n（$n\geq 2$）元谓词的符号化

例　将下列命题符号化：

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

解　本题未指明个体域。故默认为总论域。

出现二元谓词，故引入两个个体变项x与y

令 R(x): x是兔子;　T(y): y是乌龟;

F(x, y): x比y跑得快;

S(x, y): x与y跑得同样快

这4个命题分别符号化为

（1）兔子比乌龟跑得快。

$$(\forall x)(\forall y)(R(x)\land T(y)\to F(x, y))$$

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

$$(\exists x)(R(x)\land(\forall y)(T(y)\to F(x, y)))$$

R(x): x是兔子;　T(y): y是乌龟;

F(x, y): x比y跑得快;

S(x, y): x与y跑得同样快

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快

$$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x)\wedge T(y)\rightarrow F(x,y))$$

（4）不存在跑得同样快的两只兔子

$$\neg(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y)\wedge S(x,y))$$ X

$$\neg(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y)\wedge\neg E(x,y)\wedge S(x,y))$$

$E(x,y)$：x,y是相同的

R(x): x是兔子;　T(y): y是乌龟;
F(x, y): x比y跑得快;
S(x, y): x与y跑得同样快

有些语句的形式化可能有多种形式

“并不是所有的兔子都比乌龟跑的快。”

令$R(x)$：x是兔子，$T(y)$：y是乌龟，$F(x, y)$：x比y跑得快

这句话可形式化为

$$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x) \wedge T(y) \rightarrow F(x, y))$$

也可以形式化为 $(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge T(y) \wedge \neg F(x, y))$

若令$E(x, y)$：x与y跑得同样快, 则还可符号化为(注意与原句有差别)

$$(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge T(y) \wedge E(x, y))$$

例：不管白猫黑猫，抓到老鼠就是好猫

设C(x)：x是猫　　B(x)：x是黑的

W(x)：x是白的　G(x)：x是好的

M(y)：y是老鼠

K(x,y)：x抓住y

命题的表达式为:

$$\forall x\,(\;C(x)\wedge(W(x)\vee B(x))\rightarrow(\exists y(M(y)\wedge K(x,y))\rightarrow G(x)\,)\,)$$

$$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$$

4.4.5 自然数集的形式描述

论域是自然数集，将下列语句形式化：

1. 对每个数， 有且仅有一个相继后元。
2. 没有这样的数， 0是其相继后元。
3. 对除0而外的数，有且仅有一个相继前元。

* 可将这三句话作为建立自然数集合的公理。

引入谓词：$E(x, y)$ 表示 $x = y$,

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元， $f(x) = x+1$。

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$。

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

- 语句1需注意“唯一性”的描述，常用的办法是如果存在两个则它们必相等。
- 即若对每个x都存在y，y是x的相继后元，而且对任一z，如果z也是x的相继后元，那么y和z必相等。

于是对语句1的描述为

$$(\forall x)(\exists y)(\ E(y, f(x)) \wedge (\forall z)(\ E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)\ )\ )$$

对每个数，有且仅有一个相继后元。

引入谓词：E(x, y)表示 $x = y$，

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元，$f(x) = x+1$

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$

关于“唯一性”的一般描述

“唯一性”的一般描述：

常用的办法是：

先表示存在一个，同时如果还能找到另一个的话，则它们一定相等。

一般描述可表述为：

$$(\exists x)(\ P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \rightarrow E(x, y))\ )$$

其中 $E(x, y)$表示 $x = y$。

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

语句 2. 没有这样的数，0是其相继后元。

描述比较简单，即，

不存在这样的x，它的相继后元等于0。可写成

$$\neg(\exists x)E(0, f(x)) \quad 或$$

$$(\forall x)\neg E(0, f(x))$$

引入谓词：$E(x, y)$表示 $x = y$，
函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元，$f(x) = x+1$
函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

语句3. 对除 0 而外的数, 有且仅有一个相继前元。

需注意的是对"除 0 而外"的描述，可理解为如果 $x \neq 0$，则…的形式。

于是语句3可描述为

$$(\forall x)\,(\neg E(x, 0) \rightarrow (\exists y)(E(y, g(x)) \wedge$$

$$(\forall z)(E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z))))$$

除$\neg E(x, 0)$外，与语句1的结构完全相同

$$(\forall x)(\exists y)(\ E(y, f(x)) \wedge (\forall z)(\ E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)\ )\ )$$

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元， $f(x) = x+1$

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$

4.4.6 （续）

同样，“一切事物它或是生物或是非生物”

与“或者一切事物都是生物，或者一切事物都是非生物”

的形式化也是不同的，可分别形式描述为：

$$(\forall x)(A(x)\overline{\vee}B(x))$$

$$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$$

这两个逻辑公式也不等值。

4.4.9 "函数$f(x)$在$[a, b]$上的点x_0处连续"的形式描述

"函数$f(x)$在$[a, b]$上的点x_0处连续"的形式描述（可考虑加一些函数设定）

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \land (\forall x)$$

$$(|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)))$$

P(x, ε): x的绝对值小于ε

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \land (\forall x)$$

$$(P(x - x_0, \delta) \rightarrow P(f(x) - f(x_0), \varepsilon))))$$