命题逻辑的基本概念

名词：命题、二值逻辑、命题变项、简单命题（原子命题）、复合命题

合取$\wedge$ 析取$\vee$ 蕴含$\rightarrow$ 双蕴含$\leftrightarrow$ 合式公式Wff

成真赋值 成假赋值

1. 2023年元旦会下雨：是命题

   x大于y：不是命题
2. 合式公式：简单命题、简单命题通过有限次进行五种运算构成的符号串
3. 重言式/永真式、矛盾式/永假式/不可满足式
4. 除非今天心情好，否则我不学习

   今天心情好：p；今天学习：q；原命题$\neg p \rightarrow \neg q$
5.

   x+y=2当且仅当2*(x+y)=4

   - 问题
     - 这是不是一个命题？
     - 可否形式化成 $x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4$
   - 解
     - 不能形式化成$x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4$
     - $x+y=2$ No
     - There exists x and y such that x+y = 2 Yes
     - For all x and all y, x+y = 2 Yes
     - 可形式化为$(\forall x \forall y)(x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4)$
     - 可形式化为$(\exists x \exists y)(x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4)$

   清华大学软件学院 离散数学 103
6. 教材中规定的联结词优先顺序为：

   ()，$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，

   同一优先级的联结词，先出现者先运算。
7. 代入规则：A的**原子命题**可以被替换为某合式公式得到B，如果A为重言式，那么B为重言式

   例：证$(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q)$是重言式：$R \vee \neg R$是重言式，由代入规则，原命题是重言式（不能反过来）
8. 需要考虑无关项

若天不下雨，我就上街；否则在家。

设 P：天下雨。Q ：我上街。R：我在家。

A $(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$

B $(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge\neg(Q\wedge R)$

C $(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\bar{\vee}(P\wedge\neg Q\wedge R)$

D $(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\wedge R)$

命题逻辑的等值和推理演算

等值定理 置换规则 与非↑ 或非↓ 真值函项 对偶式 文字（简单命题P和¬P） 互补对（P和¬P）

推理形式 重言（永真）蕴含 推理演算 归结推理

1. 等价/等值：任意一解释下A和B的真值都相等，则A=B（=关系满足自反、对称、传递）

   公式A=B充分必要条件是$A\leftrightarrow B$是重言式
2. 等值公式
   - 结合律：**单蕴含没有结合律**，双蕴含有结合律
   - 分配律：$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$

     双蕴含没有分配律
   - 等幂律（恒等律，P自己跟自己玩）、吸收律P+PQ=P(P+Q)=P、摩根律、同一律（与T和F连结出来为P）、零律（与T和F连结出来为T/F）、补余律（P跟¬P玩）
3. 其他等值公式
   - 逆否（假言易位）$P\rightarrow Q=\neg Q\rightarrow\neg P$
   - 前提合取$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=Q\rightarrow(R\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$
   - 前提析取$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)=(P\vee Q)\rightarrow R$
   - 双蕴含$P\leftrightarrow Q=(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$
   - 归谬论：(P → Q)∧(P → ¬Q) = ¬P
4. 置换规则：公式A的子公式用等值式置换后A变B，则A=B（与代入规则相比，它用等值式替换，且可以部分替换，**有些类似于对公式变形**）
5. 真值函项：n个命题变元组成的无数合式公式中等值的等价类之代表元；共有2^{2^n}个真值函项（多值逻辑m^{m^n}）
6. 完备的连结词集合：$\{\neg,\wedge,\vee\}$（由任何真值表都可以由这些连结词列写得）；$\{\neg,\wedge\}$ **(** $\neg(\neg P\vee\neg Q)=P\wedge Q$**)**；$\{\neg,\vee\}$

   其他完备集$\{\neg,\rightarrow\}$；$\{\uparrow\}$；$\{\downarrow\}$

7. 对偶式A^*：将$\wedge, \vee, F, T$换成$\vee, \wedge, T, F$

   A⁻：P_i转换成$\neg P_i$

   定理：

   - $\neg(A^*) = (\neg A)^*$，$\neg(A^-) = (\neg A)^-$
   - $\neg A = A^{*-}$（对连结词个数归纳）
   - 若$A = B$，则$A^* = B^*$
   - 若$A \to B$永真，则$B^* \to A^*$
   - A和A⁻同永真，同可满足；¬A和A*同永真，同可满足
8. 主合取范式(最小项)、主析取范式(最大项，标号与数电相反，$P'Q' = M_0$)
9. 哪里人和跑步名次题：都列出来，根据实际约束在运算中化简
10. 永真式的主合取范式为空公式

    矛盾式的主析取范式为空公式
11. 正确的推理形式：前提真，结论必真的推理形式；只需要证明前提的全部成真解释使结论也为真即可

    推理形式正确，等价于前提重言蕴含结论
12. 基本推理公式
    - P ∧Q ⇒ P
    - P ⇒ P∨Q
    - P∧(P→Q) ⇒ Q（分离规则）
    - ¬Q∧(P→Q) ⇒ ¬P（反证法）
    - (P→Q)∧(Q→R) ⇒ P→R（三段论）
13. **推理演算**

    推理规则：1）前提引入 2）结论引用（中间结论可以当前提） 3）代入规则 4）置换规则 5）分离规则

    6）条件证明规则：$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A1 \Rightarrow A_2 \to B$等价，可以引入附加前提

    （从两个方面理解i）$P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R$；ii)$A_2 \to B = \neg A_2 \vee B$，引入$\neg\neg A_2$否定一个，另一个自然成立）

    注：三段论是常用公式；还可以将结论整个放到条件中，归结出矛盾
14. **归结推理**

    建立子句集S，将A∧¬B 化成合取范式(A⇒¬B永真；A∧¬B 必为矛盾式)

    归结法推理规则：$C_1 \wedge C_2 \Rightarrow R(C_1, C_2)$

命题逻辑的公理化

1. 初始符号、形成规则（何为合式公式）
2. 定义

   (1) (A →B) 定义为(¬A ∨ B)。
   (2) (A ∧ B) 定义为¬(¬A ∨ ¬B)。
   (3) (A↔B)定义为((A→B)∧(B→A)) 。
3. 公理

   ⊢(P∨P)→P

   ⊢P→(P∨Q)

   ⊢(P∨Q)→(Q∨P)

├ (Q→R)→((P∨Q)→(P∨R))

4. 推理规则

   代入规则、置换规则（只能置换定义）、分离规则、括号省略规则（起到∨结合律的作用）

5. 定理

   ├ (Q→R) →((P→Q) → (P→R))

   ├ P → P

   ├ ¬ P ∨ P

   ├ P ∨ ¬P

   ├ P → ¬¬P

   ├ (P → Q) → (¬Q → ¬P)

   ├ P→ (Q → P ∧ Q)

   ├ P ∨ ¬P ∨ ¬Q

谓词逻辑的基本概念

个体词（主词）n元谓词 n-k元谓词（n个个体变元中有k个约束变元） 个体常项 个体变项 约束变元 自由变元 辖域

一阶谓词逻辑（量词仅作用于个体变元）

1. 谓词：个体域到{T,F}的映射

   量词：全称量词（全称命题）、存在量词（特称命题）

   变元易名规则：$(\forall x)P(x)=(\forall y)P(y)$

2. 量词优先级高于逻辑联结词

3. 所有的......都是......：$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

   有......是：$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$

   注意$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)(Q(y)\wedge R(y)))$

4. 在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同；未指明个体域时应该用总论域

5. 在无限域下，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。

6. 设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

   设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为假，则称A为不可满足的公式。

   设A为一个谓词公式，若至少存在一个解释使A为真，则称A为可满足的公式

   任意解释：**在给定的个体域下**，自由个体变项x、谓词变项P、函数f均是可变的(一个不可满足的谓词逻辑在另一个论域下有可能普遍有效)

   注：$(\exists x)P(x)$，$(\forall x)P(x)$可满足，取P(x)为x是运动的/x是大学生，$(\exists x)P(x)$均成立(总论域)

谓词逻辑的等值和推理演算

1. $(\forall x)(P(x)\rightarrow q)=(\exists x)P(x)\rightarrow q$

   $(\exists x)(P(x)\rightarrow q)=(\forall x)P(x)\rightarrow q$

   $(\forall x)(q\rightarrow P(x))=q\rightarrow(\forall x)P(x)$

   $(\exists x)(q\rightarrow P(x)\wedge q)=q\rightarrow(\exists x)P(x)$

2. $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$

$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$

3. 变元易名：目的是使每个变元性质唯一

   (∀x)A(x) ∨B(x) ⇔ (∀t) A(t) ∨ B(x) ⇔ (∀t)(A(t)∨ B(x))

4. 前束范式：

   (1) 所有量词都位于该公式的最左边；
   (2) 所有量词前都不含否定词；
   (3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，则称A为前束范式。

   注：可以用等值式用等值式，用不了(如∀和∨，直接变量易名)

5. ∀前束范式（Skolem标准形）存在定理：任一公式A均可化为Skolem标准形A'；(A不可满足⇔B不可满足)

6. 推理规则的推理演算

   全称量词消去规则、全称量词引入规则、存在量词消去规则、存在量词引入规则

   注意，从左边向右消去，($(\forall x)(\exists y)P(x,y) \nRightarrow (\forall x)P(x,a)$)；对于存在来说，如果前面有对任意，那么此刻存在会成为函数f

   注意，存在引入时，存在不能是函数f

7. 归结推理法

集合

1. 集合的表示：外延表示法（穷举）、内涵表示法（包括归纳定义法：G={ x | x=1 ∨$(\exists y)(y \in G \wedge x = y)$ })

2. 罗素悖论：{ H = { x| x 是一个集合 ∧ x∉ x}

3. 运算符优先级：

   一元运算($-A, P(A), \bigcup A, \bigcap A$) > 二元运算($-, \cup, \cap, \oplus, \times$) > 集合关系运算符($=, \subseteq, \subset, \in$) > 逻辑连结词和运算符

4. 证明常用恒等式

   $A \cup (A \cap B) = A$

   $A \cap (A \cup B) = A$

   $A \cup (B - A) = A \cup B$

5. 奇妙证明

   证明$A \cap (A \cup B) = A, \quad$用$(A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) = A \cup (\varnothing \cap B)$

   证明$A \cup B = A \Rightarrow A - B = \varnothing$，用$A - B = (A \cup B) - B$

   证明$A - B = \varnothing \Rightarrow A \cup B = B$，用$B = B \cup \varnothing = B \cup (A - B)$

   证明$A \cup B = A \cup C, \quad A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

   证明$((A - B) \oplus (A - C) = \varnothing) \Leftrightarrow (A - B = A - C)$

6. 注意：没有$-(A - B) = B - A$！！！！！

7. 传递集合举例$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

8. 空集的基数为0

9. 容斥原理证明

   $|A_1| = |A_1 \cap (A_2 \cup -A_2)| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 - A_2|$

$|A_2| = |A_2 \cap (A_1 \cup -A_1)| = |A_2 \cap A_1| + |A_2 - A_1|$

$|A_1 \cup A_2| = |(A_1 \cap (A_2 \cup -A_2)) \cup (A_2 \cap (A_1 \cup -A_1)| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 - A_2| + |A_2 - A_1|$

10.

$$\boxed{\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}|-A_1 \cap -A_2 \cap \ldots \cap -A_n| &= N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n| \\ &= N - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i \cap A_j| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\ &+ (-1)^{n}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|\end{aligned}}$$

11. 欧拉函数Φ(n)是求小于n且与n互素的数的个数：
$\Phi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)\ldots(1 - 1/p_k)$

12.

$$0 = \phi$$

$$1 = 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\phi\}$$

$$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0,1\} = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\} = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

$$\ldots$$

$$n+1 = n^+ = n \cup \{n\} = \{0,1,\cdots,n\}.$$

关系

1.

小于等于关系 L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_{\subseteq}$定义：

L_A={<x,y>| $x,y \in A \wedge x \le y$}, $A \subseteq R$， R为实数集合

D_A={<x,y>| $x,y \in A \wedge x$整除y}, $A \subseteq Z^*$, Z^*为非0整数集

$R_{\subseteq}$={<x,y>| $x,y \in A \wedge x \subseteq y$}, A是集合族.

- A上的真包含关系可定义为：

$$R_{\subset} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathrm{A} \wedge x \subset y\}$$

恒等关系、全域关系和空关系

- 对任意的集合A，

  A上的**恒等关系**I_A定义为 $I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$

  A上的**全域关系**(全关系)E_A定义为

$$E_A = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A\}$$

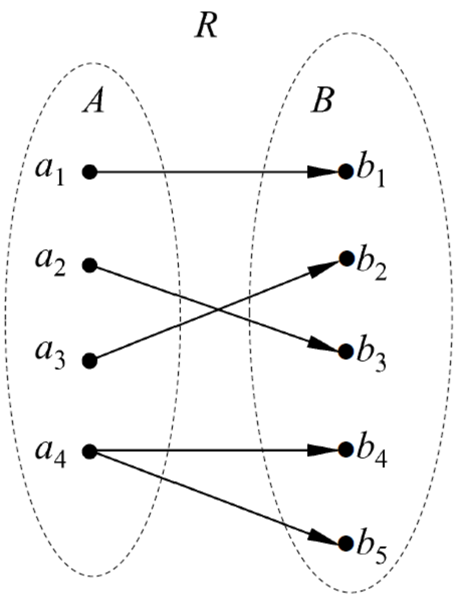
- 对任意的集合A，

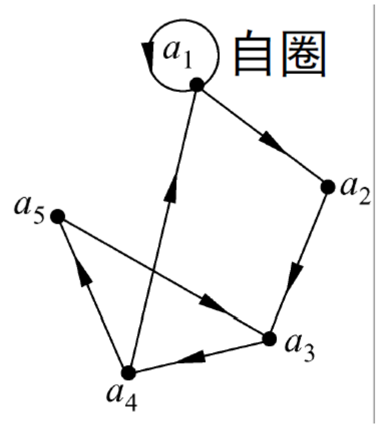
  空集Φ是$A \times A$的子集，定义为A上的空关系。

2. |A|=n，则可在A上定义2^{n^2}个关系

3. 关系的表示方法：集合表示法、关系矩阵、关系图

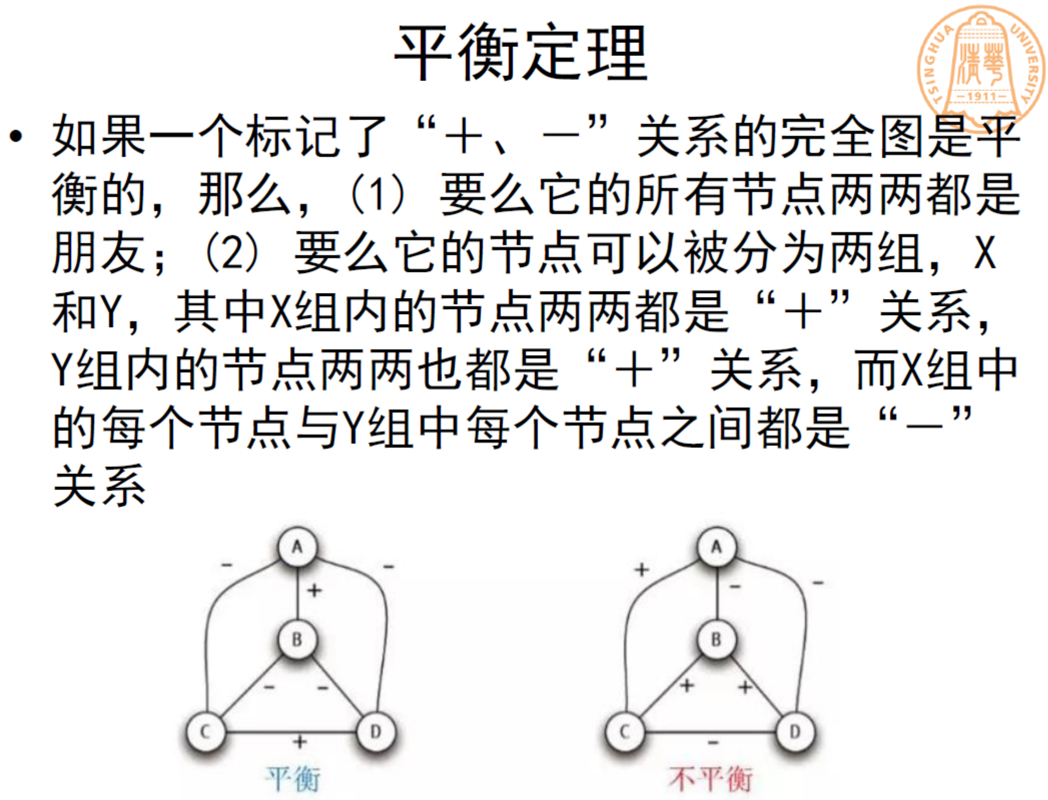
关系图





4. $S \circ R$关系矩阵$M[S \circ R] = M(R) \times M(S)$，其中乘法是逻辑与

5.



6.

运算 \ 性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

7.

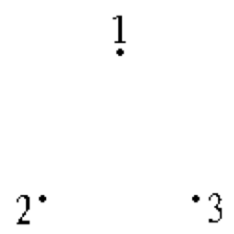
A是非空的

几个主要关系的性质

关系 \ 性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A	√	×	√	√	√
全域关系 E_A	√	×	√	×	√
A上的空关系 Φ	×	√	√	√	√
N上的整除关系	√	×	×	√	√
包含关系 $\subseteq$	√	×	×	√	√
真包含关系 $\subset$	×	√	×	√	√

8. 注意两个空关系的区别

- $X=\{1,2,3\}$, $R_5=\varnothing$
  - 反自反的，对称的，反对称的，可传递的



- 若$X=\varnothing$，X上的空关系
  - 自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的

9. 自反的、传递的、对称的闭包是：tsr(R)=trs(R)=rts(R)

10. 等价关系到划分有一一对应关系

等价关系与划分有一一对应关系

- 划分到等价关系转化：A是一非空集合，S是A的一个划分，下述关系必定是一个等价关系

$$R=\{<x,y>\mid x,y\in A \land x,y\text{在}S\text{的同一划分}\}$$

- 等价关系到划分的转化：设A是非空集合，R是A上的等价关系。R的商集是A的划分

11. 第二类stirling数
12. 定理： 第二类Stirling数满足下面的递推关系：

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1),\qquad (n>1,m\geq 1).$$

$$(a)S(n,0)=0,$$

$$(b)S(n,1)=1,$$

$$(c)S(n,2)=2^{n-1}-1,$$

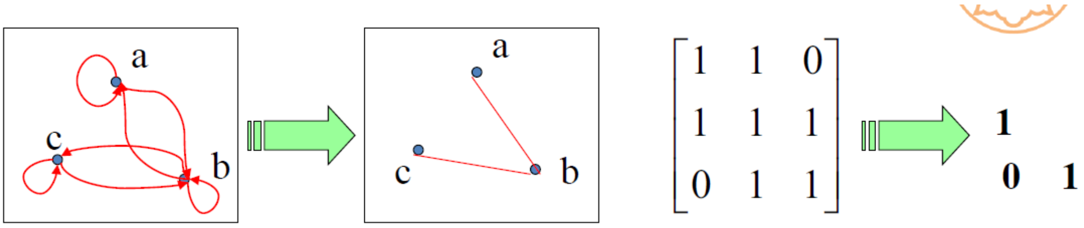
$$(d)S(n,n-1)=C(n,2).$$

$$(e)S(n,n)=1.$$

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

等价关系数：$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)$

13. 相容关系的表示图和表示矩阵



14. <ℕ，≤>和<P(A),⊆>都是偏序集
15. 实数集合上的小于等于关系不是良序集：子集不一定有限，故可能不存在最小元
16. $\varnothing_{\varnothing}=\{\varnothing\}$

函数

1.

下面哪个关系不是函数

A 从$\varnothing$到$\varnothing$

B $\varnothing \to B$

C $A \to \varnothing$ （A不为$\varnothing$）

- A_B 是函数集合（从A到B的所有函数的集合）
- $\varnothing_\varnothing = \{\varnothing\}$ ∵从$\varnothing$到$\varnothing$的函数只有$f = \varnothing$, $0^0 = 1$
- *$\varnothing$是函数，称其为空函数*。
- $\varnothing_B = \{\varnothing\}$ $\varnothing \to B$，$f = \varnothing$， $n^0 = 1$
- $A_\varnothing = \varnothing$ $(A \neq \varnothing)$ $A \to \varnothing$，f 不存在，$0^m = 0$
  ∵对于$x \in A$ 找不到 $y \in \varnothing$, 满足 $A \to \varnothing$。

$\varnothing$:$\varnothing$→B是单射的，$\varnothing$:$\varnothing$→$\varnothing$是双射的.

$A_\varnothing = \varnothing$，$\varnothing_A = \varnothing_\varnothing = \{\varnothing\}$

2.
- 例7：泛函F: $R \to R_R, F(a) = (f(x) = x + a)$.
  或写成F: $a \mapsto [x \mapsto x + a]$. 于是
- $F(2)$对应函数 $x \mapsto x + 2$.
- $F(2)(3) = 3 + 2 = 5$.

3.
- (a, b) 是开集
- [a, b] 不是开集
- 有些集合既不是开集也不是闭集，如实数上的半开区间 [0, 1)。
- R和$\varnothing$都是开集，也都是闭集
- Q和R-Q都不是开集，也都不是闭集

集合的基数

- 例7： $[0,1] \approx (0,1)$，构造双射函数
- $f:[0,1] \to (0,1)$,

1. $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 当x=0\\ \frac{1}{2} & 当x=1\\ \frac{x}{4} & 当x=2^{-n}, n=1,2,3,\ldots\\ x & 当x取其它值\end{cases}$$

其他双射函数？

- 当 $x = 2^{-n}$ 时，多乘一个¼