可列可加性：$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$互不相容$\Rightarrow$
$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$。

- 半可加性：$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$。

三事件独立：P(ABC)=P(A)P(B)P(C); P(AB)=P(A)P(B); P(AC)=P(A)P(C); P(BC)=P(B)P(C)（任意有限事件独立）

1. F_X是单调不减、右连续函数，满足 $F_X(-\infty) = 0 \leq F_X(x) \leq 1 = F_X(+\infty)$；
2. 对任何区间$B \subset \mathbb{R}$，$P(X \in B)$可用F_X表达。特别是，$P(X = x) = F_X(x) - \lim\limits_{z \to x-} F_X(z)$，如果$F_X$在$x$连续，则$P(X = x) = 0$。

如果级数

$$\sum_n x_n p_n$$

绝对收敛，即

$$\sum_n |x_n| p_n < +\infty,$$

则称X有数学期望，并且记$EX = \sum_n x_n p_n$，称它是X的数学期望

设X是一个连续型随机变量，它的概率密度函数为p。如果积分$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，即$\int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)\mathrm{d}x < +\infty$，则称$X$有数学期望，并且记$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x$，称它为$X$的数学期望

性质

离散型：$EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) - \sum_{n=0}^{\infty} P(X < -n)$；（$X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$）
连续型：$EX = \int_0^{+\infty} P(X > x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} P(X < x)\mathrm{d}x$。

- $$P(|X| > 0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{|X| > 1/n\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > 1/n)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 Var(X) = 0。\quad \text{（Chebyshev不等式）}$$

17、几何分布的无记忆性

称离散随机变量X具有无记忆性，若：

$$P(X > m+n \mid X > m) = P(X > n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}。 \tag{1}$$

反之，若X只取自然数值，且具有无记忆性，则$X \sim G(p)$。

定理　无记忆性的连续型随机变量必是指数分布的：

$$P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t) \Rightarrow X \sim Exp(\lambda)。$$

Γ分布的特例：

1. $\Gamma(1, \lambda) = Exp(\lambda)$；
2. $\Gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$是自由度为$n$的$\chi^2$分布。

若$X \sim \chi^2(n)$，则$EX = n$，$Var(X) = 2n$。

- 若$y = g(x)$为单调连续函数且其逆函数$x = h(y)$连续可微，则$Y = g(X)$是连续型随机变量且密度函数为

$$p_Y(y) = p_X[h(y)]|h'(y)|, \quad y \in g(\mathbb{R}).$$

3. 若$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，则$Y = kX \sim \Gamma(\alpha, \lambda/k)$，其中$k > 0$；特别的，$2\lambda X \sim \chi^2(2\alpha)$。
4. 若X的分布函数$F(x)$为严格单调增的连续函数，则$Y = F(X) \sim U(0,1)$。

2. 若$N(0,1)$的p分位数为u_p，则$N(\mu, \sigma^2)$的p分位数

$$x_p = \mu + \sigma u_p。$$

7、多项分布

定义

- 用r种颜色对n个球进行独立随机染色，每个球被染成第i种颜色的概率为p_i（$p_1+\cdots+p_r=1$）。
- 记X_i是第i种颜色的球的个数，$i=1,2,\ldots,r$。
- 则对$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，

$$P(X_1=n_1,X_2=n_2,\ldots,X_r=n_r)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}$$

- 我们称$(X_1,X_2,\ldots,X_r)$服从多项分布（*polynomial distribution*），记为$M(n,p_1,p_2,\ldots,p_r)$。
- 这是因为上述概率值是$(p_1z_1+\cdots+p_rz_r)^n$的展开式中$z_1^{n_1}\cdots z_r^{n_r}$的系数。

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}-y^2/2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}g(x,y),\\
g(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}};\qquad (\sim N(\rho y,1-\rho^2))\\
p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}g(x,y)dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}\\
\Rightarrow &\quad Y\sim N(0,1)\quad \text{同理}\quad X\sim N(0,1).
\end{aligned}$$

定理

若X与Y互相独立，g和h为两实（Borel）函数，则$g(X)$与$h(Y)$也互相独立。

对数正态

$X\sim Ga(\alpha,\lambda)$，则$kX\sim Ga(\alpha,\lambda/k)$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

可加性 ***（必须独立）***：

$P(\lambda_1) * P(\lambda_2) \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

$b(n,p) * b(m,p) \sim b(m+n,p)$

考虑几何分布，X,Y最小值均为1，X+Y为2，则X+Y必然不是几何分布

$N(\mu_1,\sigma_1^2) * N(\mu_2,\sigma_2^2) \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$Ga(\alpha_1,\lambda) * Ga(\alpha_2,\lambda) \sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$

以此，指数分布相加为伽马分布，卡方分布有可加性

3. 设$X_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,1), i=1,\dots,n$，则$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$

定理

设(X,Y)的联合概率密度为$p(x,y)$，则$Z=X+Y$的概率密度为$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p(z-y,y)dy$。

次序统计量:

1. 严格地说，第k个次序统计量$X_{(k)}$满足

$$X_{(k)} = \min_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \max\{X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_k}\}.$$

   且密度函数为$p_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}F(x)^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}p(x)$.

2. 次序统计量$(X_{(i)},X_{(j)})(i<j)$的联合密度函数为：当$x\le y$，

$$p_{ij}(x,y)=\frac{n!F(x)^{i-1}[F(y)-F(x)]^{j-i-1}[1-F(y)]^{n-j}p(x)p(y)}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}。$$

注意不要忘记p(x), p(y)

性质

若X与Y相互独立，则

1. $E(XY)=EXEY$；
2. $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)$。

推论

若$X_1,X_2,\dots,X_n$相互独立，则

1. $E(X_1X_2\cdots X_n)=EX_1EX_2\cdots EX_n$；
2. $Var\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i)$。

注：

在随机变量所构成的内积空间中，

- 协方差$\mathrm{Cov}(X, Y)$定义了向量$X - EX$和$Y - EY$的内积，
- 方差$Var(X)$是$X - EX$的长度的平方，
- 标准差$\sigma(X)$是$X - EX$的长度，
- 相关系数$r(X, Y)$确定了向量$X - EX$和$Y - EY$的夹角余弦，
- 期望EX是X在常数子空间上的投影。

协方差矩阵Cov(**X**)是对称非负定矩阵，原因是其特征值均为随机变量在某个线性变换下的方差

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{i=1}^{n} b_i X_i\right) = (a_1, \ldots, a_n)\mathrm{Cov}(\mathbf{X})(b_1, \ldots, b_n)^T.$$

推论

若$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则$X$与$Y$不相关与独立等价。

用p(x,y)=p(x)p(y)证

条件概率：

$P(A|B) = P_B(A) = \sum P_B(A|C_i)P_B(C_i) = \sum P(A|BC_i)P(C_i|B)$

定义

- 设(X, Y)是连续型随机变量，p_Y在y连续且$p_Y(y) > 0$。则称
  $F_{X|Y}(\cdot|y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{p_{X,Y}(u,y)}{p_Y(y)} \mathrm{d}u$
  为在已知$Y = y$发生的情况下X的条件分布函数。
- 在已知$Y = y$发生的情况下X的条件密度函数为：
  $$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}。$$

1. 乘法公式的密度形式：$p_{X,Y}(x, y) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$。
2. 全概公式的密度形式：$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}y$。
3. Bayes公式的密度形式：$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}x}$。
4. 如果$p_{X,Y}(x, y) = g(y)h(x, y)$，而且对任意给定的$y$，$h(\cdot, y)$非负可积且$\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\mathrm{d}x = 1$，则
   $$g(y) = p_Y(y), \quad h(x, y) = p_{X|Y}(x|y)$$

$\int P_{X|Y}(x, y)dx = 1$

$\int P_{X|Y}(x, y)P_Y(y)dy = P(x)$

1、条件数学期望

定义

1. 如果(X,Y)是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的离散型随机变量，$y\in\mathbb{R}$满足$P(Y=y)>0$，则如果级数
$$\sum_x xP_{X|Y}(x|y)$$
绝对收敛，则称它的值为X在已知$Y=y$的条件下的条件数学期望（*conditional expectation*），记为$E(X|Y=y)$。
2. 不难证明：若EX存在，则对满足$P(Y=y)>0$的任意y，$E(X|Y=y)$存在。将它看成y的函数，记为
$$f(y)=E(X|Y=y),$$
则定义随机变量$f(Y)$为X对Y的条件数学期望（*conditional expectation*），记为$E(X|Y)$。

Xsu1023 4月22日 回复

定义上面的是第一型，算出来是实数

定义下面的是第二型，是一个关于y的函数

添加回复...

13、正态分布条件期望与方差

$(X,Y)\sim N(0,0,1,1,\rho)$

- $p_{X|Y}(x|y)=p(x,y)/p_Y(y)=g(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}$；
- $X|Y=y\sim N(\rho y,1-\rho^2)$；
- $E(X|Y=y)=\rho y,\quad E(X|Y)=\rho Y$；
- $Var(X|Y)=1-\rho^2$。

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

- $X^*=(X-\mu_1)/\sigma_1$，$Y^*=(Y-\mu_2)/\sigma_2$；
- $(X^*,Y^*)\sim N(0,0,1,1,\rho)$，$X^*|Y^*=y\sim N(\rho y,1-\rho^2)$；
- $(X^*|Y=y)=(X^*|Y^*=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})\sim N\left(\rho(y-\mu_2)/\sigma_2,1-\rho^2\right)$；
- $(X|Y=y)=(\sigma_1X^*+\mu_1|Y=y)$
$$\sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),(1-\rho^2)\sigma_1^2\right);$$
- $E(X|Y)=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(Y-\mu_2)$；
- $Var(X|Y)=(1-\rho^2)\sigma_1^2$。

重期望公式：E(E(X|Y))=EX

推论（正态分布在线性变换下的不变性）

若矩阵B行满秩且$X\sim N(\mu,\Sigma)$，则$BX+b\sim N(B\mu+b,B\Sigma B^T)$.

证明：（2）、（3）

- 取一正交矩阵A使其首行为$\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，
- 令$Y=AX$，则Y服从n维正态分布，
- 并且$EY=0$，$\mathrm{Cov}(Y)=Cov(AX)=AA^T=I$。
- 故$Y=(Y_1,\dots,Y_n)^T\sim N(0,I)$。

$$\begin{aligned}(n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^n X_i^2-n\bar{X}^2=X^TX-n\bar{X}^2\\ &= (A^{-1}Y)^T(A^{-1}Y)-Y_1^2=Y^TAA^{-1}Y-Y_1^2\\ &= Y^TY-Y_1^2=Y_2^2+\cdots+Y_n^2\\ &\sim \chi^2(n-1),\end{aligned}$$

而且$\bar{X}=Y_1/\sqrt{n}$与$S^2=(Y_2^2+\cdots+Y_n^2)/(n-1)$独立。

- 作标准化：$Y=(X-\mu e)/\sigma$，则$Y\sim N(0,I)$。

（2） $\bar{X}=e^TX/n=e^T(\sigma Y+\mu e)/n=\sigma e^TY/n+\mu=\sigma\bar{Y}+\mu$
$\sim N(\mu,\sigma^2/n)$。（因为$\bar{Y}\sim N(0,1/n)$）

（3） $$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^n\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}-\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^n(Y_i-\bar{Y})^2=(n-1)S_Y^2\sim\chi^2(n-1)。$$

（1） 样本均值$\bar{X}=\sigma\bar{Y}+\mu$和样本方差$S^2=\sigma^2S_Y^2$相互独立，

（4） $$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}=\frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}}\sim t(n-1)。$$

推论

设$X=(X_1,\dots,X_m)^T\sim N(\mu_1 e,\sigma_1^2 I)$，$Y=(Y_1,\dots,Y_n)^T\sim N(\mu_2 e,\sigma_2^2 I)$独立，其中$e$为全一向量，$I$为单位矩阵，记均值$\bar{X}=\sum\limits_{i=1}^m X_i/m$，$\bar{Y}=\sum\limits_{i=1}^n Y_i/n$，样本方差

$S_X^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^m(X_i-\bar{X})^2$，$S_Y^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n(Y_i-\bar{Y})^2$。则

1. 样本方差之比$\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1)$；
2. 当方差相等$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$时，有

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}}\sim t(m+n-2).$$

证明：（2）

- 若$X_n\xrightarrow{P}0$，则$X_n^2\xrightarrow{P}0$：
  $P(|X_n^2|\ge\epsilon)=P(|X_n|\ge\sqrt{\epsilon})\to 0$，（$n\to\infty$）。
- 若$X_n\xrightarrow{P}a$，则$cX_n\xrightarrow{P}ca$：若$c\neq 0$，则
  $P(|cX_n-ca|\ge\epsilon)=P(|X_n-a|\ge\epsilon/|c|)\to 0$，（$n\to\infty$）。
- 若$X_n\xrightarrow{P}a$，则$X_n^2\xrightarrow{P}a^2$：
  $X_n-a\xrightarrow{P}0$，$(X_n-a)^2\xrightarrow{P}0$，$2a(X_n-a)\xrightarrow{P}0$，
  $X_n^2-a^2=(X_n-a)^2+2a(X_n-a)\xrightarrow{P}0$，即$X_n^2\xrightarrow{P}a^2$。
- 同理$Y_n^2\xrightarrow{P}b^2$，$(X_n+Y_n)^2\xrightarrow{P}(a+b)^2$。

$X_nY_n=[(X_n+Y_n)^2-X_n^2-Y_n^2]/2\xrightarrow{P}[(a+b)^2-a^2-b^2]/2=ab.$

证明：（3）

- 先证：$1/Y_n \xrightarrow{P} 1/b$。
- $P(|1/Y_n - 1/b| \geq \epsilon) = P[|(Y_n - b)/(bY_n)| \geq \epsilon]$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\left|\frac{Y_n - b}{bY_n}\right| \geq \epsilon, |Y_n - b| \geq \epsilon\right) \\
&\quad + P\left(\left|\frac{Y_n - b}{b^2 + b(Y_n - b)}\right| \geq \epsilon, |Y_n - b| < \epsilon\right) \\
&\leq P(|Y_n - b| \geq \epsilon) + P\left(\frac{|Y_n - b|}{b^2 - |b|\epsilon} \geq \epsilon\right) \\
&= P(|Y_n - b| \geq \epsilon) + P\left[|Y_n - b| \geq \epsilon\left(b^2 - |b|\epsilon\right)\right] \\
&\to 0, \quad (n \to \infty)。
\end{aligned}
$$

- $X_n/Y_n = X_n \times 1/Y_n \xrightarrow{P} a/b$。

定理

- $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$；
- 特别地，若$X = c$为常数，则$X_n \xrightarrow{P} c \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{L} c$。

- 设X服从$P(X = 1) = P(X = -1) = 1/2$，令$X_n = -X$，
- 则X_n与X同分布，故$X_n \xrightarrow{L} X$。
- 但若$0 < \epsilon < 2$，则$P(|X_n - X| \geq \epsilon) = P(2|X| \geq \epsilon) = 1$，
- 即X_n不依概率收敛于X。

Markov大数定律：$\frac{1}{n^2}Var(\sum X_i) \to 0$，则$\frac{1}{n}\sum X_i - \frac{1}{n}\sum EX_i \xrightarrow{P} 0$

Chebyshev：独立同分布，且数学期望存在，方差有限

Khinchin：独立同分布，且数学期望存在

Bernoulli：每次p，n次的次数总和为S_n，则$S_n/n \xrightarrow{P} p$

注意，用大数定律时要注意条件，比如数学期望存在等条件

Monte-Carol算法：随机投点法、平均值法

正态$N(\mu, \sigma^2)$随机数的产生：

1. 由中心极限定理知，若$x_1, x_2, ..., x_{12}$是独立的(0,1)上均匀随机数，则可用$y = \sum_{i=1}^{12} x_i - 6$近似地作为标准正态随机数。
2. $z = \sigma y + \mu$可看成服从正态$N(\mu, \sigma^2)$的一个随机数。
3. 重复（1）和（2）n次可得服从正态$N(\mu, \sigma^2)$的n个随机数。

E(X|A)=$\int x p_A(x) dx$

对于离散的事件$\{B_i\}$，

$E(X) = \sum E(X|Y=y_i)p(Y=y_i)$

$E(X) = \int E(X|Y=y)p_Y(y)dy$

E(X|Y)=$\int xp_{X|Y}(x,y)dx \quad (P_{X|Y}(x,y) = \frac{p(x,y)}{p(y)})$

$P_{X|A}(x) = [P(X \le x|A)]'$（分布函数->密度函数，前提是A与X不相关）

求概率分布：

- 从定义求$F(z) = p(f(x,y) \le z) = \int\int_{f(x,y)\le z} p(x,y)dxdy$，再求$p(z) = F'(z)$
- 特殊分布：泊松分布可加、二项分布可加、正态分布可加、最大/最小值分布
- 独立分布Z=X+Y的卷积$p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx$
- 变量变换，双射下$p(u,v) = p(x(u,v),y(u,v))|J(G^{-1})|, (u,v) \in G(U)$

  特别地，一维有$p(y) = p(x)|(g^{-1})'(x)|$

求期望：

- 算出概率分布，积分
- 用E(X+Y)=E(X)+E(Y)，可以借助指示变量
- 直接积分$EZ = \int\int z(x,y)p(x,y)dxdy$

公式：

Cov(X, Y) = E(XY) - EXEY

Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)

6、条件分布的例

例

袋中装有a个白球，b个黑球，每次取出一球后，总是放入一个白球。问在第n次取白球的情况下，第$n+1$次取的还是白球的概率与第n次取白球的概率相同吗？

18、电力供应

例

一工厂的利润Z以如下方式决定于生产耗电量Y和供电量X，

$$Z = \begin{cases} 30Y, & 若 Y \le X; \\ 30X + 10(Y - X), & 若 Y > X。\end{cases}$$

其中$X \sim U(10,30)$，$Y \sim U(10,20)$。求EZ。

Xsu1023 0:25 回复

俩重积分公式就完了：
EZ=E(Z|x)p(x)=E(Z|x,y)p(y|x)p(x)=E(Z|x,t)

$\int^{20}$

21、赌徒输光问题续

记T_i表示甲最初有i元赌博所需的时间，求$t_i = E(T_i)$。

条件概率实际上是把原来的概率空间切成了多块概率空间，条件期望就是在每个概率空间下的期望加权（该概率空间的p）求和

22、Poisson分布和指数分布

例

一商店在t时刻的男顾客数是服从参数为λt的Poisson分布，女顾客数是服从参数为μt的Poisson分布，且相互独立。则第一位顾客是男性的概率为$\lambda/(\lambda+\mu)$。

注2：最大似然估计具有不变性：

- 若$\hat{\theta}$是未知参数θ的最大似然估计，则$g(\theta)$的最大似然估计为$g(\hat{\theta})$.
- 于是正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的

1. 标准差σ的MLE是s_n;
2. 分布函数$F(x) = \Phi((x-\mu)/\sigma)$的MLE是$\Phi((x-\bar{x})/s_n)$;
3. 总体α分位数$x_\alpha = \mu+\sigma u_\alpha$的MLE是$\bar{x}+s_n u_\alpha$，其中$u_\alpha$为$N(0,1)$分布的α分位数。

例7. 设x_1，…，x_n为取自参数为λ的指数分布总体的样本，$x>0$为一给定实数，求$p=F(x)$的最大似然估计。

例8. 设x_1，⋯，x_n为取自$U(0, \theta)$总体的样本，$\theta > 0$未知，求参数θ的最大似然估计。

解：
$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0<x_i<\theta,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

续例2．已知$\hat{\theta}_M$与$\dfrac{n+1}{n}\hat{\theta}_{MLE}$都是θ的无偏估计，通过比较方差知后者比前者有效。

定义

- 设X是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的随机变量，事件$A \in \mathcal{F}$满足$P(A) > 0$。则称

$$F_{X|A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F_{X|A}(x) = P(X \le x|A) = \frac{P(X \le x, A)}{P(A)}$$

  为在已知A发生的情况下X的条件分布函数。
- 如果存在非负可积函数$p_{X|A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$使得条件分布函数

$$F_{X|A}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{X|A}(u)\mathrm{d}u,$$

  则称$p_{X|A}$为在已知A发生的情况下X的条件密度函数。

2. 若$P(A) > 0$，则$E(X|A) = E(XI_A)/EI_A = E(XI_A)/P(A)$。

证明：（2）

$$\begin{aligned} E(XI_A) &= E[E(XI_A|I_A)] = E(XI_A|A)P(A) + E(XI_A|\bar{A})P(\bar{A}) \\ &= E(X|A)P(A)。\end{aligned}$$

$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

- $X^* = (X - \mu_1)/\sigma_1$，$Y^* = (Y - \mu_2)/\sigma_2$；
- $(X^*, Y^*) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho)$，$X^*|Y^* = y \sim N(\rho y, 1 - \rho^2)$；
- $(X^*|Y = y) = (X^*|Y^* = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) \sim N\big(\rho(y - \mu_2)/\sigma_2, 1 - \rho^2\big)$；
- $(X|Y = y) = (\sigma_1 X^* + \mu_1|Y = y)$
  $\sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), (1 - \rho^2)\sigma_1^2\right)$；
- $E(X|Y) = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(Y - \mu_2)$；
- $Var(X|Y) = (1 - \rho^2)\sigma_1^2$。