概统第三次习题课材料

习题 1 设随机变量 X 满足 $(0,1)$ 上的均匀分布，试求以下 Y 的密度函数：
1) $Y=-2\ln X$;
2) $Y=3X+1$;
3) $Y=e^X$;
4) $Y=|\ln X|$.

习题 2 设随机变量 $X\sim Exp(\lambda)$, 对 $k=1,2,3,4$, 求 $\mu_k=\mathbb{E}[X^k]$ 与 $v_k=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k]$, 进一步求此分布的变异系数、偏度系数和峰度系数.

习题 3 设随机变量 X 的概率密度函数 $p(x)$ 关于直线 $x=c$ 对称，且 $\mathbb{E}[X]$ 存在，试证：
1) 此对称点 c 既是均值又是中位数，即 $\mathbb{E}[X]=x_{0.5}$.
2) 若 $c=0$，则 $x_p=-x_{1-p}$.

习题 4 试证随机变量 X 的偏度系数与峰度系数对位移和改变比例尺是不变的，即对任意的实数 $a,b(b\neq 0)$，$Y=a+bX$ 与 X 有相同的偏度系数与峰度系数。

习题 5 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} k, & 0<x^2<y<x<1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

1) 试求常数 k.
2) 求 $P(X>0.5)$ 和 $P(Y<0.5)$.

习题 6 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

试求 $P(X+Y\leq 1)$.

习题 7 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，试用 $F(x,y)$ 表示以下概率：
1) $P(a < X \le b, c < Y \le d)$;
2) $P(a \le X < b, c \le Y \le d)$;
3) $P(a \le X < b, Y < c)$;
4) $P(X = a, Y > b)$;
5) $P(X < -\infty, Y < \infty)$.

习题 8 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $D = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ 上的均匀分布，试证 X 与 Y 相互独立。

习题 9 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)$，证明：X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $p(x,y)$ 可分离变量，即 $p(x,y) = h(x)g(y)$. 又问，$h(x)$ 和 $g(y)$ 与 X 和 Y 的边际密度函数有什么关系？