《高等微积分 2》下半学期内容总结

1 极值问题

例 1.1. 设 $f(x,y)=(2+\sin x)\cdot\sin y$, 令 $D=\{(x,y)|0<x,y<2\pi\}$.

(1)(5 分) 求出 f 在 D 上的所有临界点.

(2)(10 分) 判断上述每个临界点是否为 f 的极值点. 如果是的话, 请指出它是极大值点还是极小值点.

解. (1) f 的临界点方程为

$$\begin{cases} 0=f_x=\cos x\sin y, \\ 0=f_y=(2+\sin x)\cos y, \end{cases}$$

(写出临界点方程 2分)

由 $2+\sin x\neq 0$ 可知 $\cos y=0$, 从而 $\sin y\neq 0$, 故 $\cos x=0$. 这样, f 在 D 上一共有四个临界点

$$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad (\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}),\quad (\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad (\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}).$$

(算出四个临界点共 3分)

(2) f 的 Hessian 为

$$H(f)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin x\sin y & \cos x\cos y \\ \cos x\cos y & -(2+\sin x)\sin y \end{pmatrix}.$$

(写出 Hessian 矩阵 2分)

由此可得:

点	$H(f)$	正定性	极值点类型
$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$\mathrm{diag}\{-1,-3\}$	负定	极大值点
$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	$\mathrm{diag}\{1,3\}$	正定	极小值点
$(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$\mathrm{diag}\{1,-1\}$	不定	不是极值点
$(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	$\mathrm{diag}\{-1,1\}$	不定	不是极值点

□

例 1.2. 给定 n 个正数 $\alpha_1, ..., \alpha_n$. 设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 满足约束条件:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1, \quad 且 x_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq n,$$

求函数 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1^{\alpha_1}) \cdot (x_2^{\alpha_2}) \cdot ... \cdot (x_n^{\alpha_n})$ 的最大值.

解答. 令 $g(x_1, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n - 1$,

$$S = \{(x_1, ..., x_n) | g(x_1, ..., x_n) = 0, x_1, ..., x_n \geq 0\}.$$

(1) 容易验证 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的有界闭集, 由最值定理, 连续函数 f 在 S 上有最大值. 设 $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ 是最大值点.

(2) S 的边界为

$$\partial S = \{(x_1, ..., x_n) \in S | \exists x_i = 0\},$$

f 在 ∂S 上恒等于 0, 在 S 上不恒等于 0, 则有 $\mathbf{b} \notin \partial S$. 注意到 $\frac{\partial g}{\partial x_i} = 1$, 则 $\mathbf{b}$ 是 S 的光滑的内点. 这样, 利用拉格朗日乘子法, 存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $(b_1, ..., b_n, \lambda)$ 是辅助函数

$$F(x_1, ..., x_n, \lambda) = f(x_1, ..., x_n) - \lambda \cdot g(x_1, ..., x_n)$$

的临界点, 即满足如下方程组

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} - 1 = 0 \\ \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} ... x_n^{\alpha_n} - 1 = 0 \\ ...... \\ \alpha_n x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n - 1} - 1 = 0 \\ x_1 + ... + x_n - 1 = 0 \end{cases}$$

解得 $\frac{b_1}{\alpha_1} = ... = \frac{b_n}{\alpha_n}$, 即 $(b_1, ..., b_n) = (\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}, ..., \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n})$.

结合 (1), (2), 所求的最大值为

$$\max_S f = f(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}, ..., \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}) = \frac{\alpha_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \alpha_n^{\alpha_n}}{(\alpha_1 + ... + \alpha_n)^{\alpha_1 + ... + \alpha_n}}.$$

□

例 1.3. 设 $f(x, y, z) = x + y + z + xyz$, 令 $B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(1)(3 分) 证明: f 在 B 上有最大值.

(2)(12 分) 利用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法求出 f 在 B 上的最大值.

解. (1) 显然 B 是有界闭集, 由最值定理可知连续函数 f 在 B 上有最大值.

(用最值定理证明结论, 3分)

(2) 设 f 在 B 上的最大值点为 $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. 分两种情况讨论.

如果 $\mathbf{p}_0$ 在 B 的内部 $\{x^2+y^2+z^2<1\}$, 则 $\mathbf{p}_0$ 是 f 的极值点, 因而满足 f 的临界点方程

$$\begin{cases} 0 = f_x = 1 + yz, \\ 0 = f_y = 1 + zx, \\ 0 = f_z = 1 + xy, \end{cases}$$

化简可得 $-xyz = x = y = z$ 且 $0 = 1 + yz = 1 + x^2$, 无解!

(证明最大值点不在内部 4分)

如果如果 $\mathbf{p}_0$ 在 B 的边界 $\partial B = \{x^2+y^2+z^2=1\}$ 上, 则 $\mathbf{p}_0$ 是 f 在约束 $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ 下的条件极值点. 注意到 $J(g) = (2x, 2y, 2z)$ 在 ∂B 上处处满秩, $\mathbf{p}_0$ 是 ∂B 的光滑点, 则由 Lagrange 乘子法可知存在 λ_0, 使得 $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ 满足 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

的临界点方程, 即有

$$\begin{cases} 0 = L_x = 1 + yz - 2\lambda x \\ 0 = L_y = 1 + zx - 2\lambda y \\ 0 = L_z = 1 + xy - 2\lambda z \\ 0 = L_\lambda = 1 - x^2 - y^2 - z^2 \end{cases}$$

(叙述出 Lagrange 乘子法 1分)

令 $Q = x_0y_0z_0$, 则 x_0, y_0, z_0 都是同一个次数不超过二次的非零多项式 $-2\lambda_0 t^2 + t + Q$ 的根, 该多项式至多两个不同根, 从而 x_0, y_0, z_0 中有两个相同. 不妨设 $x_0 = y_0$, 由此可得

$$\begin{cases} 1 + x_0z_0 - 2\lambda_0 x_0 = 0 \\ 1 + x_0^2 - 2\lambda_0 z_0 = 0 \\ 2x_0^2 + z_0^2 = 1 \end{cases}$$

前两式相减得 $(x_0 - z_0)(x_0 + 2\lambda_0) = 0$, 故 $x_0 = z_0$ 或者 $x_0 = -2\lambda_0$. 前一情况下解得 $(x_0, y_0, z_0) = \pm(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$; 后一情况下, 有 $\lambda_0 \neq 0$, $z_0 = 2\lambda_0 + \frac{1}{2\lambda_0}$ 且 $z_0^2 + 8\lambda_0^2 = 1$, 由此可得

$$1 = z_0^2 + 8\lambda_0^2 = 12\lambda_0^2 + \frac{1}{4\lambda_0^2} + 2 \geq 2,$$

矛盾!

(解出 Lagrange 乘子法的方程组 5分, 其中答案 1 分, 具体求解过程 4 分)

总结上述讨论, 最大值点只能是 $\pm(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ 之一, 故所求的最大值为

$$\max_{(x,y,z)\in B} f(x,y,z)=f(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

(最大值答案 2分)

□

例 1.4. 求函数 $f(x,y,z)=xy+yz$ 在球面 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ 上的最大值.

证明*:* 球面 $S^2=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的有界闭集, 由最值定理, 连续函数 f 在 S^2 上能取到最大值. 设 (x_0,y_0,z_0) 是 f 的最大值点, 注意到 $f(x_0,y_0,z_0)\geq f(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})>0$, 则 $y_0\neq 0$.

S^2 由 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ 的所有零点构成, g 的 *Jacobi* 矩阵为

$$J(g)=(2x,2y,2z),$$

它在 S^2 上是处处满秩的, 由隐函数定理知 S^2 的每个点都是光滑点. 这样, 利用 *Lagrange* 乘子法, 存在 $\lambda_0\in\mathbf{R}$ 使得 (x_0,y_0,z_0,λ_0) 是函数

$$F(x,y,z,\lambda):=xy+yz-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

的临界点, 即有:

$$\begin{cases} y_0-2\lambda_0x_0=0,\\ x_0+z_0-2\lambda_0y_0=0,\\ y_0-2\lambda_0z_0=0,\\ x_0^2+y_0^2+z_0^2-1=0.\end{cases}$$

由 $y_0\neq 0$ 可知 $\lambda_0\neq 0$, 由此可得:

$$x_0=z_0,\quad y_0=2\lambda_0x_0,\quad x_0=\lambda_0y_0,$$

$$\Rightarrow 2\lambda_0^2=1,\quad f(x_0,y_0,z_0)=(x_0+z_0)y_0=2\lambda_0y_0^2>0,$$

$$\Rightarrow \lambda_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_0=z_0=\pm\frac{1}{2},$$

所以,

$$(x_0,y_0,z_0)=\pm(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}),$$

在这两个点处, f 取到最大值 $f_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

□

例 1.5. 设 x, y, z 满足两个约束条件 $x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1$. 求函数 $f(x, y, z) = xyz$ 的最小值.

解答. 令

$$g(x, y, z) = x + y + z - 1, \quad h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz - \lambda g - \mu h.$$

令 $C = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, 它是有界闭集. 由最值定理, 连续函数 f 在 C 上能取到最小值, 设最小值点为 (x_0, y_0, z_0). 注意到矩阵

$$\begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

在 C 上处处是满秩矩阵, 由隐函数定理可知 C 上每点都是光滑点. 特别的, (x_0, y_0, z_0) 是条件极值点. 这样, 由 Lagrange 乘子法, 存在实数 λ, μ 使得 $(x_0, y_0, z_0, \lambda, \mu)$ 满足 F 的临界点方程:

$$\begin{cases} yz - \lambda - 2\mu x = 0 \\ zx - \lambda - 2\mu y = 0 \\ xy - \lambda - 2\mu z = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

令 $p = xyz$, 则 x, y, z 都满足同一个二次方程

$$2\mu t^2 + \lambda t - p = 0,$$

这样, 或者 x, y, z 中有两个相等, 或者上述二次方程是恒等式. 前一种情况下, $\{x, y, z\} = \{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\}$; 后一种情况下, $\lambda = \mu = p = 0$, 可得 $\{x, y, z\} = \{0, 0, 1\}$. 比较这两个候选点处 f 的值可知, f 在 C 上的最小值为

$$f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = -\frac{4}{27}.$$

□

例 1.6. 在约束条件

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

下, 求 $f(x, y, z) = xy + yz$ 的最大值与最小值.

解. 令 $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=1\}$, 它是有界闭集, 由最值定理可知连续函数 f 在 S 上有最值点.

设最值点为 (x_0,y_0,z_0). 利用 Lagrange 乘子法, 存在实数 λ_0,μ_0, 使得 $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ 是辅助函数

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)-\mu(x+y+z-1)$$

的临界点, 即满足如下方程组

$$\begin{cases}0=\frac{\partial F}{\partial x}=y-2\lambda x-\mu\\ 0=\frac{\partial F}{\partial y}=x+z-2\lambda y-\mu\\ 0=\frac{\partial F}{\partial z}=y-2\lambda z-\mu\\ 0=\frac{\partial F}{\partial \lambda}=-(x^2+y^2+z^2-1)\\ 0=\frac{\partial F}{\partial \mu}=-(x+y+z-1).\end{cases}$$

如果 $\lambda\neq 0$, 由第一个和第三个方程可知 $x=z$, 从而有

$$2x+y=1,\quad 2x^2+y^2=1,$$

解得

$$(x,y,z)=(0,1,0),\text{或}(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}).$$

如果 $\lambda=0$, 则 $y=x+z=\frac{1}{2}$, 解得

$$(x,y,z)=(\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{4}),\text{或}(\frac{1-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{4}).$$

比较这四个候选条件最值点处的 f 值, 可得

$$\min f=f(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})=-\frac{4}{9},$$

$$\max f=f(\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{4})=f(\frac{1-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{4})=\frac{1}{4}.$$

□

例 1.7. 设 n 元函数 $f(x_1,...,x_n),g(x_1,...,x_n)$ 与一元函数 $x_1(t),...,x_n(t)$ 都是 C^2 光滑的. 定义函数

$$h(t)=f(x_1(t),...,x_n(t)).$$

(1) 求 $h''(t)$, 请用 $f(x_1,...,x_n)$ 与 $x_1(t),...,x_n(t)$ 的高阶 (偏) 导函数表示.

(2) 令 $\mathbf{p}=(x_1(0),...,x_n(0))$. 假设 $\mathbf{p}$ 是函数 $f(x_1,...,x_n)$ 在约束条件 $g(x_1,...,x_n)=0$ 下的条件极值点. 请叙述此情形下的拉格朗日乘子法.

(3) 设 $\lambda\in\mathbf{R}$ 满足 (2) 中所述拉格朗日乘子法的结论, 定义 n 元函数 F 为

$$F(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)-\lambda\cdot g(x_1,...,x_n).$$

证明: 如果对任何 t, 都有 $g(x_1(t),...,x_n(t))=0$, 则

$$h''(0)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}|_{\mathbf{p}}\cdot x_i'(0)\cdot x_j'(0).$$

解答. (1) 利用链式法则, 有

$$h'(t)=\sum_{i=1}^n f_i(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i'(t),$$

$$\begin{aligned}h''(t)&=\sum_{i=1}^n f_i(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i''(t)+\sum_{i=1}^n x_i'(t)\sum_{j=1}^n f_{ij}(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_j'(t)\\&=\sum_{i=1}^n f_i(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i''(t)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f_{ij}(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i'(t)\cdot x_j'(t).\end{aligned}$$

(2) 拉格朗日乘子法断言: 存在 $\lambda\in\mathbf{R}$, 使得

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\mathbf{p}}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}|_{\mathbf{p}},\quad \forall 1\le i\le n.$$

(3) 由于 $g(x_1(t),...,x_n(t))=0$, 求二阶导可得

$$\begin{aligned}0&=\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}g(x_1(t),...,x_n(t))\\&=\sum_{i=1}^n g_i(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i''(t)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i'(t)\cdot x_j'(t).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}h''(0)&=h''(0)-\lambda\cdot\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}g(x_1(t),...,x_n(t))\\&=\sum_{i=1}^n\left(f_i(x_1(t),...,x_n(t))-\lambda g_i(x_1(t),...,x_n(t))\right)\cdot x_i''(t)\\&+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(f_{ij}(x_1(t),...,x_n(t))-\lambda g_{ij}(x_1(t),...,x_n(t))\right)\cdot x_i'(t)\cdot x_j'(t)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}|_{\mathbf{p}}\cdot x_i'(0)\cdot x_j'(0).\end{aligned}$$

□

例 1.8. (1)(7 分) 把上半平面记作 $\mathbf{R}_+^2=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\geq 0\}$. 设 $h\in C^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, 且对任何 $(x,y)\in\mathbf{R}_+^2$ 有 $h(x_0,0)\leq h(x,y)$. 证明:

$$\frac{\partial h(x_0,0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial h(x_0,0)}{\partial y}\geq 0.$$

(2)(8 分) 设 $f,g\in C^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, 令 $D=\{(x,y)|g(x,y)\geq 0\}$. 设 $g(x_0,y_0)=0$, $g_y(x_0,y_0)\neq 0$, 且对任何 $(x,y)\in D$ 有 $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$. 证明: 存在非负实数 λ, 使得

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)-\lambda g_x(x_0,y_0)=0,\\ f_y(x_0,y_0)-\lambda g_y(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

证明: (1) 由假设, x_0 是一元函数 $h(x,0)$ 的最小值点, 从而有

$$0=\frac{d}{dx}|_{x_0}h(x,0)=\frac{\partial h(x_0,0)}{\partial x}.\quad (3分)$$

另一方面, 当 $t>0$ 时, $h(x_0,t)\geq h(x_0,0)$, 由此可得

$$\frac{\partial h(x_0,0)}{\partial y}=\lim_{t\to 0}\frac{h(x_0,t)-h(x_0,0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{h(x_0,t)-h(x_0,0)}{t}\geq 0.(4分)$$

(2) 由假设, (x_0,y_0) 是 f 在约束 $g(x,y)=0$ 下的最小值点. 又由 $g_y(x_0,y_0)\neq 0$ 可知 (x_0,y_0) 是 $\{g(x,y)=0\}$ 的光滑点. 这样, 由 Lagrange 乘子法可知存在实数 λ, 使得 (x_0,y_0,λ) 满足 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

的临界点方程. 特别的, 有

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)-\lambda g_x(x_0,y_0)=0,\\ f_y(x_0,y_0)-\lambda g_y(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

(利用 Lagrange 乘子法证明 ∇f 与 ∇g 成比例 3分)

下面来证明 $\lambda=\frac{f_y(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}\geq 0$. 按照 $g_y(x_0,y_0)$ 的符号讨论.

当 $g_y(x_0,y_0)>0$ 时, 注意到

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(x_0,y_0+t)-g(x_0,y_0)}{t}=g_y(x_0,y_0)>0,$$

则存在 $r>0$, 使得对任何 $t\in(0,r)$, 有 $g(x_0,y_0+t)-g(x_0,y_0)>0$, 即有 $(x_0,y_0+t)\in D$. 由假设, 有

$$f(x_0,y_0+t)\geq f(x_0,y_0),\quad \forall t\in(0,r),$$

由此可得

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}\geq 0,$$

因此有 $\lambda = \frac{f_y(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)} \geq 0$.

当 $g_y(x_0,y_0) < 0$ 时, 完全类似, 只需把前述 $\lim\limits_{t\to 0+}$ 换成 $\lim\limits_{t\to 0-}$.

□

2 多重积分

例 2.1. 叙述二重积分的换元公式, 教材上称之为 “变量替换公式”.

证明: 设 D' 到 D 的坐标变换公式

$$\phi : D' \to D,$$
$$(u,v) \to (x(u,v), y(u,v)),$$

是 C^1 光滑的, 且有 C^1 光滑的逆, 则对任何连续函数 $f : D \to \mathbf{R}$, 有如下换元公式:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |detJ(\phi)| \cdot dudv.$$

□

例 2.2. 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 的二阶偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数.

(1) 给定 $a_1 < a_2, b_1 < b_2$, 令

$$D = \{(x,y) | a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}.$$

计算二重积分

$$\iint_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} d\sigma.$$

(2) 利用 (1) 的结论证明: 存在 $(x_0,y_0) \in D$, 使得

$$f(a_2,b_2) - f(a_1,b_2) - f(a_2,b_1) + f(a_1,b_1) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{(x_0,y_0)}.$$

(3) 证明: 如果 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{(x,y)} = 0, \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, 则存在一元函数 $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 使得

$$f(x,y) = g(x) + h(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

解答. (1) 把二重积分化成累次积分进行计算, 并利用一元函数的 Newton-Leibniz 公式, 可得

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} d\sigma &= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial f_x(x,y)}{\partial y} dy \\
&= \int_{a_1}^{a_2} \left(f_x(x,b_2) - f_x(x,b_1) \right) dx \\
&= f(x,b_2)|_{a_1}^{a_2} - f(x,b_1)|_{a_1}^{a_2} \\
&= f(a_2,b_2) - f(a_1,b_2) - f(a_2,b_1) + f(a_1,b_1).
\end{aligned}$$

(2) 由积分中值定理, 存在 $(x_0,y_0)\in D$, 使得

$$\iint_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}d\sigma=(a_2-a_1)(b_2-b_1)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}|_{(x_0,y_0)},$$

再结合 (1) 中的结果即可.

(3) 对任何 $x,y\in\mathbf{R}$, 由 (2) 的结论, 存在 (x_0,y_0), 使得

$$f(x,y)-f(0,y)-f(x,0)+f(0,0)=xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}|_{(x_0,y_0)}=0,$$

取 $g(x)=f(x,0)-f(0,0),h(y)=f(0,y)$ 即可.

□

例 2.3. 给定 $a,b,c>0$, 令

$$V=\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,z\ge 0\}.$$

求三重积分

$$\iiint_V zdxdydz.$$

证明*:* 考虑如下坐标变换:

$$\Phi:\mathbf{R}_{\ge 0}\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbf{R}^3,$$

$$\Phi(r,\varphi,\theta)=(ar\sin\theta\cos\varphi,br\sin\theta\sin\varphi,cr\cos\theta),$$

容易算出 $|\det J(\Phi)|=abcr^2\sin\theta$. 这样, 由换元公式, 可得:

$$\begin{aligned}&\iiint_V zdxdydz\\=&\iiint_{\Phi^{-1}(V)}(cr\cos\theta)\cdot|\det J(\Phi)|\cdot drd\varphi d\theta\\=&\iiint(cr\cos\theta)\cdot(abcr^2\sin\theta)\cdot drd\varphi d\theta\\=&abc^2\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\\=&abc^2\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\\=&\frac{\pi}{4}abc^2.\end{aligned}$$

□

例 2.4. 给定正数 $a, b, k_2 > k_1, R > 1$. 设 D 是由如下四条曲线

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2, \quad y = k_1 x, \quad y = k_2 x$$

在第一象限中围成的区域. 求 D 的面积.

解答. 考虑如下坐标变换 $\phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$

$$\phi(r, \theta) = (ar\cos\theta, br\sin\theta).$$

由换元公式, 可得

$$\begin{aligned}
area(D) &= \iint_D dxdy \\
&= \iint_{1 \le r \le R, \arctan\frac{ak_1}{b} \le \theta \le \arctan\frac{ak_2}{b}} |detJ(\phi)| drd\theta \\
&= \iint_{1 \le r \le R, \arctan\frac{ak_1}{b} \le \theta \le \arctan\frac{ak_2}{b}} abrdrd\theta \\
&= \int_1^R abrdr \int_{\arctan\frac{ak_1}{b}}^{\arctan\frac{ak_2}{b}} d\theta \\
&= ab\frac{R^2 - 1}{2}(\arctan\frac{ak_2}{b} - \arctan\frac{ak_1}{b}).
\end{aligned}$$

□

例 2.5. 给定三个互不相同的实数 A, B, C. 设函数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 有连续的二阶导函数 $f^{(2)}(x)$, 计算二重积分

$$I = \iint_{x+y \le 1, x, y \ge 0} f^{(2)}(Ax + By + C(1 - x - y))d\sigma$$

的值, 要求将结果用 $f(A), f(B), f(C)$ 表示.

证明:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f^{(2)}(Ax + By + C(1 - x - y))dy \\
&= \int_0^1 dx \frac{f^{(1)}(Ax + By + C(1 - x - y))}{B - C}\Big|_0^{1-x} \\
&= \int_0^1 \frac{f^{(1)}(Ax + B(1 - x)) - f^{(1)}(Ax + C(1 - x))}{B - C} \\
&= \frac{f(A) - f(B)}{(B - C)(A - B)} - \frac{f(A) - f(C)}{(B - C)(A - C)} \\
&= \frac{f(A)}{(A - B)(A - C)} + \frac{f(B)}{(B - C)(B - A)} + \frac{f(C)}{(C - A)(C - B)}.
\end{aligned}$$

$\square$

例 2.6. 考虑三维区域

$$V = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \le 1\}.$$

计算 V 的体积.

解. 有两种配方方法

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx &= (x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z)^2+\frac{3}{4}(y+\frac{1}{3}z)^2+\frac{2}{3}z^2 \\ &= \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(y+z)^2+\frac{1}{2}(x+z)^2, \end{aligned}$$

给出两种换元的办法, 都可以直接算出

$$\mathrm{Vol}(V) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}.$$

例如, 采用前一种换元

$$u = x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z, \quad v = y+\frac{1}{3}z, \quad w = z,$$

则 V 在 uvw 坐标系下为椭球体 V'

$$u^2+\frac{3}{4}v^2+\frac{2}{3}w^2 \le 1.$$

利用换元公式, 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(V) &= \iiint_V dxdydz = \iiint_{V'} |\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|dudvdw \\ &= \mathrm{Vol}(V') = \frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}. \end{aligned}$$

$\square$

例 2.7. 考虑平面区域

$$D = \{(x,y)|0 \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 2\pi\}, \quad E = \{(x,y)|0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}.$$

(1) 证明:

$$\iint_D |\cos x+\cos y|dxdy = 4\iint_E |\cos x+\cos y|dxdy.$$

(2) 计算二重积分 $\iint_E |\cos x+\cos y|dxdy$.

解. (1) 利用换元

$$x = \pi \pm u, \quad y = \pi \pm v.$$

例如, 对于区域 $[0, \pi] \times [\pi, 2\pi]$, 按如下方式换元

$$x = \pi - u, \quad y = \pi + v,$$

由换元公式可得

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\pi]\times[\pi,2\pi]} |\cos x + \cos y| dxdy &= \iint_{[0,\pi]\times[0,\pi]} |\cos(\pi - u) + \cos(\pi + v)| \cdot |\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}| dudv \\ &= \iint_{[0,\pi]\times[0,\pi]} |\cos u + \cos v| dudv.\end{aligned}$$

(2) 设 $0 \le x, y \le \pi$, 此时有 $\cos \frac{x-y}{2} \ge 0$, 从而

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \ge 0 \iff \frac{x+y}{2} \le \frac{\pi}{2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\iint_E |\cos x + \cos y| dxdy \\ =& \iint_{0\le x,y\le\pi, x+y\le\pi} (\cos x + \cos y) dxdy - \iint_{0\le x,y\le\pi, x+y\ge\pi} (\cos x + \cos y) dxdy \\ =& \int_0^\pi dx \int_0^{\pi - x} (\cos x + \cos y) dy - \int_0^\pi dx \int_{\pi-x}^{\pi} (\cos x + \cos y) dy \\ =& \int_0^\pi ((\pi - x)\cos x + \sin(\pi - x))\, dx - \int_0^\pi (x \cos x - \sin(\pi - x))\, dx \\ =& \int_0^\pi (\pi \cos x - 2x \cos x + 2 \sin x)\, dx \\ =& 4 \int_0^\pi \sin x dx \\ =& 8.\end{aligned}$$

画图/代数/分区

□

3 曲线曲面积分

例 3.1. 叙述格林 (*Green*) 公式.

证明: 设 D 是挖了 m 个洞的 (拓扑) 圆盘, ∂D 分段光滑, 取正定向 (依正定向沿边界走, D 总在左边). 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 是 D 上的 C^1 光滑函数, 则有:

$$\oint_{\partial D^+}(Pdx+Qdy)=\iint_D(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y})dxdy.$$

□

例 3.2. 给定 $a>b>0$, 定义曲面 T 为

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=b^2\}.$$

求 T 的面积.

证明: T 有如下参数方程表示:

$$\begin{cases}x=(a+b\cos\beta)\cos\alpha,\\ y=(a+b\cos\beta)\sin\alpha,\\ z=b\sin\beta,\end{cases}$$

其中 $\alpha,\beta\in[0,2\pi]$. 注意到

$$\begin{aligned}&(x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha)\times(x_\beta,y_\beta,z_\beta)\\ =&\begin{pmatrix} i & j & k\\ -(a+b\cos\beta)\sin\alpha & (a+b\cos\beta)\cos\alpha & 0\\ -b\sin\beta\cos\alpha & -b\sin\beta\sin\alpha & b\cos\beta\end{pmatrix}\\ =&((a+b\cos\beta)b\cos\alpha\cos\beta,(a+b\cos\beta)b\sin\alpha\cos\beta,(a+b\cos\beta)b\sin\beta),\end{aligned}$$

则有:

$$|(x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha)\times(x_\beta,y_\beta,z_\beta)|=(a+b\cos\beta)b.$$

代入参数曲面的面积公式, 可得:

$$\begin{aligned}\text{area}(T)=&\iint|(x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha)\times(x_\beta,y_\beta,z_\beta)|d\alpha d\beta\\ =&\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{2\pi}(a+b\cos\beta)bd\beta\\ =&4\pi^2ab.\end{aligned}$$

□

例 3.3. 设曲面 T 为

$$T=\{(x,y,z)|x^2+y^2=z^2,0\le z\le 1\}.$$

计算第一型曲面积分

(1) $\iint_T dS$.

(2) $\iint_T zdS$.

解答. T 有参数化

$$\begin{cases} x=z\cos\theta, \\ y=z\sin\theta, \\ z=z, \end{cases}$$

其中 $0\le z\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$. 注意到

$$\begin{aligned}(x_z,y_z,z_z)\times(x_\theta,y_\theta,z_\theta)&=(\cos\theta,\sin\theta,1)\times(-z\sin\theta,z\cos\theta,0)\\ &=(-z\cos\theta,-z\sin\theta,z),\end{aligned}$$

由此可得

$$|(x_z,y_z,z_z)\times(x_\theta,y_\theta,z_\theta)|=\sqrt{2}|z|.$$

(1)

$$\begin{aligned}\iint_T dS&=\iint_{0\le z\le 1,0\le\theta\le 2\pi}|(x_z,y_z,z_z)\times(x_\theta,y_\theta,z_\theta)|dzd\theta\\ &=\int_0^1\sqrt{2}zdz\int_0^{2\pi}d\theta\\ &=\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\iint_T zdS&=\iint_{0\le z\le 1,0\le\theta\le 2\pi}z|(x_z,y_z,z_z)\times(x_\theta,y_\theta,z_\theta)|dzd\theta\\ &=\int_0^1\sqrt{2}z^2dz\int_0^{2\pi}d\theta\\ &=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi.\end{aligned}$$

□

例 3.4. 令 S 为单位球面

$$S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}.$$

设 $p:[0,1]\to S$ 是 C^1 光滑映射

$$p(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \forall t\in[0,1].$$

假设 $p(0)=(0,0,-1)$, $p(1)=(0,0,1)$, 且对任何 $0<t<1$ 有 $-1<z(t)<1$.

(1) 证明: 对任何 $t\in[0,1]$, 有 $x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+z(t)z'(t)=0$.

(2) 证明: 对任何 $-1<t<1$, 有

$$x'(t)^2+y'(t)^2\geq\frac{z(t)^2}{x(t)^2+y(t)^2}z'(t)^2.$$

(3) 定义 p 的弧长为

$$L=\int_0^1\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt.$$

证明: $L\geq\pi$.

(即使不能证明, 也可以直接使用前面小问的结论)

证明: (1) 对 $x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=1$ 求导即可.

(2) 由 Cauchy 不等式以及 (1) 的结论, 可得

$$\left(x'(t)^2+y'(t)^2\right)\cdot\left(x(t)^2+y(t)^2\right)\geq(x(t)x'(t)+y(t)y'(t))^2=z(t)^2z'(t)^2.$$

(3) 利用 (2) 的结论, 可得

$$\begin{aligned}L&\geq\int_0^1\sqrt{\frac{z'(t)^2}{x(t)^2+y(t)^2}}dt\\&=\int_0^1\frac{|z'(t)|}{\sqrt{1-z(t)^2}}dt\\&\geq|\int_0^1\frac{z'(t)}{\sqrt{1-z(t)^2}}dt|\\&=|\int_{-1}^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}|\\&=\pi.\end{aligned}$$

□

例 3.5. 设 $C\subset\mathbf{R}^2$ 是光滑的闭曲线, 取逆时针方向 (定向). 假设 $(0,0)\notin C$, 计算第二型曲线积分

$$\oint_C\frac{-(x^2y+y^3)dx+(x^3+xy^2)dy}{(x^2+y^2)^2}.$$

解答. 所求的积分可化简为

$$\oint_C \frac{-(x^2y+y^3)dx+(x^3+xy^2)dy}{(x^2+y^2)^2}=\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$

设 C 的内部为 D, 分两种情况讨论.

(1) 如果 $(0,0)\notin D$, 则由 Green 公式可得

$$\begin{aligned}&\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}\\ =&\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{x^2+y^2}\right)dxdy\\ =&\iint_D 0dxdy=0.\end{aligned}$$

(2) 如果 $(0,0)\in D$, 取 $B_\epsilon=\{(x,y)|x^2+y^2\le\epsilon^2\}\subset D$. 在区域 $E=D-\{(x,y)|x^2+y^2<\epsilon^2\}$ 上使用 Green 公式, 可得

$$\oint_C=\oint_{\partial B_\epsilon}.$$

直接选取参数化可算出 $\oint_{\partial B_\epsilon}=2\pi$, 故此时 $\oint_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=2\pi$. □

例 3.6. (1) 给定整数 n. 设曲线 L_n 由如下参数方程给出

$$\begin{cases}x(t)=(2+\cos t)\cos(nt),\\ y(t)=(2+\cos t)\sin(nt),\\ z(t)=\sin t,\end{cases}$$

其中参数 $t\in[0,2\pi]$. 上述参数方程确定了 L_n 的一个定向 (教材上称之为 “方向”), 求第二型曲线积分

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{L_n}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$

(2) 设 $C\subseteq\mathbf{R}^3$ 是封闭的定向曲线 (给定了 “方向” 的曲线), 且与 z 轴 $\{(0,0,z)|z\in\mathbf{R}\}$ 不相交. 证明: 第二型曲线积分

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

的值是整数.(5 分)

证明: (1) 依第二型曲线积分的定义直接计算, 可得:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\oint_{L_n}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-(2+\cos t)\sin(nt)(-\sin t\cos nt-n(2+\cos t)\sin nt)+(2+\cos t)\cos(nt)(-\sin t\sin nt+n(2+\cos t)\cos}{(2+\cos t)^2}\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ndt\\
=&n.
\end{aligned}
$$

(2) 柱坐标与 xyz 坐标的变换公式为:

$$\Phi:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3\backslash\{(0,0,z)|z\in\mathbf{R}\},$$

$$\Phi(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z).$$

Φ 的 *Jacobi* 矩阵为:

$$J(\Phi)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

在 $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上

$$detJ(\Phi)=r>0,$$

特别的, $J(\Phi)$ 处处是可逆矩阵. 这样, 由反函数定理可知 Φ 在每个点附近都有 C^1 光滑的逆.

任取 L 的与定向相容的参数表示

$$\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^3\backslash\{(0,0,z)|z\in\mathbf{R}\},$$

$$t\to(x(t),y(t),z(t)).$$

由前述, Φ 在每点附近都有 C^1 光滑的逆, 则存在 C^1 光滑映射 $\widetilde{\gamma}:[a,b]\to\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 使得 $\Phi\circ\widetilde{\gamma}=\gamma$. 换句话说, 即在柱坐标系中, 存在 L 的 C^1 光滑的参数化实现

$$\begin{cases}r=r(t),\\ \theta=\theta(t),\\ z=z(t),\end{cases}$$

使得 $(x(t), y(t), z(t)) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t), z(t))$. 代入第二型曲线积分的定义式, 可得:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{-r\sin\theta(r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta) + r\cos\theta(r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta)}{r^2}dt\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_a^b \theta'(t)dt\\
=&\frac{1}{2\pi}(\theta(b)-\theta(a)).
\end{aligned}$$

注意到, L 是封闭的, 有:

$$(r(a)\cos\theta(a), r(a)\sin\theta(a)) = (r(b)\cos\theta(b), r(b)\sin\theta(b)),$$

由假设 $r(a), r(b) \neq 0$, 则 $\theta(b)-\theta(a)$ 是 2π 的整数倍, 从而可知

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} \in \mathbf{Z}.$$

□

4 样卷 1

1 给定 $\mathbf{R}^3$ 中的向量场

$$\mathbf{F} = (e^x\sin x + e^x\cos x, \quad e^y\sin z + e^z\cos y, \quad e^y\cos z + e^z\sin y).$$

(1) 证明: $\mathbf{F}$ 旋度 $\nabla\times\mathbf{F}$ 恒等于零.

(2) 求 $\mathbf{F}$ 的势能函数 (或称为原函数)$\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, 即要求 $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

解. (1) 直接计算可得

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{F} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^x\sin x + e^x\cos x & e^y\sin z + e^z\cos y & e^y\cos z + e^z\sin y \end{pmatrix}\\
&= (0,0,0).
\end{aligned}$$

共 5 分, 其中写下旋度的定义 3 分.

(2) $\mathbf{R}^3$ 上的无旋场 $\mathbf{F}=(P,Q,R)$ 一定是有势的, 且其原函数可由曲线积分给出

$$\phi(x,y,z)=\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz,$$

其中 γ 是从 $(0,0,0)$ 到 (x,y,z) 的任何分段光滑道路.写下 ϕ 的计算公式, 3 分.

具体的说, 选取 γ 为三条直线段的并: 从 $(0,0,0)$ 到 $(x,0,0)$, 再到 $(x,y,0)$, 最后到 (x,y,z). 由此可得

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z)&=\int_0^x P(x,0,0)dx+\int_0^y Q(x,y,0)dy+\int_0^z Q(x,y,z)dz\\&=\int_0^x e^x(\sin x+\cos x)dx+\int_0^y \cos y dy+\int_0^z (e^y\cos z+e^z\sin y)dz\\&=e^x\sin x+e^y\sin z+e^z\sin y.\end{aligned}$$

计算上述曲线积分, 算出 ϕ 的具体表达式, 7 分.

第 (2) 小问如果通过观察, 猜出 ϕ 的具体表达式, 并验证它的旋度等于 $\mathbf{F}$, 也给 10 分. $\square$

2 (1) 求解微分方程的初值问题

$$\begin{cases}y'=y^2-y,\\ y(0)=2.\end{cases}$$

(2) 给定连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 以及实数 x_0,y_0,p_0, 且 $p_0>0$. 利用降阶的方法证明: 初值问题

$$\begin{cases}y''=f(y),\\ y(x_0)=y_0,\\ y'(x_0)=p_0,\end{cases}$$

的解可以表示成如下形式

$$\int_{y_0}^{y(x)}\frac{dt}{\sqrt{p_0^2+2\int_{y_0}^t f(s)ds}}=x-x_0.$$

解. (1) 可分离变量 $dx = \frac{dy}{(y-1)y}$(分离变量 2 分), 两边积分可得

$$\begin{aligned} x = \int_0^x dx = \int_2^{y(x)} \frac{dy}{(y-1)y} \quad &(\text{两边积分}, 2\text{分}) \\ = \int_2^{y(x)} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy& \\ = \ln \frac{y-1}{y}\Big|_2^{y(x)}& \\ = \ln \frac{2(y(x)-1)}{y(x)}, \quad &(\text{算出积分}, 3\text{分}) \end{aligned}$$

由此解得

$$y(x) = \frac{2}{2-e^x}.$$

(2) 该 ODE 不显含 x. 由 $y'(x_0) \neq 0$, 则 y 在 x_0 附近有逆 y^{-1}. 令 $p(y) = y'(y^{-1}(y))$, 则有 $y''(y^{-1}(y)) = p(y)\frac{dp}{dy}$. 由此可得

$$p\frac{dp}{dy} = f(y) \quad (\text{降阶}, 2\text{分}).$$

分离变量, 两边积分可得

$$\frac{1}{2}\left(p^2(y) - p_0^2\right) = \int_{p_0}^{p(y)} pdp = \int_{y_0}^{y} f(y)dy.$$

由连续性, 在 y_0 附近 $p(y)$ 为正数, 从而有

$$p(y) = \sqrt{p_0^2 + 2\int_{y_0}^{y} f(s)ds}, \quad (\text{解出}p(y), 3\text{分})$$

即有

$$y' = \sqrt{p_0^2 + 2\int_{y_0}^{y} f(s)ds}.$$

对此 ODE 分离变量, 两边积分, 有

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{p_0^2 + 2\int_{y_0}^{y} f(s)ds}} = \int_{x_0}^{x} dx = x - x_0, \quad (\text{得出}y(x)\text{满足的方程}, 3\text{分})$$

此即所要证明的结论. □

3 给定实数 $\alpha < \beta$. 求微分方程

$$y'' + (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y = x + \cos x$$

的所有解.

解. 对应的齐次 ODE 的特征方程为 $\lambda^2+(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta=0$. 它有两个不同特征根 $-\alpha,-\beta$, 则齐次 ODE 有两个线性无关解

$$\phi_1(x)=e^{-\alpha x},\quad \phi_2(x)=e^{-\beta x},$$

它们的 Wronski 行列式为 $W(x)=(\alpha-\beta)e^{-(\alpha+\beta)x}$.(求出齐次方程的两个线性无关解, 5 分)

令 $f(x)=x+\cos x$. 由常数变易法, 可解得

$$\begin{aligned}C_1(x)&=\int\frac{-\phi_2(x)f(x)}{W(x)}dx+c_1=\frac{1}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}(x+\cos x)dx+c_1,\\ C_2(x)&=\int\frac{\phi_1(x)f(x)}{W(x)}dx+c_2=\frac{1}{\alpha-\beta}\int e^{\beta x}(x+\cos x)dx+c_2.\end{aligned}$$

(用常数变易法写出 $C_1(x),C_2(x)$ 的计算公式, 3 分)

直接计算不定积分, 可得

$$\int e^{kx}(x+\cos x)dx=\begin{cases}e^{kx}\left(\frac{kx-1}{k^2}+\frac{k\cos x+\sin x}{k^2+1}\right)+c, & 如果 k\neq 0,\\ \frac{x^2}{2}+\sin x+c, & 如果 k=0.\end{cases}$$

从而有

$$C_1(x)=\begin{cases}\frac{e^{\alpha x}}{\beta-\alpha}\left(\frac{\alpha x-1}{\alpha^2}+\frac{\alpha\cos x+\sin x}{\alpha^2+1}\right)+c_1, & 如果 \alpha\neq 0,\\ \frac{\frac{x^2}{2}+\sin x}{\beta-\alpha}+c_1, & 如果 \alpha=0.\end{cases}$$

$$C_2(x)=\begin{cases}\frac{e^{\beta x}}{\alpha-\beta}\left(\frac{\beta x-1}{\beta^2}+\frac{\beta\cos x+\sin x}{\beta^2+1}\right)+c_2, & 如果 \beta\neq 0,\\ \frac{\frac{x^2}{2}+\sin x}{\alpha-\beta}+c_2, & 如果 \beta=0.\end{cases}$$

(计算出 $C_1(x),C_2(x)$ 的具体表达式, 每个 3 分; 如果没有讨论 α,β 等于零的情形, 一共扣 1 分)

由此可得该微分方程的所有解为

$$y(x)=C_1(x)e^{-\alpha x}+C_2(x)e^{-\beta x}\quad (1分).$$

□

4 设 $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|x^2+y^2+z^2=1\}$ 是单位球面, 取指向外面的定向. 对给定的非负整数 k, 计算第二型曲面积分

$$\iint_S z^k(xdydz+ydzdx+zdxdy)\ 或等价的\ \iint_S z^k(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)$$

解. 设 $B=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$ 为单位球体. 利用 Gauss 公式可得

$$
\begin{aligned}
&\iint_S z^k(xdydz+ydzdx+zdxdy)\\
=&\iiint_B \left(\partial_x(z^kx)+\partial_y(z^ky)+\partial_z(z^{k+1})\right)dxdydz\\
=&\iiint_B (k+3)z^kdxdydz \quad (\text{利用高斯公式}, 7\text{分})\\
=&\int_0^1(k+3)r^{k+2}dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\cos^k\theta\sin\theta d\theta \quad (\text{球坐标换元公式}, 3\text{分})\\
=&2\pi\int_0^{\pi}\cos^k\theta\sin\theta d\theta \quad (\text{积去}r,\phi, 2\text{分})\\
=&2\pi\frac{-\cos^{k+1}\theta}{k+1}|_0^{\pi}\\
=&2\pi\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} \quad (\text{算出结果}, 3\text{分}),
\end{aligned}
$$

故所求的积分值为

$$
\iint_S z^k(xdydz+ydzdx+zdxdy)=\begin{cases}0, & \text{如果}k\text{ 为奇数},\\ \frac{4\pi}{k+1}, & \text{如果}k\text{ 为偶数}.\end{cases}
$$

□

5 给定正数 $c<\sqrt{2}$. 设曲面 $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1, x+y\ge c\}$.

(1) 计算第一型曲面积分 $\iint_S xdS$, 其中 dS 表示面积微元.

(2) 计算第一型曲线积分 $\int_{\partial S} xdl$, 其中 ∂S 表示 S 的边界, dl 表示弧长微元.

解. 我们要用到如下事实. $\mathbf{R}^3$ 到自身的正交变换保持距离, 面积 (与体积). 具体的说, 设 $\Psi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 由正交矩阵 A 给出:

$$
\Psi\left((u,v,w)^T\right)=A(u,v,w)^T,
$$

这里我们把 $\mathbf{R}^3$ 中的点写成列向量, A 满足 $AA^T=I$. 设 L',L 是曲线, S',S 是曲面, $\Psi:L'\to L$ 和 $\Psi:S'\to S$ 是微分同胚, 则有

$$
\int_L f(x,y,z)dl=\int_{L'}(f\circ\Psi)dl, \quad \int_S f(x,y,z)dS=\int_{S'}(f\circ\Psi)dS.
$$

我们只证明后一个结论, 前一个结论的证明类似. 取 S' 的参数化 $\Phi:D\to S'$,

$$
\Phi(s,t)=(u(s,t),v(s,t),w(s,t)), \quad \forall(s,t)\in D,
$$

则 $\Psi\circ\Phi: D\to S$ 给出 S 的参数化, 利用这个参数化可直接验证上述第一型曲面积分的换元公式.

回到原题. 引入正交变换 $\Psi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$

$$\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\quad \text{(3分)}.$$

令 $S'=\{(u,v,w)|u^2+v^2+w^2=1,u\geq\frac{c}{\sqrt2}\}$, 则 $\Psi:S'\to S$ 是微分同胚.(2 分).注意到 S' 关于 Ouw 平面的反射是对称的, 因而 S 上关于 v 的奇函数的第一型曲面积分为零. 这样, 由前述第一型曲面积分的换元公式, 有

$$\begin{aligned}\iint_S xdS&=\iint_{S'}\frac{u-v}{\sqrt2}dS\\ &=\iint_{S'}\frac{u}{\sqrt2}dS\quad \text{(关于}v\text{的奇函数积分为零,1分)}\\ &=\iint_{v^2+w^2\leq 1-\frac{c^2}{2}}\frac{\sqrt{1-v^2-w^2}}{\sqrt2}\sqrt{1+u_v^2+u_w^2}dvdw\quad \text{(以}v,w\text{为参数计算,1分)}\\ &=\frac{1}{\sqrt2}\iint_{v^2+w^2\leq 1-\frac{c^2}{2}}dvdw\\ &=\frac{1}{\sqrt2}\pi(1-\frac{c^2}{2})\quad \text{(算出结果,3分)}.\end{aligned}$$

类似的, 有

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}xdl&=\int_{\partial S'}\frac{u-v}{\sqrt2}dl\\ &=\int_{\partial S'}\frac{u}{\sqrt2}dl\quad \text{(关于}v\text{的奇函数积分为零,1分)}\\ &=\int_{\partial S'}\frac{c}{2}dl\\ &=\frac{c}{2}\cdot 2\pi\sqrt{1-\frac{c^2}{2}}\\ &=\pi c\sqrt{1-\frac{c^2}{2}}.\quad \text{(算出结果,4分)}.\end{aligned}$$

□

6 (1) 给定 $\mathbf{R}^3$ 中三个点 $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$. 设这三个点和坐标原点 $O(0,0,0)$ 构成四面体, 求这个四面体的体积.(可以把结果用行列式表示, 不需要完全展

开). 你可能需要用到形如 $\Phi(u,v,w)=(a_1u+b_1v+c_1w, a_2u+b_2v+c_2w, a_3u+b_3v+c_3w)$ 的坐标变换.

(2) 给定 $\mathbf{R}^2$ 中两个点 $P(p_1,p_2), Q(q_1,q_2)$. 设这两个点和坐标原点 $O(0,0)$ 构成三角形 D. 计算二重积分

$$\iint_D x^2 dxdy.$$

解. (1) 考虑坐标变换 $\Phi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$

$$\Phi(u,v,w)=(a_1u+b_1v+c_1w, a_2u+b_2v+c_2w, a_3u+b_3v+c_3w), \quad \text{(1分)}$$

把其 Jacobi 矩阵行列式的绝对值记作

$$K=|\det J(\Phi)|=|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}|.$$

设前一个 $\mathbf{R}^3$ 中由点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 与原点构成的四面体为 Ω_0, 后一个 $\mathbf{R}^3$ 中由点 O,A,B,C 构成的四面体为 Ω, 则 $\Phi:\Omega_0\to\Omega$ 是微分同胚(1 分). 这样, 由重积分的换元公式可得

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\Omega) &= \iiint_\Omega dxdydz\\
&= \iiint_{\Omega_0} |\det J(\Phi)|dudvdw \quad \text{(利用换元公式, 2分)}\\
&= K\iint_{u,v\geq 0, u+v\leq 0} dudv\int_0^{1-u-v} dw\\
&= K\int_0^1 du\int_0^{1-u}(1-u-v)dv\\
&= K\int_0^1 \frac{1}{2}(1-u)^2du\\
&= \frac{1}{6}K. \quad \text{(算出结果, 3分)}
\end{aligned}$$

得到 $\text{Volume}(\Omega)=K\cdot\text{Volume}(\Omega_0)$ 之后, 也可以注意到 Ω_0 的底面积为 $\frac{1}{2}$, 高为 1, 则 $\text{Volume}(\Omega_0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}$.

(2) 考虑坐标变换 $\Psi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$

$$\Psi(u,v)=(p_1u+q_1v, p_2u+q_2v),$$

把其 Jacobi 矩阵行列式的绝对值记作

$$L = |\det J(\Psi)| = |\det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}| = |p_1q_2 - q_1p_2|.$$

设前一个 $\mathbf{R}^2$ 中由点 $(1,0),(0,1)$ 与原点构成的三角形为 D_0, 后一个 $\mathbf{R}^2$ 中由点 O,P,Q 构成的三角形为 D, 则 $\Psi: D_0 \to D$ 是微分同胚.(写出坐标变换并注意到它把 D_0 同胚成 D, 1 分.)这样, 由重积分的换元公式可得

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 dxdy &= \iint_{D_0} (p_1u+q_1v)^2 |\det J(\Psi)| dudv \\ &= L\left(p_1^2 \iint_{D_0} u^2 dudv + 2p_1q_1 \iint_{D_0} uvdudv + q_1^2 \iint_{D_0} v^2 dudv\right).\end{aligned}$$

利用换用公式, 1 分.

直接计算可得

$$\iint_{D_0} u^2 dudv = \int_0^1 u^2(1-u)du = \frac{1}{12}, \quad (2分)$$

$$\iint_{D_0} uvdudv = \int_0^1 u\cdot\frac{1}{2}(1-u)^2 du = \frac{1}{24}, \quad (2分)$$

$$\iint_{D_0} v^2 dudv = \int_0^1 v^2(1-v)dv = \frac{1}{12},$$

从而可知

$$\iint_D x^2 dxdy = \frac{1}{12}(p_1^2 + p_1q_1 + q_1^2)\cdot|p_1q_2 - q_1p_2|. \quad (2分)$$

□

7 设 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是 C^2 光滑的调和函数, 即在 $\mathbf{R}^2$ 中每点处都有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

设 C 是 $\mathbf{R}^2$ 中的简单闭曲线, 取逆时针定向, D 是 C 围成的有界区域, 坐标原点 $(0,0)$ 位于 D 的内部. 证明:

$$\int_C \frac{-yf(x,y)dx + xf(x,y)dy}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\int_C (-f_y(x,y)dx + f_x(x,y)dy)\ln(x^2+y^2) = 2\pi f(0,0). \tag{1}$$

证明: 对小的正数 ϵ, 令

$$B_\epsilon = \{(x,y)|x^2+y^2 \le \epsilon^2\}, \quad C_\epsilon = \partial B_\epsilon(\text{逆时针定向}), \quad D_\epsilon = D - \{(x,y)|x^2+y^2<\epsilon^2\}.$$

记 $r = r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, 它在 D_ϵ 上光滑. 记

$$P = \frac{-yf}{r^2} + f_y \ln r, \quad Q = \frac{xf}{r^2} - f_x \ln r,$$

则有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -(\Delta f)\ln r = 0, \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

这样, 利用 Green 公式, 可得

$$\int_C Pdx + Qdy - \int_{C_\epsilon} Pdx + Qdy = \iint_{D_\epsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0. \tag{2}$$

利用格林公式得到 (2) 式, 5 分.

注意到

$$\int_{C_\epsilon} (-f_y(x,y)dx + f_x(x,y)dy)\ln r = (\ln\epsilon) \cdot \iint_{B_\epsilon} (\Delta f) dxdy = 0, \quad (2\text{分})$$

代入到 (2) 式, 可得

$$\begin{aligned}\int_C Pdx + Qdy &= \int_{C_\epsilon} Pdx + Qdy \\ &= \int_{C_\epsilon} \frac{-yfdx + xfdy}{\epsilon^2} \\ &= \int_0^{2\pi} f(\epsilon\cos\theta, \epsilon\sin\theta)d\theta,\end{aligned}$$

利用积分中值定理, 存在 $\theta(\epsilon)$, 使得

$$\int_C Pdx + Qdy = 2\pi f(\epsilon\cos\theta(\epsilon), \epsilon\sin\theta(\epsilon)),$$

对 $\epsilon \to 0+$ 取极限, 即得所要证明的结论.利用积分中值定理完成证明, 3 分 □

5 样卷 2

1 (1) 给定 $\mathbf{R}^3$ 中的向量场 $\mathbf{F} = (y+z, z+x, x+y)$. 求光滑函数 $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ 使得 $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

(2) 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是给定的光滑函数, 且满足对任何 $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ 都有 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$. 证明: 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的光滑函数 $g(x,y)$, 使得如下两组函数分别相等:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

解答. (1) 方法一. 取 $\phi(x,y,z)=xy+yz+zx$, 显然有 $\nabla\phi=(y+z,z+x,x+y)$. (5 分)

方法二: 也可以利用曲线积分求 ϕ

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z)&=\int_\gamma (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz, \quad (2分)\\ &=xy+yz+zx, \quad (3分)\end{aligned}$$

(2) 即要找函数 g, 使得 $dg=-f_y dx+f_x dy$. 熟知, 在 $\mathbf{R}^2$ 上, $dg=Pdx+Qdy$ 有解的充分必要条件是 $Q_x-P_y\equiv 0$(2 分). 对我们的问题而言, $P=-f_y, Q=f_x$, 有

$$Q_x-P_y=f_{xx}-(-f_{yy})\equiv 0, \quad (3分)$$

故存在 g 满足条件. □

2 (1) 在 $\mathbf{R}_+$ 上求解微分方程 $y'=\frac{xy+y^2}{x^2}$.

(2) 给定连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 以及实数 x_0,y_0,p_0, 且 $p_0>0$. 利用降阶的方法证明: 初值问题

$$\begin{cases} y''=f(y),\\ y(x_0)=y_0,\\ y'(x_0)=p_0,\end{cases}$$

的解可以表示成如下形式

$$\int_{y_0}^{y(x)}\frac{dt}{\sqrt{p_0^2+2\int_{y_0}^t f(s)ds}}=x-x_0.$$

解. (1) 方法一: 转化为可分离变量的. 令 $\frac{y}{x}=z(x)$, 则有

$$z+xz'=z+z^2, \quad (2分)$$

化简可得 $\frac{dz}{z^2}=\frac{dx}{x}$, 两边做不定积分可得

$$-\frac{1}{z}=\int\frac{dz}{z^2}=\int\frac{dx}{x}+C=\ln x+C, \quad (3分)$$

从而有 $z(x)=-\frac{1}{\ln x+C}$, $y(x)=-\frac{x}{\ln x+C}$.(答案 2 分)

(2) 方法二: 贝努利方程. 原方程为

$$y'-\frac{1}{x}y-\frac{1}{x^2}y^2=0,$$

令 $y(x) = w(x)^{-1}$, 则有

$$w' + \frac{1}{x}w + \frac{1}{x^2} = 0, \quad (2分)$$

这是一阶线性 ODE, 解出

$$w(x) = \frac{-\ln x + C}{x}, \quad (3分)$$

也得到 $y(x) = \frac{x}{-\ln x + C}$.(答案 2 分)

(2) 该 ODE 不显含 x. 由 $y'(x_0) \neq 0$, 则 y 在 x_0 附近有逆 y^{-1}. 令 $p(y) = y'(y^{-1}(y))$, 则有 $y''(y^{-1}(y)) = p(y)\frac{dp}{dy}$. 由此可得

$$p\frac{dp}{dy} = f(y) \quad (降阶, 2分).$$

分离变量, 两边积分可得

$$\frac{1}{2}\left(p^2(y) - p_0^2\right) = \int_{p_0}^{p(y)} p dp = \int_{y_0}^{y} f(y) dy.$$

由连续性, 在 y_0 附近 $p(y)$ 为正数, 从而有

$$p(y) = \sqrt{p_0^2 + 2\int_{y_0}^{y} f(s) ds}, \quad (解出p(y), 3分)$$

即有

$$y' = \sqrt{p_0^2 + 2\int_{y_0}^{y} f(s) ds}.$$

对此 ODE 分离变量, 两边积分, 有

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{p_0^2 + 2\int_{y_0}^{y} f(s) ds}} = \int_{x_0}^{x} dx = x - x_0, \quad (得出y(x)满足的方程, 3分)$$

此即所要证明的结论.

□

3 求出微分方程 $y'' + y = f(x)$ 的所有解, 其中 $f(x)$ 是给定的光滑函数.

解答. 齐次方程为 $y'' + y = 0$, 它的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 有两个特征根 $\lambda = \pm i$, 由此可知齐次方程有两个线性无关解

$$\phi_1(x) = \cos x, \quad \phi_2(x) = \sin x.$$

(求出齐次方程的两个线性无关解, 5 分)

用常数变易法求解非齐次方程, 考虑形如 $y_*(x) = C_1(x)\phi_1(x) + C_2(x)\phi_2(x)$ 的解, 只要

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_1'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad (3分)$$

则 y_* 是非齐次方程的解. 具体解出

$$C_1(x) = \int \frac{-\phi_2(x) f(x)}{\phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x)} dx = \int -f(x) \sin x dx, \quad (2分)$$

$$C_2(x) = \int \frac{\phi_1(x) f(x)}{\phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x)} dx = \int f(x) \cos x dx. \quad (2分)$$

所以, 非齐次方程的所有解为

$$y(x) = \left(\int_0^x -f(x) \sin x dx + c_1 \right) \cos x + \left(\int_0^x f(x) \cos x dx + c_2 \right) \sin x. \quad (3分)$$

□

4 设 f 在矩形区域 $[a,b] \times [c,d]$ 上连续, 且有连续的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}$.

(1) 证明: 对任何 $x_0 \in [a,b]$, 有

$$\int_c^d f(x_0, y) dy = \int_c^d f(a, y) dy + \int_a^{x_0} dx \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy.$$

(2) 对每个 $x \in [a,b]$, 定义函数 $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. 证明: $g'(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy$.

解. (1) 方法一. 利用一元函数的 Newton-Leibniz 公式以及二重积分的 Fubini 定理, 可得

$$\begin{aligned} &\int_c^d f(x_0, y) dy - \int_c^d f(a, y) dy \\ = &\int_c^d \left(f(x_0, y) - f(a, y) \right) dy \\ = &\int_c^d \left(\int_a^{x_0} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx \right) dy \quad (5分) \\ = &\int_a^{x_0} dx \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy. \quad (5分) \end{aligned}$$

方法二. 令 $D = [a, x_0] \times [c,d]$, 利用格林公式可得

$$\int_{\partial D^+} f(x,y) dy = \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_a^{x_0} dx \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy. \quad (5分)$$

注意到 ∂D^+ 分成四段, 其中两段水平的边界上 $\int f(x,y)dy$ 为零, 两段竖直的边界可以 y 为参数, 由此可算出

$$\int_{\partial D^+} f(x,y)dy = \int_c^d f(x_0,y)dy - \int_c^d f(a,y)dy, \quad (5分)$$

这就完成了证明.

(2) 对每个 x, 令

$$h(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy,$$

由假设 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 连续, 可知 h 是连续函数. 在 (1) 中我们证明了

$$g(x) = g(a) + \int_a^x h(u)du, \quad (2分)$$

利用微积分基本定理可得(3分)

$$g'(x) = h(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy.$$

□

5 给定 $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$. 对于正数 r, 令 $C(r) = \{(x,y)|(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$. 设 f 在区域 $D(R) = \{(x,y)|(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le R^2\}$ 上是光滑函数, 定义函数 $g(r)$ 为如下的第一型曲线积分

$$g(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C(r)} f(x,y)ds, \quad \forall 0 < r \le R,$$

其中 ds 表示弧长微元.

(1) 利用第 4 题第 (2) 小问号的结论, 证明: 对任何 $0 < r \le R$, 有

$$g'(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C(r)} -f_y(x,y)dx + f_x(x,y)dy,$$

其中 $C(r)$ 取逆时针定向.

(2) 设 $x_0^2 + y_0^2 > R^2$. 计算 $\frac{1}{2\pi R} \int_{C(R)} \ln(x^2+y^2)ds$.

解. (1) 利用 $C(r)$ 的参数化 $x = x_0 + r\cos\theta, y = y_0 + r\sin\theta$(参数化 1 分), 有

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)d\theta. \quad (1分)$$

利用第 4 题第 (2) 小问号的结论, 可得

$$g'(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f_x(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\cos\theta+f_y(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\sin\theta\right)d\theta, \quad (2分)$$

利用前述参数化, 上式可以写成

$$g'(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{C(r)}f_x(x,y)\frac{dy}{r}+f_y(x,y)\frac{-dx}{r}=\frac{1}{2\pi r}\oint_{C(r)}-f_y(x,y)dx+f_x(x,y)dy. \quad (1分)$$

这就完成了证明.

(2) 令 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$. 有条件 $x_0^2+y_0^2>R^2$ 可知 f 在 $D(R)$ 上处处光滑, 且有

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}, \quad f_{xx}=\frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, \quad (1分)$$

特别的, 有 $f_{xx}+f_{yy}$ 在 $D(R)$ 上恒为零(1分). 利用 (1) 的结论以及格林公式, 有

$$\begin{aligned}g'(r)&=\frac{1}{2\pi r}\oint_{C(r)}-f_y(x,y)dx+f_x(x,y)dy\\&=\frac{1}{2\pi r}\iint_{D(r)}(f_{xx}+f_{yy})dxdy\\&=0, \quad (4分)\end{aligned}$$

这表明 $g(r)$ 在 $(0,R]$ 上是常值, 故有

$$\begin{aligned}g(R)&=\lim_{\epsilon\to0+}g(\epsilon)\\&=\lim_{\epsilon\to0+}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_0+\epsilon\cos\theta,y_0+\epsilon\sin\theta)d\theta\\&=f(x_0,y_0) \quad (2分)\\&=\ln(x_0^2+y_0^2).\end{aligned}$$

这就计算出了

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{C(R)}\ln(x^2+y^2)ds=\ln(x_0^2+y_0^2). \quad (答案2分)$$

□

6 考虑 $\mathbf{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ 上的向量场

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{M(x,y,z)^{3/2}},\frac{y}{M(x,y,z)^{3/2}},\frac{z}{M(x,y,z)^{3/2}}\right),$$

其中 $M(x,y,z)=(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2$.

(1) 求 $\mathbf{F}$ 的散度 $\nabla\cdot\mathbf{F}$.

(2) 设 S 是单位球面 $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$, 取指向外面的定向. 计算第二型曲面积分

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{M(x,y,z)^{3/2}}.$$

解. (1) 直接计算可得

$$\partial_x\frac{x}{M(x,y,z)^{3/2}}=\frac{M^{\frac{3}{2}}-x\cdot\frac{3}{2}M^{\frac{1}{2}}M_x}{M^3}=\frac{M-\frac{3}{2}xM_x}{M^{\frac{5}{2}}}\qquad (2分)$$

类似的可算出 $\partial_y\frac{y}{M(x,y,z)^{3/2}}, \partial_z\frac{z}{M(x,y,z)^{3/2}}$. 所以

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F}&=\partial_x\frac{x}{M(x,y,z)^{3/2}}+\partial_y\frac{y}{M(x,y,z)^{3/2}}+\partial_z\frac{z}{M(x,y,z)^{3/2}}\\&=\frac{3M-\frac{3}{2}(xM_x+yM_y+zM_z)}{M^{\frac{5}{2}}}\\&=0,\qquad (3分)\end{aligned}$$

最后一步用到了 Euler 关于齐次函数的等式 $xM_x+yM_y+zM_z=\deg(M)\cdot M=2M$.

(2) 取 $\epsilon>0$ 使得

$$\{(x,y,z)|M(x,y,z)\le 4\epsilon^2\}\subset\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\},$$

令 $V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}\backslash\{(x,y,z)|M(x,y,z)<\epsilon^2\}$, 记

$$S(\epsilon)=\{(x,y,z)|M(x,y,z)=\epsilon^2\},\quad B(\epsilon)=\{(x,y,z)|M(x,y,z)\le\epsilon^2\}.$$

利用 Gauss 公式, 可得

$$\iint_{\partial V}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_V\nabla\cdot\mathbf{F}d\mathrm{vol}=0,\qquad (3分)$$

注意到 $\partial V=S\cup -S(\epsilon)$, 因而有

$$\begin{aligned}\iint_S\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}&=\iint_{S(\epsilon)}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\\&=\iint_{S(\epsilon)}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\epsilon^3}\\&=\frac{1}{\epsilon^3}\iiint_{B(\epsilon)}3d\mathrm{vol}\\&=\frac{3}{\epsilon^3}\mathrm{Vol}(B(\epsilon)).\qquad (3分)\end{aligned}$$

最后, 我们可以通过如下的坐标变换 Φ:

$$u = y + z, \quad v = z + x, \quad w = x + y$$

来计算 $B(\epsilon)$ 的体积.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(B(\epsilon)) &= \iiint_{B(\epsilon)} dxdydz \\
&= \iiint_{u^2+v^2+w^2\le\epsilon^2} |\det J(\Phi^{-1})| dudvdw \\
&= \iiint_{u^2+v^2+w^2\le\epsilon^2} \frac{1}{2} dudvdw \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi\epsilon^3}{3}, \quad \text{(3分)}
\end{aligned}$$

代回之前的式子, 可得

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi. \quad \text{(答案1分)}$$

□

7 设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中光滑的定向曲面, 其定向由各点处的单位法向量

$$\mathbf{n}(x, y, z) = (\mathbf{n}_1(x, y, z), \mathbf{n}_2(x, y, z), \mathbf{n}_3(x, y, z))$$

描述. 我们假设 $\mathbf{n}(x, y, z)$ 在 S 的某个邻域中处处有定义, 是单位长度的, 且关于 (x, y, z) 是光滑变化的. 证明:

$$\oint_{\partial S} (y\mathbf{n}_2 + z\mathbf{n}_3)dx - y\mathbf{n}_1 dy - z\mathbf{n}_1 dz = -\iint_S (y\mathbf{n}_3 - z\mathbf{n}_2)(\mathrm{div}\ \mathbf{n})dS,$$

其中我们把 $\mathbf{n}$ 的分量函数简记为 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, 用 $\mathrm{div}\ \mathbf{n}$ 表示 $\mathbf{n}$ 的散度, 用 dS 表示面积微元, 对 S 的边界 ∂S 赋予边界正定向.

证明: 把所要证明等式的左右两边分别简记为 LHS, RHS. 令

$$\mathbf{F} = (y\mathbf{n}_2 + z\mathbf{n}_3, -y\mathbf{n}_1, -z\mathbf{n}_1).$$

利用 Stokes 公式, 有

$$\mathrm{LHS} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \text{(3分)} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS. \text{(2分)}$$

注意到

$$\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\det\begin{pmatrix}\mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ y\mathbf{n}_2+z\mathbf{n}_3 & -y\mathbf{n}_1 & -z\mathbf{n}_1\end{pmatrix}$$

$=\mathbf{n}_1(-z\partial_y\mathbf{n}_1+y\partial_z\mathbf{n}_1)+\mathbf{n}_2(z\partial_x\mathbf{n}_1+y\partial_z\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+z\partial_z\mathbf{n}_3)+\mathbf{n}_3(-y\partial_x\mathbf{n}_1-\mathbf{n}_2-y\partial_y\mathbf{n}_2-z\partial_y\mathbf{n}_3)$.(3分)

这就把 LHS 化成了第一型曲面积分.

另一方面, 利用

$$\mathrm{div}\ \mathbf{n}=\partial_x\mathbf{n}_1+\partial_y\mathbf{n}_2+\partial_z\mathbf{n}_3,\quad (1分)$$

可以得到 RHS 的具体表达式.

结合这两方面, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{LHS}-\mathrm{RHS}\\ =&\iint_S\left(y(\mathbf{n_1}\partial_z\mathbf{n_1}+\mathbf{n_2}\partial_z\mathbf{n_2}+\mathbf{n_3}\partial_z\mathbf{n_3})-z(\mathbf{n_1}\partial_y\mathbf{n_1}+\mathbf{n_2}\partial_y\mathbf{n_2}+\mathbf{n_3}\partial_y\mathbf{n_3})\right)dS(2分)\\ =&\iint_S\left(\frac{y}{2}\partial_z|\mathbf{n}|^2-\frac{z}{2}\partial_y|\mathbf{n}|^2\right)dS\quad(3分)\\ =&0,(1分)\end{aligned}$$

最后一步用到了 $|\mathbf{n}|^2$ 恒等于 1 这个事实, 这就完成了整个证明. □

6 样卷 3

2 (1) 证明: 微分方程初值问题

$$\begin{cases}y''=y-y^2\\ y(0)=0,\\ y'(0)=1.\end{cases}$$

的解可以表示为

$$\int_0^{y(x)}\frac{1}{\sqrt{1+t^2-\frac{2}{3}t^3}}dt=x.$$

请给出求解初值问题的过程, 注意不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2-\frac{2}{3}t^3}}dt$ 是无法写出解析表达式的.

(2) 给定实数 α. 求解微分方程

$$y''-2\alpha y'+\alpha^2y=f(x),$$

其中 $f(x)$ 是给定的连续函数.

解. (1) 记所求的函数 $y(x)$ 为 f, 设其逆映射为 f^{-1}. 令 $p(y)=y'(f^{-1}(y))$, 则有 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 由此可得

$$\begin{cases} p\frac{dp}{dy}=y-y^2 \\ p(0)=1 \end{cases}$$

(化成一阶 ODE, 2 分)

这是可分离变量的 ODE, 积分可得

$$\int_{p(0)}^{p(y)} pdp=\int_0^y (y-y^2)dy,$$

解得

$$p(y)^2=1+y^2-\frac{2}{3}y^3,$$

由初值条件 $p(0)=1$ 可知应选取 $p(y)=\sqrt{1+y^2-\frac{2}{3}y^3}$ 这一支.(解出 $p(y)$, 3 分)

即有

$$\begin{cases} y'=\sqrt{1+y^2-\frac{2}{3}y^3} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

分离变量, 并两边积分可得

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2-\frac{2}{3}y^3}}=\int_0^x dx,$$

此即

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-\frac{2}{3}t^3}}dt=x.$$

(得到关于 y 的积分方程, 2 分)

(2) 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2=0$, 特征根为二重实根 α (1 分), 故相应齐次 ODE 有两个线性无关解

$$\phi_1(x)=e^{\alpha x},\quad \phi_2(x)=xe^{\alpha x}\quad (1分).$$

利用常数变易法, 只要 $C_1(x),C_2(x)$ 满足

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

则 $y(x)=C_1(x)\phi_1(x)+C_2(x)\phi_2(x)$ 是非齐次 ODE $y''-2\alpha y'+\alpha^2 y=f(x)$ 的解(2 分),. 具体求解可得

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2} \begin{pmatrix} -\phi_2 f \\ \phi_1 f \end{pmatrix}$$

即有

$$C_1'(x)=-xe^{-\alpha x}f(x),\quad C_2'(x)=e^{-\alpha x}f(x),$$

解得

$$C_1(x)=\int -xe^{-\alpha x}f(x)dx,\quad C_2(x)=\int e^{-\alpha x}f(x)dx,\quad (2分)$$

由此可得所求非齐次 ODE 的所有解为

$$y(x)=\left(\int -xe^{-\alpha x}f(x)dx\right)e^{\alpha x}+\left(\int e^{-\alpha x}f(x)dx\right)xe^{\alpha x},\quad (2分).$$

□

3 (1) 设 $\mathbf{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的光滑矢量场. 证明: $\mathbf{A}$ 的旋度场的散度恒等于零.

(2) 考虑 $X=\mathbf{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ 上的矢量场

$$\mathbf{B}(x,y,z)=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right).$$

是否存在 X 上的光滑矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z)$ 使得 $\mathbf{A}$ 的旋度等于 $\mathbf{B}$? 并请说明理由.

解答. (1) $\mathbf{A}$ 的旋度场定义为

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{A}&=\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}\\ &=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\quad (2分)\end{aligned}$$

由此可得 $\mathbf{A}$ 的旋度场的散度为

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}),\quad (2分)$$

由于 P,Q,R 是光滑函数, 它们的二阶偏导不依赖于求偏导的顺序, 可得上式右边的项两两抵消, 因而可得 $\mathbf{A}$ 的旋度场的散度恒等于零.(1 分)

(2) 不存在(1 分). 用反证法, 假设存在 X 上的光滑矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z)$ 使得 $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$. 令 S 为单位球面, 取指向球面外的定向, 则由 Stokes 公式可得

$$\int_{\partial S}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S\nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S},\quad (1分)$$

由 $\partial S=\emptyset$ 可知上式左边等于零(1 分), 但上式右边等于

$$\iint_S\nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\iint\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS=\iint_S\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dS=\iint_S dS=4\pi,\quad (2分)$$

矛盾! 这就证明了不存在 X 上的光滑矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z)$ 使得 $\mathbf{A}$ 的旋度等于 $\mathbf{B}$. □

5 设实数 a,b,c,d 满足 $ad-bc\neq 0$. 对于正数 r, 定义曲线

$$C_r=\{(x,y)|(ax+by)^2+(cx+dy)^2=r^2\},$$

取逆时针定向.

(1) 请给出曲线 C_r 的一个参数化, 并判断此参数化是否与定向相容. 为此, 可能需要用到如下事实: C_r 上每点处的外法方向是沿着 $f(x,y)=(ax+by)^2+(cx+dy)^2$ 的梯度向量的.

(2) 计算第二型曲线积分

$$\int_{C_r}xdy-ydx.$$

(3) 设 $C=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ 是单位圆周, 取逆时针定向. 计算第二型曲线积分

$$\int_C\frac{xdy-ydx}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}.$$

解答. (1) 可逆线性变换

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

将 C_r 同胚成圆周 $u^2+v^2=r^2$. 由此可得 C_r 有参数化 $ax+by=r\cos t, cx+dy=r\sin t$, 即有

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}r\cot t\\r\sin t\end{pmatrix}=\frac{r}{ad-bc}\begin{pmatrix}d\cos t-b\sin t\\-c\cos t+a\sin t\end{pmatrix},\quad (2分)$$

此参数化的速度矢量为

$$\frac{r}{ad-bc}(-d\sin t-b\cos t,c\sin t+a\cos t).$$

另一方面, 每点处 C_r 的外法向量 $\mathbf{w}$ 为 f 的梯度方向

$$\begin{aligned}\nabla f &= (2(ax+by)a+2(cx+dy)c, 2(ax+by)b+2(cx+dy)d) \\ &= 2r(a\cos t + c\sin t, b\cos t + d\sin t).\end{aligned}$$

C_r 逆时针定向的切向量 $\mathbf{e}=(e_1,e_2)$ 是由外法方向 $\mathbf{w}=(w_1,w_2)$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到, 即有 $(e_1,e_2)=(-w_2,w_1)$. 结合前述外法向量的计算, 可知 $\mathbf{e}$ 正比于

$$(-b\cos t - d\sin t, a\cos t + c\sin t). \quad \text{(2分)}$$

这样, 前述参数化与定向相容的充分必要条件是 $ad-bc>0$.(1 分)

(2) 记 $I_r = \int_{C_r} xdy - ydx$. 由 (1) 的结论, 当 $ad-bc>0$ 时, 前述参数化与定向相容, 可得 I_r 等于

$$\begin{aligned}&(\frac{r}{ad-bc})^2\int_0^{2\pi}((d\cos t - b\sin t)(c\sin t + a\cos t) - (-c\cos t + a\sin t)(-d\sin t - b\cos t))\,dt, \quad \text{(2分)} \\ =&(\frac{r}{ad-bc})^2\int_0^{2\pi}(ad-bc)dt \\ =&\frac{2\pi r^2}{ad-bc}.\end{aligned}$$

当 $ad-bc<0$ 时, 前述参数化与定向相反, 可得 I_r 等于 $-\frac{2\pi r^2}{ad-bc}$.

结合这两种情况, 有

$$I_r = \operatorname{sign}(ad-bc)\frac{2\pi r^2}{ad-bc} = \frac{2\pi r^2|ad-bc|}{(ad-bc)^2}.$$

(算出 I_r 的值 3 分, 如果没有考虑到 $ad-bc$ 的符号, 扣 1 分)

(3) 取正数 r 使得

$$\{(x,y)|(ax+by)^2+(cx+dy)^2 \le (2r)^2\} \subset \{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}.$$

考虑平面区域

$$D = \{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}\backslash\{(x,y)|(ax+by)^2+(cx+dy)^2 < r^2\},$$

则 D 的正边界为 $C\cup -C_r$. 利用 Green 公式可得

$$\begin{aligned}&\int_{\partial D}\frac{xdy-ydx}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2} \\ =&\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}\right)dxdy \\ =&\iint_D 0 \\ =&0, \quad \text{(2分)}\end{aligned}$$

从而有

$$\int_C \frac{xdy-ydx}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2} = \int_{C_r} \frac{xdy-ydx}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2} = \frac{1}{r^2}I_r = \frac{2\pi|ad-bc|}{(ad-bc)^2}. \quad (3分)$$

□

6 给定非负整数 a,b,c. 令

$$Q=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}.$$

计算三重积分

$$\iiint_Q x^a y^b z^c dxdydz.$$

解答. 记所要计算的积分为 $I_{a,b,c}$, 答案为

$$I_{a,b,c}=\frac{a!b!c!}{(a+b+c+3)!}.$$

首先, 利用 Fubini 定理可把三重积分化成累次积分:

$$\begin{aligned} I_{a,b,c} &= \int_0^1 x^a dx \int_0^{1-x} y^b dy \int_0^{1-x-y} z^c dz \\ &= \int_0^1 x^a dx \int_0^{1-x} y^b dy \frac{(1-x-y)^{1+c}}{1+c}. \quad (4分) \end{aligned}$$

对固定的 w 以及 b,c, 记

$$F_{b,c}(w)=\int_0^w y^b(w-y)^c dy.$$

利用分部积分, 可知对非负整数 b,c 有如下递推关系:

$$\begin{aligned} F_{b,c+1}(w) &= \int_0^w \left(\frac{y^{b+1}}{b+1}\right)'(w-y)^{c+1}dy \\ &= \left(\frac{y^{b+1}}{b+1}\right)'(w-y)^{c+1}\Big|_0^w - \int_0^w \left(\frac{y^{b+1}}{b+1}\right)(c+1)(w-y)^c(-1)dy \\ &= \frac{c+1}{b+1}F_{b+1,c}(w). \quad (3分) \end{aligned}$$

反复利用此递推关系, 可得

$$\begin{aligned} F_{b,c+1}(w) &= \frac{c+1}{b+1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{b+c+1}F_{b+c+1,0}(w) \\ &= \frac{c+1}{b+1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{b+c+1}\int_0^w y^{b+c+1}dy \\ &= \frac{b!(c+1)!}{(b+c+2)!}w^{b+c+2}. \quad (3分) \end{aligned}$$

代回 $I_{a,b,c}$ 的计算, 有

$$\begin{aligned}
I_{a,b,c} &= \int_0^1 x^a dx \frac{1}{1+c} F_{b,1+c}(1-x) \\
&= \int_0^1 x^a dx \frac{1}{1+c} \frac{b!(c+1)!}{(b+c+2)!}(1-x)^{b+c+2} \\
&= \frac{b!c!}{(b+c+2)!} \cdot F_{a,b+c+1}(1) \quad \text{(2分)} \\
&= \frac{b!c!}{(b+c+2)!} \cdot \frac{a!(b+c+2)!}{(a+b+c+3)!} \\
&= \frac{a!b!c!}{(a+b+c+3)!} \quad \text{(3分)}
\end{aligned}$$

□

7 设 $D = \{(u,v) | u^2 + v^2 \le 1\}$ 是单位圆盘, $f : D \to \mathbf{R}$ 是 D 上的光滑函数且处处大于 1. 定义曲面为

$$S = \{(uf(u,v), vf(u,v), \sqrt{1-u^2-v^2} f(u,v)) | (u,v) \in D\},$$

取指向图形上方的定向. 计算第二型曲面积分

$$I(f) = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

解. 令 T 为 S 关于 Oxy 平面反射所得的曲面, 即

$$T = \{(uf(u,v), vf(u,v), -\sqrt{1-u^2-v^2} f(u,v)) | (u,v) \in D\},$$

取指向图形下方的定向, 这是将 S 的定向关于 Oxy 平面反射所得的定向. 注意到矢量场

$$\mathbf{E}(x,y,z) = (\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})$$

关于 Oxy 平面是反射对称的, 可得

$$\begin{aligned}
I(f) &= \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_T \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \frac{1}{2} \iint_{S \cup T} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \quad \text{(5分)}
\end{aligned}$$

注意到, $S \cup T$ 是封闭曲面, 且原点 $(0,0,0)$ 在此曲面围成的区域内部, 熟知

$$\iint_{S \cup T} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 4\pi, \quad \text{(3分)}$$

这就得到 $I(f) = 2\pi$.(答案 2 分) □