https://en.wikipedia.org/wiki/Coarea_formula

定理 1 (Coarea 公式)**.** *设 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是光滑函数, 定义*

$$V(R)=\{(x,y,z)|f(x,y,z)\le R\},\quad S(R)=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=R\}.$$

假设对任何 R, $V(R)$ 都是紧致的, 且 f 的梯度 ∇f 在 $S(R)$ 上处处非零, 则对连续函数 $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 有

$$\iiint_{V(R)}g(x,y,z)dxdydz=\int_{-\infty}^{R}dr\iint_{S(r)}\frac{g(x,y,z)}{|\nabla f|}dS.$$

证明*:* 取矩体 I 包含 $V(R)$, 将 I 剖分成若干个充分小的矩体之并 $I=\cup_k I_k$, 只需要证明

$$\iiint_{I_k\cap V(R)}g(x,y,z)dxdydz=\int_{-\infty}^{R}dr\iint_{I_k\cap S(r)}\frac{g(x,y,z)}{|\nabla f|}dS.$$

对于满足 $V(R)\cap I_k\neq\emptyset$ 的 I_k, 不妨设其中 f_z 处处非零, 则映射 $F(x,y,z)=(x,y,f(x,y,z))$ 在 I_k 中 Jacobi 矩阵处处可逆, 由反函数定理不妨设 F 在 I_k 上有 C^1 光滑的逆 $\Phi:\Omega\to I_k$. 由 $F\circ\Phi=\mathrm{Id}$ 可知 Φ 形如 $\Phi(u,v,w)=(u,v,z(u,v,w))$, 且 $z(u,v,w)$ 满足 $f(u,v,z(u,v,w))=w$. 考虑此等式对 u,v,w 的偏导, 可得

$$z_u=-\frac{f_x(u,v,z(u,v,w)}{f_z(u,v,z(u,v,w))},\quad z_v=-\frac{f_y(u,v,z(u,v,w)}{f_z(u,v,z(u,v,w))},\quad z_w=\frac{1}{f_z(u,v,z(u,v,w))}.\tag{1}$$

由换元公式与 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned}\iiint_{I_k\cap V(R)}g(x,y,z)dxdydz&=\iiint_{\Omega\cap\{w\le R\}}g(u,v,z(u,v,w))\cdot|\det J(\Phi)|\cdot dudvdw\\&=\iiint_{\Omega\cap\{w\le R\}}g(u,v,z(u,v,w))\cdot|z_w|\cdot dudvdw\\&=\int_{-\infty}^{R}dw\iint_{\Omega\cap\{w=r\}}g(u,v,z(u,v,w))\cdot|z_w|dudv\\&=\int_{-\infty}^{R}dw\iint_{\Omega\cap\{w=r\}}\frac{g(u,v,z(u,v,w))}{|f_z(u,v,z(u,v,w))|}dudv.\end{aligned}$$

注意到, Φ 诱导从 $\Omega\cap\{w=r\}$ 到曲面 $I_k\cap S(r)$ 的参数化, 由此可计算第一型曲面积分:

$$\begin{aligned}\iint_{I_k\cap S(r)}\frac{g(x,y,z)}{|\nabla f|}dS&=\iint_{\Omega\cap\{w=r\}}\frac{g\circ\Phi}{|\nabla f\circ\Phi|}\cdot\big|(1,0,z_u)\times(0,1,z_v)\big|dudv\\&=\iint_{\Omega\cap\{w=r\}}\frac{g\circ\Phi}{|\nabla f\circ\Phi|}\cdot\sqrt{z_u^2+z_v^2+1}dudv\\&=\iint_{\Omega\cap\{w=r\}}\frac{g(u,v,z(u,v,w))}{|f_z(u,v,z(u,v,w))|}dudv\quad(\text{利用}(1)).\end{aligned}$$

结合这两方面, 就证明了 Coarea 公式. $\square$