《高等微积分 2》第五周习题课

1 (1) 给定 $\alpha > 0$, 计算极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^\alpha \ln(x^2+y^2).$$

(2) 计算极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}.$$

(3) 计算极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y)}{x^2-xy+y^2}.$$

2 (累次极限) 设 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是二元函数. 对任何固定的 y, 假设极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在. 令

$$g(y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

把它看成 y 的一元函数, 考虑其极限 $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$, (如果极限存在) 我们称之为 f 在 (x_0,y_0) 处的累次极限, 记作

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

类似的, 可以定义另一个顺序的累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

定义 f 为

$$f(x,y) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{y}{x}} & 如果x \neq 0 \\ 1 & 如果x = 0. \end{cases}$$

计算累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 与极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

3 设 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集, $f,g:U\to\mathbf{R}$ 是连续函数. 证明: $\max(f,g),\min(f,g),|f|$ 都是 U 上的连续函数.

4 设连续函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 满足: $f(0,0)=0$, 且对任何 $(x,y)\neq(0,0)$ 和任何实数 $c\neq 0$, 都有

$$f(cx,cy)=c^2f(x,y)>0.$$

证明: 存在正数 a,b, 使得

$$a(x^2+y^2)\le f(x,y)\le b(x^2+y^2),\quad \forall (x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

5 令 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.

(1) f 在 $(0,0)$ 处是否连续?

(2) f 在 $(0,0)$ 处沿着哪些方向的方向导数存在?

(3) f 在 $(0,0)$ 处是否可微?

6 定义函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{如果}(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{如果}(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明: f 在 $(0,0)$ 点沿着各个方向的方向导数都存在, 但 f 在 $(0,0)$ 处不可微.

7 (1) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 都是 C^1 光滑函数, $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

(2) 设 $f(x,y)$ 在点 (a,a) 处可微, 且 $f(a,a)=a,\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,a)}=\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,a)}=b$. 设 $g(x)=f(x,f(x,f(x,x)))$, 求 $\frac{dg}{dx}|_{x=a}$.

8 (作业题) 对于二元函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, 判断如下断言是否正确, 并说明理由.

(1) 如果 f 在 (x_0,y_0) 处有各个方向的方向导数, 则 f 在 (x_0,y_0) 处连续.

(2) 如果 f 在 (x_0,y_0) 处有各个方向导数, 则对任何方向 $\mathbf{q}=(a,b)$, 有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{(x_0,y_0)}=a\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}+b\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}.$$

9 定义函数 $f:\mathbf{R}^3-\{(0,0,0)\}\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

计算

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}+\frac{\partial^2 f}{(\partial z)^2}.$$

10 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ 是给定的向量, 满足 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. 请用方向导数 $\frac{\partial f}{\partial\mathbf{a}}|_{(x_0,y_0)}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial\mathbf{b}}|_{(x_0,y_0)}$ 表示 f 在 (x_0,y_0) 处的微分.

11 设 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是 C^2 光滑的函数 (即 f 的各个 2 阶偏导数都存在且连续), $\mathbf{q}=(q_1,q_2,q_3)\in\mathbf{R}^3$ 是单位长度的向量. 求

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{q}},\quad \text{与}\frac{\partial^2 f}{\partial\mathbf{q}^2}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{q}}\right).$$

12 设 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是 C^2 光滑的映射, $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中三个互相垂直的单位长度的向量. 证明:

(1)

$$(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_1})^2+(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_2})^2+(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_3})^2=(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+(\frac{\partial f}{\partial z})^2.$$

(2)

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{e}_1}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_1}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{e}_2}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_2}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{e}_3}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_3}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}.$$