1 线性映射的进一步练习

1. 给定一个R^n到自己的线性映射f, 这个线性映射满足条件$f^2 = I$, 这里I是单位映射。
   (a) 求f可能的特征值。
   (b) 定义$W_+ = \{v \in R^n | fv = v\}, W_- = \{v \in R^n | fv = -v\}$. 证明：任何向量都可以写成下面的形式$v = v_+ + v_-$, 这里$v_+ \in W_+$, $v_- \in W_-$.
2. 给定一个R^n到自己的线性映射f, 这个线性映射满足条件$f^2 = f$. 如果f对应的矩阵A的秩为r. 那么A的对角线元素之和为多少?
3. 给定一个R^n到自己的线性映射f， $Im(f) \cap ker(f) = \{0\}$的条件是什么?
4. 给定一个线性映射$f : R^n \to R^m$. 我们之前定义了一个矩阵的norm: $|A|_{norm} = max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$. 选一组基之后，我们可以用线性映射对应的矩阵的norm来定义一个 线性映射的norm。
   (a) 在不同基的选取下线性映射有不同的矩阵， 换基之后我们有新的矩阵$A' = Q^{-1}AP$, 如果我们要求矩阵的范数不变，求换基矩阵Q和P需要满足的的性质。
   (b) 我们计算了矩阵的norm等于A的最大的奇异值。假设$|\lambda_1|$是A的绝对值最大的特征值，证明：$\sigma_1 \geq |\lambda_1|$.
5. 一个R^n到R^n的线性映射T称之为幂零(nilpotent)的，如果存在一个正整数k使得$T^k = 0$, 这里0是指零映射。
   (a) 证明一个线性映射T是幂零的当且仅当它所对应的特征多项式$det(\lambda I - A) = \lambda^n$. 这里$A$是线性映射的表示矩阵。
   (b) 证明： 如果T是幂零的， 那么$T^n = 0$. 利用这个结果，写下所有二乘二的幂零矩阵。
   (c) 一个线性映射T叫做幂幺(unipotent), 如果$T - I$是 幂零的。 决定一个幂幺矩阵的特征多项式。并决定它的可能的特征值。
   (d) 一个线性映射T叫做拟幂幺(quasi-unipotent), 如果$T^k - I$是 幂零的, 这里k是一个正整数。 决定它的可能的特征值的形式。
6. 证明: 一个R^n上的线性映射f可以上三角化 (总可以找到一组基，使得对应的矩阵为上三角矩阵).
7. 我们之前证明了：如果一个$n \times n$的矩阵A有n个线性独立的特征向量，那么我们可以用相似变换把A变成一个对角矩阵，且对角元为矩阵A的特征值。 对于一个一般的矩阵，我们可以把它变成一个所谓的若当标准型。这周，我们先研究一下广义特征向量。
   (a) 我们有所谓的广义特征值方程$(\lambda I - A)^n x = 0$, 这里n是任意一个正整数，x是一个非0向量.
      i. 上述广义特征值方程有解，当且仅当λ是A的特征值。

ii. 取A的一个特征值λ_1。固定一个 n，那么$(\lambda_1 I - A)^n x = 0$ 的解空间（加上零向量）构成一个线性子空间，记这个子空间为$N_n(\lambda_1)$. 证明：1): $N_1(\lambda_1) \subset N_2(\lambda_1) \subset N_3(\lambda_1) \subset \ldots$; 2): 存在一个$k$, 使得 $N_{k-1}(\lambda_1) \neq N_k(\lambda_1)$, 但是$N_k(\lambda_1) = N_{k+1}(\lambda_1) = N_{k+2}(\lambda_1) = \ldots$.

iii. 证明：$N_k(\lambda_1)$是A的不变子空间。（A的不变子空间 V指: 对任何的$v \in V$, 我们有Av还是属于V.）

iv. 证明：$Im(\lambda_1 I - A)^k \cap Ker(\lambda_1 I - A)^k = 0$.

v. 证明： $N_k(\lambda_1)$的维数等于λ_1的代数重数。

2 张量

1. 考虑一个三维的线性空间$V = R^3$. 我们在V中取一组基(e_1, e_2, e_3). 考虑它的对偶空间V^*, 这个对偶空间的基定义为 $e^{i*}(e_j) = \delta_{ij}$.

   (a) 证明: e^{1*}, e^{2*}, e^{3*}是线性相关，且张开对偶空间.

   (b) 写下e^{1*}, e^{2*}, e^{3*}对应的矩阵。我们取R中的基为1.

   (c) R^3中的一个向量可以写成$\overrightarrow{x} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$, 任何一个线性映射$f : R^3 \to R$都可以写成$e^{1*}, e^{2*}, e^{3*}$的线性组合$f = f_1 e^{1*} + f_2 e^{2*} + f_3 e^{3*}$. 写下$f(\overrightarrow{x})$的表达式。(用$f$在上面构造出的基的坐标。)

   (d) 换一组基之后 $E' = EP$ $(E = [e_1, e_2, e_3], E' = [e_1', e_2', e_3']]$. 计算对偶基的变换公式，一个向量坐标变换公式，以及一个线性映射坐标变换。

2. 考虑一个二维线性空间 V. 我们考虑张量积 $V^* \otimes V^*$。选定V的一组基(e_1, e_2)， 我们得到V^*的一组基.

   (a) $V^* \otimes V^*$的一个元素是一个双重线性映射 $f : V^2 \to R$. 写下$V^* \otimes V^*$的一组基. 写下一个该线性空间的向量在这组基下的坐标.

   (b) 换一组基之后 $E' = EP$， 计算$V^* \otimes V^*$中一个向量在新基下的坐标和原来基下坐标的变换。

3. 考虑一个三维空间R^3。选定一组标准的正交归一基(e_1, e_2, e_3), 那么R^3中一个向量的坐标为(x^1, x^2, x^3). 转动惯量定义为

$$M^{ij} = m(|x|^2 \delta^{ij} - x^i x^j) \tag{1}$$

   这里$|x|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. 如果我们换一组基之后

$$e_i' = \sum_{j=1}^{3} e_j P_{ji} \tag{2}$$

   (a) 写下一个向量在新的基下面的坐标(x'^1, x'^2, x'^3)。

   (b) 如果我们需要保持一个向量的长度，那么对矩阵P的限制是?

(c) 证明在保长变换下，$M^{'ij}$和原来的M^{ij}的变换关系是

$$M^{'ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}(P^{-1})^{i}{}_{k}P^{-1})^{j}{}_{l}M^{kl} \tag{3}$$

这里 $(P^{-1})^{i}{}_{k} = (P^{-1})_{ik}$. 也就是说转动惯量是一个二阶逆变张量。

(d) 从转动惯量的形式可以看出，它是一个对称矩阵。证明：在保长变换下，M的变换方式就是一个相似变换。(提示：证明：$M^{'} = P^{-1}MP$). 因为对称矩阵在相似变换下是可以对角化的，而坐标变换是个相似变换，所以转动惯量总是可以在某个坐标系下对角化。

4. 这一道题是关于线性空间在狭义相对论的应用。狭义相对论中的时空是一个所谓的四维闵可夫斯基空间。这个空间可以看成一个四维的线性空间， 并且我们有一个下面的不定二次型

$$x^{T}Sx = -t^{2} + x^{2} + y^{2} + z^{2}. \tag{4}$$

这里(t, x, y, z)是选定一组基$(e_1, \ldots, e_4)$之后的任意一个向量的坐标。(物理上，这个可以理解为选定一个参照系)

(a) 写下矩阵S。

(b) 如果我们改变一组基$(e_1^{'}, \ldots, e_4^{'})$ 之后

$$e_i^{'} = \sum_{1}^{4} e_j P_{ji} \tag{5}$$

物理上，这个换基的操作可以理解为换一个参照系. 物理上对参照系的要求是上面的变换需要保持二次型的形式（$x^{T}Sx = x^{'T}Sx^{'}$)，求对可逆矩阵P的限制。

(c) 求矩阵P的行列式的可能值。对于每种可能的行列式，写出一个矩阵。

5. 量子纠缠是一个流行的概念。现在我们用线性代数中的张量来理解一下这个概念。我们有两个粒子。这两个粒子分别有两个对应的态空间：分别是两个两维的线性空间H_A和H_B. 分别在这两个 线性空间取正交归一基(e_A^1, e_A^2)，(e_B^1, e_B^2). 这两组基通常有一些物理意义，比如e_A^1, e_A^2这个状态是自旋的本征态(对应自旋为上，下)。 那么两个粒子在一起的态空间就是张量空间$H_{AB} = H_A \otimes H_B$，它的基为

$$\alpha_1 = e_A^1 \otimes e_B^1, \quad \alpha_2 = e_A^1 \otimes e_B^2, \quad \alpha_3 = e_A^2 \otimes e_B^1, \quad \alpha_4 = e_A^2 \otimes e_B^2 \tag{6}$$

(a) 找到H_A上的一个线性变换σ_A，使得e_A^1, e_A^2为它的特征向量，特征值分别为$+1, -1$. 并找出这个线性变换在这组基下的矩阵。类似的，找到一个线性变换σ_B, 使得e_B^1, e_B^2为它的特征向量，特征值分别为$+1, -1$. 并找出这个线性映射在这组基下的矩阵. σ_A可以看成粒子A的自旋对应的算子.

(b) 求 $\sigma_A \otimes I_B$ 在α_i这组基上的矩阵S, 这里I_B是作用在H_B的单位线性变换. 。这里我们考虑的是两个线性变换组成的线性空间的张量积. 这个空间的元素可以作用在张量空间H_{AB}. $\sigma_A \otimes I_B$可以看成测量粒子A的自旋.

(c) 张量空间H_{AB}的一个向量称之为非纠缠态，如果它可以写成下面的形式

$$v \otimes w \tag{7}$$

这里$v \in H_A$, $w \in H_B$. 假设$v = a_1 e_A^1 + a_2 e_A^2$, $w = b_1 e_B^1 + b_2 e_B^2$. 写下一个非纠缠态在$\alpha_i$这组基下的坐标。检查一个非纠缠态长度是归一的，如果 v和w是归一的。

(d) 如果一个H_{AB}的中的一个向量不能写成上题出的形式则称之为纠缠态，请找出一个纠缠态。

(e) 写下$\sigma_A \otimes I_B$这个映射在一个非纠缠态的期望值。（这里我们假设非纠缠态的长度是归一的,期望值是$x^T S x$, 这里x是一个非纠缠态在α_i这组基下的坐标). 观察一下结果对系数的依赖（看一下(c)中的系数.). 从中理解对于一个非纠缠态，对粒子B的状态的了解得不到任何关于粒子A的状态的信息。

(f) 考虑一个纠缠态

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} e_A^1 \otimes e_B^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_A^2 \otimes e_B^2 \tag{8}$$

验证它是一个纠缠态，思考一下粒子A的状态怎么和粒子B的状态纠缠在一起?