清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　随机数学方法　（A 卷）　　年　月　日

学号：__________　　姓名：__________　　班级：__________

一. **填空题（28 分，每空 4 分，将计算结果直接写在横线上）**

(1) 已知 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=P(B|A)=\frac{1}{4}$，则 $P(B|A\cup B)$ 等于__________ 。

(2) 在区间 $[0,1]$ 中随机地取出两个数 X 和 Y，则 $P(|X-Y|<\frac{1}{3})=$ __________ 。

(3) 设 X 和 Y 独立同分布，满足 $P(X=i)=\frac{1}{2^i}, i=1,2,\cdots$，则

$P(X=2|X+Y=3)=$__________ 。

(4) 设 $U\sim U[0,1]$，$\Phi^{-1}(\bullet)$ 为标准正态分布函数 $\Phi(\bullet)$ 的反函数，则 $X=\Phi^{-1}(U)$ 的密度函数 $f_X(x)=$__________ 。

(5) 设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} 3e^{-3y}, & 0<x<1, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，则

$E[X(X+Y)]=$__________ 。

(6) 设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，均服从期望为 1 的 Poisson 分布，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)$ 的

特征函数为 __________ 。

(7) 设 $\{B_t: t\geq 0\}$ 为标准 Brown 运动（$B_0=0$），记 $B_t^*=B_t-tB_1\quad(0\leq t\leq 1)$，则对

$0\leq t\leq 1$，有 $D(B_t^*)=$__________ 。

二. **（12 分）**设随机变量 X 和 Y 独立同分布，满足 $P(X=k)=\frac{1}{3},\ k=1,2,3$，

（1）试求概率 $P(|X-E(X)|<1)$；

（2）试求概率 $P(X<Y)$；

（3）记 $\xi=\begin{cases} 1, & X<Y, \\ -1, & X\geq Y. \end{cases}$ 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 相互独立，且均与 ξ 同分布，令

$U_n=U_0+\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，$U_0=0$，试求 $P(U_4=1)$ 和 $P(U_4=2)$。

三.（15 分） 连续随机变量 X 和 Y 独立同分布， X 满足 $P(X>x)=\begin{cases} e^{-2x}, & x>0 \\ 1, & x\le 0 \end{cases}$，

（1）求 $E(e^{-X})$ 与 $Cov(X,e^{-X})$；

（2）求 $P(X>2Y)$；

（3）设与 X,Y 独立的随机变量 η 满足 $P(\eta=1)=P(\eta=2)=\dfrac{1}{2}$，试求 $P(X>\eta Y)$。

四.（20 分） 设随机变量 X 和 Y 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 6y, & 0<y<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

（1）试问 X 和 Y 是否相互独立，为什么？
（2）求 $Z=X-Y$ 分布函数 $F_Z(z)$；
（3）设 $U=E(Y\,|\,X)$，求 $Cov(X,U)$；
（4）求 $E(X^2\,|\,X<\dfrac{1}{2})$。

五.（15 分） 设三维正态随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3)^T\sim N(\mu,\Sigma)$，其中 $\mu=(0,0,0)^T$，

$$\Sigma=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

（1）试问 X_2 与 $(X_1,X_3)^T$ 是否独立？说明你的理由；

（2）试求概率 $P(2X_1+3X_2-X_3\le 1)$（结果用标准正态分布的分布函数 $\Phi(\bullet)$ 表示）；

（3）记 $W=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}X_i, V=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}(X_i-W)^2$，求 $E(W^2)$ 和 $E(V)$。

六.（10 分） 设 $\{N_t: t\ge 0\}$ 是强度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程，

（1）试求 $E[N_{t+s}\,|\,N_t]$， $s,t>0$；

（2）试证明：当 $\lambda\to+\infty$ 时，$\dfrac{N_1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 依分布收敛于标准正态分布 $N(0,1)$。