2017 年秋季《高等微积分 1》期末考试

2018 年 1 月 14 日 $14:30-16:30$

本试卷分两页, 共七道题, 各题的分值如下: 第 $1,2,5,6$ 题每小问 5 分; 第 $3,7$ 题第一小问 10 分, 第二小问 5 分; 第 4 题 15 分. 注意, 对于解答题, 不能只写答案, 需要给出推导过程.

1 计算极限.

(1) 给定正数 α, 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$.

(2) 给定 $a>0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$.

2 (1) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha+\ln n}$ 的收敛发散性, 其中 α 是给定的正数.

(2) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ 的收敛发散性, 其中 $a>1$ 是给定的实数.

(3) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 的收敛发散性.

3 (1) 计算不定积分

$$\int\frac{x^2}{x^4+5x^2+4}dx.$$

(2) 计算无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+5x^2+4}dx.$$

4 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是连续函数, 满足

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \quad \forall x \neq 0.$$

求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近展开至二阶的带皮亚诺余项的泰勒公式, 即要求余项是 $o(x^2)$.

5 设 $f(x)$ 是多项式, 即 $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, 其中 n 是正整数, $a_0, \ldots, a_n$ 是实数.

(1) 证明: 无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} dx$$

收敛.

(2) 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-x^2} dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-x^2} dx.$$

(3) 假设已证明了 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, 对正整数 m, 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2} dx$ 的值.

6 (1) 给定实数 $a > 1$, 计算不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{a + \sin x}$.

(2) 给定实数 $a > 1$, 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \sin x}$.

(3) 给定实数 $b > \sqrt{2}$, 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{b + \cos x + \sin x}$.

7 (1) 设 $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ 是连续映射, 且极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ 存在. 求极限

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(nx) dx.$$

(2) 设 $g, h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 都是连续映射, 且 h 是周期为 $T > 0$ 的周期函数, 即对任何 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $h(x + T) = h(x)$. 证明:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T g(x) h(nx) dx = \frac{1}{T} \left(\int_0^T g(x) dx \right) \cdot \left(\int_0^T h(x) dx \right).$$