《高等微积分 1》第四次习题课材料

1 求下列函数的导函数.

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a})$.

(2) $f(x) = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}$.

(3) $f(x) = u(x)^{v(x)}$, 其中 $u(x), v(x)$ 是可导函数且 $u(x) > 0$.

(4) $f(x) = \ln \ln u(x)$.

(5) $f(x) = \frac{1}{2} \ln |\frac{1-\cos x}{1+\cos x}|$.

(6) $f(x) = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$.

(7) $f(x) = \frac{1}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) e^{ax}$.

2 设函数 f 在 $x = a$ 处的导数为 $f'(a) = L$, 且 $f(a) \neq 0$.

(1) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\ln |f(a + \frac{1}{n})| - \ln |f(a)| \right).$$

(2) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n.$$

3 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $a_n < 0 < b_n, \forall n$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0).$$

4 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$. 令

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n^2}),$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 并利用这个结果计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n^2}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\dfrac{i}{n^2})$.

5 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 并且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A.$$

证明: $f'(0)=A$.

6 定义

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{if } x\neq 0,\\ 0, & \text{if } x=0.\end{cases}$$

证明: f 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导, 但导函数 f' 并不是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 (这个例子说明了可导函数不一定 C^1 光滑).

7 计算 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3-x}$ 的 n 阶导函数.

8 定义

$$g(x)=\begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & \text{if } x\neq 0,\\ 0, & \text{if } x=0.\end{cases}$$

计算它的导函数 $g'(x)$. 证明 g 在 $\mathbf{R}$ 上任意次可导, 并且有 $g^{(n)}(0)=0$.