清华大学本科生考试试题专用纸

期中考试课程　随机数学与统计　（A 卷）　2021 年 4 月 18 日

学号：__________　姓名：__________　班级：__________

一．（15 分）设A和B相互独立，$P(A^cB^c)=\frac{1}{9}$且$P(AB^c)=P(A^cB)$； 令

$$X=\begin{cases}1, & \text{如果 事件}A\text{与}B\text{同时发生；}\\ -1, & \text{其他.}\end{cases},$$

（1） 试求概率$P(A|X=1)$与$P(A|X=-1)$；

（2） 试求EX与DX.

二．（15 分）设随机变量X与Y独立同分布，且

$P(X=1)=p,P(X=0)=1-p,(0<p<1)$，记 $Z=\begin{cases}1, & X+Y=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（1） 求Z的概率分布,并求EZ与DZ；

（2） 求X,Z的相关系数$r_{X,Z}$；

（3） 问p取何值时，X与Z相互独立，说明你的理由。

三．（20 分）连续地做某项试验，每次试验只有成功和失败两种结果。已知当第k次试验成功时，第$k+1$次试验成功的概率为$\frac{1}{2}$；当第k次试验失败时，第$k+1$次试验成功的概率为$\frac{3}{4}$。如果第一次试验成功的概率为$\frac{1}{2}$，

（1）试写出第n次试验成功的概率$p_n(n=1,2,\cdots)$所满足的递推表达式；

（2）若记X 为首次获得成功时所需的试验次数，求X的概率分布；

（3）求X 的矩母函数$M_X(u)$，并求EX。

四.（15 分） 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，满足 $P(X_1=2)=P(X_1=-1)=\frac{1}{2}$，

记 $A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,$n\ge 1$ （假定 $A_0=0$），

（1） 试求 $E(A_n)$ 与 $D(A_n)$；

（2） 试求概率 $P(A_3=1)$；

（3） 试求 $Cov(A_k,A_m)$（其中 $m>k>0$）。

五.（20 分）

（1）$X_i\sim B(n_i,p)\ (i=1,2)$ 相互独立，问 $X_1\mid X_1+X_2=n$（$0\le n\le n_1+n_2$）服从什么分布，并求 $E(X_1\mid X_1+X_2)$；

（2）$X_i\sim Ge(p)\ (i=1,2)$ 相互独立，问 $X_1\mid X_1+X_2=n(n\ge 2)$ 服从什么分布，并求 $E(X_1\mid X_1+X_2)$ 。

六.（15 分）某商场经过调研，发现男女顾客到达商场的规律分别服从每分钟 1 人和 2 人的 Poisson 过程，且男女顾客的到达过程相互独立，试求（单位为分钟）：

（1）已知在 $(0,t]$ 时间内有 4 人到达商场的条件下，在 $(0,t]$ 时间内到达的男顾客人数的期望；

（2）已知在 $(0,t]$ 时间内有 4 人到达商场的条件下，在 $(0,\frac{1}{2}t]$ 时间内恰有 3 位女顾客到达的概率。