4.12 作业

1. 记由所有次数小于 5 的实多项式构成的实线性空间为 $\mathbb{R}[x]_5$。设 φ 是 $\mathbb{R}[x]_5$ 到 $\mathbb{R}[x]_5$ 的一个映射，定义如下：

$$f(x) \to f(3x+2).$$

   (a) 验证 φ 是线性变换。

   (b) 计算 φ 的所有特征值。

2. 设 V 是复数域上 n 维线性空间，σ 是 V 上的线性变换。给定 $\lambda \in \mathbb{C}$，令

$$U_\lambda = \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N},\ s.t.\ (\sigma - \lambda \mathrm{I})^m v = 0.\}$$[1]

   证明：U_λ 是 V 的 σ 不变子空间。

3. 设 V 是复数域上 n 维线性空间，σ, γ 是 V 上的两个线性变换，且 $\sigma\gamma = \gamma\sigma$。$U_\lambda$ 定义同上题。问：U_λ 是否是 γ 不变子空间？是，给出证明；否，举出反例。

4. 证明任一矩阵是幂零的当且仅当它的所有特征值等于 0。

5. 任意实线性变换必有 1 维或 2 维的不变子空间。

[1]这里 $\mathbb{N}$ 表示自然数集。I 表示恒等映射。