高代选讲 第八次作业

1、(a) pf: ① $\forall f(x)\in \mathbb{R}[x]_5$，设 $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+\cdots+a_0$

则 $\forall c\in\mathbb{R}$ $\varphi(cf(x))=\varphi(ca_4x^4+ca_3x^3+\cdots+a_0)$

$=ca_4(3x+2)^4+ca_3(3x+2)^3+\cdots+a_0$

$=c(a_4(3x+2)^4+a_3(3x+2)^3+\cdots+a_0)$

$=c\varphi(f(x))$

② $\forall f_1(x),f_2(x)\in\mathbb{R}[x]_5$，设 $f_1(x)=\sum\limits_{i=0}^{4}a_ix^i$，$f_2(x)=\sum\limits_{i=0}^{4}b_ix^i$

则 $\varphi(f_1(x)+f_2(x))=\varphi(\sum\limits_{i=0}^{4}a_ix^i+\sum\limits_{i=0}^{4}b_ix^i)$

$=\varphi(\sum\limits_{i=0}^{4}(a_i+b_i)x^i)$

$=\sum\limits_{i=0}^{4}(a_i+b_i)(3x+2)^i$

$=\sum\limits_{i=1}^{4}a_i(3x+2)^i+\sum\limits_{i=1}^{4}b_i(3x+2)^i$

$=\varphi(f_1(x))+\varphi(f_2(x))$

综合①②，φ是线性变换

(b) 显然 $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ 是 $\mathbb{R}[x]_5$ 的一组基.

设 $e_1=1$，$e_2=x$，$e_3=x^2$，$e_4=x^3$，$e_5=x^4$

则 $\varphi(e_1)=1=e_1$

$\varphi(e_2)=3x+2=3e_2+2$

$\varphi(e_3)=(3x+2)^2=9x^2+12x+4=9e_3+12e_2+4e_1$

$\varphi(e_4)=(3x+2)^3=27x^3+54x^2+36x+8=27e_4+54e_3+36e_2+8e_1$

$\varphi(e_5)=(3x+2)^4=81x^4+216x^3+216x^2+96x+16=81e_5+216e_4+216e_3+96e_2+16e_1$

则 φ 在 $\{e_1\ldots e_5\}$ 的矩阵表示为

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4&8&16\\0&3&12&36&96\\0&0&9&54&216\\0&0&0&27&216\\0&0&0&0&81\end{bmatrix}$$，它是一个上三角矩阵，$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-9)(\lambda-27)(\lambda-81)$

故 φ 所有特征值为 1, 3, 9, 27, 81

2、pf: 设 $e_1\ldots e_n$ 是 U_λ 的基，根据定义，$\exists m_i$, s.t. $(\sigma-\lambda I)^{m_i}e_i=0$ $\forall 1\le i\le n$.

因此 $(\sigma-\lambda I)(\sigma-\lambda I)^{m_i}e_i=(\sigma-\lambda I)(0)=0$

$\Rightarrow (\sigma-\lambda I)^{m_i+1}e_i=0$

$\Rightarrow (\sigma-\lambda I)^{m_i}(\sigma(e_i)-\lambda e_i)=0$

$\Rightarrow (\sigma-\lambda I)^{m_i}\sigma(e_i)=(\sigma-\lambda I)^{m_i}(\lambda e_i)=\lambda(\sigma-\lambda I)^{m_i}e_i=\lambda\cdot 0=0$.

即 m_i 使 $(\sigma-\lambda I)^{m_i}(\sigma(e_i))=0$

因此 $\sigma(e_i)\in U_\lambda$

所以 $\forall v\in U_\lambda$，设 $v=c_1e_1+\cdots+c_ne_n$

则 $\sigma(v)=\sigma(c_1e_1+\cdots+c_ne_n)=c_1\sigma(e_1)+\cdots+c_n\sigma(e_n)\in U_\lambda$

即 U_λ 是 V 的 σ 不变子空间

补证 U_λ 是 U 子空间，即证 U_λ 对数乘、加法封闭

① $\forall u,v\in U_\lambda$ $\exists m_1$ s.t $(\sigma-\lambda I)^{m_1}v=0$ $\exists m_2$ s.t $(\sigma-\lambda I)^{m_2}u=0$

令 $m=\max\{m_1,m_2\}$ $(\sigma-\lambda I)^m(u+v)=(\sigma-\lambda I)^m u+(\sigma-\lambda I)^m v=0+0=0$

故 $u+v\in U_\lambda$

② $\forall v\in U_\lambda$，$\lambda\in\mathbb{C}$ $\exists m$ s.t. $(\sigma-\lambda I)^m v=0$

故 $\lambda(\sigma-\lambda I)^m v=(\sigma-\lambda I)^m(\lambda v)=\lambda\cdot 0=0$

所以 $\lambda v\in U_\lambda$，综合①② U_λ 是 U 子空间

3. pf. 先证明 $\forall m$ 有 $\nu(\sigma-\lambda I)^m = (\sigma-\lambda I)^m \nu$

这是显然的，因为 $\nu(\sigma-\lambda I)^m = \nu(\sigma-\lambda I)(\sigma-\lambda I)^{m-1}$

$= (\nu\sigma-\lambda\nu)(\sigma-\lambda I)^{m-1}$

$= (\sigma-\lambda I)\nu(\sigma-\lambda I)^{m-1}$

$= \cdots = (\sigma-\lambda I)^m\nu$

下证 U_λ 是 ν 不变的

设 $e_1 \dots e_n$ 是 U_λ 的基，根据定义 $\exists m_i$ s.t. $(\sigma-\lambda I)^{m_i}e_i = 0 \quad \forall 1\le i\le n$

因此 $\nu(\sigma-\lambda I)^{m_i}e_i = \nu(0) = 0$.

$\Rightarrow (\sigma-\lambda I)^{m_i}\nu(e_i) = 0$

$\Rightarrow \exists m_i$，使 $(\sigma-\lambda I)^{m_i}(\nu(e_i)) = 0$

$\Rightarrow \nu(e_i) \in U_\lambda$

所以 $\forall v \in U_\lambda$，设 $v = c_1e_1+\cdots+c_ne_n$

则 $\nu(v) = \nu(c_1e_1+\cdots+c_ne_n) = c_1\nu(e_1)+\cdots+c_n\nu(e_n) \in U_\lambda$

因为 U_λ 是 U 子空间（上题已证）

故 U_λ 是 V 的 ν 不变子空间.

4. pf: 先证幂零矩阵 $\Rightarrow$ 特征值为0。

设 λ 是幂零矩阵 A 的特征值则

$\exists x\neq 0,\ x\in\mathbb{C}^n$，s.t. $Ax=\lambda x$

因为A幂零 故 $\exists m\in\mathbb{Z}_+$ s.t. $A^m=0$.

因此 $A^m x = A^{m-1}(Ax) = \lambda A^{m-1}x = \cdots = \lambda^m x = 0$.

因为 $x\neq 0$ 故 $\lambda^m = 0$

类似可证 $\lambda^{m+1}=0$ 故 $\lambda = \frac{\lambda^{m+1}}{\lambda^m} = 0$.

因此幂零矩阵特征值全为0。

再证 A特征值全为0 $\Rightarrow$ A幂零

A特征值全为0 则 $\exists$可逆矩阵 P s.t. $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是上三角矩阵

且 Λ 对角线全是A的特征值（对角线为0）

归纳证明 Λ^i 除了右上角有 $(n-i)\times(n-i)$ 的上三角区域可能不为0外，

其余区域均为0（例：$\Lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddots & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$，$\Lambda^i = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{i个} & \ddots & * \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$）

$i=1$ 时 $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & * \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$ 满足归纳假设

设 $i=k$ 时 $\Lambda^k = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k个} & \ddots & * \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$

则 $i=k+1$ 时

$$\Lambda^{k+1} = \Lambda^k\Lambda = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k个} & \ddots & * \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \ddots & * \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & * \cdots * & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots 0 & * \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k个} & 0 & 0 \ddots & * \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k+1个} & \ddots & * \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$ 也满足归纳假设

综合以上 $i=n$ 时 $\Lambda^n = 0$

所以 $(P^{-1}AP)^n = \underbrace{(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n个} = P^{-1}A^nP = 0$

$\Rightarrow A^n = P0P^{-1} = 0$，即 A幂零

综上：矩阵幂零当且仅当所有特征值为0。

5. Pf：设实线性变换在一组基下矩阵表示为A

则A可上三角化，即 $\exists P$ 可逆 s.t. $P^{-1}AP=U$，其中 $P=[e_1 \dots e_n]$

$\Rightarrow AP = \quad \Rightarrow A[e_1 \dots e_n]=[e_1 \dots e_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$

$\Rightarrow Ae_1=\lambda_1 e_1$

$Ae_2=ce_1+\lambda_2 e_2$

则 $\sigma(e_1)\in span\{e_1\}$，$span\{e_1\}$ 构成 σ 的一个1维不变子空间

$\sigma(e_1)\in span\{e_1\}\subseteq span\{e_1,e_2\}$

$\sigma(e_2)\in span\{e_1,e_2\}$，则 $span\{e_1,e_2\}$ 构成 σ 的2维不变子空间

因此任意实线性变换必有1维或2维不变子空间