1 群，环，域

1. 考虑一个群G上的一个映射: $\phi_g : G \to G$, 这里$\phi_g(x) = gxg^{-1}$, g是G里面的一个元素.
   (a) 证明: ϕ_g是一个群同态.
   (b) 证明: ϕ_g是一个群同构. (需要证明ϕ_g是一个单射，也是满射)
2. 一个子群$H \subset G$称为正规子群，如果对于任何元素$a \in H, g \in G$, 我们有$gag^{-1} \in H$. 证明: 对于一个群同态 ϕ, $ker(\phi)$ 是一个正规子群.
3. 群里的两个元素x和$x^{'}$是共轭的，如果存在一个元素g使得 $gxg^{-1} = x^{'}$. 群G可以分成共轭类. 请计算S_3这个群的共轭类.
4. 考虑一个环同态$\phi : R \to R^{'}$, $ker(\phi) = \{a \in R | \phi(a) = 0_{R'}\}$. 证明: $ker(\phi)$是一个理想.
5. 我们来证明F_p (p是一个素数)是一个域. 我们记$\bar{a}$为整数a相对于p的同余类. 这个同余类有元素$F = (\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1})$. 定义加法为 $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$, $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$
   (a) 证明: 上述定义的加法和乘法是有意义的，也就是说结果不依赖于同余类元素的选取
   (b) 证明: 加法构成一个交换群，单位元为$\bar{0}$.
   (c) 证明: 乘法在$F/\bar{0}$上构成一个交换群. 单位元为 $\bar{1}$. 重点是找到$\bar{a}$的逆元:
      i. 考虑一个元素的幂: $\bar{1}, \bar{a}, \bar{a}^2, \ldots$, 证明: 一定存在一个$m, n$使得 $\bar{a}^m = \bar{a}^n$, $m < n$.
      ii. $\bar{a}$ 的逆元为$\bar{a}^{n-m-1}$.
   (d) 证明: 乘法和加法满足分配律$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\ \bar{c} + \bar{b}\ \bar{c}$.

2 一般域上线性空间

1. 考虑一个线性空间(F, V), 这里F是实数域，V是所有的$n \times n$ 反厄米复矩阵的集合，求V的维数.
2. 考虑线性方程组$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$:
   (a) 在F_p这个域上求解方程组，取$p = 5, 11, 17$.
   (b) 如果$p = 7$, 找出所有的解。
3. 考虑域F上两个线性空间 V_1, V_2, 考虑线性映射 $f : V_1 \to V_2$, 证明: $dimker(f) + dimIm(f) = n$, 这里$n = dimV_1$.

4. 用初等变换的办法求解线性方程组$Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

这里F分别取a): Q; b): F_2, c): F_3, d): F_7.