

2019 秋季《高等微积分 1》期中考试参考解答

2019 年 11 月 2 日 14:00 – 16:00

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1, 2 题各 20 分, 第 3, 4, 5 题每题 15 分, 第 6 题 10 分, 第 7 题 5 分. 可以使用洛必达法则.

1 设 a, c 是实数, $c > 0$, 定义函数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin \frac{1}{|x|^c}, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

- (1) f 在 0 处连续的充分必要条件是什么?
- (2) f 在 0 处可导的充分必要条件是什么?
- (3) f' 在 0 处连续的充分必要条件是什么?
- (4) f 在 0 处有二阶导数的充分必要条件是什么?

并请证明你的断言.

证明: 先证明如下结论: 设 $c > 0$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^c}$ 存在当且仅当 $\alpha > 0$, 进一步当 $\alpha > 0$ 时, 极限为 0.

断言的证明如下. 当 $\alpha > 0$ 时, 有

$$-|x|^\alpha \leq |x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^c} \leq |x|^\alpha,$$

利用夹逼定理可得此时 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^c} = 0$. 当 $\alpha < 0$ 时, 当 $|x|$ 以 $\frac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2})^{1/c}}$ 的方式趋于零时, 相应的数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2})^{\alpha/c}}$ 不存在; 当 $\alpha = 0$ 时, 当 $|x|$ 以 $\frac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2})^{1/c}}$ 的方式趋于零时, 相应的数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2})^{\alpha/c}}$ 为 1, 而当 $|x|$ 以 $\frac{1}{(2n\pi)^{1/c}}$ 的方式趋

于零时, 相应的数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2})^{\alpha/c}} \sin(2n\pi)$ 为 0. 利用 Heine 定理可知 $\alpha \leq 0$ 时前述函数极限不存在.

类似的, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \cos \frac{1}{|x|^c}$ 存在当且仅当 $\alpha > 0$, 进一步当 $\alpha > 0$ 时, 极限为 0.

(1) f 在 0 处连续当且仅当 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^a \sin \frac{1}{|x|^c} = f(0) = 0$, 由前述断言可知其充分必要条件是 $a > 0$.

(2) f 在 0 处可导当且仅当极限

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \pm \lim_{x \rightarrow 0 \pm} |x|^{a-1} \sin \frac{1}{|x|^c}$$

存在且相等. 由前述断言可知其充分必要条件是 $a > 1$, 且当 $a > 1$ 时有 $f'(0) = 0$.

(3) 由 (2) 的结论, 假设 $a > 1$, 则 $f'(0) = 0$. 利用求导的链式法则, 在 $x \neq 0$ 处有

$$\begin{aligned} f'(x) &= a|x|^{a-1} \frac{x}{|x|} \sin \frac{1}{|x|^c} + |x|^a (\cos \frac{1}{|x|^c}) (-c) |x|^{-c-1} \frac{x}{|x|} \\ &= \pm \left(a|x|^{a-1} \sin \frac{1}{|x|^c} + |x|^{a-c-1} (\cos \frac{1}{|x|^c}) (-c) \right). \end{aligned}$$

这样, f' 在 0 处连续当且仅当

$$0 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x),$$

利用前述断言可知其充分必要条件为 $a > c + 1$.

(4) f 在 0 处有二阶导当且仅当极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(a|x|^{a-2} \sin \frac{1}{|x|^c} + |x|^{a-c-2} (\cos \frac{1}{|x|^c}) (-c) \right)$$

存在. 利用前述断言可知当 $a - c - 2 > 0$ 时极限存在. 另一方面, 若此极限存在 (设为 L), 令 $|x|$ 以 $\frac{1}{(2n\pi)^{1/c}}$ 的方式趋于零时, 相应的数列极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-c}{(2n\pi)^{(a-c-2)/c}} = L;$$

令 $|x|$ 以 $\frac{1}{((2n+1)\pi)^{1/c}}$ 的方式趋于零时, 相应的数列极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{((2n+1)\pi)^{(a-c-2)/c}} = L;$$

结合起来可得 $a - c - 2 > 0$.

所以, f 在 0 处有二阶导的充分必要条件为 $a > c + 2$.

□

2 计算极限.

(1) 给定实数 a, b , 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2} \right)^{n/2}$.

(2) 给定实数 a, b , 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \arctan \frac{b}{x+a} \right)$.

(3) 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} \cdot (x^{1/x} - 1) \right)$.

(4) 给定实数 t , 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \cdot e^{-\sqrt{nt}} \right)$.

解. (1) 当 $a = b = 0$ 时, 所求的极限显然为 1. 以下假设 a, b 不全为零, 注意到

$$\left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2} \right)^{n/2} = \left(\left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}}} \right)^{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}\right)}$$

其中指数的极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2} \right) = a.$$

下面来计算底数的极限. 考虑数列 $\left\{ \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$, 它们趋近于零, 且其中至多一项为零, 利用 Heine 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{\frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e.$$

结合这两方面可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}}} \right)^{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}\right)} = e^a.$$

总结起来, 任何情况下都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2} \right)^{n/2} = e^a.$$

(2) 当 $b = 0$ 时, 所求的极限显然为 0. 当 $b \neq 0$ 时, 令 $y = \arctan \frac{b}{x+a}$, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0$, 且 $y \neq 0$. 这样, 可以用换元法则计算极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \arctan \frac{b}{x+a} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\left(\frac{b}{\tan y} - a \right) \cdot y \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{by}{\tan y} - ay \right) \\ &= b.\end{aligned}$$

结合起来, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \arctan \frac{b}{x+a} \right) = b$.

(3) 令 $t = \frac{\ln x}{x}$, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 且当 $x > 1$ 时, $t \neq 0$. 这样, 可以用换元法则计算极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\ln x} \cdot (x^{1/x} - 1) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln x/x} - 1}{\ln x/x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \\ &= \frac{de^t}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= 1.\end{aligned}$$

(4) 先计算原式子取对数之后的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \ln \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - \sqrt{nt} \right).$$

考虑数列 $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}_{n=1}^{\infty}$, 它们收敛到零且每项非零. 利用 Heine 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \ln \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - \sqrt{nt} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \ln(1 + tx) - \frac{t}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + tx) - tx}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{1+tx} - t}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-t^2}{2(1 + tx)} \\ &= -\frac{t^2}{2},\end{aligned}$$

其中第三个等式使用了洛必达法则. 这样, 所要求的极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n \cdot e^{-\sqrt{nt}} \right) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

□

3 设函数 $x = x(t)$ 在 \mathbf{R} 上处处有二阶导数, K, L, M, N 是非零实数. 定义

$$\tilde{t} = K \cdot t + L \cdot x(t), \quad \tilde{x} = M \cdot t + N \cdot x(t).$$

(1) 证明: 如果 $x'(t)$ 处处不等于 $-\frac{K}{L}$, 则可以将 t 表示为 \tilde{t} 的函数, 从而将 \tilde{x} 表示成 \tilde{t} 的函数.

(2) 用 $x(t)$ 的一阶与二阶导函数表示 \tilde{x} 对 \tilde{t} 的二阶导 $\frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2}$.

解. (1) 记 $f(t) = K \cdot t + L \cdot x(t)$, $g(t) = M \cdot t + N \cdot x(t)$. 由条件对任何 t , 有

$$f'(t) = K + L \cdot x'(t) \neq 0.$$

由 Lagrange 中值定理, 对任何 $t_1 < t_2$, 存在 $\xi \in (t_1, t_2)$, 使得 $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = f'(\xi)$, 特别的 $f(t_1) \neq f(t_2)$. 这样, f 是连续的单射. 由反函数定理可知 f 有反函数 f^{-1} , 从而可把 t 表示成 \tilde{t} 的函数 $t = f^{-1}(\tilde{t})$, 可把 \tilde{x} 表示成 \tilde{t} 的函数 $\tilde{x} = g(f^{-1}(\tilde{t}))$.

(2) 由反函数的求导法则可得

$$(f^{-1})'(\tilde{t}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\tilde{t}))}.$$

记 $h = g \circ f^{-1}$, 利用链式法则可得

$$h'(\tilde{t}) = g'(f^{-1}(\tilde{t})) \cdot (f^{-1})'(\tilde{t}) = \frac{g'(f^{-1}(\tilde{t}))}{f'(f^{-1}(\tilde{t}))}.$$

在此基础上, 利用 Leibniz 法则与链式法则可以进一步求导

$$\begin{aligned} h''(\tilde{t}) &= \frac{\frac{d}{d\tilde{t}} g'(f^{-1}(\tilde{t})) \cdot f'(f^{-1}(\tilde{t})) - g'(f^{-1}(\tilde{t})) \cdot \frac{d}{d\tilde{t}} f'(f^{-1}(\tilde{t}))}{(f'(f^{-1}(\tilde{t})))^2} \\ &= \frac{\frac{g''(f^{-1}(\tilde{t}))}{f'(f^{-1}(\tilde{t}))} \cdot f'(f^{-1}(\tilde{t})) - g'(f^{-1}(\tilde{t})) \cdot \frac{f''(f^{-1}(\tilde{t}))}{f'(f^{-1}(\tilde{t}))}}{(f'(f^{-1}(\tilde{t})))^2} \\ &= \frac{g''(f^{-1}(\tilde{t})) \cdot f'(f^{-1}(\tilde{t})) - g'(f^{-1}(\tilde{t})) \cdot f''(f^{-1}(\tilde{t}))}{(f'(f^{-1}(\tilde{t})))^3}. \end{aligned}$$

注意到

$$f'(t) = K + Lx'(t), \quad f''(t) = Lx''(t), \quad g'(t) = M + Nx'(t), \quad g''(t) = Nx''(t),$$

代入前述计算结果可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} &= \frac{Nx''(t)(K + Lx'(t)) - (M + Nx'(t))Lx''(t)}{(K + Lx'(t))^3} \\ &= \frac{(KN - LM)x''(t)}{(K + Lx'(t))^3}, \end{aligned}$$

其中 $t = f^{-1}(\tilde{t})$.

□

4 (1) 设 f 在 $[a, b]$ 上处处可导, 且导函数 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处非零. 证明: f 在 $[a, b]$ 上严格单调.

(2) 设 f 在 $[a, b]$ 上处处可导, 且 $f'(a) < 0 < f'(b)$. 利用 (1) 的结论证明: 存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$. (这是所谓的 Darboux 定理).

证明: (1) 由条件 f 在 $[a, b]$ 上可导可知 f 在 $[a, b]$ 上连续. 对 $[a, b]$ 中任何两点 $x_1 < x_2$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$, 特别的 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 这样, f 是 $[a, b]$ 上的连续单射. 利用反函数定理, 可知 f 在 $[a, b]$ 上严格单调.

(2) 用反证法, 假设不存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$, 则利用 (1) 的结论可得 f 在 $[a, b]$ 上严格单调. 如果 f 严格递增, 则有

$$f'(a) = f'(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0;$$

如果 f 严格递减, 则有

$$f'(b) = f'(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0;$$

两种情形下都与条件矛盾!

□

5 给定实数 α , 设 $f(x) = x^\alpha$. 试确定 f 在区间 $(0, 1]$ 上是否一致连续, 并请证明你的断言.

解. (1) 当 $\alpha \geq 0$ 时, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 存在, 可把 f 扩充为 $[0, 1]$ 上的连续函数 \tilde{f} . 由于有界闭区间上的连续函数都一致连续, 故 \tilde{f} 在 $[0, 1]$ 上一致连续, 由此可得此时 f 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

(2) 当 $\alpha < 0$ 时, 对任何 $0 < x < y \leq 1$, 利用 Lagrange 中值定理, 存在 $x < \xi < y$ 使得

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) = \alpha \xi^{\alpha-1}.$$

由于 $\alpha - 1 < 0$, $\xi^{\alpha-1}$ 关于 ξ 递减, 可得

$$|x^\alpha - y^\alpha| \geq |\alpha| \cdot |x - y| \cdot y^{\alpha-1}.$$

这样, 对 $\epsilon = 1$, 对任何 $\delta > 0$, 取 $x = \frac{y}{2}$, 则

$$|x^\alpha - y^\alpha| \geq |\alpha| \cdot |x - y| \cdot y^{\alpha-1} = \frac{|\alpha|}{2} \cdot y^\alpha.$$

由于 $\alpha < 0$, 有

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{|\alpha|}{2} \cdot y^\alpha = +\infty,$$

故存在 y 使得 $y < 2\delta$ 且 $\frac{|\alpha|}{2} \cdot y^\alpha > 1$, 这样就有 $|x - y| = \frac{y}{2} < \delta$ 但 $|f(x) - f(y)| > 1$. 由于 δ 的任意性, 这表明 $\alpha < 0$ 时 f 在 $(0, 1]$ 上不一致连续.

□

6 设 $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ 在 (a, b) 上处处可导, 且导函数 f' 在 (a, b) 上递增. 证明: 对任何 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 有

$$(x_3 - x_1) \cdot f(x_2) \leq (x_3 - x_2) \cdot f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_3).$$

证明: 可导函数是连续的, 则 f 在区间 $[x_1, x_2]$ 与 $[x_2, x_3]$ 上满足 Lagrange 中值定理的条件, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2).$$

由 f' 在 (a, b) 上递增, 有 $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, 即有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

化简可得所要证明的不等式.

□

7 给定正整数 n , 把集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 记为 $[n]$. 如果 A_1, \dots, A_k 是 $[n]$ 的非空子集, 它们彼此不相交, 且它们的并集等于 $[n]$, 则称 $P = \{A_1, \dots, A_k\}$ 为 $[n]$ 的一个分组方案. 设函数 f, g 处处有 n 阶导数. 证明: 复合函数 $g \circ f$ 的 n 阶导数为

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{[n] \text{ 的分组方案 } P=\{A_1, \dots, A_k\}} \left(g^{(k)}(f(x)) \cdot \prod_{i=1}^k f^{(|A_i|)}(x) \right),$$

其中 $\sum_{[n] \text{ 的分组方案 } P}$ 表示对 $[n]$ 的所有分组方案求和, $|A_i|$ 表示集合 A_i 的元素个数, $\prod_{i=1}^k$ 表示连乘

$$\prod_{i=1}^k f^{(|A_i|)}(x) = f^{(|A_1|)}(x) \cdot \dots \cdot f^{(|A_k|)}(x).$$

例如, 集合 $[3]$ 共有 5 个不同的分组方案

$$P = \{\{3\}, \{2\}, \{1\}\} \text{ 或 } \{\{2, 3\}, \{1\}\} \text{ 或 } \{\{2\}, \{1, 3\}\} \text{ 或 } \{\{3\}, \{1, 2\}\} \text{ 或 } \{\{1, 2, 3\}\},$$

则前述要证明的复合函数 3 阶导法则为

$$(g \circ f)^{(3)} = g'''(f)f'f'f' + g''(f)f''f' + g''(f)f'f'' + g''(f)f'f'' + g'(f)f''''.$$

证明: 对 n 用归纳法, 假设 n 时命题成立, 来证明 $n+1$ 的情形.

注意到, 对 $[n]$ 的分组方案 $P = \{A_1, \dots, A_k\}$, 可构造出 $(k+1)$ 个 $[n+1]$ 的分组方案:

$$\{\{n+1\}, A_1, \dots, A_k\}, \quad \{A_1 \cup \{n+1\}, A_2, \dots, A_k\}, \quad \dots, \{A_1, \dots, A_{k-1}, A_k \cup \{n+1\}\},$$

当 P 取遍 $[n]$ 的分组方案时, 上述构造不重复的取遍了 $[n+1]$ 的所有分组方案. 由此

及归纳假设, 可得

$$\begin{aligned}
& \sum_{[n+1] \text{ 的分组方案 } Q=\{B_1, \dots, B_k\}} g^{(k)}(f(x)) \cdot \prod_{i=1}^k f^{(|B_i|)}(x) \\
= & \sum_{[n] \text{ 的分组方案 } P=\{A_1, \dots, A_k\}} g^{(k+1)}(f(x)) \cdot f^{(1)}(x) \cdot \prod_{i=1}^k f^{(|A_i|)}(x) \\
& + \sum_{[n] \text{ 的分组方案 } P=\{A_1, \dots, A_k\}} g^{(k)}(f(x)) \cdot f^{(|A_1|+1)}(x) \cdot \prod_{i=2}^k f^{(|A_i|)}(x) + \dots \\
& + \sum_{[n] \text{ 的分组方案 } P=\{A_1, \dots, A_k\}} g^{(k)}(f(x)) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} f^{(|A_i|)}(x) \cdot f^{(|A_k|+1)}(x) \\
= & \left(\sum_{[n] \text{ 的分组方案 } P=\{A_1, \dots, A_k\}} g^{(k)}(f(x)) \cdot \prod_{i=1}^k f^{(|A_i|)}(x) \right)' \\
= & \left((g \circ f)^{(n)} \right)'(x) \\
= & (g \circ f)^{(n+1)}(x),
\end{aligned}$$

这就完成了归纳法. □