



清华大学

Tsinghua University

# 离散数学(1) Discrete Mathematics

## 第九章 集合

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn



上节课有什么疑问吗？欢迎投稿。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer



## 列出下列集合中所有的元素

$$A = \{z \mid z = \{x, y\} \wedge x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 1\}$$

- ☐ A  $\{0, -2\}, \{0, -1\}, \{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, -2\}, \{1, -1\},$   
 $\{1, 0\}, \{1, 1\}, \{2, -2\}, \{2, -1\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}$
- ☐ B  $\{0, -2\}, \{0, -1\}, \{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, -2\}, \{1, -1\},$   
 $\{1, 1\}, \{2, -2\}, \{2, -1\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}$
- ☒ C  $\{0, -2\}, \{0, -1\}, \{0\}, \{0, 1\}, \{1, -2\}, \{1, -1\},$   
 $\{1\}, \{2, -2\}, \{2, -1\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}$



# 解析

$$A = \{z \mid z = \{x, y\} \wedge x \in Z \wedge y \in Z \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 1\}$$

- 集合元素之间应当是互异的

$$\{0, -2\}, \{0, -1\}, \{0, 0\}, \{0, 1\}$$

$$\{1, -2\}, \{1, -1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}$$

$$\{2, -2\}, \{2, -1\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}$$

$\{0, 1\}$ 和 $\{1, 0\}$ 是重复的，应该去掉一个

$\{0, 0\}$ 中两个元素重复，应记为 $\{0\}$

$\{1, 1\}$ 中两个元素重复，应记为 $\{1\}$



## 9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统的一个基本思想是  
“任一集合的所有元素都是集合”。

集合论研究的对象只是集合。除集合外的其它对象（如有序对、数字、字母）都要用也完全可以用集合来定义。

- 集合论公理系统的主要目的：
  - (1) 判定集合的存在性；
  - (2) 由已知集合构造出所有合法的集合（合法性）

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

$$\neg A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$$



元素  $x$   $\in$  集合  $A$

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$E = \{x \mid x = x\}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

对任意的集合  $A$ ,  $\emptyset \subseteq A$

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg (\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cup \emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\cap \emptyset$  无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

# 9.7.1 ZF (Zermelo-Frankel) 集合论公理系统



## (1) 外延公理

- 两集合相等的充要条件是它们恰好具有同样的元素。 $(\forall x)(\forall y)(x = y \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y))$
- 与定理9.2.1形式相同。  
一个集合由其元素唯一确定

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

$$\neg A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$$



元素  $x$   $\in$  集合  $A$

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$E = \{x \mid x = x\}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

对任意的集合  $A$ ,  $\emptyset \subseteq A$

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg (\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cup \emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\cap \emptyset$  无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$



# 9.7.1 ZF (Zermelo-Frankel) 集合论公理系统 (续)



## (2) 空集存在公理

- 存在不含任何元素的集合(空集 $\emptyset$ )。

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$$

- 该公理定义了集合论中的第一个集合——空集  $\emptyset$  。
- 且由外延公理可知，空集是唯一的。

# 9.7.1 ZF (Zermelo–Frankel) 集合论公理系统 (续)



## (3) 无序对集合存在公理

- 对任意的集合  $x$  和  $y$ , 存在一个集合  $z$ , 它的元素恰好为  $x$  和  $y$ 。

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \leftrightarrow ((u = x) \vee (u = y)))$$

- 已知  $x$  和  $y$  是集合, 由该公理可构造  $z = \{x, y\}$  也是集合。

当  $x = y$  时则构造出恰好有一个元素的集合。

有了该公理, 便可无休止地构造许多具体的集合。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

$$\neg A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$$



元素  $x$   $\in$  集合  $A$

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$E = \{x \mid x = x\}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

对任意的集合  $A$ ,  $\emptyset \subseteq A$

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg (\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cup \emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\cap \emptyset$  无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

# 9.7.1 ZF (Zermelo-Frankel) 集合论

## 公理系统 (续)



### (4) 并集合存在公理

- 对任意的集合  $x$ , 存在一个集合  $y$ , 它的元素恰好为  $x$  的元素的元素。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists u)(z \in u \wedge u \in x))$$

- 任给一集合  $x$ , 我们可以把  $x$  的元素的元素汇集到一起, 组成一个新集合。
- 解决了集合的广义并的存在性  
(集合的广义并是集合)



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

元素  $x$   $\in$  集合  $A$

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$E = \{x \mid x = x\}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

对任意的集合  $A$ ,  $\emptyset \subseteq A$

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg (\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\bigcup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\bigcup \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\bigcap \emptyset$  无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

# 9.7.1 ZF (Zermelo-FrankeI) 集合论

## 公理系统 (续)



### (5) 子集公理模式 (分离公理模式)

- 对任意的谓词公式  $P(z)$ , 对任意的集合  $x$ , 存在一个集合  $y$ , 它的元素  $z$  恰好既是  $x$  的元素又使  $P(z)$  为真。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge P(z)))$$

- 对任意的集合  $x$ , 存在  $x$  的子集  $y$ ,  $y$  的元素  $z$  使  $P(z)$  为真.
- 不只是一条公理, 而是无限多条有同样模式的公理,
- 可解决交集、差集、广义交、笛卡儿积的存在性。

# 9.7.1 ZF (Zermelo-Frankel) 集合论公理系统 (续)



例：以交集和差集为例

定理9.7.1 对任意的集合A，交集 $A \cap B$ 是集合。

- 对任意的集合 $x$ ，存在 $x$ 的子集 $y$ ， $y$ 的元素 $z$ 使 $P(z)$ 为真。
- 对任意的集合A，存在A的子集 $A \cap B$ ，其元素使 $z \in B$ 为真

$$y = \{ z / z \in x \wedge P(z) \} \quad y \subseteq x, y \text{ 是 } x \text{ 的子集,}$$

$$A \cap B = \{ z / z \in A \wedge z \in B \}$$

- 子集公理保证了上述集合的存在性。

$$A - B = \{ z / z \in A \wedge z \notin B \} \quad \text{差集仅需将 } P(z) \text{ 代为 } z \notin B.$$



# 思考题：罗素悖论的解决？





## 集合的存在性(续)

- 子集公理模式：对任意的集合 $x$ ，存在 $x$ 的子集 $y$ ， $y$ 的元素 $z$ 使 $P(z)$ 为真。

集合不能独立定义（不能仅由谓词定义），  
需要从已经存在的集合中分离出来；

所有集合的集合不存在！

- 定理9.7.5 万有集不存在定理

不存在集合 $A$ ，使任一集合都是 $A$ 的元素。



# 罗素悖论的解决

- $H = \{ x \mid \underline{x \text{ 是一个集合}} \wedge x \notin x \}$

万有集合

- 子集公理模式(分离公理模式): 对任意的集合 $x$ , 存在 $x$ 的子集 $y$ ,  $y$ 的元素 $z$ 使 $P(z)$ 为真.
- $P(z) = z \notin z \rightarrow H = \{x/P(x)\}$  是集合吗?
- 套用于子集公理模式(分离公理模式)



# 不存在集合 $A$ ，使任一集合都是 $A$ 的元素。

- **证明：**假设存在集合 $A$ ，使任一集合都是 $A$ 的元素。  
选 $P(x)$ 为 $x \notin x$ ，依据子集公理，存在集合

$$A_0 = \{ x / x \in A \wedge x \notin x \}$$

分为两种情况

- 1)  $A_0 \in A_0$ ，根据 $A_0$ 的定义有  $A_0 \notin A_0$ ，矛盾
- 2)  $A_0 \notin A_0$ ，根据 $A_0$ 的定义有  $A_0 \in A_0$ ，矛盾。

因此，不存在万有集合，定理得证。罗素悖论出现的原因是假设万有集合存在。

满足性质 $P$ 的集合不能凭空产生，而要是已有的集合，然后在集合里找满足性质 $P$ 的子集



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$\neg A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

元素  $x$   $\in$  集合  $A$

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$E = \{x \mid x = x\}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

对任意的集合  $A$ ,  $\emptyset \subseteq A$

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg (\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cup \emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\cap \emptyset$  无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$



# 为什么 $\cap \emptyset$ 无意义?

- 假设 $\cap \emptyset$ 为集合, 则有广义交的定义,

$$\cap A = \{ x / (\forall z) z \in A \rightarrow x \in z \}$$

$$\cap \emptyset = \{ x / (\forall z) z \in \emptyset \rightarrow x \in z \}$$

$$x \in \cap \emptyset \quad \text{永真}$$

- 则 $\cap \emptyset$ 为所有集合的集合, 与上述定理矛盾, 因此规定 $\cap \emptyset$ 不存在。



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$\neg A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

元素  $x$   $\in$  集合  $A$

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$E = \{x \mid x = x\}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

对任意的集合  $A$ ,  $\emptyset \subseteq A$

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg (\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\bigcup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\bigcup \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\bigcap \emptyset$  无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

# 9.7.1 ZF (Zermelo-Frankel) 集合论公理系统 (续)



## (6) 幂集合公理 (集合的幂集是集合)

- 对任意的集合  $x$ , 存在一个集合  $y$ , 它的元素恰好是  $x$  的子集。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\forall u)(u \in z \rightarrow u \in x))$$

$$(\forall A)(\exists P(A))(\forall x)(x \in P(A) \leftrightarrow x \subseteq A)$$

- 对任意的集合  $A$ , 存在一个集合  $P(A)$ , 恰好以  $A$  的一切子集为元素。故集合的幂集是集合。
- 注：后一写法非正式，仅用于帮助理解。

# 9.7.1 ZF (Zermelo-Frankel) 集合论公理系统 (续)



## (7) 正则公理

- 对任意的非空集合  $x$ , 存在  $x$  的一个元素, 它和  $x$  不相交。

$$(\forall x)(x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge (x \cap y = \emptyset)))$$

- 对任意非空集合  $x$ ,  $x$  至少有一元素  $y$  使  $x \cap y$  为空集
- 此时称该元素为集合  $x$  的一个极小元。
- 结论: 任一非空集合都有极小元。

不存在以自身为元素的集合  
排除奇异集合



## 9.7.1 ZF (Zermelo-Frankel) 集合论 公理系统 (续)



例: 设  $B = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ,  $B_1 = \{\emptyset\}$ ,

则  $B_1 \in B$  且  $B_1 \cap B = \emptyset$ ,

所以  $B_1$  是  $B$  中的极小元。

设  $B_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ , 尽管  $B_2 \in B$ ,

但  $B_2 \cap B = \{\{\emptyset\}\}$ ,

所以  $B_2$  不是  $B$  中的极小元。



# 讨论

- 利用正则公理可以证明不存在下列形式的集合：
- 1、 $x \in x$ ：如果这样的集合 $x$ 存在，那么 $\{x\}$ 只有 $x$ 一个元素，但 $\{x\} \cap x = \{x\}$ 非空，不合于正则公理。
- 2、所有集合组成的集合：如果这个集合存在，那么根据第一条必然不是自身的元素，但是与定义矛盾。
- 3. 不存在无限递降的集合序列
- 对任何非空的传递集合 $A$ ，必有 $\emptyset \in A$

# 不存在无穷递降的集合列



证明：

- $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni \cdots$
- 利用正则公理，构造集合  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ 。  
假设  $x_i$  为极小元，由于  $x_{i+1} \in x_i$ ，故  $x_i \cap A \neq \emptyset$   
因此该集合不存在极小元，矛盾。从而不存在无穷递降的集合列。

# 9.7.1 ZF (Zermelo–Frankel) 集合论公理系统 (续)



## (8) 无穷公理

存在一个由所有自然数组成的集合

$$(\exists x)(\phi \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x))$$

$$(\exists N)(\phi \in N \wedge (\forall y)(y \in N \rightarrow y^+ \in N))$$

## 9.7.4 无穷公理和自然数集合



- 自然数的集合表示方法：
  - Zermelo 1908年曾给出一种方法：
  - $0 = \emptyset$  ,  $1 = \{\emptyset\}$  ,  $2 = \{\{\emptyset\}\}$  , ...
  - 满足  $0 \in 1 \in 2 \in \dots$ 。但 ‘ $\in$ ’ 关系不满足传递性。
  - 即由  $A \in B \wedge B \in C$  成立，却推不出  $A \in C$  成立。
  - 未能准确刻画自然数本身所固有的良好性质。

## 9.7.4 无穷公理和自然数集合



- 需注意每个自然数均包含两方面的信息：
  - (1) **序数**（排序） order
  - (2) **基数**（对应的个数） cardinal
- 1924年，Von Neumann在满足序数与基数两种性质的意义下，通过定义后继，给出了另一种自然数的表示：



# 后继与自然数

## 定义9.7.3 前驱与后继

- 对任意的集合 $A$ ，定义集合

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

$A^+$  称为  $A$  的后继， $A$  称为  $A^+$  的前驱。

## 定义9.7.4 用后继定义自然数

- 集合  $0 = \emptyset$  是一个自然数。若集合  $n$  是一个自然数，则集合  $n+1 = n^+$  也是一个自然数。

## 9.7.4 无穷公理和自然数集合



按照上述定义，每个自然数可表示为：

$$0 = \phi$$

$$1 = 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\phi\}$$

$$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

...

$$n+1 = n^+ = n \cup \{n\} = \{0, 1, \dots, n\}.$$

$$n \subset n+1$$

$$n \in n+1$$



## 9.7.4 无穷公理和自然数集合



### 定义9.7.5 自然数的性质

- 对任意的自然数  $m$  和  $n$

$$m < n \Leftrightarrow m \subset n \Leftrightarrow n > m$$

$$m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n \Leftrightarrow n \geq m$$

## 9.7.4 无穷公理和自然数集合



### 定义9.7.6 集合的三歧性

- 对集合 $A$ ，如果对任意的集合 $A_1 \in A$ 和 $A_2 \in A$ ，使

$$A_1 \in A_2, \quad A_1 = A_2, \quad A_2 \in A_1$$

三式中恰好有一个成立，就称集合 $A$ 有三歧性。

## 9.7.4 无穷公理和自然数集合



### 定理9.7.11 自然数的三歧性

- 自然数集合 $N$ 有三歧性。
- 每个自然数都有三歧性。即

$$(\forall m)(\forall n)(m \in N \wedge n \in N \rightarrow m < n \vee m = n \vee m > n)$$



$U_{2021} = ?$

- ☐ A 0
- ☒ B 2020
- ☐ C 2021
- ☐ D 2022



# 自然数运算

- $\cup 2021 = 2020$

$$2021 = \{0, 1, \dots, 2020\}$$

- $\cap 2021 = 0$
- $\cap \{1921, 2021\} = 1921$

$$n \subset n+1$$

# 9.7.1 ZF (Zermelo–Frankel) 集合论公理系统 (续)



## (9) 替换公理模式

- 对于任意的谓词公式 $P(x, y)$ ，如果对任意的 $x$  **存在唯一的** $y$ 使得 $P(x, y)$ 为真，那么对所有的集合 $t$ 就存在一个集合 $s$ ，使 $s$ 中的元素 $y$ 恰好是 $t$ 中元素 $x$ 所对应的那些 $y$ 。

$$(\forall x)(\exists! y)P(x, y) \rightarrow (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \wedge P(z, u)))$$

- 其中 $(\forall x)(\exists! y)P(x, y)$ 表示 $(\forall x)(\exists y)(P(x, y) \wedge (\forall z)(P(x, z) \rightarrow z = y))$ ，符号 $(\exists! y)$ 表示存在唯一的 $y$ 。
- 替换公理是子集公理模式的二元推广。

# 用替换公理等的举例证明 (P152)



已知 $u$ 和 $v$ 是集合,下面证明  $\{u, v\}$ 也是集合。

由空集公理,  $\emptyset$ 是集合。

由幂集公理,  $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$ 是集合。

$P(\{\emptyset\})=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 也是集合。

令集合  $t=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ , 定义  $P(x, y)$ 为 $P(\emptyset, u)=T$

$P(\{\emptyset\}, v)=T$ , 则  $t$  和  $P(x, y)$ 满足替换公理的前提,

由替换公理可得, 存在由 $u$ 和 $v$ 构成的集合 $s=\{u, v\}$ 。

$$(\forall x)(\exists! y)P(x, y) \rightarrow (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \wedge P(z, u)))$$

# 9.7.1 ZF (Zermelo-Frankel) 集合论

## 公理系统 (续)



### (10) 选择公理

- 对任意的关系 $R$ , 存在一个函数 $F$ ,  $F$ 是 $R$ 的子集, 而且 $F$ 和 $R$ 的定义域相等
- $(\forall \text{关系 } R)(\exists \text{函数 } F)(F \subseteq R \wedge \text{dom}(R) = \text{dom}(F))$
- 在第11章函数中还将详细介绍该公理。





- 一般的关系 $R$ 不一定是函数,  $\therefore R$ 不保证单值性.
- 对某些 $x \in \text{dom}(R)$ , 有 $y_1, y_2, \dots$ ,  
使 $y_1 \in \text{ran}(R), y_2 \in \text{ran}(R), \dots$ ,  
且 $\langle x, y_1 \rangle \in R, \langle x, y_2 \rangle \in R, \dots$ .  
这时 $x$ 有多个值 $y_1, y_2, \dots$ 与之对应.
- 为了构造函数 $f$ , 只要对任意的 $x \in \text{dom}(R)$ , 从 $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle, \dots$  中任取一个放入 $f$  中.
- 则 $f$  是单值的,  $f \subseteq R$ , 且有 $\text{dom}(f) = \text{dom}(R)$ .
- $f$ 是函数  $f : \text{dom}(R) \rightarrow \text{ran}(R)$ .
- 多个有序对可任选其一, 所以构造的 $f$ 可有多



# 集合的存在性

- 定理9.7.1 交集存在定理

对任意的集合  $A$  和  $B$ , 交集  $A \cap B$  是集合。

- 定理9.7.2 差集存在定理

对任意的集合  $A$  和  $B$ , 差集  $A - B$  是集合。

- 定理9.7.3 广义交存在定理

对任意的非空集合  $A$ , 广义交  $\bigcap A$  是集合。



# 集合的存在性

- 定理9.7.4 笛卡儿积存在定理

对任意的集合  $A$  和  $B$ , 笛卡儿积  $A \times B$  是集合。

- 定理9.7.5 万有集不存在定理

不存在集合  $A$ , 使任一集合都是  $A$  的元素。

- Russell悖论



# 集合的重要性质

- 定理9.7.6 集合的重要性质1  
对任意的集合  $A$ ,  $A \notin A$ 。
- 定理9.7.7 集合的重要性质2  
对任意的集合  $A$  和  $B$ , 有  $\neg(A \in B \wedge B \in A)$
- 定理9.7.8 传递集合的性质7  
对任意非空的传递集合  $A$ , 有  $\emptyset \in A$ 。



## 定理9.7.7 证明

- 定理9.7.7 集合的重要性质2  
对任意的集合  $A$  和  $B$ , 有  $\neg(A \in B \wedge B \in A)$
- 证明: 反证法, 假定存在集合  $A$  和  $B$ , 满足  $A \in B \wedge B \in A$ 。构造集合  $\{A, B\}$ , 由正则公理, 该集合存在极小元。
  - 先假定极小元为  $A$ 。由于  $B \in A$ , 故  $A \cap \{A, B\} = B \neq \emptyset$ , 故  $A$  非极小元, 矛盾。
  - 再假定极小元为  $B$ 。同上可得矛盾。
- 故定理9.7.7成立。■

# 集合论公理化



- 逻辑悖论的出现对公理化提出了强烈的要求
- 集合论公理化企图实现的目标
  - 统一现代数学所有的研究对象
  - 避免所有迄今为止发现的所有悖论
  - 尽量做到
    - 合理（无矛盾性）、完美（完备性）、明晰简洁



# 10条集合论公理

- 外延公理
- 空集存在公理
- 无序对集合存在公理
- 并集合存在公理
- 子集公理模式(分离公理模式)
- 幂集合公理
- 正则公理
- 无穷公理
- 替换公理模式
- 选择公理

# 10条集合论公理



- 无穷公理的本质：可以通过类似于数学归纳法的方法构造出一个无穷集合（自然数集合）
- 空集公理、无序对公理、并集公理、幂集公理、无穷公理、分离公理和替换公理是对康托尔概况原则的具体化：既保留原规则的合理内容，又消除了悖论
- 上述公理+选择公理：集合存在性公理
- 外延公理+正则公理：对集合的限制（刻画）
  - 外延：说明集合相等的条件
  - 正则：防止低阶集合包含高阶集合的可能，避免悖论



# 10条集合论公理



- 分离公理模式和替换公理模式是两条公理模式
  - 允许用公式代之
  - 本质上断言一个集合在一个映射下的像也是一个集合
- 使用上述公理系统，可以描绘出集合论的积累分层时间
  - 从空集开始，迭代地使用并集公理和幂集公理，建立起越来越大的集合系统。



科学悖论是促进理论  
发展的一种动力。



清华大学

Tsinghua University

# 离散数学(1) Discrete Mathematics

## 第十章 关系

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn



# 数学的基本概念？



# 大部分数学家相信……



- 任何数学理论在某种意义上是关于集合的理论
- 任何数学命题是真的都意味着它在ZFC中得到证明。
  - 集合论来刻画经典数学的**基本概念**
    - **关系，函数，序，数**
  - 困难：有很多数学问题，包括连续统假设。

# 关系



《Shenzhen University Journal(Humanities & Social Sciences)》 2009-02

[Add to Favorite](#) [Get Latest Update](#)

## The Study of Localization of Social Work Theory in Mainland China From "Guan Xi" and "Embeddedness" Perspectives

TANG Yong (School of Law, Shen Zhen Univ., Shenzhen, 518060, China)

The study of localization of social work theory has been one of the hot issues in social work domain in Mainland China, but it is not been placed in a systematic theory framework. In recent years, scholars from Mainland China reflect upon western social work theories and introduce the concepts of "guan xi" and "embeddedness" into the study. These concepts as a new perspective provide revelation to the localization of social work theory study in Mainland China.

【Key Words】 : Localization of social work theory guan xi embeddedness

【Category Index】 : C916



新快报 xkb.com.cn



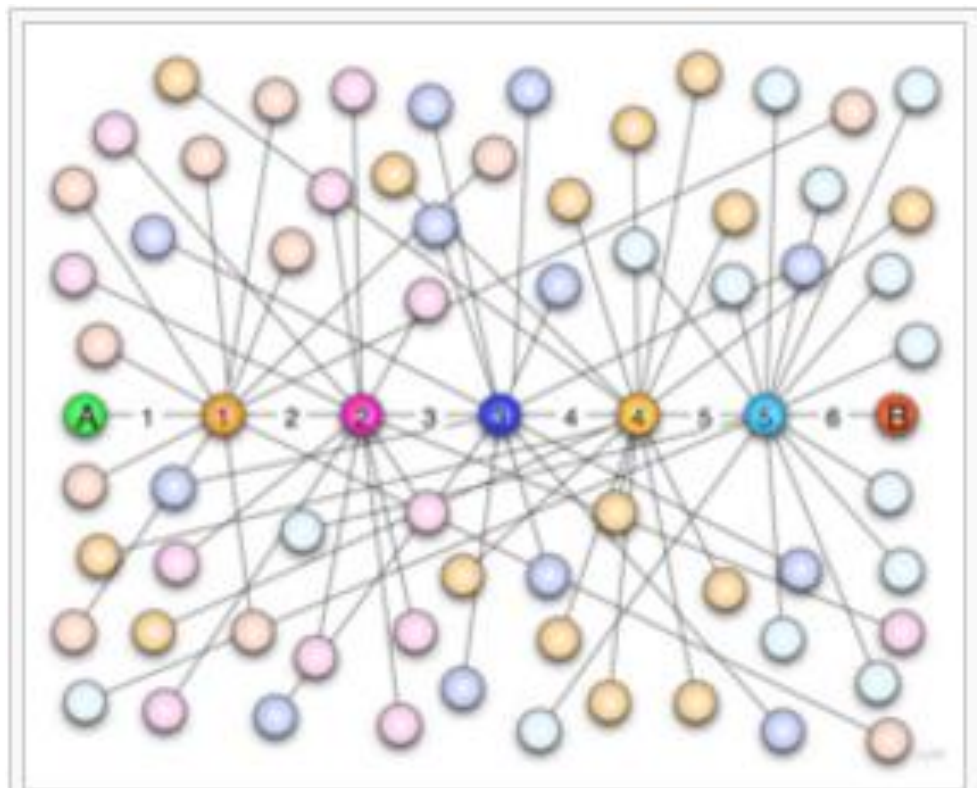
# 关系

- 关系是数学中最重要的概念之一
  - 父子关系、师生关系
  - 等于、大于、小于关系
  - 直线的平行、垂直关系
- 在计算机科学中有广泛应用
  - 人工智能
  - 程序设计
  - 数据库管理—关系数据库

# 关系很强大：六度分隔理论



- Six Degrees of Separation: 1967, 哈佛大学心理学教授斯坦利·米尔格拉姆：平均只需要5个中间人就可以联系任何两个互不相识的美国人





# 微软MSN中的六度理论之应用



- 微软的研究人员 Jure Leskovec 和 Eric Horvitz[4]过滤2006年某个单一月份的MSN简讯，利用2.4亿使用者的300亿通讯息进行比对，结果发现任何使用者只要透过平均6.6人就可以和全数据库的1,800百亿组配对产生关连。48%的使用者在6次以内可以产生关连，而高达78%的使用者在7次以内可以产生关连[5]。

# Facebook



- 在2008年被证实,当时的研究依靠facebook的数据数据库和流量讯息、地域关系,论证人与人的联系环节为5.28人;约莫三年的时间,今天的研究已经证实全世界每一个人之间的联系间隔环已经缩减到4.74人。 在一些网络高度化的国家,这个数字会降低;如果是链接本国或同语种的「陌生人」,这个数字还会更下降

# 数学解释



- 若每个人平均认识260人，其六度就是 $260^6 = 308,915,776,000,000$ （约300万亿）。消除一些节点重复，那也几乎覆盖了整个地球人口若干多倍。



# 第十章 关系

- 10.1 二元关系
- 10.2 关系矩阵和关系图
- 10.3 关系的逆、合成、(限制和象)
- 10.4 关系的性质
- 10.5 关系的闭包
- 10.6 等价关系和划分
- 10.7 相容关系和覆盖
- 10.8 偏序关系



# 二元关系

- 最简单的关系
- 可看作对应 (Correspondence) 或者映射 (Map)
- 关系的要素成对出现，且这两个对象有顺序的。



# 有序对

- 由两个元素 $x$ 和 $y$ （允许 $x=y$ ）按给定次序排列组成的二元组称为一个有序对或序偶，记作 $\langle x, y \rangle$ ，其中 $x$ 是它的第一元素， $y$ 是它的第二元素。
- 用集合的形式，有序对 $\langle x, y \rangle$ 定义为
$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$
- 有序对 $\langle x, y \rangle$ 具有以下性质：
  1. 当 $x \neq y$ 时， $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ 。
  2.  $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 的充要条件是  $x = u$  且  $y = v$ 。

# 笛卡儿积(Cartesian product)



- 设 $A, B$ 为集合，用 $A$ 中元素为第一元素， $B$ 中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称为 $A$ 和 $B$ 的笛卡儿积，记作 $A \times B$ 。

$A$ 和 $B$ 的笛卡儿积的符号化表示为

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

- $A = \{\emptyset\}$ ,
- $P(A) \times A = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle \}$

# 笛卡尔 (1596年-1650年)



- René Descartes
- 法国哲学家、数学家、物理学家
- “我思故我在”
  - “普遍怀疑”的终点。他从这一点出发确证了人类知识的合法性。
- 解析几何之父，西方现代哲学思想的奠基人
- 数学史上最浪漫的故事
  - 瑞典一个小公国18岁的公主克里斯蒂娜
  - 日日给公主写信，因被国王拦截，克里斯蒂娜一直没收到笛卡尔的信。笛卡尔在给克里斯蒂娜寄出第十三封信后就气绝身亡了。



# 笛卡尔 (1596年-1650年)



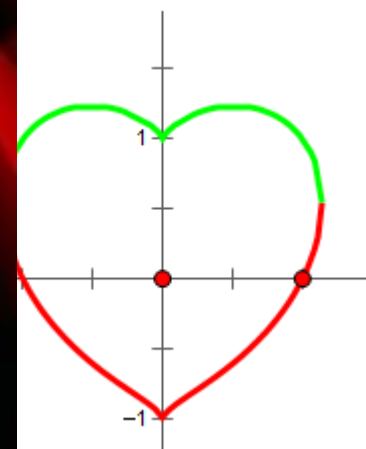
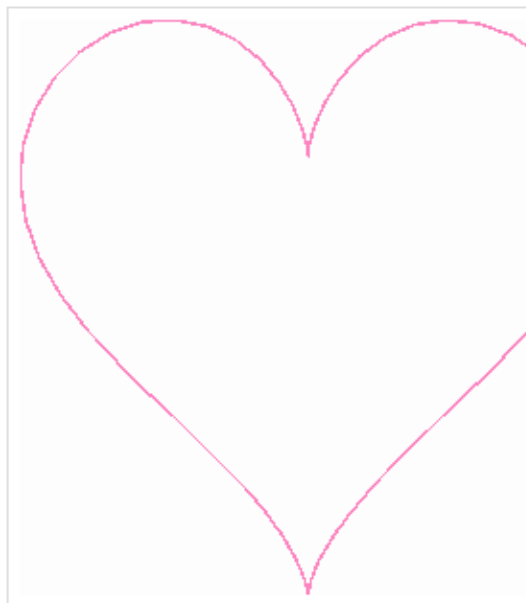
- 心形线



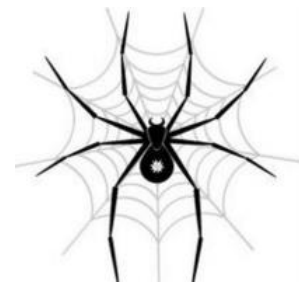
$$x = 16(\sin t)^3$$

$$y = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$$

$$(x-1)^3 = x^2y^3$$



# 解析几何的创立



- 思考

- 几何图形是直观的，而代数方程是比较抽象的，能不能把几何图形和代数方程结合起来，也就是说能不能用几何图形来表示方程呢？
- “点”和“数”联系起来。

- 据说有一天，笛卡尔生病卧床，病情很重

- 屋顶角上的一只蜘蛛，拉着丝垂了下来。一会功夫，蜘蛛又顺这丝爬上去，在上边左右拉丝。
- 把蜘蛛看作一个点。他在屋子里可以上，下，左，右运动，能不能把蜘蛛的每一个位置用一组数确定下来呢？
- 屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条线，如果把地面上的墙角作为起点，把交出来的三条线作为三根数轴，那么空间中任意一点的位置就可以在这三根数轴上找到有顺序的三个数。
- 反过来，任意给一组三个有顺序的数也可以在空间中找到一点P与之对应，同样道理，用一组数 $(x, y)$ 可以表示平面上的一个点，平面上的一个点也可以用一组两个有顺序的数来表示，这就是坐标系的雏形。

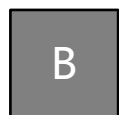


有集合  $A$ ,  $B$ , 若  $B$  为空集, 则



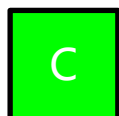
A

$$A \times B = \emptyset$$



B

$$A \times B \neq B \times A$$



C

$$A \times B = B \times A$$



# 笛卡尔积及其性质

- 不适合交换律  $A \times B \neq B \times A$  ( $A \neq B, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ )
- 不适合结合律  $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$  ( $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ )
- 对于并或交运算满足分配律

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

- 若 $A$ 或 $B$ 中有一个为空集, 则 $A \times B$ 就是空集.

$$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$$

- 若 $|A| = m, |B| = n$ , 则  $|A \times B| = mn$



# 有序对与笛卡儿积

- 证明: 对任意三个集合 $A$ ,  $B$ ,  $C$ 有

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

证明:  $\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

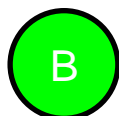
设 $A, B, C, D$ 是任意集合，判断下列命题是否正确？

$$\diamond A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$$



A

正确



B

不正确



# 有序对与笛卡儿积

- 例：设 $A, B, C, D$ 是任意集合，判断下列命题是否正确？

$$A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$$

- **不正确**。取 $A = \emptyset, B \neq C, A \times B = A \times C = \emptyset$

$$A - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$$

- **不正确**。取 $A = B = \{1\}, C = \{2\},$

$$A - (B \times C) = \{1\} - \{ \langle 1, 2 \rangle \} = \{1\}$$

$$\text{而 } (A - B) \times (A - C) = \emptyset \times \{1\} = \emptyset$$



# 10.1 二元关系(Binary Relations)

## 10.1.1 二元关系（有序对的集合）

- 如果一个集合满足以下条件之一：

1. 集合非空，且它的元素都是有序对；
2. 集合是空集；

则称该集合为一个二元关系，记作 $R$ 。

- 二元关系也简称关系。





## 10.1 二元关系(Binary Relations)

对于二元关系 $R$ , 如果  $\langle x, y \rangle \in R$ , 也可记作  $xRy$ 。

如果  $\langle x, y \rangle \notin R$ , 则记作  $x \not R y$ 。

- 实例:  $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle a, b \rangle\}$ ,  $S = \{\langle 1, 2 \rangle, a, b\}$ .
- $R$ 是二元关系, 当 $a, b$ 不是有序对时,  $S$ 不是二元关系
- 根据上面的记法, 可以写  $1R2$ ,  $aRb$ ,  $a \not R c$  等.



# 10.1 二元关系(Binary Relations)

## 定义10.1.1 A到B的二元关系

- 设 $A, B$ 为集合,  $A \times B$ 的**任一子集**所定义的二元关系称为 $A$ 到 $B$ 的二元关系。
- 特别当  $A = B$  时,  $A \times A$ 的**任一子集**称为 $A$ 上的一个二元关系。
- 例4  $A=\{0,1\}, B=\{1,2,3\}, R_1=\{<0,2>\}, R_2=A \times B, R_3=\emptyset, R_4=\{<0,1>\}.$
- 那么  $R_1, R_2, R_3, R_4$ 是从  $A$  到  $B$  的二元关系,
- $R_3$ 和 $R_4$ 同时也是  $A$ 上的二元关系.



# $n$ 元关系

定义10.1.2  $n$ 元关系 ( $n$ 元组的集合)

- 若  $n \in N$  且  $n > 1$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个集合, 则

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

的任一子集称为从  $A_1$  到  $A_n$  上的一个  $n$  元关系。

## 10.1 二元关系(Binary Relations)



小于等于关系  $L_A$ , 整除关系  $D_A$ , 包含关系  $R_{\subseteq}$  定义:

$L_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \leq y \}$ ,  $A \subseteq R$ ,  $R$  为实数集合

$D_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \text{ 整除 } y \}$ ,  $A \subseteq Z^*$ ,  $Z^*$  为非0整数集

$R_{\subseteq} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \subseteq y \}$ ,  $A$  是集合族.

- $A$  上的真包含关系可定义为:

$$R_{\subset} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \subset y \}$$

## 10.1 二元关系(Binary Relations)



对任意的集合A, A的幂集 $P(A)$ 上的包含关系可定义为:

$$R_{\subseteq} = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in P(A) \wedge y \in P(A) \wedge x \subseteq y \}$$

例如  $B = \{a, b\}$ , 则  $P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ,

$P(B)$ 上的包含关系是

$$R_{\subseteq} = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{a\} \rangle, \langle \emptyset, \{b\} \rangle, \langle \emptyset, \{a, b\} \rangle, \langle \{a\}, \{a\} \rangle, \langle \{a\}, \{a, b\} \rangle, \langle \{b\}, \{b\} \rangle, \langle \{b\}, \{a, b\} \rangle, \langle \{a, b\}, \{a, b\} \rangle \}$$

# 三个特殊的关系



## 恒等关系、全域关系和空关系

- 对任意的集合 $A$ ,  
     $A$ 上的**恒等关系** $I_A$ 定义为  $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$   
     $A$ 上的**全域关系**(全关系) $E_A$ 定义为
$$E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \}$$
- 对任意的集合 $A$ ,  
    空集 $\emptyset$ 是 $A \times A$ 的子集, 定义为 $A$ 上的**空关系**。
- 例如,  $A = \{1, 2\}$ , 则
  - $E_A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$
  - $I_A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$



思考：若  $|A| = n$

$A$  上 共可定义多少个不同的二元关系？

- ☐ A  $2n$
- ☐ B  $n^2$
- ☒ C  $2^{n^2}$
- ☐ D  $2n^2$

提交

# 定义域和值域(domain & range)



- 设R是A到B的二元关系

(1) R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的定义域，记作 $\text{dom}(\mathbf{R})$ 。形式化表示为：

$$\text{dom}(R) = \{x \mid (\exists y)(\langle x, y \rangle \in R)\}$$

(2) R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的值域，记作 $\text{ran}(\mathbf{R})$ 。形式化表示为：

$$\text{ran}(R) = \{y \mid (\exists x)(\langle x, y \rangle \in R)\}$$

(3) R的定义域和值域的并集称为R的域( $\text{field}$ )，记作 $\text{fld}(\mathbf{R})$ 。形式化表示为：

$$\text{fld}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R)$$



# 10.1 二元关系(Binary Relations)



例1  $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}$ , 则

- $\text{dom}(R) = \{1, 2, 4\}$
- $\text{ran}(R) = \{2, 3, 4\}$
- $\text{fld}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$

$UR = ?$

$UUR = ?$



## 10.1 二元关系(Binary Relations)

- $R=\{<1,2>, <1,3>, <2,4>, <4,3>\},$
- $R=\{\{\{1\},\{1,2\}\}, \{\{1\},\{1,3\}\}, \{\{2\},\{2,4\}\}, \{\{4\},\{4,3\}\}\}$
- $\cup R=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2\},\{2,4\},\{4\},\{4,3\}\}$
- $\cup \cup R=\{1,2,3,4\}$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

**定理 10.1.1** 对A到B的关系R, 如果 $<x,y> \in R$ , 则 $x \in \cup \cup R, y \in \cup \cup R$ 。

- 证明: 已知 $<x,y> \in R$ , 即 $\{\{x\},\{x,y\}\} \in R$

$$\{x,y\} \in \cup R$$

$$x \in \cup \cup R, y \in \cup \cup R$$

**定理 10.1.2** 对A到B的关系R, 则 $fld(R)=\cup \cup R$ .



# 关系的运算

- 二元关系的定义域和值域

- 定义域:  $domR = \{x \mid \exists y(< x, y > \in R)\}$

- 值域:  $ranR = \{y \mid \exists x(< x, y > \in R)\}$

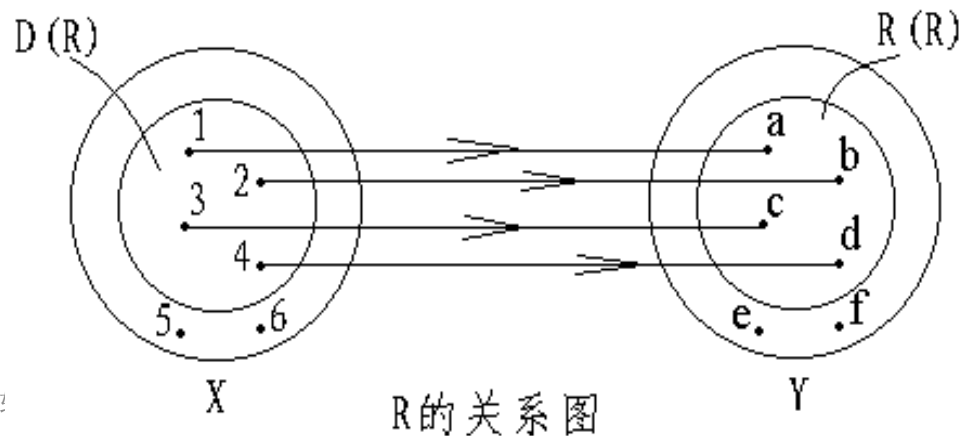
- 例

- $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, Y = \{a, b, c, d, e, f\}$

- $R = \{< 1, a >, < 2, b >, < 3, c >, < 4, d >\}$

- $domR = \{1, 2, 3, 4\}$

- $ranR = \{a, b, c, d\}$





# 关系的表示方法

三种：集合表示法，关系矩阵和关系图。

## 1. 集合表示法

- 因为关系是一个集合，因此可以用集合的列举法或描述法来表示它。在前面的叙述中，已经多次采用了这两种方法。
- 例：  $R_1 = \{ \langle a, b \rangle \mid (a+b)/5 \text{ 是整数} \}$  用的是描述法，  
 $R_2 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$  用的是列举法。

## 10.2 关系矩阵和关系图



### 定义10.2.1 关系矩阵

- 设集合  $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$   $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$
- 若  $R$  是  $X$  到  $Y$  的一个关系。则  $R$  的关系矩阵是  $m \times n$  矩阵，矩阵元素是  $r_{ij}$ 。

$$M(R) = [r_{ij}]_{m \times n}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } \langle x_i, y_j \rangle \in R \\ 0 & \text{当 } \langle x_i, y_j \rangle \notin R \end{cases} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

- 若  $R$  是  $X$  上的一个关系，则  $R$  的关系矩阵是  $m \times m$  方阵，定义与上述类似。



# 举例

- 设 $A=\{2,3,4,5\}$ ,  $B=\{6,7,8,9\}$ , 由A到B的关系R定义为 $R=\{<a,b>|a与b互质\}$ 。试写出R的关系矩阵 $M_R$ 。
- 解 $R=\{<2,7>, <2,9>, <3,7>, <3,8>, <4,7>, <4,9>, <5,6>, <5,7>, <5,8>, <5,9>\}$ , 所以关系矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 10.2 关系矩阵和关系图



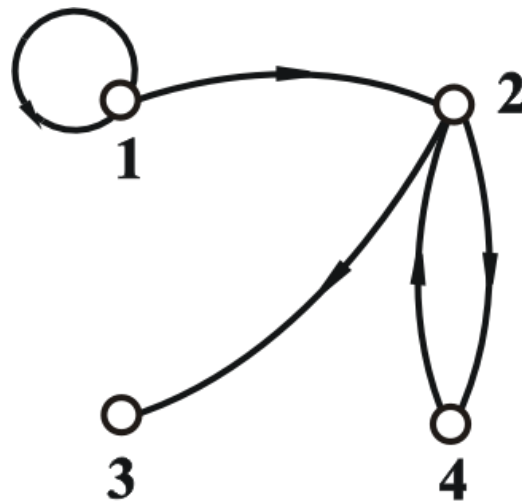
### 定义10.2.2 关系图

- 设集合  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$   $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 。若  $R$  是  $X$  到  $Y$  的一个关系，则  $R$  的关系图是一个**有向图(digraph)**  $G(R) = (V, E)$ , 它的顶点集是  $V = X \cup Y$ , 边集是  $E$ , 从  $x_i$  到  $y_j$  的有向边  $e_{ij} \in E$ , 当且仅当  $\langle x_i, y_j \rangle \in R$ 。
- 若**R**是**X**上的一个关系，则**R**的关系图是上述情形的特例。



- $A=\{1,2,3,4\}$ ,
- $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$ ,
- $R$ 的关系矩阵 $M_R$ 和关系图 $G_R$ 如下：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$







# 关系及其表示

## 关系图

- **情形1:**  $R$ 是从 $A$ 到 $B$ 的关系, 采用如下的图示:
  - 1) 用大圆圈表示集合 $A$ 和 $B$ , 里面的小圆圈(或实心圆)表示集合中的元素;
  - 2) 若 $a \in A$ ,  $b \in B$ , 且 $\langle a, b \rangle \in R$ , 则在图中将表示 $a$ 和 $b$ 的小圆圈用直线或弧线连接起来, 并加上从结点 $a$ 到结点 $b$ 方向的箭头。



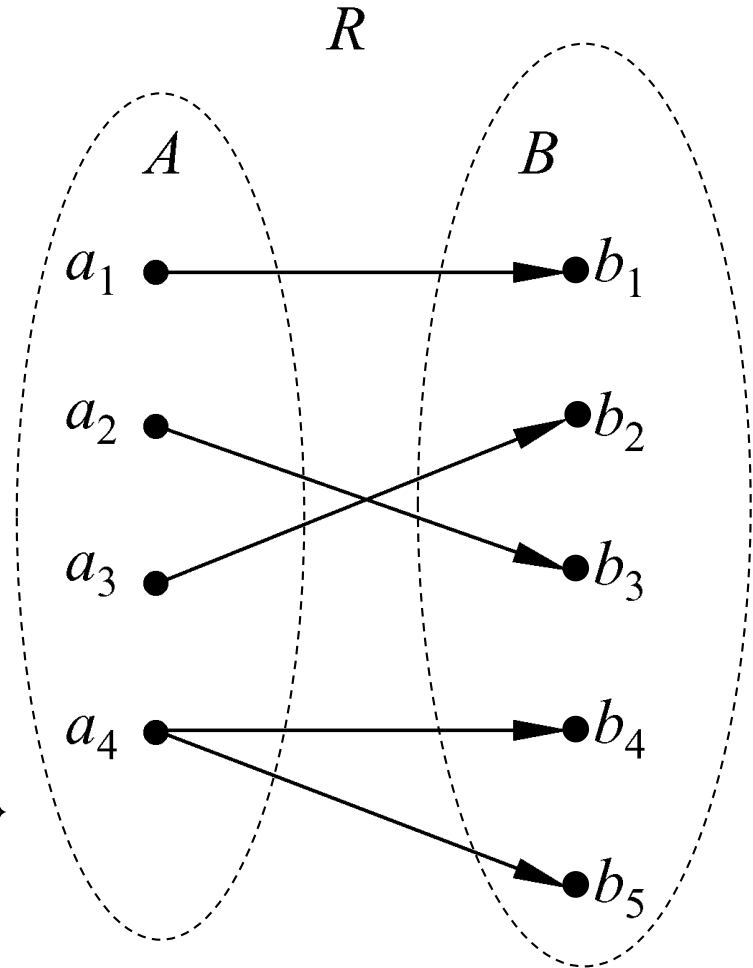
# 关系及其表示

- 例如:

- $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

- $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

- $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2), (a_4, b_4), (a_4, b_5)\}$



# 关系及其表示



• **情形2**：  $R$ 是 $A$ 上的关系, 其画法如下:

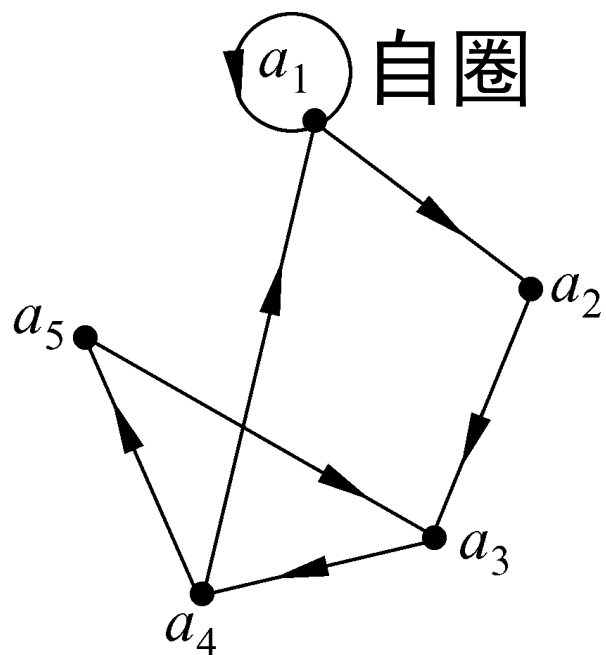
- 1) 集合 $A$ 中的每一个元素 $a$ 用带有元素符号的顶点(称作顶点 $a$ )表示。
- 2) 若 $a, b \in A$ , 且 $\langle a, b \rangle \in R$ , 则将顶点 $a$ 和 $b$ 用一条带有箭头的有向边连接起来, 其方向由顶点 $a$ 指向顶点 $b$ 。

【例】  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ,

$R = \{\langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_3 \rangle,$

$\langle a_3, a_4 \rangle, \langle a_4, a_1 \rangle, \langle a_4, a_5 \rangle, \langle a_5, a_3 \rangle\}$

• 求 $R$ 的关系图。



## 10.3 关系的逆、合成、限制和象



### 定义10.3.1 关系的逆、合成、限制和象

- 对 $X$ 到 $Y$ 的关系 $R$ ,  $Y$ 到 $Z$ 的关系 $S$ , 定义:

(1)  $R$ 的**逆(inversion)** $R^{-1}$ 为 $Y$ 到 $X$ 的关系

$$R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$$

- 例1 令 $A=\{1,2,3,4\}$ ,

$$R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

$$R^{-1} = \{ \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

- 显然有: 设 $R$ 是任意的关系, 则 $(R^{-1})^{-1} = R$



# 关系的逆

- 二元关系的逆关系  $R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$ 
  - $R^{-1}$ 就是将 $R$ 中的所有有序对的两个元素交换次序成为 $R^{-1}$ ，故 $|R| = |R^{-1}|$
- 说明
  - $R^{-1}$ 的关系矩阵是 $R$ 的关系矩阵的转置，即 $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$
  - $R^{-1}$ 的关系图就是将 $R$ 的关系图中的弧改变方向即可以



# 关系的逆-举例

$$R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, c \rangle \}$$

$$R^{-1} = \{ \langle a, a \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 1$$

$$1 \ 0 \ 1 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 1$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 0$$

$$M_R = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$M_R^{-1} = M_R^T = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 0$$

$$1 \ 1 \ 0 \ 0$$

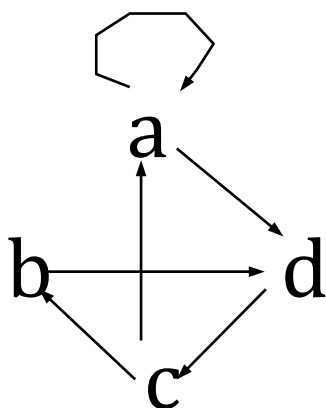


# 关系的逆-举例

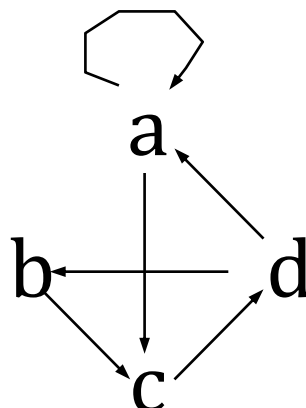
$$R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, c \rangle \}$$

$$R^{-1} = \{ \langle a, a \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

R的关系图



$R^{-1}$ 的关系图





**R与S的合成(composite relation) SoR计算，  
你觉得哪种更好？**

- ☐ A 先R后S
- ☐ B 先S后R
- ☐ C 无所谓
- ☐ D 想不清





## 10.3 关系的逆、合成、限制和象

(2)  $R$ 与 $S$ 的**合成(composite relation)**  $S \circ R$ 为 $X$ 到 $Z$ 的关系

$$S \circ R = \{\langle x, y \rangle \mid (\exists z)(\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S)\}$$

先 $R$ 后 $S$ , 先右后左



# 关系的合成

- 关系的复合

$$S \circ R = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists t ( \langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in S ) \}$$

- 例

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 2, 3\}$

- $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x + y = 6 \} = \{ \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$

- $S = \{ \langle y, z \rangle \mid y - z = 2 \} = \{ \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 5, 3 \rangle \}$

- $S \circ R = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}$

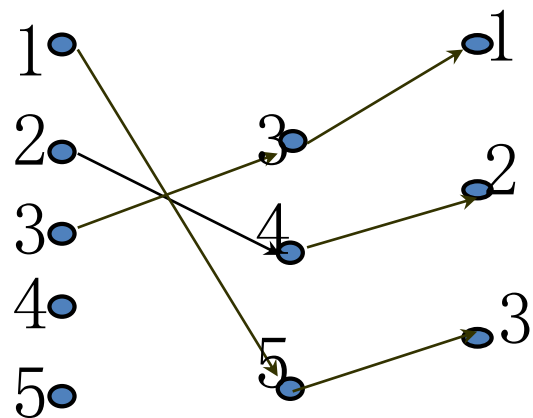


$$A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,2,3\}$$

$$R=\{ \langle x, y \rangle \mid x + y = 6 \} = \{ \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

$$S=\{ \langle y, z \rangle \mid y - z = 2 \} = \{ \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 5, 3 \rangle \}$$

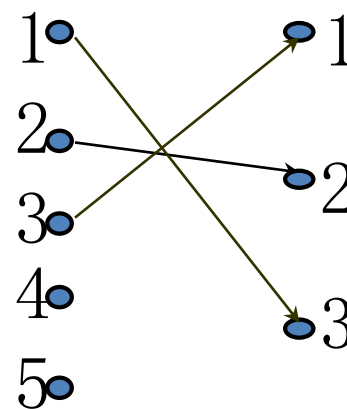
$$SoR=\{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}$$



$R$

$S$

从而  $S \circ R$  的关系图



$SoR$



# 关系的合成

- 例：  $A=\{a,b,c,d,e\}$ 
  - $R=\{<a,b>, <c,d>, <b,b>\}$
  - $S=\{<d,b>, <b,e>, <c,a>\}$
  - $SoR=\{<a,e>, <c,b>, <b,e>\}$       复合关系
  - $RoS=\{<d,b>, <c,b>\}$
  - $RoR=\{<a,b>, <b,b>\}$
  - $SoS=\{<d,e>\}$
- 注意：  $RoS \neq SoR$



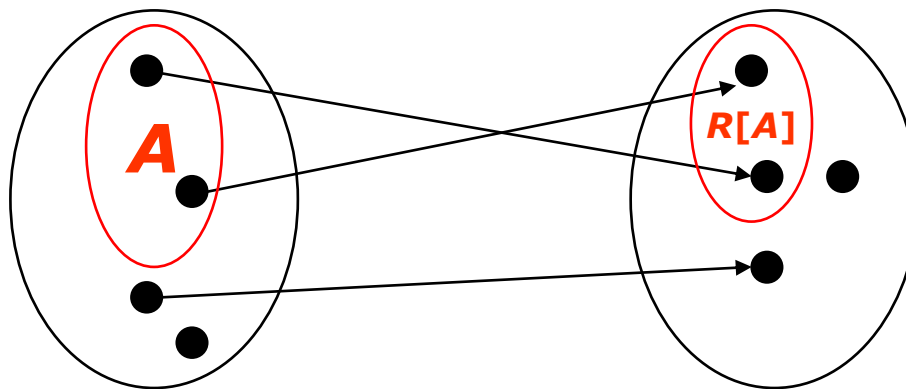
# 关系的限制和象

(3) 对任意的集合  $A$ , 定义 **$R$ 在 $A$ 上的限制 $R \upharpoonright A$** 为  $A$  到  $Y$  的关系, 其中  $R$  是  $X$  到  $Y$  的关系。

$$R \upharpoonright A = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \wedge x \in A \}$$

(4)  **$A$ 在 $R$ 下的象 $R[A]$** 为集合

$$R[A] = \{ y \mid (\exists x)(x \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R) \}$$



# 关系的限制和象



例：  $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$ , 求：

$$R \upharpoonright \{1\}$$

$$R \upharpoonright \emptyset$$

$$R \upharpoonright \{2, 3\}$$

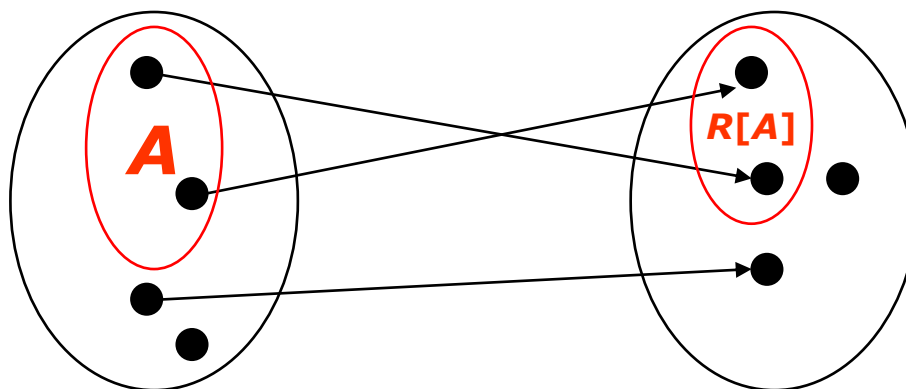
$$R[\{1\}]$$

$$R[\emptyset]$$

$$R[\{2, 3\}]$$

$$R \upharpoonright A = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \wedge x \in A \}$$

$$R[A] = \{ y \mid (\exists x)(x \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R) \}$$





# 关系的运算

优先顺序：

- 逆运算优先于其他运算
- 关系运算优先于集合运算
- 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序



# 关系的运算

• 定理：设 $R$ 是任意的关系，则

–  $(R^{-1})^{-1} = R$

–  $\text{dom} R^{-1} = \text{ran} R$

–  $\text{ran} R^{-1} = \text{dom} R$

$$R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$$





# 关系的运算

- 定理：设 $R, S, Q$ 是任意的关系

①  $(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q)$

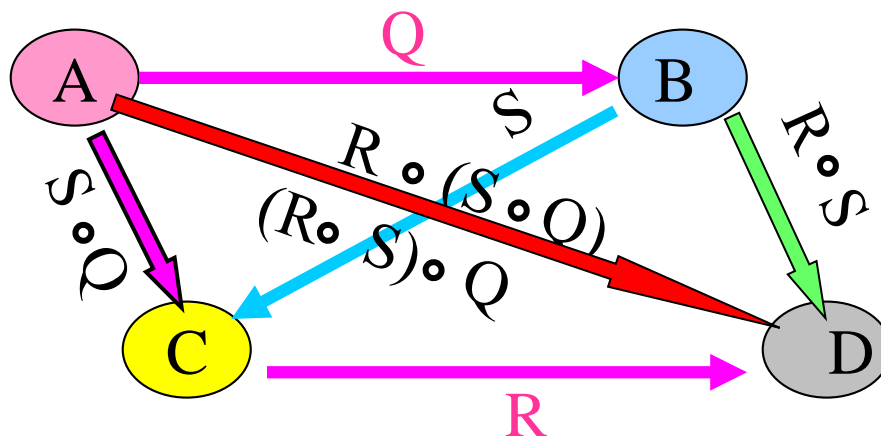
②  $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

令  $Q \subseteq A \times B$

$S \subseteq B \times C$

$R \subseteq C \times D$

可以形象表示：





$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

证明:  $\langle x, y \rangle \in (R \circ S)^{-1}$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \circ S$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle y, t \rangle \in S \wedge \langle t, x \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R^{-1} \wedge \langle t, y \rangle \in S^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$$



# 关系的运算-举例

$$R=\{<a,a>, <a,c>, <b,b>, <c,b>, <c,c>\}$$

$$S=\{<a,1>, <a,4>, <b,2>, <c,4>, <c,5>\}$$

$$S \circ R = \{<a,1>, <a,4>, <a,5>, <b,2>, <c,2>, <c,4>, <c,5>\}$$

$$(S \circ R)^{-1} = \{<1,a>, <4,a>, <5,a>, <2,b>, <2,c>, <4,c>, <5,c>\}$$

$$R^{-1} = \{<a,a>, <c,a>, <b,b>, <b,c>, <c,c>\}$$

$$S^{-1} = \{<1,a>, <4,a>, <2,b>, <4,c>, <5,c>\}$$

$$R^{-1} \circ S^{-1} = \{<1,a>, <4,a>, <2,b>, <2,c>, <4,c>, <5,a>, <5,c>\}$$



# 关系的运算

- 定理: 设 $R$ 为 $A$ 上关系, 则

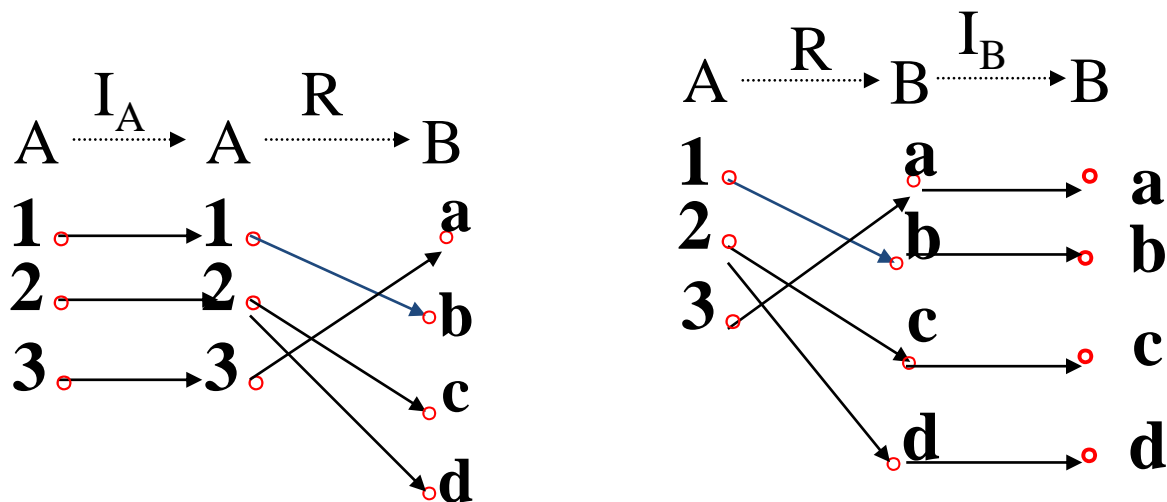
$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

- 定理:

- $R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$
- $R \circ (S \cap T) \subseteq R \circ S \cap R \circ T$
- $(S \cup T) \circ X = S \circ X \cup T \circ X$
- $(S \cap T) \circ X \subseteq S \circ X \cap T \circ X$

3.  $R$ 是从 $A$ 到 $B$ 的关系, 则  $R \circ I_A = I_B \circ R = R$

例: 令  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$



从这两个图看出它们的复合都等于 $R$ 。

$$R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$$



对于任意  $\langle x, y \rangle$ , 可得

$$\langle x, y \rangle \in R \circ (S \cup T)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (\langle x, z \rangle \in S \cup T \wedge \langle z, y \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow \exists z ((\langle x, z \rangle \in S \vee \langle x, z \rangle \in T) \wedge \langle z, y \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow \exists z ((\langle x, z \rangle \in S \wedge \langle z, y \rangle \in R) \vee (\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in R))$$

$$\Leftrightarrow \exists z (\langle x, z \rangle \in S \wedge \langle z, y \rangle \in R) \vee \exists z (\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \circ S \vee \langle x, y \rangle \in R \circ T$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

所以  $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$



# 关系的运算

- 定理:
  - $R \uparrow (A \cup B) = R \uparrow A \cup R \uparrow B$
  - $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$
  - $R \uparrow (A \cap B) = R \uparrow A \cap R \uparrow B$
  - $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$

定理:  $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$



证明:  $\forall y \in R[A \cap B]$

$\Leftrightarrow \exists x(<x, y> \in R \wedge x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x(<x, y> \in R \wedge x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x((<x, y> \in R \wedge x \in A) \wedge (<x, y> \in R \wedge x \in B))$

$\Rightarrow \exists x(<x, y> \in R \wedge x \in A) \wedge \exists x(<x, y> \in R \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow y \in R[A] \wedge y \in R[B]$

$\Leftrightarrow y \in R[A] \cap R[B]$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$





# 关系的运算

- $R$ 的 $n$ 次幂记为 $R^n$ 
  - $R^0 = I_A$
  - $R^{n+1} = R^n \circ R$
- 定理: 设 $R$ 是集合 $A$ 上的关系,  $m, n \in \mathbb{N}$ 
  - $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
  - $(R^m)^n = R^{mn}$

证明思路: 使用归纳法( $n$ )并利用复合关系的结合律



$$R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

对于任给的  $m \in N$ , 对  $n$  用归纳法。

若  $n=0$ , 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^{m+0}$$

假设  $R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 则有

$$\begin{aligned} R^m \circ R^{n+1} &= R^m \circ (R^n \circ R) \\ &= (R^m \circ R^n) \circ R \\ &= R^{m+n} \circ R \\ &= R^{m+n+1} \end{aligned}$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$



# 关系的运算

- 例  $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \}$ 
  - $R^0 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle \}$
  - $R^1 = R$
  - $R^2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle \}$
  - $R^3 = R^2 \circ R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 5 \rangle \}$
  - $R^4 = R^3 \circ R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$
  - $R^5 = R^4 \circ R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 5 \rangle \}$

# 10.3 关系的逆、合成、限制和象



## 10-3-2 SoR的关系矩阵

设A是有限集合， $|A|=n$ 。关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵 $M(R) = [r_{ij}]$ 和 $M(S) = [s_{ij}]$ 都是 $n \times n$ 的方阵。于是R与S的合成 SoR 的关系矩阵

$$M(\text{SoR}) = [W_{ij}] \quad n \times n$$

可以用下述的矩阵逻辑乘计算（类似于矩阵乘法）。记作 $M(\text{SoR}) = \underset{n}{M(R)} \cdot M(S)$

$$\text{其中} \quad w_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (r_{ik} \wedge s_{kj})$$

# 关系的矩阵运算是布尔运算



- 复合关系运算不满足交换律，但关系的复合运算满足结合律。
- 复合关系可以用图形表示，也可以用矩阵来求。
- 关系的矩阵运算是布尔运算，只涉及0和1。

布尔加： $0+0=0$ ， $1+1=1$ ， $0+1=1+0=1$

布尔乘： $1*1=1$ ， $1*0=0*1=0*0=0$



- 矩阵表示

$$R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

$$S = \{ \langle 4, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \}$$

- 则

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \circ S} = M_S * M_R,$$

$$M_{S \circ R} = M_R * M_S$$

$$M_{R^2} = M_R^2$$

$$M_{R^3} = M_R^3$$

# 注意复合顺序



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{S \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



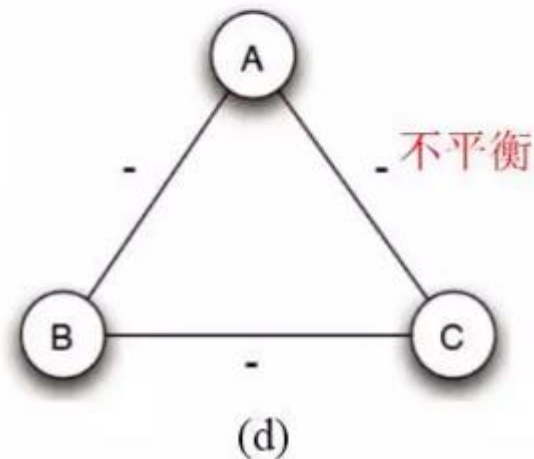
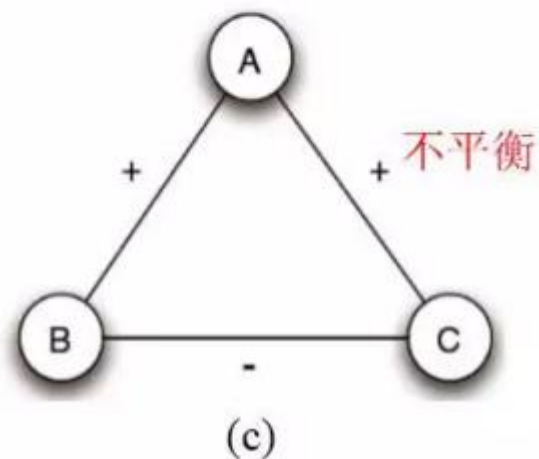
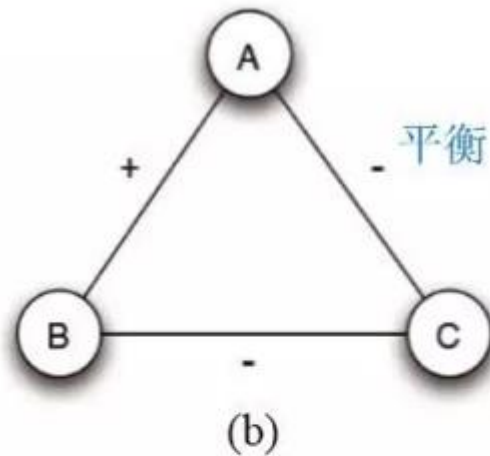
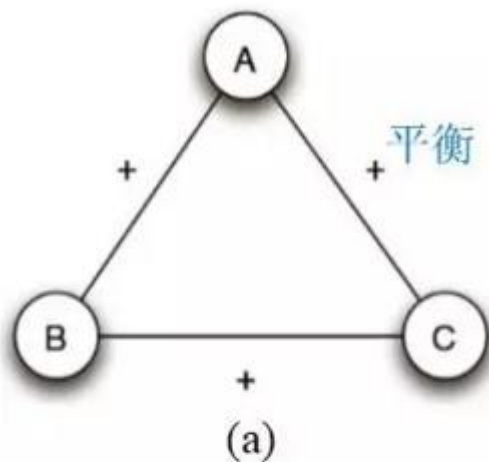
# 复合关系在社会关系网络中的应用

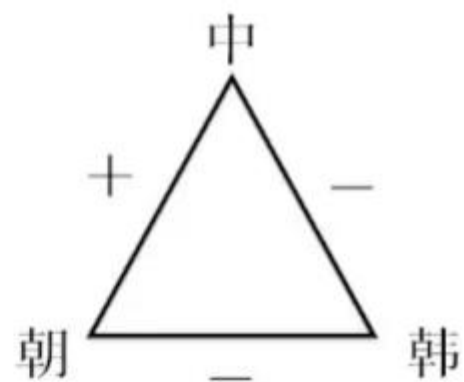
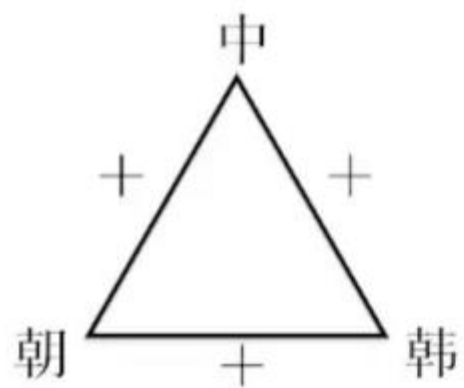
- 社会网络中，两个节点之间的关系（边）可能携带着各种各样的社会性含义
- 除了强弱以外，还有支持（+）与反对（-），朋友（+）与敌人（-）等利害关系。

人和人之间如此，国和国之间的外交关系也如此，而且后者常常显现得更加明显（同盟条约、领土争端之类）



# 从社会心理学角度看

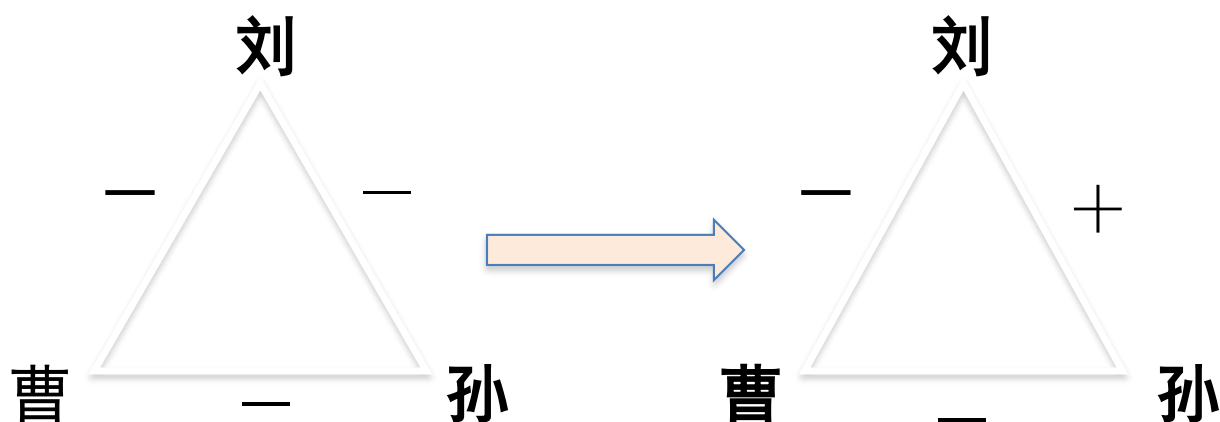




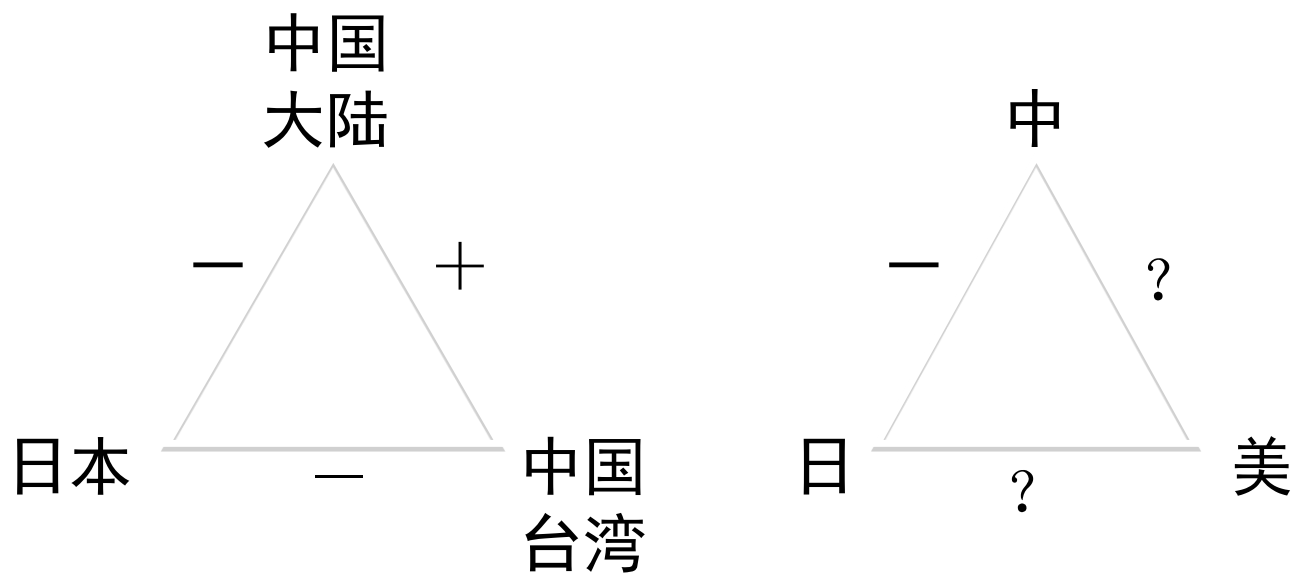


# 三国演义中的关系

- 原则上，都是想自得天下，也就是互为敌人，但不时出现两家联合斗另一家的形势



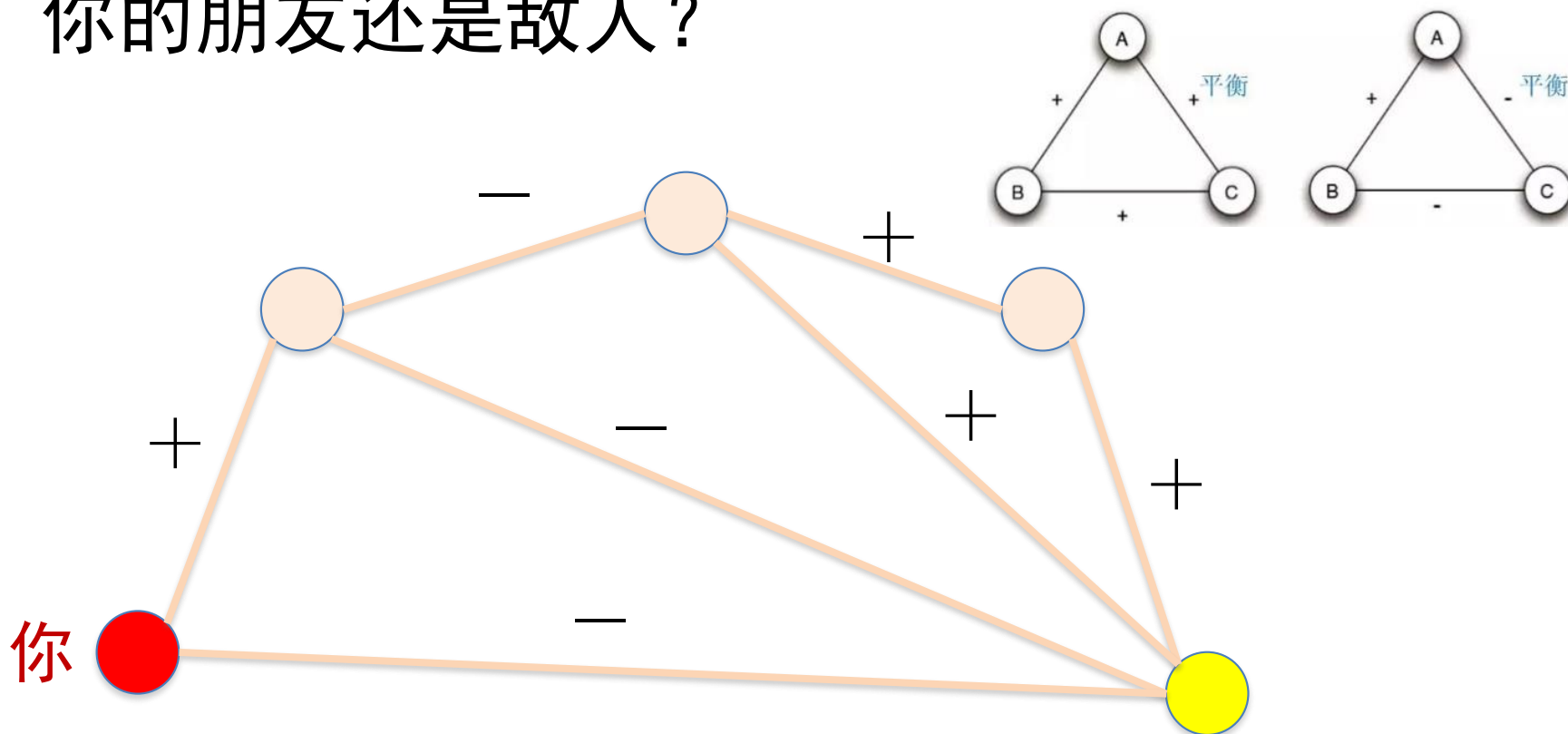
# 钓鱼岛问题中的关系





# 一般地，我们可以回答

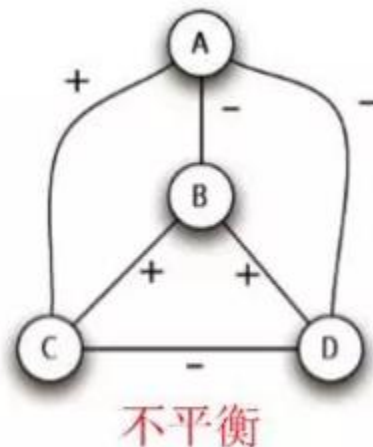
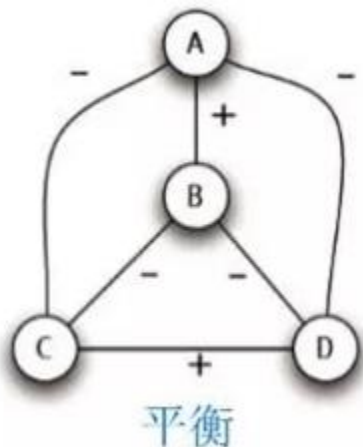
- “你朋友的敌人的朋友的朋友” 更可能是你的朋友还是敌人？



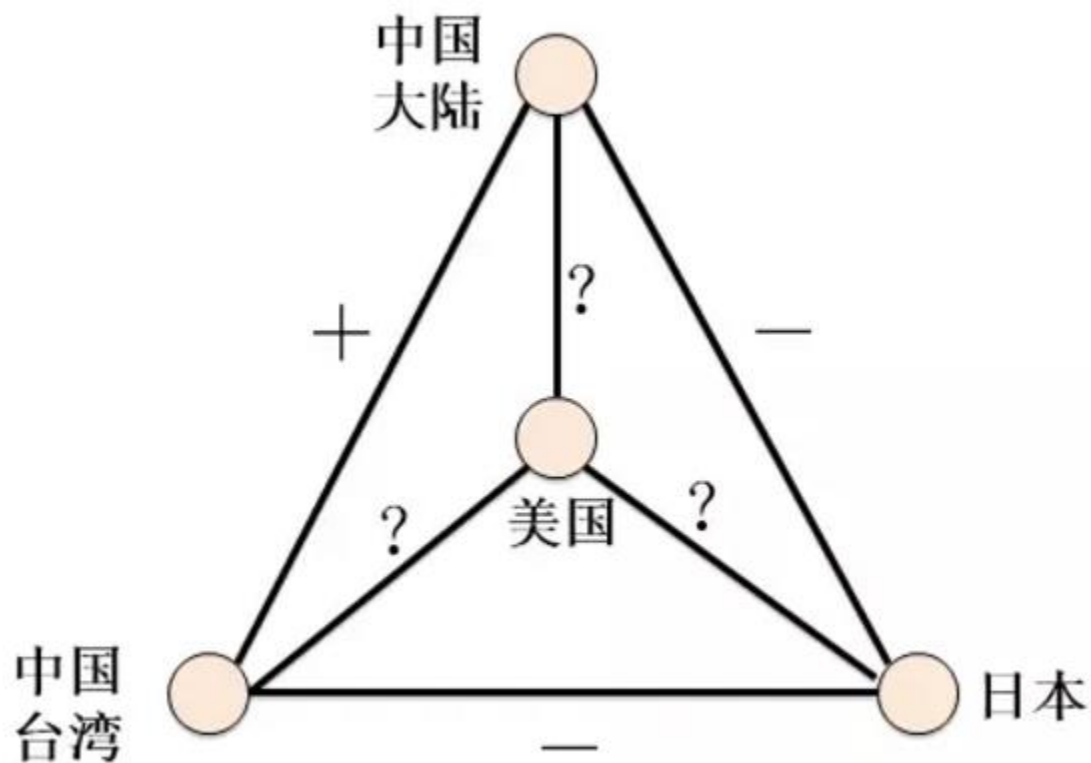


# 平衡定理

- 如果一个标记了“+、-”关系的完全图是平衡的，那么，(1) 要么它的所有节点两两都是朋友；(2) 要么它的节点可以被分为两组，X和Y，其中X组内的节点两两都是“+”关系，Y组内的节点两两也都是“+”关系，而X组中的每个节点与Y组中每个节点之间都是“-”关系



# 思考





谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn