高代选讲 第六周作业

1. pf：为了验证 U/V 是线性结构，我们逐一验证线性空间的8条性质

1) $\forall \bar{u},\bar{v}\in U/V$, $\bar{u}+\bar{v}=\overline{u+v}=\overline{v+u}=\bar{v}+\bar{u}$

2) $\forall \bar{u},\bar{v},\bar{w}\in U/V$, $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}=\overline{u+v}+\bar{w}=\overline{u+v+w}=\bar{u}+\overline{v+w}=\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$.

3) $\bar{0}$ 是 U/V 的零元素. $\forall \bar{v}\in U/V$, $\bar{0}+\bar{v}=\overline{0+v}=\bar{v}$

4) $\forall \bar{v}\in U/V$, $\exists\, \overline{-v}\in U/V$, $\bar{v}+(\overline{-v})=\overline{v+(-v)}=\bar{0}$

5) $\forall \bar{u},\bar{v}\in U/V$, $\alpha\in F$, $\alpha(\bar{u}+\bar{v})=\alpha\overline{(u+v)}=\overline{\alpha(u+v)}=\overline{\alpha u+\alpha v}=\overline{\alpha u}+\overline{\alpha v}=\alpha\bar{u}+\alpha\bar{v}$

6) $\forall \bar{v}\in U/V$, $\alpha,\beta\in F$, $(\alpha+\beta)\bar{v}=\overline{(\alpha+\beta)v}=\overline{\alpha v+\beta v}=\overline{\alpha v}+\overline{\beta v}=\alpha\bar{v}+\beta\bar{v}$

7) $\forall \bar{v}\in U/V$, $\alpha,\beta\in F$, $(\alpha\beta)\bar{v}=\overline{(\alpha\beta)v}=\overline{\alpha(\beta v)}=\alpha\overline{\beta v}=\alpha(\beta\bar{v})$.

8) $\forall \bar{v}\in U/V$, $1\cdot\bar{v}=\overline{1\cdot v}=\bar{v}$

综合以上：U/V 构成一个线性空间

2. pf：设 V 的基是 $e_1\dots e_m$，将之扩充为 U 的基 $e_1\dots e_m\, e_{m+1}\dots e_n$

事实上 $U/V\subseteq \mathrm{span}\{\bar{e}_1\dots\bar{e}_n\}$，这是因为 $\forall \bar{v}\in U/V$,

$\exists\, c_1\dots c_n$ s.t. $c_1e_1+\dots+c_ne_n=v$，故 $\bar{v}=c_1\bar{e}_1+\dots+c_n\bar{e}_n\in \mathrm{span}\{\bar{e}_1\dots\bar{e}_n\}$

同时 $\mathrm{span}\{\bar{e}_1\dots\bar{e}_n\}\subseteq U/V$，因为 $\forall x\in \mathrm{span}\{\bar{e}_1\dots\bar{e}_n\}$; $x=c_1\bar{e}_1+\dots+c_n\bar{e}_n$

令 $v=c_1e_1+\dots+c_ne_n\in U$, $\bar{v}=c_1\bar{e}_1+\dots+c_n\bar{e}_n\in U/V$ 即 $x=\bar{v}\in U/V$

综合这两点 $U/V=\mathrm{span}\{\bar{e}_1\dots\bar{e}_n\}$

而 $\forall 1\le i\le m$, $e_i\in V$，则有 $\bar{e}_i=\bar{0}$，因此 $U/V=\mathrm{span}\{\bar{e}_1\dots\bar{e}_n\}=\mathrm{span}\{\bar{e}_{m+1}\dots\bar{e}_n\}$

下证 $\bar{e}_{m+1}\dots\bar{e}_n$ 线性无关. 假设 $c'_{m+1}\bar{e}_{m+1}+\dots+c'_n\bar{e}_n=\bar{0}$

那么 $\overline{c'_{m+1}e_{m+1}+\dots+c'_ne_n}=\bar{0}$ $\Rightarrow c'_{m+1}e_{m+1}+\dots+c'_ne_n=\alpha\in V$

$\alpha\in V$ 则 $\exists\, c'_1\dots c'_m$ s.t. $c'_1e_1+\dots+c'_me_m=\alpha$.

所以 $c'_1e_1+\dots+c'_me'_m=c'_{m+1}e_{m+1}+\dots+c'_ne_n$

$e_1\dots e_n$ 是线性无关的基，故 $c'_1=\dots=c'_n=0$.

因此 $\bar{e}_{m+1}\dots\bar{e}_n$ 线性无关

所以 $\dim_F U/V=\dim_F\mathrm{span}\{\bar{e}_{m+1}\dots\bar{e}_n\}=n-m$.

3. pf：设 λ 是 $\bar{\sigma}$ 特征值，则 $\exists\,\bar{v}\in U/V$ s.t. $\bar{\sigma}(\bar{v})=\lambda\bar{v}$

设 $v=\pi^{-1}(\bar{v})$ （π 是双射故可逆）

则有 $\pi(v)=\bar{v}$，因此 $\bar{\sigma}\circ\pi(v)=\bar{\sigma}(\bar{v})=\lambda\bar{v}$

考虑到 $\pi\circ\sigma=\bar{\sigma}\circ\pi$ $\Rightarrow$ $\pi\circ\sigma(v)=\bar{\sigma}\circ\pi(v)=\lambda\bar{v}$

$\Rightarrow \sigma(v)=\pi^{-1}(\lambda\bar{v})=\pi^{-1}(\overline{\lambda v})=\lambda v$

即 λ 也是 σ 特征值

故 $\bar{\sigma}$ 特征值均是 σ 特征值.

4. (a) pf: $\forall v\in ker(\sigma)$ $\sigma(v)=0\in ker(\sigma)$ 故 $\sigma(ker(\sigma))\subseteq ker(\sigma)$，$ker(\sigma)$是$\sigma$不变子空间

$\forall v\in Im(\sigma)$ 考虑到 $\sigma: V\to V$ 故 $v\in V$，$\sigma(v)\in Im(\sigma)$，$Im(\sigma)$是σ不变子空间

(b) pf: $\forall v\in\sigma(L)$，L是σ不变子空间，故 $\sigma(L)\subseteq L$，因此 $v\in L$，

$\sigma(v)\in\sigma(L)$，因此 $\sigma(L)$是σ不变子空间

(c) pf: 设L是σ不变子空间，即$\sigma(L)\subseteq L$，

考虑L的一组基 $e_1\dots e_l$，有 $\sigma(e_i)\in L$ $\forall 1\le i\le l$

若 $\exists c_1\dots c_l$ s.t $c_1\sigma(e_1)+\dots+c_l\sigma(e_l)=0$

则 $\sigma(c_1e_1+\dots+c_le_l)=0$

$\Rightarrow c_1e_1+\dots+c_le_l=\sigma^{-1}(0)$

考虑到 $\sigma(0)=0$ $\Rightarrow \sigma^{-1}(0)=0$.

因此 $c_1e_1+\dots+c_le_l=0$ $\Rightarrow$ $c_1=\dots=c_l=0$.

即 $\sigma(e_1)\dots\sigma(e_l)$ 线性无关，它们又属于L

故 $\sigma(e_1)\dots\sigma(e_l)$ 构成L的一组基.

$\forall v\in V$，若$\sigma(v)\in L$，

则 $\exists c_1'\dots c_l'$ s.t. $\sigma(v)=c_1'\sigma(e_1)+\dots+c_l'\sigma(e_l)$

$\Rightarrow \sigma(v)=\sigma(c_1'e_1+\dots+c_l'e_l)$

$\Rightarrow v=c_1'e_1+\dots+c_l'e_l$

即 $v\in L$

因此，$\forall l\in L$，即 $\sigma(\sigma^{-1}(l))\in L$，可推出 $\sigma^{-1}(l)\in L$

所以 L也是σ^{-1}的不变子空间 □

5. pf: 设线性变换σ在基 $e_1\dots e_n$下对应的矩阵为A

A为n阶方阵，故 $\exists$ 可逆矩阵X s.t.

$$X^{-1}AX=J=\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(\lambda_r)\end{bmatrix}$$，J是若当标准形

设 $X=[v_1\dots v_n]$，X可逆 故 $v_1\dots v_n$ 彼此独立.

$$故\ A[v_1\dots v_n]=[v_1\dots v_n]\left[\begin{array}{ccc|ccc} J_{n_1}(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & J_{n_{r-1}}(\lambda_{r-1}) & & & \\ \hline & & & \lambda_r & 1 & \\ & 0 & & & \lambda_r & \ddots\ 1 \\ & & & & & \lambda_r \end{array}\right]$$

由此可以看出 $Av_i=c_1v_1+\dots+c_{n-1}v_{n-1}$ $(\forall 1\le i\le n-1)$.

唯有 $Av_n=v_{n-1}+\lambda_r v_n$.

因此 $\forall 1\le i\le n-1$，有 $Av_i\in span\{v_1\dots v_{n-1}\}$

即 $\sigma(v_i)\in span\{v_1\dots v_{n-1}\}$，$\forall 1\le i\le n-1$

令$V=span\{v_1\dots v_{n-1}\}$. $\forall v\in V$

$\exists c_1\dots c_{n-1}$ s.t. $c_1v_1+\dots+c_{n-1}v_{n-1}=v$

$\sigma(v)=\sigma(c_1v_1+\dots+c_{n-1}v_{n-1})$

$=c_1\sigma(v_1)+\dots+c_{n-1}\sigma(v_{n-1})$

$\in span\{v_1\dots v_{n-1}\}=V$

故 V是σ的不变子空间

$v_1\dots v_{n-1}$ 彼此独立. $dim V=dim\,span\{v_1\dots v_{n-1}\}=n-1$

即任意线性变换均有一个$n-1$维不变子空间