1. 线上答疑，时间不变

今天下午 3-4

回顾： Jordan 标准形

- 存在性
- 计算　　$J_m(\lambda)$ 个数计算

- 幂零矩阵 ⟶ 循环子空间的直和
- 一般情形 ⟶ 如何化归到幂零情形

  （根子空间分解）

  固定 λ. 特征值. V_λ

  V_λ 可以约化到幂零情形

A 复方阵　　$P^{-1}AP = J$　（Jordan J）

循环基

第T讲 矩阵分析简介(一)

矩阵 + 微积分 结合 ?

"n^2 数组"　　"函数"

⇓

定义(函数矩阵)　$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(x) & \cdots & a_{mn}(x) \end{pmatrix}_{m\times n}$

$a_{ij}(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的实函数.

形如 $A(x)$ 的矩阵称为函数矩阵.

问: 矩阵的基本运算对函数矩阵是否适用?

加法, 数乘, 乘法, 转置　　对于函数矩阵 ?

$$A_1(x) + A_2(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ a_{m1}(x) & \cdots & a_{mn}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}(x) & \cdots & b_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}(x) & \cdots & b_{mn}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(x)+b_{11}(x) & \cdots \\ \vdots & \\ a_{m1}(x)+b_{m1}(x) & \cdots \end{pmatrix}$$

定义: 设 $A(x)$ 是 n 阶函数矩阵. 若存在 n 阶函数矩阵 $B(x)$, s.t

$\forall x \in [a,b]$,　$A(x)B(x) = B(x)A(x) = I$

则称 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上可逆, $B(x)$ 是 $A(x)$ 的逆矩阵

记为 $A^{-1}(x)$.

定理：n阶函数矩阵 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上可逆

$$\Updownarrow$$

（想：固定 x，$A(x)$ 是之前研究的矩阵，$\det A(x)$ 不为0

x 在 $[a,b]$ 上变动 $\rightsquigarrow$ $\det A(x)$ 在 $[a,b]$ 上变动）

$\det A(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处不为零.

若 $A(x)$ 可逆，则 $A^{-1}(x) = \dfrac{1}{\det A(x)} \operatorname{ad} A(x)$

$\operatorname{ad} A(x)$ 为 $A(x)$ 的伴随矩阵

$$\operatorname{ad} A(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & \cdots & A_{n1}(x) \\ \vdots & & \\ A_{1n}(x) & \cdots & A_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$A_{ij}(x)$ 是 $A(x)$ 中元素 $a_{ij}(x)$ 的代数余子式

问：如何定义秩？

回顾：A 矩阵，$\operatorname{rank} A = \max\{k \mid A \text{ 有非零的 } k \text{ 阶子式}\}$

定义：$A(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒等于零的子式的最高阶数定义为 $A(x)$ 的秩. 若 n 阶方阵 $A(x)$ 的秩为 n，则称 $A(x)$ 为满秩.

注：矩阵，可逆 = 满秩，

问：对于函数矩阵？ 可逆 $\Rightarrow$ 满秩？ ✓

满秩 $\Rightarrow$ 可逆？ ✗

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

（定义 $[0,2]$ 上）

$A(x)$ 不可逆. $x=1$，$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(x)$ 2阶子式 $x-1$ 在 $[0,2]$ 上不恒为0，秩为2.

定义：若 $A(x)=(a_{ij}(x))_{m\times n}$，$a_{ij}(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极限，且 $\lim\limits_{x\to x_0} a_{ij}(x)=a_{ij}$（$a_{ij}$ 为常数）

则称 $A(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极限，记 $\lim\limits_{x\to x_0} A(x)=A=(a_{ij})_{m\times n}$

例：$A(x)=\begin{pmatrix} 1 & \cos x \\ \sin x & x \end{pmatrix}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} A(x)=\begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to 0} 1 & \lim\limits_{x\to 0}\cos x \\ \lim\limits_{x\to 0}\sin x & \lim\limits_{x\to 0} x \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

性质：设 $\lim\limits_{x\to x_0} A(x)=A$，

$\lim\limits_{x\to x_0} B(x)=B$，则

- $\lim\limits_{x\to x_0}(A(x)\pm B(x))=A\pm B$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(kA(x))=kA$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(A(x)B(x))=AB$

连续，导数.

定义：$A(x)=(a_{ij}(x))_{m\times n}$ 若 $a_{ij}(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

（$\lim\limits_{x\to x_0} a_{ij}(x)=a_{ij}(x_0)$，则称 $A(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} A(x)=A(x_0)=(a_{ij}(x_0))_{m\times n}$

定义：若 $A(x)=(a_{ij}(x))_{m\times n}$. $a_{ij}(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则称 $A(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导. 记作

$$A'(x_0)=\left.\frac{dA(x)}{dx}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x_0+\Delta x)-A(x_0)}{\Delta x}$$

$$=(a_{ij}'(x_0))$$

性质:

- $A(x)$ 常数 $\Leftrightarrow \frac{dA(x)}{dx}=0$
- $A(x)$. $B(x)$ 可导 $\Rightarrow A(x)\pm B(x)$ 可导.
- $k(x)$ 函数, 若 $k(x)$ 与 $A(x)$ 可导, 则

$$\frac{d}{dx}(k(x)A(x)) = k'(x)A(x) + k(x)\frac{dA(x)}{dx}$$

- $A(x)$, $B(x)$ 均可导, $A(x)B(x)$ 可定义

$$\frac{d}{dx}(A(x)B(x)) = \frac{dA(x)}{dx}B(x) + A(x)\frac{dB(x)}{dx}$$

$A(x)B(x) \neq B(x)A(x)$ 不一定

练习: 计算 $\frac{d}{dx}(A^{-1}(x))$, 假定 $A(x)$, $A^{-1}(x)$ 可导

$$A(x)A^{-1}(x) = I$$

常数矩阵

$$\frac{d}{dx}(A(x)A^{-1}(x)) = \frac{dI}{dx} = 0$$

$$\frac{dA^{-1}(x)}{dx} = -A^{-1}(x)\frac{dA(x)}{dx}A^{-1}(x)$$

- 复合函数求导. $x=f(t)$ $A(x)$, $f(t)$ 可导

$$\frac{d}{dt}A(x) = \frac{dA(x)}{dx}\cdot\frac{df(t)}{dt}$$

定义. $A(x)$ 的 k 阶导数 $\frac{d^kA(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}A(x)}{dx^{k-1}}\right)$ $k\geq 2$

记为 $A^{(k)}(x)$

定义（积分） $A(x) = (a_{ij}(x))_{m\times n}$

$a_{ij}(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则称 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

并定义 $\int_a^b A(x)\,dx = \left(\int_a^b a_{ij}(x)\,dx\right)_{m\times n}$

性质：
$$\begin{cases} \int_a^b (A(x)\pm B(x))\,dx = \int_a^b A(x)\,dx \pm \int_a^b B(x)\,dx \\ \int_a^b kA(x)\,dx = k\int_a^b A(x)\,dx \qquad k\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

问：函数向量如何定义相关性或无关性？ $\boxed{\text{如何判别？}}$

定义：设 $\alpha_i(x) = \begin{pmatrix} a_{1i}(x) \\ \vdots \\ a_{ni}(x) \end{pmatrix}$ $(i=1,\cdots m)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数向量，若存在不全为 0 的实数 $k_1,\cdots k_m$ s.t. $\forall x\in[a,b]$ $k_1\alpha_1(x)+\cdots+k_m\alpha_m(x)=0$. 则称在区间 $[a,b]$ 上 $\alpha_1(x),\cdots\alpha_m(x)$ 线性相关，否则为线性无关.

注： $(\alpha_1(x)\ \cdots\ \alpha_m(x))\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$

固定 $x_0\in[a,b]$ $\quad \cancel{\Updownarrow}$

$$\underbrace{(\alpha_1(x_0),\ \cdots\ \alpha_m(x_0))}_{\text{常数矩阵}}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$$

定义：$\alpha_1(x), \cdots \alpha_m(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的函数向量.

记 $g_{ij} = \int_a^b \alpha_i^T(x)\alpha_j(x)\,dx$

$G \doteq (g_{ij})$ $\alpha_1(x), \cdots \alpha_m(x)$ Gram矩阵 内积

定理：$\alpha_1(x) \cdots \alpha_m(x)$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ Gram矩阵满秩.

分析：$k_1\alpha_1(x) + \cdots + k_m\alpha_m(x) = 0$

$\Rightarrow \int_a^b \alpha_i^T(x)(k_1\alpha_1(x) + \cdots + k_m\alpha_m(x)) = 0 \quad \forall i$

$\Leftrightarrow k_1 g_{i1} + \cdots + k_m g_{im} = 0 \longrightarrow (g_{i1} \cdots g_{im})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$

$g_{i1} = \int_a^b \alpha_i^T(x)\alpha_1(x)\,dx \qquad g_{im} = \int_a^b \alpha_i^T(x)\alpha_m(x)\,dx$

$\Leftrightarrow G\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$

① 若 G 满秩，$Gx = 0$ 只有零解

若 k_i, s.t $\sum k_i\alpha_i(x) = 0$, $\Rightarrow G\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_m = 0$

$\{\alpha_i(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上无关.

② 若 G 不满秩. 则 $Gx = 0$ 有非零解. 设 $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \int_a^b \alpha_i^T(x)(k_1\alpha_1(x) + \cdots + k_m\alpha_m(x))\,dx = 0 \quad 1 \le i \le m$

$\Rightarrow \int_a^b (k_1\alpha_1(x) + \cdots + k_m\alpha_m(x))^T(k_1\alpha_1(x) + \cdots + k_m\alpha_m(x))\,dx = 0$

$\Rightarrow k_1\alpha_1(x) + \cdots + k_m\alpha_m(x) = 0$

$\Rightarrow \alpha_i(x)$ 线性相关.

函数向量有足够多阶导数，可以采取如下方法。

定义：$\alpha_i(x) = \begin{pmatrix} a_{i1}(x) \\ \vdots \\ a_{in}(x) \end{pmatrix}$ $(i=1,\cdots m)$ 是 $[a,b]$ 上有 $m-1$ 阶导数的函数向量。令 $A(x) = (a_{ij}(x))_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T(x) \\ \vdots \\ \alpha_m^T(x) \end{pmatrix}$

$W(x) = (A(x), A'(x), \cdots A^{(m-1)}(x))_{m\times(mn)}$

↑ Wronski 矩阵（朗斯基）矩阵

例：$\alpha_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$ $\alpha_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ $m=2$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$W(x) = (A(x), A'(x)) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & x^2 & 0 & 1 & 2x \\ 1 & x^2 & x^3 & 0 & 2x & 3x^2 \end{array}\right)$$

定理：给定 $\alpha_1(x), \cdots \alpha_m(x)$，若存在 $[a,b]$ 上某点 x_0 s.t $\operatorname{rank}(W(x_0)) = m$，则 $\alpha_1(x), \cdots \alpha_m(x)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关。

证（反证法）若 $\{\alpha_i(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上线性相关 $\Rightarrow$ ∃不全为0的常数 $k_1, \cdots k_m$ s.t $k_1\alpha_1(x) + \cdots + k_m\alpha_m(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ 对上式求导

$$\begin{cases} k_1\alpha_1(x) + \cdots + k_m\alpha_m(x) = 0 \\ k_1\alpha_1'(x) + \cdots + k_m\alpha_m'(x) = 0 \\ \cdots \\ k_1\alpha_1^{(m-1)}(x) + \cdots + k_m\alpha_m^{(m-1)}(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1(x_0) & \cdots & \alpha_m(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{(m-1)}(x_0) & \cdots & \alpha_m^{(m-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (W(x_0))^T k = 0$ 由于 $k \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank} W(x_0) < m$，矛盾 $\boxed{///}$