,2,\ldots,n\}$$

证明 $a_iG = G$.

证 由群中运算的封闭性有 $a_iG \subseteq G$. 假设$a_iG \subset G$，即$|a_iG| < n$.

必有$a_j, a_k \in G$使得

$$a_i \cdot a_j = a_i \cdot a_k \quad (j \neq k)$$

由消去律得 $a_j = a_k$, 与 $|G| = n$矛盾.

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.4

- 设G是一个群，$\forall a,b \in G$恒有

$$(a^{-1})^{-1}= a, \qquad (ab)^{-1}= b^{-1}a^{-1}$$

- 证明：

$(a^{-1})^{-1}=(a^{-1})^{-1}e=(a^{-1})^{-1}a^{-1}a = ea = a$

$\because\ (ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = e$

$\therefore\ (ab)^{-1}= b^{-1}a^{-1}$

8.2 群、群的基本性质

定义8.2.4

- 设a是G中的一个元素，若有正整数k存在，使$a^k = e$，则满足$a^k = e$的最小正整数k称为元素a的阶（或周期），记为$O < a >$，并称a是有限阶元素。
- 例：$(Z_6, \cdot)$

  设$Z_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{5}\}$, 是$Z_6$上的模6加法运算。

  $O < \overline{1} > = 6$

  $O < \overline{3} > = 2$

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.5

- 设a是群G中的一个r阶元素，k是正整数，则
  1. $a^k = e$，当且仅当 $r|k$
  2. $O < a > = O < a^{-1} >$
  3. $r \leq |G|$

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.5

- 设a是群G中的一个r阶元素，k是正整数，则

  1. $a^k = e$，当且仅当 $r|k$

- 证明：
  - 充分性：$r|k$，则$k = rm$，得$a^k = a^{rm} = (a^r)^m = e^m = e$
  - 必要性：若$a^k = e$，$k = pr + q(0 <= q < r)$，得 $a^k = a^q = e$
  - r是a的阶，所以$q = 0$, 故$r|k$

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.5

- 设a是群G中的一个r阶元素，k是正整数，则

  2. $O<a>=O<a^{-1}>$

- 证明：
  - 设$O<a>=r, O<a^{-1}>=r'$
  - 定理8.2.1得 $(a^{-1})^r=(a^r)^{-1}=e$，所以$r'|r$
  - 同理，$r|r'$，故$r=r'$

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.5

- 设a是群G中的一个r阶元素，k是正整数，则

  3. $r \leq |G|$

- 思路：证明$e, a, \ldots, a^{r-1}$是不同的元素
- 证明：

  设$e = a^0$，且$a, \ldots, a^{r-1}$中$a^i = a^j$，其中$0 \leq i < j < r$

  $a^{j-i} = e$，即$0 < j - i < r$，与a的阶是r相矛盾

  $e, a, \ldots, a^{r-1}$是G中不同的元素，

  r $\leqslant$ $|G|$。

实例

- 例5 设G是群，$a,b\in G$是有限阶元. 证明
- (1) $O(b^{-1}ab)=O(a)$ (2) $O(ab)=O(ba)$

证 (1) 设 $O(a)=r$，$O(b^{-1}ab)=t$，则有

$$(b^{-1}ab)^r=\underbrace{(b^{-1}ab)(b^{-1}ab)\ldots(b^{-1}ab)}_{r个}$$

$$=b^{-1}a^rb=b^{-1}eb=e$$

从而有$t\mid r$.

另一方面，由 $a=(b^{-1})^{-1}(b^{-1}ab)b^{-1}$可知 $r\mid t$. 从而有 $O(b^{-1}ab)=O(a)$.

实例

(2) 设 $O<ab>=r$，　$O<ba>=t$，则有

$$(ab)^{t+1}=\underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{t+1个}$$

$$=a\underbrace{(ba)(ba)\ldots(ba)}_{t个}b$$

$$=a(ba)^t b=aeb=ab$$

由消去律得 $(ab)^t=e$，从而可知，$r \mid t$.

同理可证 $t \mid r$. 因此$O<ab>=O<ba>$

多选题 1分

Setting

关于群的元素的阶，下列说法正确的是

A 有限群的元素的阶都是有限的

B 所有元素的阶都是有限的群必为有限群

C 存在无限群，其元素的阶都是有限的

D 存在无限群，其元素的阶都是无限的

Submit

解答

- A: 有限群的元素的阶都是有限的
- B: 所有元素的阶都是有限的群必为有限群
- C: 存在无限群，其元素的阶都是有限的
- D: 存在无限群，其元素的阶都是无限的

解答

- A 正确，否则无限阶元的若干次幂就构成了一个无限集合
- B 错误 C正确，如$(P(N),\oplus)$ ：除单位元外所有元素阶均为2的群
- D 错误，单位元的阶只能为1

8.2 群、群的基本性质

定义8.2.5

- 设H是群G的一个非空子集，若H对于G的运算仍然构成群，则称H是G的一个子群，记为$H \leq G$。
  - $G, \{e\}$都是群，称为G的平凡子群。
  - 如果G的子群$H \neq G$，则称H为G的真子群，记为$H < G$
- 例
  - $(Z, +, 0)$是一个群，设T是正整数m整倍数的集合，则$(T, +, 0)$是$(Z, +, 0)$的一个子群。
  - 设G是全体$n \times n$阶实可逆矩阵的集合，它对矩阵乘法构成群。令 H 是行列式值为1的矩阵的集合，则 $H < G$ 。

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.6

- H是G的子群的充要条件是：
  1. H对G的乘法运算是封闭的，即$\forall a,b \in H$，都有$ab \in H$
  2. H中有单位元e'，且$e' = e$
  3. $\forall a \in H$，都有$a^{-1} \in H$，且a^{-1}是a在G中的逆元

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.6

- 证明
  - H是子群，所以H对G的运算封闭，并存在单位元e'
    G中，$e'e = e'$，H中$e'e' = e'$，故$e'e = e'e'$，$e' = e$
  - 任取$a \in H$，要证都有$a^{-1} \in H$
    设a在H中的逆元是a'，在G中的逆元是a^{-1}
    $aa^{-1} = e = e' = aa'$，故$a^{-1} = a'$，必要性得证
  - 充分性是显然的，定理得证

8.2 群、群的基本性质

定理8.2.7

8.2 群、群的基本性质

- 定理8.2.7 G的非空子集H是G的子群的充要条件是$\forall a,b \in H$，都有$ab^{-1} \in H$
- 证明
  - 需要证明H满足子群充要条件：
    封闭性、单位元、逆元素
  - $\forall a,b \in H$，$ab^{-1} \in H$，故$\forall a \in H$，令$b = a$,则$e = aa^{-1} \in H$（单位元）
  - $\forall b \in H$，$b^{-1} = eb^{-1} \in H$ （逆元）
  - $\forall a,b \in H$，$b^{-1} \in H$，故$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$ （封闭性）
- 证毕！

单选题 1分

Setting

设H_1, H_2是G的两个子群，则$H = H_1 \cap H_2$

A 是群G的子群

B 不是群G的子群

C 与G没有关系

Submit

8.2 群、群的基本性质

- 例：设H_1, H_2是G的两个子群，则$H = H_1 \cap H_2$也是G的子群。

- 证明：
  - G单位元$e \in H_1, H_2$，所以$e \in H$，即H非空。
  - 任设$a, b \in H$，则$a, b \in H_1$，$a, b \in H_2$，由定理8.2.7有 $ab^{-1} \in H_1$，$ab^{-1} \in H_2$，因此$ab^{-1} \in H$，
  - 所以H是G的子群。

8.2 群、群的基本性质

- 例：设a是群G中的任一元素，则$< a >= \{a^k | \ k \in Z\}$是$G$的子群。

- 证明：
  - $a^0 = e \in < a >$，所以$< a >$非空。
  - 任取$a^m, a^n \in < a >$，有$a^m (a^n)^{-1} = a^m a^{-n} = a^{m-n} \in < a >$
  - 由定理8.2.7，$< a > \leq G$。

总结：群的性质

性质1 设$(G, \cdot)$为群，则$\forall a \in G$，a的左逆元也是a的右逆元.

性质2 设$(G, \cdot)$为群，则G的左单位元e也是右单位元.

性质3 设$(G, \cdot)$为群，则$\forall a,b \in G$，方程$a \cdot x=b$和$y \cdot a=b$在G中的解唯一.

总结：群的性质

性质4 设$(G, \cdot)$为群，则

(1) $\forall a \in G$，$(a^{-1})^{-1}=a$;

(2) $\forall a,b \in G$，$(a \cdot b)^{-1}=b^{-1} \cdot a^{-1}$.

性质5 群$(G, \cdot)$中的乘法满足消去律，即$\forall a,b,c \in G$有

(1) 若 $a \cdot b = a \cdot c$，则 $b = c$(左消去律)

(2) 若 $b \cdot a = c \cdot a$，则 $b = c$(右消去律)

总结：群的性质

性质6 设G为群，则G中的幂运算满足：

(1) $\forall a \in G$，$a^n a^m = a^{n+m}$，$n, m \in \mathbf{Z}$

(2) $\forall a \in G$，$(a^n)^m = a^{nm}$，$n, m \in \mathbf{Z}$

(3) 若G为交换群，则 $(ab)^n = a^n b^n$.

性质7 G为群，$a \in G$且 $|a| = r$. 设k是整数，则

(1) $a^k = e$当且仅当$r \mid k$.

(2) $O < a^{-1} > = O < a >$.

8.2 群、群的基本性质

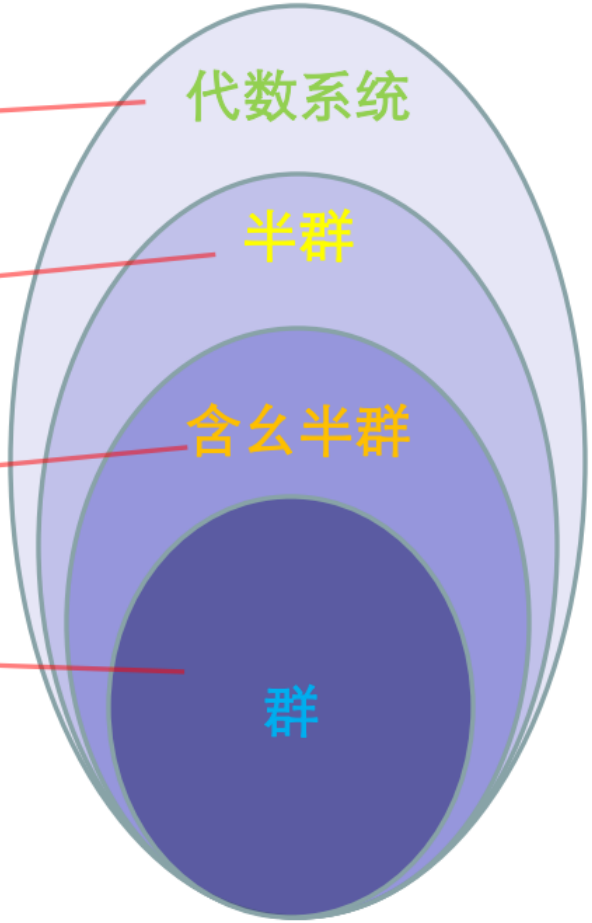
- 小结

非空集合+代数运算

非空集合+代数运算+结合律

非空集合+代数运算+结合律+单位元

非空集合+代数运算+结合律+单位元+逆元



第八章 群

8.1 半群

8.2 群、群的基本性质

8.3 循环群 群的同构

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

8.6 正规子群与商群

8.7 群的同态、同态基本定理

8.8 群的直积

RSA密码系统

- RSA公钥加密算法是1977年由罗纳德·李维斯特（Ron Rivest）、阿迪·萨莫尔（Adi Shamir）和伦纳德·阿德曼（Leonard Adleman）一起提出的。1987年首次公布，RSA就是他们三人姓氏开头字母拼在一起组成的
- RSA是目前最有影响力的公钥加密算法，它能够抵抗到目前为止已知的绝大多数密码攻击，已被ISO推荐为公钥数据加密标准

RSA密码系统

- RSA算法的主要思想：当p和q是一个大素数的时候，从它们的积pq去分解因子p和q，这是一个公认的数学难题。
- RSA的主要运算是取自Z_n中的指数运算
- Z_n是整数模n的同余类的加法群，在本节课中，我们将会学到Z_n是一种循环群。

http://baike.baidu.com/link?url=1TWtkiuBAZ5iXFYB-FtnyCeTsDny6T2TQZUSoztBOXEV9Cr1VNKoxRLBPbWvhRtHWuq4EUVmecfSvKBWuYnZ_K

8.3 循环群 群的同构

定义8.3.1

- 若群G中存在一个元素a，使得G中的任意元素g，都可以表示成a的幂的形式，即

$$G = \{a^k | k \in Z\},$$

- 则称G是循环群，记作$G = \langle a \rangle$，a称为G的生成元。

内容回顾：循环幺群

定义8. 1. 4

- 设$(M,\cdot,e)$是一个幺群，若存在一个元素$g \in M$，使得任意的$a \in M$，a都可以写成g的方幂形式，即$a = g^m$（m是非负整数），则称$(M,\cdot,e)$是一个循环幺群，并且称g是M的一个生成元。

8.3 循环群 群的同构

- 思考：
  - 循环群和循环么群的区别是什么？
  - 例：

$(N, +)$

$(Z_m, \cdot)$ $Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$

是否有逆元

思考

- 生成元的阶与循环群元素数相互关系？

相等

8.3 循环群 群的同构

定义

- 对于循环群$G=\langle a\rangle$，若生成元a的阶数$|a|=n$，也可记为$O(a)$，则$G=\langle a\rangle=\{e,a,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$，称为$n$阶循环群；

- 若$|a|$不存在，则$G=\langle a\rangle=\{e,a,a^{-1},a^2,a^{-2},\cdots\}$也是无限的，称为无限阶循环群

关于循环群的一个结论

- 所有的循环群都同构于$(\mathrm{Z},+)$或$(Z_n,+)$

- 当$o(a)=\infty$时，$G \cong (\mathrm{Z},+)$无限循环群
- 当$o(a)=n$时，$G \cong (Z_n,+)$$n$阶循环群

8.3 循环群 群的同构

- 思考：
  - 循环群的生成元有几个？
  - 例：

$(Z, +)$ $\quad 1, -1$

$(Z_6, \cdot)$ $\quad Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$(\bar{5})^0 = \bar{0}$ $\quad (\bar{5})^2 = \bar{4}$ $\quad (\bar{5})^4 = \bar{2}$ $\quad (\bar{5})^6 = \bar{0}$

$(\bar{5})^1 = \bar{5}$ $\quad (\bar{5})^3 = \bar{3}$ $\quad (\bar{5})^5 = \bar{1}$

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.1

- 设$G=\langle a\rangle$，则
- 1. 若$o\langle a\rangle=\infty$，则G中只有生成元a或a^{-1}
- 2. 若$o\langle a\rangle=n$，则G中有$\varphi(n)$个生成元
  - 其中$\varphi(n)$是欧拉函数，它表示小于n且与n互素的正整数个数。

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.1 若$o\langle a\rangle = \infty$，则$G$中只有生成元$a$或$a^{-1}$

- 证明：
  - 当$o\langle a\rangle = \infty$时，显然$a$是生成元。同时，$\forall a^k \in G$，$a^k = (a^{-1})^{-k}$，因此$a^{-1}$也是$G$的一个生成元
  - 假设还有另外一个生成元b，则不妨设$b = a^j$
  - 由于b也是生成元，则a可以写为$a = b^t$
  - 则必有$a = b^t = (a^j)^t = a^{jt}$，由消去律，$a^{jt-1} = e$
  - a为无限阶，则必有$jt - 1 = 0$，故只能有$j = t = 1$或$j = t = -1$

8.3 循环群 群的同构

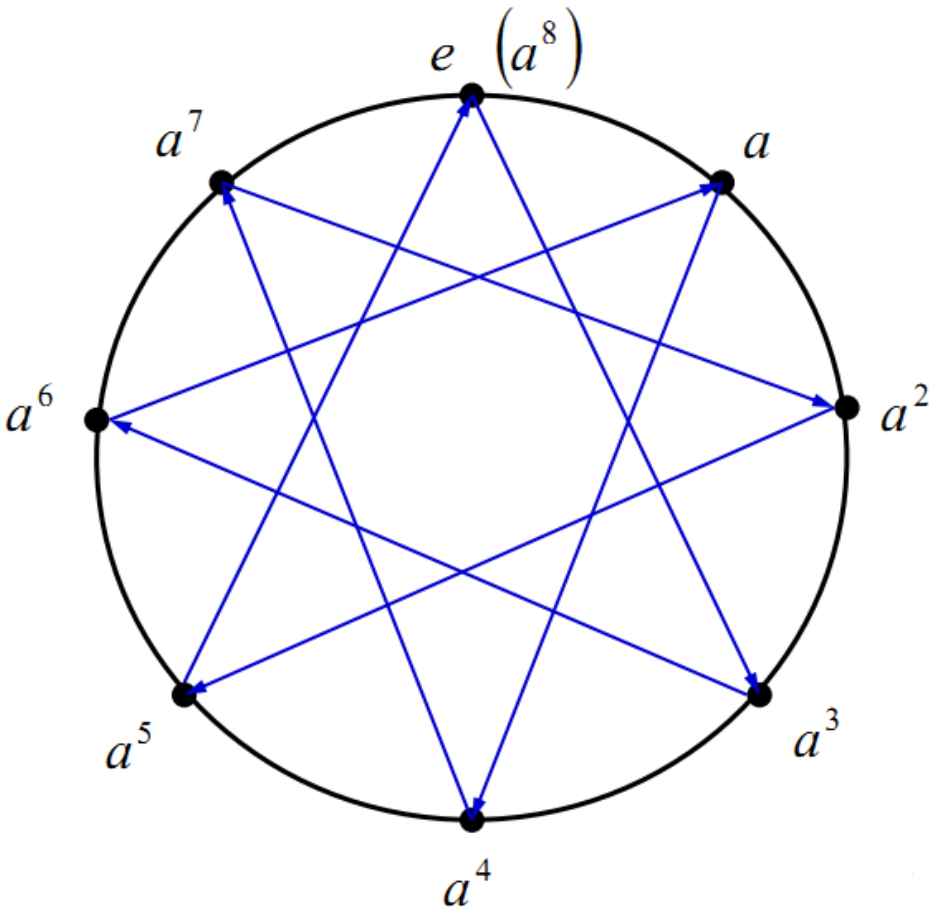
定理8.3.1 若$o\langle a\rangle = n$，则G中有$\varphi(n)$个生成元

- 证明（续）：
  - 当$o\langle a\rangle = n$时，若$G = \langle a\rangle = \langle a^r\rangle$，则存在$p$使$a = (a^r)^p$，即$a^{rp-1} = e$
  - 故存在q，使得$rp - 1 = qn$
  - 即$(r, n) = 1$ 证毕！

循环群中，若某元素的幂次与n互素，则可以作为另一生成元！

8.3 循环群 群的同构

例



谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn

清華大學
Tsinghua University

第十四周 作业

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

Homework

《离散数学2》

- 习题八
  - 7
  - 8
  - 11
  - 12
  - 13
  - 15

教学组成员

教 师： 刘世霞 shixia@tsinghua.edu.cn

助 教：袁隽 thss15_yuanj@163.com 18612600388

肖冬 xiaodong14ry@163.com 15201152906

所在单位：清华大学软件学院