高等微积分第七次作业

1. pf：$k=1$ 时　设 $f(x)=0$ 的 n 个不同零点为 $a_{11} \cdots a_{1n}$

则由 Roll Thm　$\exists a_{21} \in (a_{11}, a_{12})$ 使 $f'(a_{21})=0$

$\cdots$ $\exists a_{2(n-1)} \in (a_{1(n-1)}, a_{1n})$ 使 $f'(a_{2(n-1)})=0$，则 f' 至少有 $(n-1)$ 个零点

数学归纳法，假设 $k=m-1$ 时　$f^{(m-1)}=0$ 至少有 $(n-m+1)$ 个不同零点

记为 $a_{m-1,1}$ $\cdots$ $a_{m-1,n-m+1}$

则由 Roll Thm　$\exists a_{m,1} \in (a_{m-1,1}, a_{m-1,2})$ 使 $f^{(m)}(a_{m,1})=0$

$\cdots$ $\exists a_{m,(n-m)} \in (a_{m-1,n-m}, a_{m-1,n-m+1})$ 使 $f^{(m)}(a_{m,n-m})=0$

则 $f^{(m)}$ 至少有 $(n-m)$ 个不同零点

综上：$\forall\ 1 \le k \le n-1$，$f^{(k)}(x)=0$ 至少有 $(n-k)$ 个不同零点

2、pf：(1) 设 $f(x)=x^{\alpha}$

则 $\exists \xi \in (x,y)$ 使 $f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\frac{y^{\alpha}-x^{\alpha}}{y-x}$

而 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ $\Rightarrow$ $\frac{y^{\alpha}-x^{\alpha}}{y-x}=f'(\xi)=\alpha \xi^{\alpha-1} \in (\alpha x^{\alpha-1}, \alpha y^{\alpha-1})$

$\Rightarrow \alpha x^{\alpha-1}(y-x) < y^{\alpha}-x^{\alpha} < \alpha y^{\alpha-1}(y-x)$

(2) 设 $f(x)=x^{\alpha}$

则 $\exists \xi \in (x,y)$ 使 $f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\frac{y^{\alpha}-x^{\alpha}}{y-x}$

而 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ $\Rightarrow$ $\frac{y^{\alpha}-x^{\alpha}}{y-x}=f'(\xi)=\alpha \xi^{\alpha-1} \in (\alpha y^{\alpha-1}, \alpha x^{\alpha-1})$

$\Rightarrow \alpha y^{\alpha-1}(y-x) < y^{\alpha}-x^{\alpha} < \alpha x^{\alpha-1}(y-x)$

(3) 设 $f(x)=\ln x$

则 $\exists \xi \in (x,y)$ 使 $f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\frac{\ln\frac{y}{x}}{y-x}$

而 $f'(\xi)=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\frac{\ln\frac{y}{x}}{y-x}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi} \in (\frac{1}{y}, \frac{1}{x})$

$\Rightarrow \frac{y-x}{y} < \ln\frac{y}{x} < \frac{y-x}{x}$

3、解：$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ $(\forall k \in \mathbb{Z}_+)$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n} \overset{洛必达}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$

$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)}{n!}=\frac{A}{n!}$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\frac{A}{n!}$

4、解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} \overset{洛必达}{=} \lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}]}{1}$

$=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\lim\limits_{x\to0}\frac{-(1+x)\ln(1+x)+x}{x^2(1+x)}$

$=e\lim\limits_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)-1+1}{2x(1+x)+x^2}=e\lim\limits_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x}=e\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{6x+2}=-\frac{1}{2}e$

$f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}]+\frac{1}{2}e}{x}$

f 在 0 处可导　则 $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+o(x)=e+(-\frac{1}{2}e)x+o(x)=e-\frac{1}{2}ex+o(x)$

$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$　　$\frac{1}{x+1}=1-x+x^2+o(x^2)$

则 $f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e-\frac{1}{2}ex+o(x))(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x+o(x)+\frac{1}{x}-1+x+o(x))}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e-\frac{1}{2}ex+o(x))(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}+o(x))}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{2}e+\frac{1}{4}ex+o(x)+\frac{2}{3}ex-\frac{1}{3}ex^2+o(x^2)+\cdot(x)+o(x^2)+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}e}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{11}{12}ex-\frac{1}{3}ex^2+o(x)}{x}=\frac{11}{12}e-\frac{1}{3}e\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=\frac{11}{12}e.$$

5、解：$f(x)=\tan x \qquad f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}=2f(x)f'(x)$

$f^{(3)}(x)=2[f'^2(x)+f(x)f''(x)] \qquad f^{(4)}(x)=2[2f'(x)f''(x)+f'(x)f''(x)+f(x)f^{(3)}(x)]$

$f^{(5)}(x)=2[2f''^2(x)+2f'(x)f^{(3)}(x)+f''^2(x)+f'(x)f^{(3)}(x)+f'(x)f^{(3)}(x)+f(x)f^{(4)}(x)]$

$f(0)=0 \quad f'(0)=1 \quad f''(x)=0 \quad f^{(3)}(x)=2$

$f^{(4)}(0)=2[0+0+0]=0 \qquad f^{(5)}(0)=2[0+4+0+2+2+0]=16$

则 $f(x)=\tan x=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+o(x^5)$

$=x+\frac{2}{6}x^3+\frac{16}{120}x^5+o(x^5)$

$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$

6、解：$f(x)=\arcsin x$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ．设 $f'(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

设 $v(x)=1-x^2$，$u(x)=x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow v'(x)=-2x \quad v''(x)=-2$，$v(0)=1$；$v'(0)=0 \quad v''(0)=-2$

$v^{(n)}(0)=0 \quad (n\geqslant 3)$

$g^{(n)}(x)=\sum_{[n]\text{的分析}} u^{(k)}_{(v(x))}v^{(|P_1|)}v^{(|P_2|)}\cdots v^{(|P_k|)}$

n为偶数 $g^{(n)}(0)=u^{(\frac{n}{2})}(1)\underbrace{v^{(2)}(0)v^{(2)}(0)\cdots v^{(2)}(0)}_{\frac{n}{2}\text{个}v^{(2)}(0)}\times$分组数

$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1-n}{2}\right)x^{-\frac{n+1}{2}}(-2)^{\frac{n}{2}}\times[(n-1)\times(n-3)\times\cdots 1]$

$=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!!}{2^{n/2}}(-2)^{\frac{n}{2}}\cdot(n-1)!!=[(n-1)!!]^2$

n为奇数 $g^{(n)}(0)=0$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=\begin{cases} g^{(n-1)}(0)=0 & n\text{为偶数},\ n\geqslant 2\\ g^{(n-1)}(0)=[(n-2)!!]^2 & n\text{为奇数},\ n\geqslant 3\end{cases}$$

则 $f(x)=\arcsin x=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

① n为偶数 $f(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{[(n-3)!!]^2}{(n-1)!}x^{n-1}+o(x^n)$

② n为奇数 $n=1$时 $f(x)=x+o(x)$

$n\geqslant 3$时 $f(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{[(n-2)!!]^2}{n!}x^n+o(x^n)$

7、解： $f(x)=\arctan x$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 设 $f'(x)=g(x)=\frac{1}{1+x^2}$

设 $u(x)=\frac{1}{x}$ $v(x)=1+x^2$

$\Rightarrow v'(x)=2x$ $v''(x)=2$

$v(0)=1$ $v'(0)=0$ $v''(0)=2$

$$g^{(n)}(x)=\sum_{\substack{[n]\text{的}\\\text{分拆方式}}} u^{(k)}(v(x))\, v^{(|P_1|)}(x)\, v^{(|P_2|)}(x)\cdots v^{(|P_k|)}(x)$$

n为偶数 $g^{(n)}(0)=u^{(\frac{n}{2})}(1)\underbrace{v^{(2)}(0)\,v^{(2)}(0)\cdots v^{(2)}(0)}_{n/2\text{个}v^{(2)}(0)}\times(n-1)!!$

$=(-1)(-2)\cdots(-\frac{n}{2})\,\cancel{x}^{(-\frac{n}{2}-1)}\quad(2)^{n/2}\times(n-1)!!$

$=(-1)^{\frac{n}{2}}\,(\frac{n}{2})!\,(2)^{n/2}\,(n-1)!!$

$=(-2)^{\frac{n}{2}}\,(\frac{n}{2})!\,(n-1)!!$

$=(-1)^{\frac{n}{2}}\,(n)!!\,(n-1)!!=(-1)^{\frac{n}{2}}n!$

n为奇数 $g^{(n)}(0)=0$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} g^{(n-1)}(0)=0, & n\text{为偶数}\\ g^{(n-1)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{为奇数}\end{cases}$$