下午线上答疑
习题课

回顾：

函数矩阵 ＜ 矩阵角度 / 函数角度

基本运算	基本概念
加法，乘法	秩，相关性
极限，求导 积分	连续，序列

问：$A \in M_n(\mathbb{C})$，何时 $\boxed{\lim_{k\to\infty} A^k = 0}$？

（∃可逆矩阵 P，s.t. $A = PJP^{-1}$，J 是 A 的 Jordan 标准形）

$$A^k = PJ^kP^{-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty}(PJ^kP^{-1}) = P\left(\lim_{k\to\infty} J^k\right)P^{-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} A^k \overset{?}{=} 0$$

$$\boxed{\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} J^k = 0}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} J_i^k = 0 \ ?$$

$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$，何时 $\lim_{k\to\infty} (J_m(\lambda))^k = 0$？

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{m\times m}^k \overset{?}{=} \quad (k>m)$$

$$J_m(\lambda) = \Big(\lambda I_m + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}\Big)^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^{k-i} \lambda^i \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}^{k-i}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & C_k^{m-1}\lambda^{k-m+1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

注：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times m}^t = 0$，$t \geq m$

$(|\lambda|<1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}|\lambda|^k = 0)$

结论 $\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \iff$ A的所有特征值的模长小于1.

矩阵级数.

定义：给定矩阵序列 $A_1, A_2, \cdots \quad A_k = (a_{ij}^{(k)}) \in M_n(\mathbb{C})$

称 $A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots$ 为矩阵级数

$S_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$ 称为级数的部分和.

若 $\lim_{k\to\infty} S_k = S$，则称 $A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots$ 收敛.

S 称为级数和. 记作 $S = A_1 + A_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$

否则称为发散.

注：$A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots$ 收敛 $\iff$ n^2 个级数 $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}}}$ 收敛

$$S = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{11}^{(k)} & \sum_{k=1}^{\infty} a_{12}^{(k)} & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} a_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n1}^{(k)} & - & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

<u>固定 i, j</u>

性质：

① $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} A_k = 0$

② $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = S$，$\sum_{k=1}^{\infty} B_k = T$. 则 $\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \pm B_k) = S \pm T$

③ $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = S$，则 $\sum_{k=1}^{\infty} cA_k = cS \quad \forall c \in \mathbb{C}$

④ $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} PA_kQ$ 收敛. 且 $\sum_{k=1}^{\infty} PA_kQ = P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)Q$

定理：若 $\sum_{k=1}^{\infty} A^k$ 收敛，则 A 的特征值的模小于1.

（利用性质1 + 问题的结论）

定义：（绝对收敛）矩阵级数 $A_1+A_2+\cdots+A_k+\cdots$，

$A_k=(a_{ij}^{(k)})$ 若 n^2 个数项级数 $a_{ij}^{(1)}+a_{ij}^{(2)}+\cdots$ 都绝对收敛，

则称该矩阵级数绝对收敛.

定理：$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ 收敛，其中

$$\|A_k\| = \max_{i,j}|(A_k)_{ij}|$$

证："$\Rightarrow$" 设 ΣA_k 绝对收敛，则存在正数 c，$\forall N, i, j$ 有

$$\sum_{k=1}^{N}|(A_k)_{ij}| < c \qquad (a_{ij}^{(k)} \text{ 绝对收敛})$$

$$\sum_{k=1}^{N}\|A_k\| = \sum_{k=1}^{N}\max_{i,j}|(A_k)_{ij}| \qquad \text{n固定}$$

$$\le \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|(A_k)_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}|(A_k)_{ij}| < n^2c$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ 收敛.

"$\Leftarrow$" $\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ 收敛，$\forall i,j$ $|(A_k)_{ij}| \le \|A_k\|$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty}|(A_k)_{ij}|$ 收敛，故 $\sum_{k=1}^{\infty}A_k$ 绝对收敛. 证

定理：（判别法）$\sum_{k=1}^{\infty}A_k$，$\sum_{k=1}^{\infty}B_k$ 两个矩阵级数，且满足

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}B_k$ 中每一个 $B_k=(b_{ij}^{(k)})$ 的元素 $b_{ij}^{(k)}\ge 0$

(2) $|a_{ij}^{(k)}| \le b_{ij}^{(k)}$ (3) $\sum_{k=1}^{\infty}B_k$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty}A_k$ 绝对收敛.

证: $\|A_k\| = \max_{i,j} |(A_k)_{ij}| \overset{(2)}{\leq} \max_{i,j} |(B_k)_{ij}| = \|B_k\|$

$\sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ 收敛. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 绝对收敛 ▢

第8讲 矩阵分析简介(二)

矩阵函数

函数 $\boxed{\text{多项式}}$ 正弦, 余弦, 指数, ...

$f(x) = f(a) + (x-a) f'(x)|_{x=a} + \cdots$

问: 给定一个函数 $f(x)$, 如何定义 $f(A)$?
方阵 A

$\boxed{\text{基本例子}}$: $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ $A \in M_n(\mathbb{C})$

定义 $f(A) = a_m A^m + \cdots + a_0 I$
(m次矩阵多项式)

问: $A \in M_n(\mathbb{C})$, $f \in \mathbb{C}[x]$, 如何计算 $f(A)$?

- $\boxed{A = PJP^{-1}}$ $A^k = PJ^kP^{-1}$ $\boxed{f(J_m(\lambda))}$
- 零化多项式 (极小多项式 $m_A(x)$) $g(x)$ 为A的零化多项式 $\Leftrightarrow g(A) = 0$

  $f(x) = g(x) q(x) + r(x)$ $\deg r(x) < \deg g(x)$

  $\Rightarrow f(A) = g(A) q(A) + r(A)$

  $= r(A)$ 实现次数降低

定义: A的所有相异特征值的集合称为A的谱. $A \in M_n(\mathbb{C})$

定义: $A \in M_n(\mathbb{C})$ 谱: $\{\lambda_1, \cdots \lambda_s\}$

设A的极小多项式为 $(x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_s)^{d_s}$

假定 $f(x)$ 有足够多阶导数，考虑

$$\left\{\begin{array}{llll} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \cdots & f^{(d_1-1)}(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) & \cdots & \cdots & f^{(d_2-1)}(\lambda_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ f(\lambda_s) & \cdots & & f^{(d_s-1)}(\lambda_s) \end{array}\right.$$

称为 $f(x)$ 关于矩阵A的谱上的值.

给定 $f(x)$，若 $f(x)$ 关于A的谱上的值都存在，则称 $f(x)$ 在A的谱上有定义.

性质：

1. $m_A(x)$ 在A的谱上的值均为0.

$$\left\{\begin{array}{lll} m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_s)^{d_s} & & \\ m_A(\lambda_1)=0 & m_A'(\lambda_1)=0 & m_A^{(d_1-1)}(\lambda_1)=0 \\ m_A(\lambda_2)=0 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ m_A(\lambda_s)=0 & \vdots & =0 \end{array}\right.$$

$(x-\lambda_1)\mid m_A^{(d_1-1)}$ $\Rightarrow$

2. 若多项式 $g(x)$ 在A的谱上的值均为0；

$\Rightarrow$ $g(x)$? 被A的极小多项式整除

λ_1

$g(\lambda_1)=0$ $\Downarrow$ ✓ $(x-\lambda_1)\mid g(x)$ $\Downarrow$

$g'(\lambda_1)=0$ $\Downarrow$? $(x-\lambda_1)^2\mid g(x)$

$\cdots$

$g^{(d_1-1)}(\lambda_1)=0$ $\Downarrow$ $(x-\lambda_1)^{d_1}\mid g(x)$

$g(x) = (x-\lambda_1)h(x)$ $\qquad$ $(x-\lambda_1) \mid h(x)$

$g'(x) = h(x) + (x-\lambda_1)h'(x)$ $\qquad$ $\Uparrow$

$g'(\lambda_1) = 0 \Rightarrow h(\lambda_1) + 0 = 0 \Rightarrow h(\lambda_1) = 0$

$\Rightarrow M_A(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_s)^{d_s} \mid g(x)$

3. $A \in M_n(\mathbb{C})$, $f(x)$, $g(x)$ 多项式. 则

f(x)与g(x)在A的谱上的值相同 $\Longrightarrow$ $f(A) = g(A)$ ✓

$\overset{?}{\Longleftarrow}$

$\Downarrow$

$h(x) = f(x) - g(x)$

h(x)在A的谱上的值为0

$\Downarrow$

$M_A(x) \mid h(x)$

$\Downarrow$

$f(x) - g(x) = M_A(x)q(x)$ $\xrightarrow{\text{代入A}}$ $f(A) = g(A)$

回家证明反向成立

定义: 设f(x)在A的谱上有定义, g(x)任意多项式. 若
f(x)与g(x)在A的谱上有相同的值. ($f^{(k)}(\lambda_i) = g^{(k)}(\lambda_i)$)
则矩阵函数f(A)定义为 $f(A) = g(A)$
g(x)称为f(A)的定义多项式. (f(x)不须为多项式)

问: 定义多项式唯一? 不唯一

$f(A) \to g_1(x), g_2(x), \ldots$ 定义多项式

$\underbrace{g_1(A) \overset{?}{=} g_2(A) \overset{?}{=} g_3(A) \overset{?}{=} \cdots}_{f(A)}$

$g_1(x)$ $g_2(x)$ 都为 $f(A)$ 的定义多项式

$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ 在A的谱上值 = $f(x)$ 在A的谱上的值

$g_1(x)$, $g_2(x)$ 多项式

$\Leftarrow$

$g_1(A) = g_2(A)$ $\boxed{//}$

性质：$A \in M_n(\mathbb{C})$，f 在A的谱上有定义.

(1) $Af(A) = f(A)A$

(2) $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \Rightarrow f(A) = f_1(A) + f_2(A)$

(3) $f(x) = f_1(x) f_2(x) \Rightarrow f(A) = f_1(A) f_2(A)$

(4) $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix} \Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(A_s) \end{pmatrix}$

(5) $B = P^{-1}AP \Rightarrow f(B) = P^{-1}f(A)P$

证：A, B 有相同极小多项式

$g(x)$ 多项式与 $f(x)$ 在A的谱上有相同值

$\Rightarrow$ 在B的谱上，$g(x)$ 与 $f(x)$ 也有相同值 (g 多项式)

$f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ 结合 $g(B) = P^{-1}g(A)P$

$\Rightarrow f(B) = P^{-1}f(A)P$. $\boxed{//}$

(6) $A = PJP^{-1}$ $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$ Jordan

$f(A) = P \begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{pmatrix} P^{-1}$

$f(J_i) = ?$

定理 $J_m(\lambda) = \lambda I_m + N = \begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}$

若 $f(x)$ 在 λ 的邻域内有 $m-1$ 阶导数.

则 $f(J_m(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(\lambda) \\ & f(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda)\end{pmatrix}$

证: $J_m(\lambda)$ 的极小多项式 $M_{J_m(\lambda)}(x) = (x-\lambda)^m$

$f(x)$ 在 $J_m(\lambda)$ 的谱上的值是

$f(\lambda)$, $f'(\lambda)$ $\cdots$ $f^{(m-1)}(\lambda)$.

寻找一个多项式 $g(x)$ s.t. $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $J_m(\lambda)$ 的谱上的值相同. (泰勒展开)

令 $g(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x-\lambda) + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!}(x-\lambda)^{m-1}$

($\Rightarrow$ $g(\lambda) = f(\lambda)$ $g'(\lambda) = f'(\lambda)$, $\cdots$)

由定义 $f(J_m(\lambda)) = g(J_m(\lambda))$

$\Downarrow$

$$f(J_m(\lambda)) = f(\lambda) I_m + f'(\lambda)(\underbrace{J_m(\lambda) - \lambda I_m}_{N = \begin{pmatrix}0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 0\end{pmatrix}}) + \cdots\cdots$$

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda)\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & f'(\lambda) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{f''(\lambda)}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2} \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0\end{pmatrix} \quad \cdots$$

□