

一、填空题 (30分)

1. 设两个相互独立的事件 $A$ 和 $B$ 都不发生的概率是 $1/9$ ,  $A$ 发生 $B$ 不发生的概率与 $B$ 发生 $A$ 不发生的概率相等, 则 $P(A) = \underline{2/3}$ 。
2. 随机的选一个点将一个区间分成两部分。则长区间至少为短区间的3倍的概率为 $\underline{1/2}$ 。
3. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布, 则 $P(\min\{X, Y\} < 1) = \underline{5/9}$ 。
4. 若 $X \sim N(1, 4)$ ,  $P(X < x) = \Phi(1)$ , 则 $x = \underline{3}$ 。
5. 设随机变量 $X$ 的概率密度函数为:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ a, & 0 \leq x \leq 1; \\ a e^{-2(x-1)}, & x > 1, \end{cases}$$

则 $a = \underline{2/3}$ ,  $E(X) = \underline{5/6}$ ,  $Var(X) = \underline{13/36}$ 。

6. 设随机向量 $(X, Y)$ 的分布函数为 $F(x, y)$ , 定义随机变量:

$$Z = g(X, Y) = \begin{cases} 1, & a < X \leq b \text{ 且 } c < Y \leq d; \\ 0, & \text{其它情况。} \end{cases}$$

则 $E(Z) = \underline{F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)}$ 。

7. 设总体 $X$ 在区间 $[0, \theta]$ 上服从均匀分布, 其中 $\theta > 0$ 未知。从总体中抽取样本 $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 则下列统计量中不是 $\theta$ 的无偏估计的是D。

- (A)  $\hat{\theta} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2$  (B)  $\hat{\theta} = 2x_1 + x_2 - x_3$   
 (C)  $\hat{\theta} = x_1 + x_2 + x_3 - x_4$  (D)  $\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

8. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其中 $\mu, \sigma$ 未知。若 $\mu$ 的95%置信区间为 $[1, 3]$ ; 且假设检验问题

$$H_0: \mu = 2 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq 2$$

的显著性水平为 $\alpha$ 的拒绝域为 $\{|\bar{x} - 2| \geq 1.3\}$ , 则 $\alpha \leq 0.05$  (填 $>$ 或 $<$ )。

二、(10分) 茶杯成套出售, 每套五只, 假设各套无次品和含一只次品的概率分别为 $4/5$ 和 $1/5$ 。一顾客在购买时, 售货员随意取出一套, 而顾客随机地查看其中的一只, 若非次品, 则买下该套, 否则退回。试求:

1. 顾客买下该套的概率;
2. 在顾客买下的一套中确实无次品的概率。

解：设 $A$ 为顾客买下该套的事件， $B$ 为售货员取出一套无次品茶杯的事件，则

1. 由全概率公式得：

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c) = 4/5 + 1/5 \times 4/5 = 24/25.$$

2. 由Bayes公式得：

$$P(B|A) = P(B)P(A|B)/P(A) = 4/5 \div 24/25 = 5/6.$$

三、（20分）设 $X$ 和 $Y$ 具有联合密度函数

$$p(x, y) = \begin{cases} 21x^2y^3, & 0 < x < y < 1; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

1. 求边际密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$ ，并判断 $X$ 与 $Y$ 的独立性，说明理由；

2. 求条件密度函数 $p_{Y|X}(y|x)$ ；

3. 求在给定 $X = x$ 下 $Y$ 的条件数学期望 $E(Y|X = x)$ 。

解：(1) 由边际密度函数的定义知，当 $x < 0$ 或者 $x > 1$ 时， $p_X(x) = 0$ 。当 $0 < x < 1$ 时

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dy = \int_x^1 21x^2y^3dy = \frac{21}{4}(x^2 - x^6).$$

同理可知，当 $y < 0$ 或者 $y > 1$ 时， $p_Y(y) = 0$ 。当 $0 < y < 1$ 时

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dx = \int_0^y 21x^2y^3dx = 7y^6.$$

(2) 由条件密度的定义可得，当 $p_X(x) \neq 0$ 时，

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)} = \frac{4y^3}{1 - x^4}, \quad (0 < x < y < 1).$$

(3) 首先只有当 $0 < x < 1$ 时要求的条件期望才有定义。固定 $0 < x < 1$ 。则由条件期望的定义可得

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yp_{Y|X}(y|x)dy = \int_x^1 \frac{4y^4}{1 - x^4}dy = \frac{4(1 - x^5)}{5(1 - x^4)}.$$

四、（15分）设随机向量 $(X, Y)$ 服从二维正态分布，且 $X \sim N(3, 4)$ ， $Y \sim N(2, 1)$ ， $X$ 与 $Y$ 的相关系数为 $\rho = 1/4$ 。

1. 求 $Z = X + Y$ 的概率密度；

2. 若 $W = X - cY$ 与 $Z$ 独立，求常数 $c$ ；

3. 若条件期望 $f(z) = E(X^2 + aXY + bY^2 | Z = z)$ 不依赖于 $z$ ，求常数 $a$ ， $b$ 以及 $f(z)$ 的值。

1. 首先,

$$\begin{aligned}E(Z) &= E(X) + E(Y) = 5, \\Var(Z) &= Var(X) + 2Cov(X, Y) + Var(Y) \\&= 4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 6.\end{aligned}$$

因为 $Z$ 仍然服从正态分布, 所以

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{12}\pi} \exp\left\{-\frac{(z-5)^2}{12}\right\}.$$

2. 因为随机向量 $(Z, W)$ 服从二维正态分布, 所以 $W$ 与 $Z$ 独立当且仅当它们不相关, 即协方差 $Cov(Z, W) = 0$ 。

$$\begin{aligned}Cov(Z, W) &= Cov(X + Y, X - cY) \\&= Var(X) - (c-1)Cov(X, Y) - cVar(Y) \\&= 4 - \frac{1}{2}(c-1) - c = 0,\end{aligned}$$

于是 $c = 3$ 。

3. 做坐标变换 $(X, Y) \mapsto (Z, W) = (X + Y, X - 3Y)$ , 利用 $Z$ 、 $W$ 的独立性可得

$$\begin{aligned}f(z) &= E\left[\frac{(3Z + W)^2}{4^2} + a\frac{3Z + W}{4}\frac{Z - W}{4} + b\frac{(Z - W)^2}{4^2} \mid Z = z\right] \\&= \frac{9 + 3a + b}{4^2}z^2 + \frac{6 - 2a - 2b}{4^2}zE(W) + \frac{1 - a + b}{4^2}E(W^2).\end{aligned}$$

注意 $E(W) = 3 - 3 \cdot 2 = -3 \neq 0$ , 所以若 $f(z)$ 不依赖于 $z$ , 则必有:

$$\begin{cases} 9 + 3a + b = 0, \\ 6 - 2a - 2b = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6, \\ b = 9, \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}f(z) &= E(W^2) = Var(W) + (EW)^2 \\&= 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot 1 + (-3)^2 = 19.\end{aligned}$$

五、(15分) 设总体 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自 $X$ 的样本,

1. 求 $1/\lambda$ 的最大似然估计, 并判断其相合性, 说明理由;
2. 验证最大似然估计与 $n \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 均为 $1/\lambda$ 的无偏估计;
3. 比较最大似然估计与 $n \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的有效性。

$$1. \text{ 似然函数 } L(\lambda) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^n x_i \right\},$$

$$\text{对数似然函数 } \ln L(\lambda) = \ln \left( \lambda^n \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^n x_i \right\} \right) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0, \text{ 得 } \hat{\lambda} = \sum_{i=1}^n x_i / n = \bar{x}.$$

因为  $EX = 1/\lambda$ , 由大数定律知,  $\bar{x}$  是相合的。

2.  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , 则  $E\bar{x} = EX = 1/\lambda$ 。指数分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

令  $\theta = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 则

$$\begin{aligned} F_{\theta}(x) &= 1 - [1 - F(x)]^n = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda n x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \\ p_{\theta}(x) &= \begin{cases} \lambda n e^{-\lambda n x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

那么,  $E\theta = \int_0^{\infty} x p_{\theta}(x) dx = 1/(n\lambda)$ ,  $E(n \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = 1/\lambda$ 。

3. 由  $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$  得,  $\text{Var}(\bar{x}) = 1/(n\lambda^2)$ 。

注意  $\theta \sim \text{Exp}(\lambda n)$ , 所以,  $\text{Var}(\theta) = 1/(n\lambda)^2$ ,  $\text{Var}(n \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = 1/\lambda^2$ 。

于是,  $\bar{x}$  有效。

六、(10分) 某厂生产一种标准长度为45mm的螺钉, 实际生产的产品长度服从正态分布  $N(\mu, 4)$ 。做假设检验  $H_0: \mu = 45$ ,  $H_1: \mu \neq 45$ 。拒绝域为  $W = \{|\bar{x} - 45| > 1\}$ 。

1. 当样本容量  $n=25$  时, 求犯第一类错误的概率;

2. 当样本容量  $n=25$ ,  $\mu=46$  时, 求犯第二类错误的概率。

(注: 所求概率可用标准正态分布函数  $\Phi(x)$  表示。)

解: 当样本容量  $n=25$  时,  $\bar{x} \sim N(\mu, 4/25)$ ,

$$\begin{aligned} \alpha &= P(|\bar{x} - 45| > 1 \mid \mu = 45) = 1 - P(|\bar{x} - 45| \leq 1 \mid \mu = 45) \\ &= 1 - P\left[-\frac{5}{2} \leq \frac{5(\bar{x} - 45)}{2} \leq \frac{5}{2} \mid \mu = 45\right] \\ &= 1 - \Phi(5/2) + \Phi(-5/2) = 2 - 2\Phi(5/2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= P(|\bar{x} - 45| \leq 1 \mid \mu = 46) = P(-1 \leq \bar{x} - 45 \leq 1 \mid \mu = 46) \\ &= P\left[-5 \leq \frac{5(\bar{x} - 46)}{2} \leq 0 \mid \mu = 46\right] \\ &= \Phi(0) - \Phi(-5) = \Phi(5) - 1/2. \end{aligned}$$