《高等微积分 1》第六次习题课材料

1 用 Lagrange 中值定理证明如下不等式.

(1)(伯努利不等式) 设 $x > -1$. 证明: 当 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 0$ 时, 有 $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 有 $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$.

(2) 设 $1 \le x_1 < x_2$. 证明: 当 $\alpha > 1$ 时, 有 $(x_2^\alpha - x_1^\alpha) > \alpha(x_2 - x_1)x_1^{\alpha-1}$; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 有 $x_2^\alpha - x_1^\alpha < \alpha(x_2 - x_1)$.

2 给定实数 α, 设 $f(x) = x^\alpha$. 试确定 f 在区间 $[1, +\infty)$ 上是否一致连续.

3 (1) 设 $f \in C([0, +\infty))$ 且在 $(0, +\infty)$ 上处处可导. 证明: 如果 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$, 则存在 $\xi \in (0, +\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

(2) 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导, 且 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. 证明: 存在 $c \in \mathbf{R}$ 使得 $f'(c) = 0$.

4 设 $g(x)$ 有各个高阶导数, $f(x) = (x-a)^n g(x)$. 证明:

$$f^{(0)}(a) = f^{(1)}(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

5 (1) n 次勒让德多项式为

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right).$$

证明: $P_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内恰好有 n 个不同的根.

(2) n 阶拉盖尔 (Laguerre) 多项式为

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right).$$

证明: $L_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有 n 个不同的根.

6 设 $P(x)$ 是多项式. 已知 $P(x)-a=0$ 与 $P(x)-b=0$ 的全部根都是单实根. 证明: 对任何实数 $c\in(a,b)$, $P(x)-c=0$ 的全部根也都是单实根.

7 设 I 是开区间, f 在 I 上有 n 阶导函数.

(1) 证明: 如果 f 在 $n+1$ 个点 $x_0<x_1<...<x_n$ 处的值都为 0, 则存在 $\xi\in I$ 使得 $f^{(n)}(\xi)=0$.

(2) 设 $x_1<x_2<...<x_p$ 是 I 中的点, $n_1,n_2...,n_p$ 是正整数且 $n_1+n_2+...+n_p=n$. 假设对每个 $i=1,2,...,p$, 有 $f^{(0)}(x_i)=...=f^{(n_i-1)}(x_i)=0$. 证明: 存在 $\xi\in[x_1,x_p]$ 使得 $f^{(n-1)}(\xi)=0$.

8 设 I 是开区间且 $[a,b]\subset I$, 设函数 $f:I\to\mathbf{R}$ 在 I 上处处可导.

(1)(Darboux 中值定理) 证明: 导函数 f' 在 $[a,b]$ 上能取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任何中间值.

(2) 证明: 如果 f' 在 (a,b) 上处处可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a)$.