核心问题：给定方阵 A，函数 $f(x)$

何时可定义 $f(A)$？ 如何定义？

- $f(x)$ 多项式，$f(A)$ 可定义

  固定 A，何时 $f(A)=g(A)$？ 这里要求 $f(x), g(x)$ 为多项式

  (希望归结到"某些数的取值上")

  $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 A 的谱上的值相同时，则 $f(A)=g(A)$

- $f(x)$ 为任意函数，在 A 的谱上有定义时，

  利用多项式定义 $f(A)$

$B=P^{-1}AP \Rightarrow f(B)=P^{-1}f(A)P$

Jordan标准型

} 归结 $f(J_n(\lambda))$.

问：从级数的角度来理解 $f(A)$？

定理：设复变函数 $f(x)$ 在 $|x-\lambda_0|<r$ 内可展开成幂级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\lambda_0)^k$$

则当 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 的所有特征值都在开圆 $|x-\lambda_0|<r$ 内

就有
$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (A-\lambda_0 I)^k$$

证明：只须考虑 A 是 Jordan 块时定理成立即可.

$J_n(\lambda)=\lambda I+N \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$

$(|\lambda-\lambda_0|<r)$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\lambda_0)^k \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-\lambda)^k} \qquad b_k = \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}$$

$$f(J_n(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda) N^k \quad \leftarrow \text{上节课计算结果}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k N^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (J-\lambda I)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (J-\lambda_0 I)^k .$$

$\square$

例： $P(A)$ 表示 A 的特征值都以 $P(A)$ 为半径的圆内

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k . \qquad |x| < \infty$$

$$\underset{\text{代入上述定理}}{\Rightarrow} e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k .$$

应用：一阶常系数线性微分方程组

问： e^{at} 满足何种微分方程？ a 固定，t 变量.

$$\frac{d}{dt}(e^{at}) = a e^{at} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} f(t) = a f(t)$$

自然: $\frac{d}{dt}(e^{At}) = ?$

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k \right) \overset{\text{逐项可导}}{=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k t^{k-1}$$

$$= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = A e^{At}$$

e^{At} 满足 $\frac{dx}{dt} = Ax \qquad (A \in M_n(\mathbb{C}))$

x 是关于 t 的 n 维函数向量

例:

$$\begin{cases} \dfrac{d x_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) \\ \dfrac{d x_2(t)}{dt} = x_2(t) \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

$x_1(t)$, $x_2(t)$ 函数

← 微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d x_2(t)}{dt} = x_2(t) \\ x_2(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2(t) = e^t$$

$$\begin{cases} \dfrac{d x_1(t)}{dt} = x_1(t) + e^t \\ x_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1(t) = ?$$

$$\frac{d x_1(t)}{dt} = x_1(t) + e^t \Rightarrow \frac{d x_1(t)}{dt} - x_1(t) = e^t$$

$$\boxed{e^{-t}\frac{d x_1(t)}{dt} - x_1(t)\cdot e^{-t}} = 1$$

$$\| $$

$$\boxed{\frac{d\left(e^{-t} x_1(t)\right)}{dt}}$$

$\Rightarrow e^{-t} x_1(t) = t + 常数$

$\Rightarrow x_1(t) = t \cdot e^t$

矩阵观点:

$$\boxed{\frac{d\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d x_1(t)}{dt} \\ \dfrac{d x_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\frac{dx}{dt} = Ax \rightsquigarrow x = e^{At}$ 为一个解

猜: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases}$ 的解 ? $x(t) = e^{At} x_0$

$(A \in M_n(\mathbb{C}),\ x_0 \in \mathbb{C}^n)$ △

$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \qquad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad x|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad x(t) = e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix}$

定理: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases}$ 解存在且唯一

$(A \in M_n(\mathbb{C}),\ x_0 \in \mathbb{C}^n)$ $\qquad x(t) = e^{At} x_0$

证明: ① 验证 $x(t)$ 为解

② 证明唯一性

① $\frac{d(e^{At} x_0)}{dt} = \frac{d(e^{At})}{dt} x_0 = A e^{At} x_0 = A x(t)$

$e^{At} x_0 \big|_{t=0} = x_0$

② 唯一性. $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ 满足方程 + 初始条件

$x'(t) = A x(t)$, $x^{(2)}(t) = A^2 x(t) \quad \cdots$

$\parallel$

($x_i(t)$ 各阶导数存在)

$t=0$ $\quad x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_i^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}$ $\quad$ 1) $A^k x(t) = x^{(k)}(t)$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (A^k x)(0)\frac{t^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} x(0) = e^{At}x(0) \quad \blacksquare$$

注：(线性)方程(组)理论 < 解存在 / 唯一性 / 计算

齐次　非齐次

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$A \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad B \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$, $\quad u$ $\quad t$ 的 m 维函数向量

一阶常系数非齐次方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases}$$ 解？唯一性？

唯一解为 $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-z)} B\,u(z)\,dz$

证：$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{At}x_0) + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{A(t-z)} B\,u(z)\,dz\right)$

$$= Ae^{At}x_0 + \frac{d}{dt}\left(e^{At}\int_0^t e^{-Az} B\,u(z)\,dz\right)$$

$$= \underline{Ae^{At}x_0} + Ae^{At}\int_0^t e^{-Az}Bu(z)\,dz$$

$$+ \cancel{e^{At}}\Big(\underbrace{\cancel{e^{-At}}\,B\,u(t)}_{令 z=t}\Big)$$

$$= A\Big(\underbrace{e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-Az}Bu(z)\,dz}_{x(t)}\Big) + Bu(z)$$

$$x(t)\big|_{t=0} = e^{A\cdot 0}x_0 + \int_0^0 * = x_0$$

唯一性：　设 $x(t)$ 为解

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}\frac{d}{dt}x(t) - Ae^{-At}x(t)$$

$$= e^{-At}(\cancel{Ax}+Bu) - \cancel{Ae^{-At}x(t)} = e^{-At}Bu$$

同时对 t 积分　　$\frac{d}{dz}\left(e^{-Az}x(z)\right) = e^{-Az}Bu(z)$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^t \frac{d}{dz}\left(e^{-Az}x(z)\right)dt = \int_0^t e^{-Az}Bu(z)\,dt$$

$$e^{-At}x(t)\Big|_0^t = \int_0^t e^{-Az}Bu(z)\,dz$$

$$\|$$

$$e^{-At}x(t) - x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-z)}Bu(z)\,dz$$

$\boxed{证}$

问：$\frac{dx}{dt} = Ax$　　$A \in M_n(\mathbb{C})$　　$\alpha_1 \neq 0$

何时有如下解　$x(t) = \alpha(t)e^{At}$　　$\alpha_i \in \mathbb{C}^n$

$$\alpha(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\alpha_1 + \cdots + \frac{t}{1!}\alpha_{k-1} + \alpha_k \ ?$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,x(t)\\ \| \\ A\,x(t)\end{aligned}} \begin{aligned}&= \underline{\alpha'(t)\,\cancel{e^{\lambda t}} + \alpha(t)\cdot\lambda\,\cancel{e^{\lambda t}}}\\ \\ &= \underline{A\,(\alpha(t)\cdot\cancel{e^{\lambda t}})}\end{aligned}$$

(式子 $\underline{\underline{x(t)=\alpha(t)e^{\lambda t}}}$)

$$\Rightarrow \quad \alpha'(t) + \lambda\alpha(t) = A\alpha(t)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha'(t) = (A-\lambda I)\,\alpha(t) \qquad (*)$$

$$\alpha^{(2)}(t) = \big((A-\lambda I)\,\alpha(t)\big)' = (A-\lambda I)\,\alpha'(t)$$

$$= (A-\lambda I)^2\,\alpha(t) \quad \cdots \quad \boxed{\alpha^{(i)}(t) = (A-\lambda I)^i\,\alpha(t)}$$

$$\underline{\underline{\alpha^{(k-1)}(t)}} = \alpha_1 \qquad \left(\alpha(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\alpha_1 + \cdots + \frac{t}{1!}\alpha_{k-1} + \alpha_k\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha^{(k-1)}(t) = (A-\lambda I)^{k-1}\,\alpha(t)$$

$$\Rightarrow \quad (A-\lambda I)\,\alpha_1 = (A-\lambda I)\left[(A-\lambda I)^{k-1}\alpha(t)\right]$$

$$= (A-\lambda I)^k\,\alpha(t) = \alpha^{(k)}(t) = 0$$

$\alpha_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ (λ, α_1)为 A 的特征对.

$$\alpha^{(k-2)}(t) \overset{?}{=} \underline{\underline{t\alpha_1 + \alpha_2}} = \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\alpha_1 + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}\alpha_2\right)^{(k-2)}$$

$$\alpha^{(k-2)}(t) = (A-\lambda I)^{k-2}\,\alpha(t)$$

$$\boxed{(A-\lambda I)^{k-2}\,\alpha(t) = t\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\underbrace{(A-\lambda I)\,(t\alpha_1+\alpha_2)}_{\parallel} = (A-\lambda I)^{k-1}\alpha(t) = \alpha_1$$

$$(A-\lambda I)\alpha_2 \qquad (A-\lambda I)\alpha_1 = 0 \qquad \cdots\cdots$$

$$\alpha_2 \xrightarrow{(A-\lambda I)} \alpha_1 \xrightarrow{(A-\lambda I)} 0 \quad \longrightarrow$$

$\alpha_1, \cdots \alpha_k$ 构成一条 A属于 λ 的 Jordan 链

定理

$$\begin{cases} x(t) = \alpha(t)e^{\lambda t} \\ \alpha(t) = \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \end{cases}$$

给出 $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ 的解

$\Updownarrow$

$\alpha_1, \cdots \alpha_k$ 构成A的属于特征值 λ 的一条 Jordan 链

注：给定 A. 由 Jordan 链定义的解称为基本解，线性组合称为一般解

例 $\dfrac{dx(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x(t) = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + k_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]e^t$$

第9讲 张量初步（一）基本例子

回顾：$V/_F$ 有限维向量空间

基 $e_1, \cdots e_n$ 基 $t_1 \cdots t_n$

$v = (e_1 \cdots e_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $v = (t_1 \cdots t_n)$?

$(t_1 \cdots t_n) = (e_1, \cdots e_n) T$

$\Rightarrow v = (e_1 \cdots e_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{(t_1 \cdots t_n) T^{-1}}_{(e_1 \cdots e_n}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$? = T^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$\underline{V^* = \text{Hom}(V, F)}$ V上所有线性函数构成的空间.

<u>对偶空间</u>

问：V^*的维数？（$= \dim_F V$）

基？ 固定V的一组基 $e_1, \cdots e_n$

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{\varphi} & F^n \\ f & \longrightarrow & \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

可线性映射

$\Uparrow$

线性同构

(Homework)

F^n 有一组基

$$\underset{=}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{=}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \cdots \quad \underset{=}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ ∃线性函数 f s.t $f(e_1)=1$, $f(e_2)=\cdots=f(e_n)=0$

($f \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$). 记为 e^1.

($e^1(e_j)=\delta_{ij}$ $\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$)

同理 ∃ $e^i\in V^*$. s.t $e^i(e_j)=\delta_{ij}$

结论: V是n维 $/F$ $(e_1\cdots e_n)$为V的一组基.

$\Rightarrow$ V^*也是n维, 存在 e^i s.t $e^i(e_j)=\delta_{ij}$

e^i构成V^*的一组基. 称为相对于$(e_1,\cdots e_n)$的对偶基

V $(e_1,\cdots e_n)$

线性同构

$$V^* \xrightarrow{\varphi} F^n$$

$$f \longrightarrow \begin{pmatrix}f(e_1)\\ \vdots\\ f(e_n)\end{pmatrix}$$

构成V^*的一组基

$$\left\{\begin{matrix} ?\ e^1 \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ ?\ e^n \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

构成F^n的基

$$\begin{pmatrix}e^1(e_1)\\ \vdots\\ e^1(e_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}e^n(e_1)\\ \vdots\\ e^n(e_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$