离散数学(1)

Discrete Mathematics

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn

单选题 1分

设置

下列公式中哪一项在{1,2}域上是可满足的，而在{1}域上是不可满足的?

A $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$

B $(\exists x)P(x)$

C $(\exists x)P(x) \land (\exists y)\neg P(y)$

D $(\exists x)(\exists y)\big(P(x) \lor \neg P(y)\big)$

提交

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

复习：从命题公式移植来的等值式

- 命题公式中常常用到的等价式及永真蕴含式也可以看作是谓词演算中的等价式及永真蕴含式

例如

$A(x) \Rightarrow A(x) \vee B(x)$ $P \Rightarrow P \vee Q$

$(A(x) \rightarrow B(x)) = (\neg A(x) \vee B(x))$ $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$

$\neg(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) = \neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x B(x)$ 摩根定律

复习：常用的等值公式

- 蕴涵等值式 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- **等价等值式：**$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- **假言易位：** $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- **等价否定等值式：** $P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- **归谬论：**$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$

复习：常用的等值公式

- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ 前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$ 前提析取合并

证明其他等值式

复习：基本推理公式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$，但 $P \vee Q \not\Rightarrow P$
2. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$ 1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow P$
3. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$ 1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$
4. $P \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \to Q$ 2式的逆否，4式的推论。
6. $Q \Rightarrow P \to Q$ 3式的逆否，4式的推论。
7. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$ 非 P，而P∨Q又成立，只有Q成立
8. $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$ *假言推理，分离规则，7式的变形
9. $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$ 7式的变形

复习：基本推理公式

10. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$ *三段论
11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$ 类似10式
12. $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$ 10式的推论
13. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$ 10式的推论
14. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee \neg S) \Rightarrow \neg P\vee \neg R$ 9式的推论
15. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$ P=F时左=右，P=T时右=T
16. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ P=T时左=右，P=F时右=T

复习：消去量词等值式

将论域限定为有限集， $\{1,2, \ldots, k\}$，则有：

$$(\forall x)P(x) = P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \lor P(2) \lor \ldots \lor P(k)$$

复习：否定型等值式

5-1-2 否定型等值式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

复习：5.2 量词分配等值式

5-2-1 量词对析取词、合取词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \lor q) = (\forall x)P(x) \lor q$$

$$(\exists x)(P(x) \lor q) = (\exists x)P(x) \lor q$$

$$(\forall x)(P(x) \land q) = (\forall x)P(x) \land q$$

$$(\exists x)(P(x) \land q) = (\exists x)P(x) \land q$$

其中q 是命题变项，与个体变元 x 无关

复习：5.2 量词分配等值式

5-2-2 量词对蕴含词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \to q) = (\exists x)P(x) \to q$$

$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$

$$(\forall x)(p \to Q(x)) = p \to (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)\big(p \to Q(x)\big) = p \to (\exists x)Q(x)$$

其中p, q是命题变项，与个体变元 x 无关

复习：5.2 量词分配等值式

5-2-3 全称量词∀对∧，存在量词∃对∨的分配律

$$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) = (\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) = (\exists x)\ P(x)\vee(\exists x)Q(x)$$

用$\{1,2\}$域方法验证：

∀对∨ 不满足分配律，∃对∧不满足分配律

但需注意:

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x)Q(x) \neq (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \neq (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

而只满足

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

复习：等值演算规则

- 置换规则
- 变元易名

复习：置换规则

- 设Φ(A)是含公式A的公式，若A ⇔ B，则Φ(A) ⇔ Φ(B).
- 一阶逻辑中的置换规则与命题逻辑中的置换规则形式上完全相同，只是在这里A，B是一阶逻辑公式.

复习：变元易名（约束变元的换名）

- 目的是使每个变元性质唯一
- 设A为一公式，将A中某量词辖域中某约束变项的所有出现及相应的约束变元，改成该量词辖域中未曾出现过的某个体变项符号，公式中其余部分不变，设所得公式为A’， 则$A' \Leftrightarrow A$

例： $\forall x A(x) \vee B(x)$

由于公式中的x 即是自由的又是约束的，可利用此规则进行换名为：

$\forall t\, A(t) \vee B(x) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B(x)$ 后可利用量词的扩充得到：

$$\forall t\, A(t) \vee B(x) \Leftrightarrow \forall t(A(t) \vee B(x))$$

复习：变元易名（自由变元的代替）

设A为一公式，将A中某个自由出现的个体变项的所有出现用A中未曾出现过的个体变项符号代替，A中其余部分不变，设所得公式为A’，则A’ $\Leftrightarrow$ A.

例： $\forall x F(x, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x, t, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$

(变元易名) 自由的y用t代换

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x, t, z) \rightarrow \exists y G(w, y, z)$

(变元易名) 自由的x用w代换

Setting

关于前束范式下面正确的是

A 所有量词都位于该公式的最左边

B 所有量词前都不含否定词

C 量词的辖域都延伸到整个公式的末端

D 不含有量词

Submit

复习：5-3-1 前束范式

设A为一阶谓词逻辑公式，如果满足

(1) 所有量词都位于该公式的最左边；

(2) 所有量词前都不含否定词；

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

则称A为前束范式。

复习：5-3-1 前束范式

- 前束范式的一般形式为

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

其中$Q_i(1<=i<=n)$为∀或∃，M为不含量词的公式，称作公式A的基式或母式。

复习：5-3-2 前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式都存在与之等值的前束范式，但其前束范式并不唯一。

复习：5-3-3 化前束范式的基本步骤

1. 消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。
2. 右移否定词$\neg$（利用否定型等值式与摩根律）。
3. 量词左移（使用量词分配等值式）。
4. 变元易名（使用变元易名分配等值式）。

使用以上步骤，可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值性，所以，所得到的前束形与原公式是等值的。这里的

$$S(a, b, x, y, z)$$

便是原公式的母式。

由于前束形中量词的次序排列，如$(\exists y)(\exists z)$也可以写成$(\exists z)(\exists y)$以及对母式没有明确的限制，自然其前束范式并不唯一，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z) \land P)$$

其中P可以是任一不含量词的普遍有效的公式。

复习：前束范式存在定理

定理5.1 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

证明：通过如下算法，可将公式化成等价的前束范式。

1. 利用量词转化公式，把否定符号深入到指导变元的后面。

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

2. 如果必要的话，将约束变量改名。

3. 利用量词辖域收缩、扩张等值式把量词移到全式的最前面，这样便得到与公式等价的前束范式。

说明

求前束范式的过程，就是制造量词辖域可以扩大的条件，进行量词辖域扩大。

任何公式的前束范式都是存在的，但一般说来，并不唯一。

利用一阶逻辑等值式以及两条变换规则（置换规则、变元易名）就可以求出与公式等值的前束范式，或所谓公式的前束范式。

复习：5-3-4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A，若其

  (1) 前束范式中所有的存在量词都在全称量词的左边，且至少有一个存在量词 (∃**前束范式**)；

  (2) 或仅保留全称量词而消去存在量词，便得到公式 A的 SKOLEM 标准型(∀**前束范式**) 。

- 公式 A与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。

复习：5-3-7 ∀前束范式

一阶谓词逻辑的任一公式 A 的∀前束范式（或称SKOLEM标准型）是仅保留全称量词的前束范式。

5-3-8 ∀前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式 A都可化成相应的∀前束范式（仅保留全称量词的前束范式，或称SKOLEM标准型），并且 A是**不可满足**的当且仅当其∀前束范式是不可满足的。

应注意，该定理是说**对于不可满足的公式**，它与其Skolem标准形是等值的，而一般的公式与其Skolem标准形并不是等值的。自然仅当A是不可满足的方使用Skolem标准形。

例3: 求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem标准形。

将一公式化成Skolem标准形, 首先也要求出前束形。该例已是前束形，便可直接求Skolem标准形

首先将最左边的$(\exists x)$消去，而将谓词P中出现的所有变元x均以论域中的某个常项a(未在P中出现过)代入。

进而消去从左边数第二个存在量词$(\exists u)$, 因$(\exists u)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$, 而将谓词P中出现的所有变元u均以y, z的某个二元函数f (y, z) (未在P中出现过)代入。

最后按同样的方法消去存在量词$(\exists w)$，因$(\exists w)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$和$(\forall v)$，需将谓词P中出现的所有变元w均以y、z、v的某个三元函数$g(y, z, v)$ (未在P中出现过也不同于$f(y, z)$)代入。

这样便得到消去全部存在量词的Skolem标准形

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y,z), v, g(y,z,v))$$

消存在量词是将相应变元以函数代入，可这样来理解，

如$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的Skolem标准形是$(\forall x)P(x, f(x))$。因为$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的意思是对任一x，都有一个y使$P(x, y)$成立，那么这个y通常是依赖于x的，可视作x的某个函数$f(x)$。

从而有Skolem标准形$(\forall x)P(x, f(x))$, 然而所能找到的y不必然是x的函数f, 于是$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$不等值。

在$\{1,2\}$域上

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$$

$$=(P(1,1)\vee P(1,2))\wedge(P(2,1)\vee P(2,2))$$

$$(\forall x)P(x,f(x))=P(1,f(1))\wedge P(2,f(2))$$

两者明显不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的。

这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的。

原公式P是可以满足的，一定$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)$是的P的值为1，那么一定可以找到 f和g的值使得任意前束范式是可满足的，那么p不可满足的，也一定能能出任意前束范式是不可满足的，根据逆否命题推出

5-3-5　∃前束范式

- 一阶谓词逻辑的任一公式的前束范式（或称SKOLEM标准型）的形式为

$$(\exists \mathrm{x}_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_i)(\forall x_{i+1})\ldots(\forall x_n)M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

即所有的存在量词都在全称量词的左边,且应保证至少有一个存在量词($i \geq 1$)，同时$M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$中不含量词也无自由个体变项。

5-3-6 ∃前束范式存在定理

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A都可以化为相应的∃前束范式，并且 A是普遍有效的当且仅当其∃前束范式是普遍有效的。

例2: 求$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)$的∃前束范式(P中无量词)。

将一公式化成∃前束形, 首先要求出前束形, 再做∃前束。这个例子已是前束形， 便可直接求∃前束形。

首先将全称量词$(\forall y)$改写成存在量词$(\exists y)$, 其次是引入谓词S和一个变元z, 得$S(x, z)$, 构造公式

$$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u)\wedge\neg S(x, y))\vee(\forall z)(S(x, z))$$

其中$\neg S(x, y)$的变元, 是$(\forall y)$的变元y和$(\forall y)$左边存在量词$(\exists x)$的变元x。附加的$(\forall z)S(x, z)$中的变元z是新引入的未在原公式中出现过的个体, S也是不曾在M中出现过的谓词。

进而将$(\forall z)$左移(等值演算), 便得∃前束范式

$$(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x, y, u)\land\neg S(x, y))\lor S(x, z))$$

当原公式中有多个全称量词在存在量词的左边时,可按上述方法将全称量词逐一右移。

∃前束范式仅在普遍有效的意义下与原公式等值。∃前束形对谓词逻辑完备性的证明是重要的。

思考

$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u) \Rightarrow$

$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u) \wedge \neg S(x, y)) \vee (\forall z)S(x, z))$

- x是一个常项，u是y的函数，因此P(x,y,u) 可以看做是P(y), S(x, y))可以看做是Q(y)，则该公式可以化简为：

$$(\forall y)P(y) \Rightarrow ((\exists y)(P(y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\forall z)Q(z))$$

- 也就是

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z)Q(z))$$

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z)Q(z))$$

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$$

$$= \underline{\neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))} \vee \neg(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$= \neg(\forall x)P(x) \vee \underline{(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))} \vee (\forall x)Q(x)$$

$$= (\forall x)P(x) \rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z)Q(z))$$

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z)Q(z))$$

代入规则、变元易名

在普遍有效的意义下两者等价

$$\mathbf{(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)}$$

$((\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \lor (\forall z)Q(z)) \Rightarrow (\forall x)P(x)$

在普遍有效的意义下用P(x) 代Q(x)

$((\exists x)(P(x) \land \neg P(x)) \lor (\forall z)P(z))$

得到 $(\forall z)P(z))$

变量换名 $(\forall x)P(x)$

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$$

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$

$= ((\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)P(x)) \rightarrow(\forall x)Q(x)$ 前提合取合并

$= (\forall x)((\neg P(x)\vee Q(x)) \wedge P(x)) \rightarrow(\forall x)Q(x)$

$= (\forall x)((\neg P(x) \wedge P(x)) \vee(Q(x))\wedge P(x))) \rightarrow(\forall x)Q(x)$

$= (\forall x)(Q(x)\wedge P(x)) \rightarrow(\forall x)Q(x)$

$=((\forall x)Q(x)\wedge(\forall x)P(x)) \rightarrow(\forall x)Q(x)$

$=T$

多选题 1分

设置

关于∃前束范式和只保留全称量词的Skolem标准形，下面说法正确的是

A 对普遍有效的公式，它和其∃前束范式等值

B 对不可满足的公式，它和其∃前束范式等值

C 对普遍有效的公式，它和其只保留全称量词的Skolem标准形等值

D 对不可满足的公式，它和其只保留全称量词的Skolem标准形等值

提交

5.4　基本推理公式

5-4-1 一阶谓词逻辑的推理形式和推理公式

- 在一阶谓词逻辑中，从前提$A_1,A_2,\ldots,A_n$出发推出结论B的推理形式结构，依然采用如下的蕴涵式形式：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$

- 若上式为永真式，则称推理正确，否则称推理不正确。于是，在一阶谓词逻辑中判断推理是否正确便归结为判断上式是否为永真式，并称满足永真式的蕴涵式为推理公式，用如下形式的符号表示：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$

5-4-1 一阶谓词逻辑的推理形式和推理公式

- 命题逻辑中有关推理形式、重言蕴涵以及基本的推理公式，均可引入到谓词逻辑中

- 重点讨论

  在命题逻辑中无法处理或谓词逻辑中所特有的问题

例1

- 所有的整数都是有理数,
- 所有的有理数都是实数,
- 所以, 所有的整数都是实数.

引入谓词形式化

考虑 是否是正确的推理?

P(x): x 是整数　Q(x): x 是有理数　R(x): x 是实数

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$$

$$\rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$$

是否是正确的推理?

命题逻辑的局限性 &
引入谓词逻辑的必要性

$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$ （三段论）

例2：三段论

- P: 凡是人都要死，
- Q: 苏格拉底是人，
- R: 所以苏格拉底是要死的
- A(x): x 是人
- B(x): x 必死
- $(\forall x)(A(x) \to B(x)) \wedge A(\text{苏格拉底}) \to B(\text{苏格拉底})$

是否是正确的推理？

例4

- 若某一个体a具有性质E, 则所有的个体x都具有性质E
- $E(a) \rightarrow (\forall \mathrm{x})E(\mathrm{x})$

- 显然这一推理形式是不正确的

Setting

下面正确的推理公式为：

A $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$

B $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathrm{Q}(\mathrm{x})$

C $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

D $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

Submit

5-4-2 基本推理公式

(1)$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$

(2)$(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathrm{Q}(\mathrm{x})$

(3)$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

(4)$(\forall \mathrm{x})\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

(5)$(\forall x)\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$

5-4-2 基本推理公式

$(6)(\forall x)\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)Q(x)$

$(7)(\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big) \wedge (\forall x)\big(Q(x) \to R(x)\big) \Rightarrow$
$(\forall x)(P(x) \to R(\mathrm{x}))$

$(8)(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge \ P(a) \Rightarrow Q(a)$

$(9)(\forall \mathrm{x})(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$

$(10)(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

设论域是某班学生,

$P(x)$: x是高才生, $Q(x)$: x是运动员

为使$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$, 论域内学生分布只有两种可能:

1. 班上所有学生都是高才生, 又都是运动员;
2. 班上有的学生不是高才生, 但凡高才生必是 运动员

以上两种情况下都有$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) = T$

P(x): x是高才生, Q(x): x是运动员

但上述推理式的逆(反向)在有些情形并不成立

如: 班上有的学生不是高才生 (1)

而且班上又有的高才生不是运动员 (2)

由(1)和蕴涵式性质, 有

$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) = T$

但由(2)有的高才生不是运动员

故 $P(a) \rightarrow Q(a) = F$

所以 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = F$

解释性说明

设在任一解释下，有$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) = T$,

从而对属于论域的任一x,

$$P(x) \to Q(x) = T$$

上式必能保证 $(\forall x)P(x) = T$时有$(\forall x)Q(x) = T$

从而有 $(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x) = T$

$$(\forall x)(P(x)\to Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)(P(x)\to Q(x)) \to ((\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x))$$

$$= (\forall x)(\neg P(x)\lor Q(x)) \to ((\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x))$$

$$= (\forall x)(\neg(P(x)\land\neg Q(x)) \to (\neg(\exists x)P(x)\lor(\exists x)Q(x))$$

$$= \neg(\exists x)(P(x)\land\neg Q(x)) \to (\neg(\exists x)P(x)\lor(\exists x)Q(x))$$

$$= (\exists x)(P(x)\land\neg Q(x)) \lor \neg(\exists x)P(x)\lor(\exists x)Q(x)$$

$$= (\exists x)((P(x)\land\neg Q(x))\lor Q(x)) \lor \neg(\exists x)P(x)$$

$$= (\exists x)(P(x)\lor Q(x)) \lor \neg(\exists x)P(x)$$

$$= (\exists x)P(x)\lor (\exists x)Q(x) \lor \neg(\exists x)P(x)$$

$$= T$$

基本推理公式（命题逻辑温习）

Rule of Inference	Name/名称
$P \Rightarrow P \vee Q$	Addition/析取附加式
$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplification/合取化简式
P、$Q \Rightarrow P \wedge Q$	Conjunction/并发式
P、$P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Modus ponens/分离式
$\neg Q$、$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	Modus tollens/拒取式
$\neg P$、$P \vee Q \Rightarrow Q$	Disjunctive syllogism/析取三段式
$P \rightarrow Q$、$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	Hypothetical syllogism/假言三段式

5.5 推理演算

内容回顾：2.8 基本的推理公式

证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:

1. 证 $A \to B$ 是重言式
2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
3. 真值表法
4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
5. 解释法
6. ……

5-5-1 推理规则推理演算方法

- 在命题逻辑中，由引入几条推理规则，配合基本推理公式所进行的推理演算方法，可以容易地推广到谓词逻辑中。
- 由于在谓词逻辑中不能使用真值表法，又不存在判别$A \rightarrow B$是普遍有效的一般方法，从而使用推理规则的推理方法已成为谓词逻辑的基本推理演算方法。
- 所使用的推理规则除命题逻辑的推理演算中用到的六条基本推理规则外（参见2.9节），还包括四条有关量词的消去和引入规则。

多选题 1分

设置

下列哪些规则是之前第二章介绍过的推理规则?

A 前提引入规则

B 结论引入规则

C 置换规则

D 分离规则

提交

2.9 推理演算（温习）

主要的推理规则

（1）前提引入规则：推理过程中可随时引入前提

（2）结论引入规则：中间结论可作为后续推理的前提

（3）代入规则：仅限于重言式中的命题变项

（4）置换规则：利用等值公式对部分公式进行置换

（5）分离规则：由A及A→B成立，可将B分离出来

（6）条件证明规则：$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ 等价

谓词逻辑推理规则

Rule of Inference	Name
$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(c)$ if $c \in U$	UI / 全称举例
$P(c)$ for an arbitrary $c \in U \Rightarrow (\forall x)P(x)$	UG / 全称推广
$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ for some $c \in U$	EI / 存在举例
$P(c)$ for some $c \in U \Rightarrow (\exists x)P(x)$	EG / 存在推广

5-5-2 全称量词消去规则（简记为UI规则或UI）

- $\dfrac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(y)}$ 或 $\dfrac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(c)}$
- 两式成立的条件是：

（1）第一式中，取代x的y应为任意的不在$P(x)$中约束出现的个体变项。

（2）第二式中，c为任意个体常项。

（3）用y或c去取代$P(x)$中自由出现的x时，必须在x自由出现的一切地方进行取代。

当$P(x)$中不再含有量词和其它变元时没有问题。

如果允许$P(x)$中含有量词和其它变元时，须限制 y 不在$P(x)$中约束出现。

如$(\forall x)P(x) = (\forall x)(\exists z)(x<z)$ 在实数域上成立

$$P(y) = (\exists z)(y<z)$$

若将y取为z，便有$(\exists z)(z<z)$, 变成矛盾式。

5-5-3 全称量词引入规则（简记为UG规则或UG）

- $$\frac{P(y)}{\therefore (\forall x)P(x)}$$

- 该式成立的条件是：
  （1） 无论$P(y)$中自由出现的个体变项y取何值，$P(y)$应该均为真。
  (2) 取代自由出现的y的x也不能在$P(y)$中约束出现。

5-5-4 存在量词消去规则（简记为EI规则或EI）

- $$\frac{(\exists x)P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 该式成立的条件是：
  （1） c是使P为真的特定的个体常项。
  （2）c不在$P(x)$中出现。
  （3）**$P(x)$中没有其它自由出现的个体变项。**

如 $(\exists x)P(x) = (\exists x)(x>y)$, y是自由变项，这时

推不出 $c>y$。

5-5-5 存在量词引入规则（简记为EG规则或EG）

- $$\frac{P(c)}{\therefore (\exists x)P(x)}$$

- 该式成立的条件是：
  （1）c是特定的个体常项。
  （2）取代c的x不在$P(c)$中出现过。

5-5-6 使用推理规则的推理演算过程

- 首先将以自然语句表示的推理问题引入谓词加以形式化；
- 若不能直接使用基本的推理公式则消去量词；
- 在无量词的条件下使用规则和公式推理；
- 最后再引入量词以求得结论。

推理演算举例

P81　例5：

1. 有的病人喜欢所有的医生，
2. 没有病人喜欢庸医，
3. 所以没有医生是庸医。

（1）形式化

$P(x)$ 表示x是病人，　$Q(x)$ 表示x是庸医，
$D(x)$ 表示x是医生，　$L(x,y)$ 表示x喜欢y。

1. $(\exists x)\big(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \to L(x,y))\big)$

2. $(\forall x)\big(P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to \neg L(x,y))\big)$ or

$\neg(\exists x)(P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to L(x,y)))$

3. $\neg(\exists x)(D(x) \wedge Q(x))$ or

$(\forall x)(D(x) \to \neg Q(x))$

$$(\exists x)\Big(P(x) \wedge (\forall y)\big(D(y) \to L(x,y)\big)\Big)$$

$$(\forall x)\Big(P(x) \to (\forall y)\big(Q(y) \to \neg L(x,y)\big)\Big)$$

$$(\forall x)(D(x) \to \neg Q(x))$$

(2) 证明

①	$(\exists x)\Big(P(x) \wedge (\forall y)\big(D(y) \to L(x,y)\big)\Big)$	前提
②	$P(c) \wedge (\forall y)\big(D(y) \to L(c,y)\big)$	存在量词消去
③	$(\forall x)\Big(P(x) \to (\forall y)\big(Q(y) \to \neg L(x,y)\big)\Big)$	前提
④	$P(c) \to (\forall y)\big(Q(y) \to \neg L(c,y)\big)$	全称量词消去
⑤	$P(c)$	②
⑥	$(\forall y)\big(D(y) \to L(c,y)\big)$	②
⑦	$D(y) \to L(c,y)$	全称量词消去
⑧	$(\forall y)\big(Q(y) \to \neg L(c,y)\big)$	④⑤分离
⑨	$Q(y) \to \neg L(c,y)$	全称量词消去
⑩	$L(c,y) \to \neg Q(y)$	⑨置换
⑪	$D(y) \to \neg Q(y)$	⑦⑩三段论
⑫	$(\forall y)(D(y) \to \neg Q(y))$	全称量词引入
⑬	$(\forall x)\big(D(x) \to \neg Q(x)\big)$	⑫置换

量词消去：先存在再任意

证明举例补充

前提:任何人如果他喜欢步行则他就不喜欢乘汽车；

每个人喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车；

有的人不喜欢骑自行车。

结论: 因此有的人不喜欢步行。

设定：W(x): x喜欢步行，B(x):x喜欢乘汽车

K(x)：x喜欢骑自行车；

形式化如下：

$(\forall x)(W(x)\rightarrow \neg B(x))$； $(\forall x)(B(x)\vee K(x))$； $(\exists x)\neg K(x)$；

结论：$(\exists x)\neg W(x)$

$(\forall x)(W(x) \rightarrow \neg B(x))$； $(\forall x)(B(x) \vee K(x))$； $(\exists x)\neg K(x)$；
结论： $(\exists x)\neg W(x)$

1. $(\exists x)\neg K(x)$	(p)
2. $\neg K(c)$	(EI)
3. $(\forall x)(B(x) \vee K(x))$	(p)
4. $B(c) \vee K(c)$	(UI)
5. $B(c)$	
6. $(\forall x)(W(x) \rightarrow \neg B(x))$	(p)
7. $W(c) \rightarrow \neg B(c)$	(UI)
8. $B(c) \rightarrow \neg W(c)$	(置换)
9. $\neg W(c)$	5、8分离
10. $(\exists x)\neg W(x)$	(EG)

注意事项

1. $(\exists x)\neg K(x)$ (p)
2. $\neg K(c)$ (EI)
3. $(\forall x)(B(x) \vee K(x))$ (p)
4. $B(c) \vee K(c)$ (UI)

- ∃x和∀x 换成一个特指的时候，一定要先将∃x变成c，然后才是∀x

单选题 1分

设置

下列推理是否正确？

(1) $(\forall x)(\exists y)(x > y)$	前提
(2) $(\exists y)(z > y)$	全称量词消去
(3) $z > b$	存在量词消去
(4) $(\forall z)(z > b)$	全称量词引入
(5) $b > b$	全称量词消去
(6) $(\forall x)(x > x)$	全称量词引入

A 是

B 否

提交

例题-步步错

- 分析下列推理的正确性：

(1) $(\forall x)(\exists y)(x > y)$ 前提

(2) $(\exists y)(z > y)$ 全称量词消去 y依赖于x

(3) $z > b$ 存在量词消去 b依赖于z

(4) $(\forall z)(z > b)$ 全称量词引入 不成立！

(5) $b > b$ 全称量词消去

(6) $(\forall x)(x > x)$ 全称量词引入 个体常项不能用全称量词量化

该式成立的条件是：

(1) 无论$P(y)$中自由出现的个体变项y取何值，$P(y)$应该均为真。

(2) 取代自由出现的y的x也不能在$P(y)$中约束出现。

例题

- 在自然推理系统$N_{\mathcal{L}}$中，构造下面推理的证明:（个体域为实数集合）.
  - 不存在能表示成分数的无理数. 有理数都能表示成分数. 因此，有理数都不是无理数.

证明：设$F(x)$：x为无理数

$G(x)$：x为有理数

$H(x)$：x能表示成分数

前提：$\neg(\exists x)\big(F(x) \wedge H(x)\big)$ ，$(\forall x)\big(G(x) \rightarrow H(x)\big)$

结论：$(\forall x)\big(G(x) \rightarrow \neg F(x)\big)$

例题证明

(1) $\neg(\exists x)\big(F(x) \wedge H(x)\big)$	前提引入
(2) $(\forall x)\big(\neg F(x) \vee \neg H(x)\big)$	(1) 置换
(3) $(\forall x)\big(F(x) \rightarrow \neg H(x)\big)$	(2) 置换
(4) $F(x) \rightarrow \neg H(x)$	(3) 全称量词消去
(5) $(\forall x)\big(G(x) \rightarrow H(x)\big)$	前提引入
(6) $G(x) \rightarrow H(x)$	(5) 全称量词消去
(7) $H(x) \rightarrow \neg F(x)$	(4) 置换
(8) $G(x) \rightarrow \neg F(x)$	(6) (7) 三段论
(9) $(\forall x)\big(G(x) \rightarrow \neg F(x)\big)$	(8) 全称量词引入

前提：$\neg(\exists x)\big(F(x) \wedge H(x)\big)$，$(\forall x)\big(G(x) \rightarrow H(x)\big)$

结论：$(\forall x)\big(G(x) \rightarrow \neg F(x)\big)$

5.6 谓词逻辑的归结推理法

5-6-1 谓词逻辑的归结推理法

- 出发点：使用推理规则的证明技巧性较强，不便于机器实现。
- 命题逻辑中的归结推理法可以推广到谓词逻辑中。证明过程与命题逻辑相似。
- 所不同的是需对谓词逻辑中的量词和变元进行特殊的处理。

5-6-2 归结推理法步骤

1. 欲证$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ 是定理，等价于证 $G = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B$. 是矛盾式。

2. 将G化为前束范式。进而化为SKOLEM标准型，消去存在量词，得到仅含全称量词的前束范式$G*$

由于全称量词的前束范式$G*$保持原式G不可满足的特性，故G与$G*$在不可满足的意义下是一致的。

3. 略去$G*$中的全称量词，$G*$中的合取词$\wedge$以“，”表示，便得到$G*$的子句集S。实用中可分别求出诸A_i与$\neg B$的子句集。

4. 对S作归结。直至归结出空子句□。

归结推理法说明

- 设C_1, C_2是两个无共同变元的子句，如下式

$$C_1 = P(x) \vee Q(x)$$
$$C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$$
$$R(C_1, C_2) = Q(a) \vee R(y)$$

- $P(x)$与$\neg P(a)$在置换$\{x/a\}$下将变元 x 换成 a，构成互补对可进行归结。得到归结式$R(C_1,C_2)$。

归结推理法举例

例2：前面的例子用归结法证明如下。

$$A_1 = (\exists x)(P(x) \land (\forall y)(D(y) \to L(x,y)))$$

$$A_2 = (\forall x)(P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to \neg L(x,y)))$$

$$B \ = (\forall x)\big(D(x) \to \neg Q(x)\big)$$

求证 $A_1 \land A_2 \Rightarrow B$

1. 有的病人喜欢所有的医生,
2. 没有病人喜欢庸医,
3. 所以没有医生是庸医。

$P(x)$ 表示x是病人， $Q(x)$ 表示x是庸医，
$D(x)$ 表示x是医生， $L(x,y)$ 表示x喜欢y。

归结推理法举例

1. 等价于证明 $A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B = \emptyset$ 是矛盾式
2. 求出相应的Skolem标准型， G^*分别是

$$G^*_{A_1} = (\forall y)(P(a) \wedge (\neg D(y) \vee L(a,y)))$$

$$G^*_{A_2} = (\forall \mathrm{x})(\forall y(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee L(x,y))$$

$$G^*_{\neg B} = D(b) \wedge Q(b)$$

3. G的子句集 $S = S_{A_1} \cup S_{A_2} \cup S_{\neg B}$

$$S_{A_1} = \{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y)\}$$

$$S_{A_2} = \{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee L(x,y)\}$$

$$S_{\neg B} = \{D(b), Q(b)\}$$

$$A_1 = (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x,y)))$$

$$A_2 = (\forall x)\Big(P(x) \rightarrow (\forall y)\big(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)\big)\Big)$$

$$B = (\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

归结推理法举例

4. 建立归结过程

$S_{A_1} = \{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y)\}$

$S_{A_2} = \{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y)\}$

$S_{\neg B} = \{D(b), Q(b)\}$

(1) $P(a)$

(2) $\neg D(y) \vee L(a,y)$

(3) $\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y)$

(4) $D(b)$

(5) $Q(b)$

(6) $L(a,b)$ (2)(4) 归结

(7) $\neg Q(y) \wedge \neg L(a,y)$ (1)(3) 归结

(8) $\neg L(a,b)$ (5)(7) 归结

(9) $\square$ (6)(8) 归结

第五章小结

本章讨论了谓词逻辑的等值和推理演算。主要内容可概括为：

- 否定型等值式的不同形式与证明方法；
- 量词分配等值式的不同形式与证明方法；
- 前束范式的定义与Skolem标准形的构成，求全称量词的前束范式的推演方法；
- 基本的推理公式，四条推理规则；
- 使用归结法证明推理公式的步骤和方法。

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5.1 否定型等值式

5.2 量词分配等值式

5.3 范式（全称量词的前束范式）

5.4 基本推理公式

5.5 推理演算

5.6 谓词逻辑的归结推理法

5.1 等值式

- 第一组 命题逻辑中重言式的代换实例
- 第二组
  - 1. 消去量词等值式
  - 2. 量词否定等值式
  - 3. 量词辖域收缩与扩张等值式
  - 4. 量词分配等值式

消去量词等值式

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \cdots \vee P(k)$$

量词否定等值式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

量词辖域收缩与扩张等值式

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$
$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$
$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$
$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q) = (\exists x)P(x) \rightarrow q$$
$$(\exists x)(P(x) \rightarrow q) = (\forall x)P(x) \rightarrow q$$
$$(\forall x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\forall x)Q(x)$$
$$\underline{(\exists x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\exists x)Q(x)}$$

量词分配等值式

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

那些不等于的……

$$(\forall x)(\forall y)(P(x)\vee Q(y)) \neq (\forall x)(P(x)\vee Q(x))$$
$$(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y)) \neq (\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$$

- ∀ 对∨ 不满足分配率， ∃ 对∧不满足分配率

$$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) = (\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) = (\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x)\vee Q(x))$$
$$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

5.3.1 前束范式

- 设A为一阶谓词逻辑公式，如果满足

(1) 所有量词都位于该公式的最左边；

(2) 所有量词前都不含否定词；

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

则称A为前束范式。

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$$

- 其中$Q_i(1<=i <= n)$为∀或∃，M为不含量词的公式，称作公式 A的基式或母式。

5.3.4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A，若其

(1) 前束范式中所有的存在量词都在全称 量词的左边，且至少有一个存在量词；

(2) 或仅保留全称量词而消去存在量词，

便得到公式 A的 SKOLEM 标准型。

- 公式 A与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。

基本推理公式（续 命题逻辑温习）

Rule of Inference	Name/名称
$P \Rightarrow P \vee Q$	Addition/析取附加式
$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplification/合取化简式
P、$Q \Rightarrow P \wedge Q$	Conjunction/并发式，表示
P、$P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Modus ponens/分离式
$\neg Q$、$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	Modus tollens/拒取式
$\neg P$、$P \vee Q \Rightarrow Q$	Disjunctive syllogism/析取三段式
$P \rightarrow Q$、$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	Hypothetical syllogism/假言三段式

谓词逻辑推理规则

Rule of Inference	Name
$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$ if $y \in D$	UI/全称举例
$P(y)$ for an arbitrary $y \in D \Rightarrow (\forall x)P(x)$	UG/全称推广
$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ for some $c \in D$	EI/存在举例
$P(c)$ for some $c \in D \Rightarrow (\exists x)P(x)$	EG/存在推广

推理

- 全称量词消去规则
- 全称量词引入规则
- 存在量词消去规则
- 存在量词引入规则
- 首先将以自然语句表示的推理问题引入谓词加以形式化；
- 若不能直接使用基本的推理公式则消去量词；
- 在无量词的条件下使用规则和公式推理；
- 最后再引入量词以求得结论。

5-6-2 归结推理法步骤

1. **欲证** $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$**是定理，等价于证** $G = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots A_n \wedge \neg B$ **矛盾式。**

2. **将*G*化为前束范式。进而化为**SKOLEM**标准型消去存在量词，得到仅含全称量词的前束范式*G**，**
   - **由于全称量词的前束范式*G**保持原式*G*不可满足的特性，故*G*与*G**在不可满足的意义下是一致的。**

3. 略去*G**中的全称量词，*G**中的合取词∧以“，”表示，便得到*G**的子句集*S*。实用中可分别求出诸A_i与$\neg B$的子句集。

4. 对*S*作归结。直至归结出空子句□。

前五章经典/易错习题讲解

- 第一章 命题逻辑的基本概念
  - 命题与悖论、命题形式化、波兰式与逆波兰式
- 第二章：命题逻辑的等值和推理演算
  - 等值证明/蕴涵、范式、推理演算
- 第三章：命题逻辑的公理化
  - 罗素公理系统里的定理推演
- 第四章：谓词逻辑的基本概念
  - 命题形式化、普遍有效/可满足与不可满足
- 第五章 谓词逻辑的等值和推理演算
  - 等值证明/蕴涵、求前束范式、推理演算

悖 论（Paradox）

习题1.1. 判断下列语句是否是命题。

（7） 这句话是错的。

悖论是自相矛盾的陈述（statement）。即如果承认这个陈述成立，就可推出它的否定陈述成立；反之，如果承认这个陈述的否定陈述成立，又可 推出这个陈述成立。

数理逻辑中将类似上述 悖论形式的陈述句排除在命题之外。

习题1.5. 形式化下列自然语句：

（7）如果水是清的，那么或者张三能见到池底或者他是个近视眼。

令P表示“水是清的”，Q表示“张三能见到池底”，R表示“张三是个近视眼”。那么

$$P \rightarrow (Q \,\bar{\vee}\, R)$$

注意或和异或是有区别的。

回顾：析取及异或联结词举例

（1）张明喜欢学数学或软件工程。

（2）张明报考的第一志愿（唯一）只选择数学专业或软件工程。

（3）今晚我在家里看电视或去体育场看球赛

若天不下雨，我就上街；否则在家。

设 P：天下雨。Q ：我上街。R：我在家。

A $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

B $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge \neg (Q \wedge R)$

C $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \bar{\vee} (P \wedge \neg Q \wedge R)$

D $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \wedge R)$

Submit

若天不下雨，我就上街；否则在家。

解：

设 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成： $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$.

注意：中间的联结词一定是“$\wedge$”，而不是“$\vee$”，也不是“$\bar{\vee}$”。

因为原命题表示：“天不下雨时我做什么，天下雨我又做什么”的两种作法，其中有一种作法是假的，则命题的真值为假，所以中间的联结词一定是“$\wedge$”。

解法是否正确？

若天不下雨，我就上街；否则在家

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge\neg(Q\wedge R)$

还可以形式化为：$(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\bar{\vee}(P\wedge\neg Q\wedge R)$

波兰式和逆波兰式

习题1.6. 将下列公式写成波兰式和逆波兰式。

（3） $\neg\neg P \vee (W \wedge R) \vee \neg Q$

注意“¬”在波兰式和逆波兰式中的位置。

波兰式： $\vee \vee \neg\neg P \wedge WR \neg Q$

逆波兰式：$P \neg\neg WR \wedge \vee Q \neg \vee$

波兰式和逆波兰式

求波兰式、逆波兰式时需要注意运算顺序

根据约定 $A \vee B \vee C$ 的计算顺序为$((A \vee B) \vee C)$

波兰式：$\vee\vee ABC$

逆波兰式：$AB \vee C \vee$

若为$(A \vee (B \vee C))$

波兰式：$\vee A \vee BC$

逆波兰式：$ABC \vee\vee$

推理式证明

- 永真法、永假法、解释法

$(P \land Q) \Rightarrow (P \to Q)$

① $A \to B$ 永真法

$$(P \land Q) \to (P \to Q)$$
$$= \neg(P \land Q) \lor (\neg P \lor Q) = (\neg P \lor \neg Q) \lor (\neg P \lor Q)$$
$$= \neg P \lor \neg Q \lor \neg P \lor Q = \mathrm{T}$$

② $A \land \neg B$ 永假法

$(P \land Q) \land \neg(P \to Q) = (P \land Q) \land (P \land \neg Q) = P \land Q \land P \land \neg Q = \mathrm{F}$

③ 解释法

设 $P \land Q = \mathrm{T}$，从而有 $P = \mathrm{T}, Q = \mathrm{T}$

习题2.7. 判断下列推理式是否正确？

(9) $(P\wedge Q)\rightarrow R \Rightarrow (P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)$

T F

$(P\wedge Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)) = ((P\wedge Q)\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow R)$

T F

当 $P=\mathrm{T}, Q=\mathrm{F}, R=\mathrm{F}$，有 $(P\wedge Q)\rightarrow R=\mathrm{T}$，$(P\vee Q)\rightarrow R=\mathrm{F}$.

因此，上式不永真.

(15) $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)\wedge(S\rightarrow Q)\Rightarrow(P\wedge R\wedge\neg S\rightarrow Q)$

$((P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)\wedge(S\rightarrow Q))\rightarrow(P\wedge R\wedge\neg S\rightarrow Q)$

$=((P\vee R\vee S)\rightarrow Q)\rightarrow(P\wedge R\wedge\neg S\rightarrow Q)$

$=(\neg(P\vee R\vee S)\vee Q)\rightarrow(\neg(P\wedge R\wedge\neg S)\vee Q)$

$=((P\vee R\vee S)\wedge\neg Q)\vee\neg P\vee\neg R\vee S\vee Q$

$=(P\vee R\vee S\vee Q)\vee\neg P\vee\neg R\vee S$

$=\mathrm{T}$

求范式

5. 给出下列各公式的合取范式、析取范式、主合取范式和主析取范式，并给出所有使公式为真的解释.

(1) $P \vee \neg P$

合取范式：$P \vee \neg P$

析取范式：$P \vee \neg P$

主合取范式：空

主析取范式：$P \vee \neg P = \bigvee_{0,1}$

(3) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$

合取范式：

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg\neg Q)$$
$$= (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$$
$$= \boxed{P \vee Q}$$

析取范式：

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$
$$= (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

主合取范式：$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = P \vee Q = \boxed{\bigwedge_{3}}$

{3} -> {0,1,2} ->{3,2,1}

主析取范式：

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) = \boxed{\bigvee_{1,2,3}}$$

复习极小项和极大项的关系

- $\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)补}$ $\neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)补}$

公式	名称
$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0
$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1
$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2
$P_1 \wedge P_2$	m_3

公式	名称
$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0
$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
$P_1 \vee P_2$	M_3

P_1	P_2	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0	$P_1 \vee P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1	$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
1	0	$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2	$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
1	1	$P_1 \wedge P_2$	m_3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0

$\neg m_0 = M_{(2^2-1-0)} = M_3$

复习：主析取范式与主合取范式转换

- 主范式之间的转换

令 $A = \bigvee m_{il}$　则 $\neg A = \bigvee m_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\})}$

$A = \bigwedge M_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\})补} = \bigwedge_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\}补)}$

令 $A = \bigwedge M_{il}$则 $\neg A = \bigwedge M_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\})}$

$A = \bigvee_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\})补} = \bigvee_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\}补)}$

A是由k个极大项的合取来表示，剩余2^n-k极大项*的*合取是$\neg A$

$\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)补}$　　$\neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)补}$

11. 若 $P_i \to Q_i (i=1,\cdots,n)$ 为真.

$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$ 和 $\neg(Q_i \wedge Q_j)$ $(i \neq j)$ 也为真.

试证明必有 $Q_i \to P_i (i=1,\cdots,n)$ 为真.

先将 $(P_i \to Q_i|_{i=1,\cdots,n}) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg(Q_i \wedge Q_j)|_{i\neq j}) \wedge (\neg(Q_i \to P_i)|_{i=1,\cdots,n})$ 化为合取范式得，

$$(\neg P_i \vee Q_i) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg Q_i \vee \neg Q_j) \wedge (Q_i \wedge \neg P_i)$$
$$i = 1,\cdots,n, i \neq j$$

建立子句集

$S = \{\neg P_i \vee Q_i, P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n, \neg Q_i \vee \neg Q_j, Q_i, \neg P_i\}$ $\quad i = 1,\cdots,n,\ i \neq j$

归结过程：

① $\neg P_i \vee Q_i$

② $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$

③ $\neg Q_i \vee \neg Q_j$

④ Q_i

⑤ $\neg P_i$

⑥ $\neg P_i \vee \neg Q_j$ ①③归结

⑦ $P_1 \vee \cdots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \cdots \vee P_n \vee \neg Q_j$ ②⑥归结

⑧ $P_j \vee \neg Q_j$ 重复上述操作

⑨ P_i ④⑧归结

⑩ $\square$ ⑤⑨归结

特别多的小前提适合归结法

习题3.1. 依公理系统证明

(3) $\vdash P \to (Q \vee P)$

先想想之前是怎么证的？$P \to P \vee Q; P \vee Q \to Q \vee P$

照着将三段论的证明框架先写出来

① $\vdash (Q \to R) \to (P \to Q) \to (P \to R)$ 定理 3.2.1

② $\vdash ((P \vee Q) \to (Q \vee P)) \to (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$

① 代入 $\frac{Q}{P \vee Q}, \frac{R}{Q \vee P}$

补上其他过程

③ $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$ 公理 3

④ $\vdash (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$ ②③分离

⑤ $\vdash P \to (P \vee Q)$ 公理 2

⑥ $\vdash P \to (Q \vee P)$ ④⑤分离

习题4.5.

(5) 过平面上的两个点，有且仅有一条直线通过。

(5) 若以 $P(x)$ 表示 x 是平面上的点，$Q(x,y,u)$ 表示 u 是过 x 和 y 的直线，$EP(x,y)$ 表示 x 和 y 为同一点，$EQ(u,v)$ 表示 u 和 v 为同一条直线，那么这句话可以符号化为

$$(\forall x)(\forall y)\left(\begin{array}{l}P(x)\wedge P(y)\wedge\neg EP(x,y)\\ \rightarrow(\exists u)(Q(x,y,u)\wedge(\forall v)(Q(x,y,v)\rightarrow EQ(u,v)))\end{array}\right).$$

(8) 只有一个北京。

(8) 若以 $P(x)$ 表示 x 是北京，$E(x,y)$ 表示 x 和 y 是同一城市，那么这句话可以符号化为 $(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(P(y)\rightarrow E(x,y)))$.

没有特殊说明时，论域为总论域，需要添加特性谓词

习题4.8.

8. 判断下列公式是普遍有效的，不可满足的还是可满足的？

普遍有效 (1) $(\forall x)P(x) \to P(y)$

普遍有效 (2) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x))$

可满足 (3) $(\forall x)P(x)$

不可满足 (4) $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$

可满足 (5) $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$

普遍有效 (6) $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

可满足 (7) $((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) \to (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

- 等值式和推理式都是普遍有效的谓词公式。

习题4.9.

9. 给出一个公式，使其在$\{1, 2\}$域上是可满足的，而在$\{1\}$域上是不可满足的.

(1) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$，其中 $P(x,y)$表示 $x<y$.

(2) $(\exists x)P(x)\land(\exists y)\neg P(y)$ ~~，其中 $P(x)$表示 $x>1$~~.

(3) $(\exists x)P(x)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.

这些答案对吗？

什么是**谓词逻辑公式**中的**不可满足**？

回顾：4. 6 公式的普遍有效性和判定问题

不可满足公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为假，则称A为不可满足的公式。

例： $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)$

解释一下什么叫"任何解释？"

给定的个体域**D**：自由个体变项**a**，谓词变项**P**，函数f

解释

- 给定非空个体域D，一个解释I由下面部分构成
  - 给每个自由个体变项符号指定一个D中的元素
  - 给每个谓词变项符号指定一个D上的谓词
  - 给每个函数符号指定一个D上的函数
- 例如，在个体域$\mathbb{N}$上，有公式$(\forall x)F(g(x,z),x)$
- 给定解释I
  - 自由个体变项：$z = 0$
  - 函数$g(x,a) = x * a$
  - 谓词$F(x,y)$为$x = y$
- 在解释I下，公式被解释为$(\forall x)(x * 0 = x)$，它是一个假命题

习题4.9.

9．给出一个公式，使其在$\{1, 2\}$域上是可满足的，而在$\{1\}$域上是不可满足的．

~~(1) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$，其中 $P(x,y)$表示 $x<y$.~~

~~(2) $(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)(\neg P(x))$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.~~

~~(3) $(\exists x)P(x)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.~~

除非你显式地说明了P是**谓词常项**而非变项，否则不清楚其是**定义**还是**一个解释**

当然，更好的做法自然是构造出一个即使是谓词变项也满足题意的解答，例如

$$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, \neg P(x)$$

$$\forall x \exists y\, \Big(\big(P(x) \wedge \neg P(y)\big) \vee \big(P(y) \wedge \neg P(x)\big)\Big)$$

谓词逻辑的等值和推理演算

除了之前已经学过的规则外，谓词逻辑里多了下列公式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$
$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$
$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$
$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$
$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$
$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$
$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

$$(\forall x)(P(x) \to q) = (\exists x)P(x) \to q$$
$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$
$$(\forall x)(p \to Q(x)) = p \to (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(p \to Q(x)) = p \to (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$
$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$
$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

谓词逻辑的等值和推理演算

1. 证明下列等值式和蕴涵式

(5) $(\forall x)P(x)\to q=(\exists x)(P(x)\to q)$

$$(\forall x)\,P(x)\to q=\neg(\forall x)P(x)\vee q=(\exists x)(\neg P(x)\vee q)=(\exists x)(P(x)\to q)$$

(7) $(\exists x)P(x)\to(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\to Q(x))$

$$(\exists x)P(x)\to(\forall x)Q(x)=\neg(\exists x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)=\forall(x)\neg P(x)\vee\forall(x)Q(x)$$
$$\Rightarrow\forall(x)\big(\neg P(x)\vee Q(x)\big)=(\forall x)(P(x)\to Q(x))$$

(8) $(\exists x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$

$$(\exists x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)=(\exists x)P(x)\wedge(\forall y)Q(y)$$
$$=(\exists x)\big(P(x)\wedge(\forall y)Q(y)\big)\Rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$$

$$(\forall x)\,P(x)\vee(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$$
$$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn