

高微 2 第四周习题课材料

- 1 (1) 给定 $\alpha > 4$, 判断函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^{\alpha}x^2}$ 在 \mathbf{R} 上是否一致收敛.
- (2) 给定 $a > 0$, 判断函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{1}{3^n x})$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是否一致收敛.
- (3) 判断函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{1}{3^n x})$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是否一致收敛.
- (4) 给定 $a > 0$, 判断函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $[a, +\infty)$ 上是否一致收敛.
- (5) 判断函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 \mathbf{R} 上是否一致收敛.

2 设 f 在 \mathbf{R} 上有连续的导函数. 定义函数序列

$$g_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (1) 证明: 对任何有界闭区间 $[a, b]$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $f'(x)$.
- (2) 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx = f(b) - f(a).$$

3 考虑函数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos(n\pi x^2)$.

- (1) 证明: 当 $0 < L < 3$ 时, 函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos(n\pi x^2)$ 在 $(-L, L)$ 上一致收敛.
- (2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} S(x)$.

4 考虑函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x + \frac{1}{n})^n$.

(1) 确定 f 的定义域 D .

(2) 证明: 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x + \frac{1}{n})^n$ 在 D 上不一致收敛.

(3) 证明: $f \in C(D)$.

5 (1) 求函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 的收敛域.

(2) 证明: 和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

(3) 证明: $S(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导.

6 判断下列幂级数的收敛半径, 收敛区间 (收敛域).

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-1)^{2n}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n$, 其中 a, b 是给定的正数.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x^{n^2}$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n$.

7 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r \in (0, +\infty)$. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ 的收敛半径.

8 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

9 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$