第二章：命题逻辑的等值和推理演算

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

主观题 10分

Setting

上节课有什么疑问吗？欢迎投稿或弹幕

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

为了方便大家预习，同时提高课上听讲的效率，**每周三下午**会上传下一次课的往年课件。

微信小程序里帮助答疑可以加分

请同学们完善网络学堂的个人信息，如email等

主要内容

- 2.1 等值定理
- 2.2 等值公式
- 2.3 命题公式与真值表的关系
- 2.4 联接词的完备集
- 2.5 对偶式
- 2.6 范式
- 2.7 推理形式
- 2.8 基本的推理公式
- 2.9 推理演算
- 2.10 归结推理法

复习：2.5 对偶式

对偶式

将给定的命题公式 $\boldsymbol{A}$中出现的$\vee$, $\wedge$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{F}$ 分别以$\wedge$, $\vee$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{T}$ 代换，得到公式 $\boldsymbol{A}^*$，则称 $\boldsymbol{A}^*$是公式 $\boldsymbol{A}$的对偶式，或说 $\boldsymbol{A}$和 $\boldsymbol{A}^*$互为对偶式。

复习：有关对偶式的定理

在以下定理2.5.1~定理2.5.6中，记

$$A = A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$$A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

复习：有关对偶式的定理

- 定理2.5.1　　数学归纳法

  $$\neg(A^*) = (\neg A)^*, \quad \neg(A^-) = (\neg A)^-$$

- 定理2.5.2

  $$(A^*)^* = A, \quad (A^-)^- = A$$

- 定理2.5.3　　数学归纳法

  $$\neg A = A^{*-}$$ （摩根律的另一种形式）

复习：有关对偶式的定理(续)

- 定理2.5.4
  若$A = B$，必有$A^* = B^*$（对偶原理）
- 定理2.5.5
  若$A \to B$永真，必有$B^* \to A^*$永真
- 定理2.5.6
  A与A^-同永真，同可满足；
  $\neg A$与A^*同永真，同可满足。

代入规则

- 定理2.5.3
  $\neg A = A^{*-}$

Setting

若A为重言式,则A*

A 重言式

B 矛盾式

C 可满足式

D 以上都不是

Submit

A为重言式 $\Rightarrow$ A*必为矛盾式

- 若A为重言式,则A*必为矛盾式.

  如果$A = \mathrm{T}$，由对偶原理可知：$A^* = (\mathrm{T})^* = \mathrm{F}$

- 例如,

  定理2.5.4
  若$A = B$，必有$A^* = B^*$（对偶原理）

  设 $A = P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q))$,

  则 $A^* = P \wedge (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q))$

  $$A \Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee 0) \Leftrightarrow P \vee \neg P \Leftrightarrow 1,$$

  $$\boldsymbol{A^* \Leftrightarrow 0.}$$

复习：2.6 **范式**

2.6.1 **文字与互补对**

命题变项及其否定式(如P与$\neg P$）统称**文字**。且P与$\neg P$ 称为**互补对**。

2.6.2 合取式

由文字的合取所组成的公式称为**合取式**。由有限个文字构成的合取式称作简单合取式。

2.6.3 析取式

由文字的析取所组成的公式称为**析取式**。由有限个文字构成的析取式称作简单析取式。

复习：析取式与合取式

定理

(1)一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式(一个互补对)。

(2)一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式(一个互补对)　。

复习：2.6 范式

2.6.4 析取范式

析取范式是形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

的公式，其中$A_i\ (i = 1,\ldots,n)$为合取式。

2.6.5 合取范式

合取范式是形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

的公式，其中$A_i\ (i = 1,\ldots,n)$为析取式。

复习：2.6.6 范式存在定理

任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式。但命题公式的合取范式和析取范式并不唯一。

复习：求范式的具体步骤

- 利用等值公式中的等值式和蕴涵等值式将公式中的→、↔用联结词¬、∧、∨来取代；

$$P \to Q = \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$ (多用于求析取范式)

$$P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$$ (多用于求合取范式)

- 利用摩根律将否定号¬移到各个命题变元的前端；
- 利用结合律、分配律、吸收律、等幂律、交换律等将公式化成其等值的析取范式和合取范式。

由于范式一般不唯一，所以有必要进一步研究主范式。

复习:主范式——极小项和极大项

2.6.7 极小项

n 个命题变项 P_1, P_2, ..., P_n 组成的合取式:

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$$

其中 $Q_i = P_i$ ，或$\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称合取式$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$为极小项，并以$m_i$表示。

复习：主范式——极小项和极大项

2.6.8 极大项

n 个命题变项$P_1, P_2, \ldots, P_n$组成的析取式：

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$$

其中 $Q_i = P_i$ ，或$\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称析取式$Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$为极大项，并以$M_i$ 表示。

复习：主析取范式和主合取范式

设由n 个命题变项构成的析取范式中所有的合取式都是极小项，则称该析取范式为**主析取范式**（仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式）。

设由n个命题变项构成的合取范式中所有的析取式都是极大项，则称该合取范式为**主合取范式**（仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式）。

复习：主析取和主合取范式定理

任一含有n个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这n个命题变项的主析取范式。

任一含有n个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这n个命题变项的主合取范式。

复习：主范式——极小项的性质

（1）任一含有n 个命题变项的公式，所有可能的极小项的个数和该公式的解释个数相同，都是2^n。

P_1	P_2	A	
0	0	1	m_0
0	1	1	m_1
1	0	0	M_1
1	1	1	m_3

（2）排列顺序与P_1，P_2，$\cdots$，P_n一致；

（3）每个极小项只在一个解释下为真。

（4）极小项两两不等值，并且 $m_i \wedge m_j = \mathrm{F}$（$i \neq j$）。

（5）任一含有n 个命题变项的公式，都可由k 个($k \leqslant 2^n$)极小项的析取来表示。

A是由k个极小项的析取来表示，剩余2^n-k极小项的析取是$\neg A$

（6）恰由2^n个极小项的析取构成的公式必为重言式。即

$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = \mathrm{T}$

复习：主范式——极大项的性质

(1) 任一含有n 个命题变项的公式，所有可能的极大项的个数与该公式的解释个数相同，都是2^n。

P_1	P_2	A	
0	0	1	m_0
0	1	1	m_1
1	0	0	M_1
1	1	1	m_3

(2) 排列顺序与P_1, P_2, …, P_n一致；

(3) 每个极大项只在一个解释下为假。

(4) 极大项两两不等值，并且 $M_i \vee M_j = \mathrm{T}$ （$i \neq j$）。

(5) 任一含有n个命题变项的公式，都可由k个($k \leq 2^n$)极大项的合取来表示。

A是由k个极大项的合取来表示，剩余2^n-k极大项的合取是$\neg A$

(6) 恰由2^n个极大项的合取构成的公式必为矛盾式。即

$$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = \mathrm{F}$$

复习：填满变项的简便方法

$$
\begin{aligned}
& \neg P \vee Q \\
= \ & m^{0x} \vee m^{x1} \\
= \ & m_0 \vee m_1 \vee m_3
\end{aligned}
$$

0 0

0 1 —— 0 1

0 1

1 1

复习极小项和极大项的关系

- $\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)补}$　　$\neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)补}$

公式	名称
$\neg P_1 \land \neg P_2$	m_0
$\neg P_1 \land P_2$	m_1
$P_1 \land \neg P_2$	m_2
$P_1 \land P_2$	m_3

公式	名称
$\neg P_1 \lor \neg P_2$	M_0
$\neg P_1 \lor P_2$	M_1
$P_1 \lor \neg P_2$	M_2
$P_1 \lor P_2$	M_3

P_1	P_2	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1 \land \neg P_2$	m_0	$P_1 \lor P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1 \land P_2$	m_1	$P_1 \lor \neg P_2$	M_2
1	0	$P_1 \land \neg P_2$	m_2	$\neg P_1 \lor P_2$	M_1
1	1	$P_1 \land P_2$	m_3	$\neg P_1 \lor \neg P_2$	M_0

$\neg m_0 = M_{(2^2-1-0)} = M_3$

复习：主析取范式与主合取范式转换

- 主范式之间的转换

令 $A=\vee m_{il}$ 则 $\neg A=\vee m_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})}$

$A=\wedge M_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})补}=\wedge_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\}补)}$

令 $A=\wedge M_{il}$ 则 $\neg A=\wedge M_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})}$

$A=\vee_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})补}=\vee_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\}补)}$

A是由k个极大项的合取来表示，剩余2^n-k极大项的合取是$\neg A$

$\neg m_i=M_{(2^n-1-i)}=M_{(i)补}$ $\neg M_i=m_{(2^n-1-i)}=m_{(i)补}$

单选题 1分

Setting

$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$ 求主析与主合取范式

A 主析范式 = $\bigvee_{2,3,4,5,7}$ 主合取范式 = $\bigwedge_{1,6,7}$

B 主析范式 = $\bigvee_{2,3,4,5,7}$ 主合取范式 = $\bigwedge_{1,5,7}$

C 主析范式 = $\bigvee_{2,3,4,5,6}$ 主合取范式 = $\bigwedge_{1,6,7}$

D 主析范式 = $\bigvee_{2,3,4,5,7}$ 主合取范式 = $\bigwedge_{1,4,7}$

Submit

复习：主范式的求法与举例

综合举例

$(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$ 求主析与主合取范式

原式 $=\neg(P\vee\neg Q)\vee((\neg P\wedge(Q\wedge\neg R))\vee(P\wedge(\neg Q\vee R)))$

$=(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge R)$

$=m^{01X}\vee m^{010}\vee m^{10X}\vee m^{1X1}$

$\therefore$ 主析范式 $=\vee_{2,3,4,5,7}$

复习：主范式的求法与举例

主析范式 $= \bigvee_{2,3,4,5,7}$

主合范式 $= \bigwedge_{(\{0,1,\ldots7\}\ -\ \{2,3,4,5,7\}\text{补})}$

$= \bigwedge_{(\{0,1,\ldots,7\}\ -\ \{5,4,3,2,0\})}$

$= \bigwedge_{1,6,7}$

复习：2.6 空公式 （补充）

求$P \vee \neg P$的主析取和主合取范式

主析取范式： $P \vee \neg P$

主合取范式： **空公式**

结论：永真式的主合取范式为空公式

矛盾式的主析取范式为空公式

复习：2.7 推理形式

推理形式：

将以自然语句描述的推理关系引入符号，抽象化并以条件式的形式表示出来得到推理形式，推理形式由**前提**和**结论**部分组成。

前提真，结论必真的推理形式为正确的推理形式。

重言蕴含：

给定两个公式 A，B，如果当A取值为真时，B 就必取值为真，便称 **A重言（永真）蕴涵B**，或称B 是A的逻辑推论。并用符号$A \Rightarrow B$表示。

复习：2.7.3 重言蕴含几个结果

(1) 如果$A \Rightarrow B$成立，若A为重言式，则B也是重言式。

(2) 若 $A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$同时成立，必有$A = B$; 反之亦然。

(3) 若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow C$同时成立，则有$A \Rightarrow C$

(4) 若 $A \Rightarrow B$且$A \Rightarrow C$同时成立，则$A \Rightarrow B \wedge C$ ($A \Rightarrow B \vee C$? √)

(5) 若$A \Rightarrow C$且$B \Rightarrow C$同时成立，则$A \vee B \Rightarrow C$

- $(P \to R) \wedge (Q \to R) = (P \vee Q) \to R$ 前提析取合并

复习：重言蕴含的充要条件

定理2.8.1

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 **$A \rightarrow B$ 为重言式**。

定理2.8.2

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 **$A \wedge \neg B$ 为矛盾式**。

复习：基本推理公式

1. $P \land Q \Rightarrow P$，但 $P \lor Q \not\Rightarrow P$

2. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$　　1式的直接推论 $P \land \neg Q \Rightarrow P$

3. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$　　1式的直接推论 $P \land \neg Q \Rightarrow \neg Q$

4. $P \Rightarrow P \lor Q$

5. $\neg P \Rightarrow P \to Q$　　2式的逆否，4式的推论。

6. $Q \Rightarrow P \to Q$　　3式的逆否，4式的推论。

7. $\neg P \land (P \lor Q) \Rightarrow Q$　　非 P，而 $P \lor Q$ 又成立，只有Q成立

8. $P \land (P \to Q) \Rightarrow Q$　　*假言推理，分离规则，7式的变形

9. $\neg Q \land (P \to Q) \Rightarrow \neg P$　7式的变形　$\dfrac{P}{Q}$　$\dfrac{Q}{\neg P}$

复习：基本推理公式

10. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$ *三段论

11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$ 类似10式

12. $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$ 10式的推论

13. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$ 10式的推论

14. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee \neg S) \Rightarrow \neg P\vee \neg R$ 9式的推论

15. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$ P=F时左=右，P=T时右=T

16. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ P=T时左=右，P=F时右=T

复习：2.9 推理演算

- 出发点：

  直观地看出由前提A到结论B 的推演过程，且便于在谓词逻辑中使用。

- 方法

  （1）引入几条推理规则

  （2）利用基本推理公式

从前提A_1，A_2，…，A_n出发，配合使用推理规则和基本推理公式，逐步推演出结论B。

复习：2.9 推理演算

主要的推理规则：

（1）前提引入规则；推理过程中可随时引入前提

（2）结论引入规则；中间结论可作为后续推理的前提

（3）代入规则；仅限于重言式中的命题变项

（4）置换规则；利用等值公式对部分公式进行置换

（5）分离规则；由A及$A \to B$成立，可将B分离出来

（6）条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \to B$等价

$$P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R$$

教材 例3: 证明 $(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow S) \Rightarrow S\vee R$

证明：

1. $P\vee Q$ 前提引入
2. $\neg P\rightarrow Q$ 1 置换
3. $Q\rightarrow S$ 前提引入
4. $\neg P\rightarrow S$ 2、3 三段论
5. $\neg S\rightarrow P$ 4置换
6. $P\rightarrow R$ 前提引入
7. $\neg S\rightarrow R$ 5、6三段论
8. $S\vee R$ 7置换

由该例可见，将$P\vee Q$置换成$\neg P\rightarrow Q$更便于推理

推理演算举例：

$$(\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S))\wedge((Q\rightarrow P)\vee\neg R)\wedge R \Rightarrow (P\leftrightarrow Q)$$

1. $(Q\rightarrow P)\vee\neg R$	**前提引入**
2. $R\rightarrow(Q\rightarrow P)$	1**置换**
3. R	**前提引入**
4. $Q\rightarrow P$	2、3**分离**
5. $\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S)$	**前提引入**
6. $(R\vee S)\rightarrow(P\rightarrow Q)$	5**置换**
7. $R\vee S$	3 + **基本公式4** **($P\Rightarrow P\vee Q$)**
8. $P\rightarrow Q$	6、7 **分离**
9. $P\leftrightarrow Q$	4、8**根据双蕴含的定义**

2.10 归结法

- 出发点：
  基于推理规则的方法，规则与公式较多，技巧较高。
  能否仅建立一条推理规则，便于机器证明与程序实现。

- 理论依据：定理2.8.2

  $A \Rightarrow B$ 成立当且仅当$A \wedge \neg B$ 是矛盾式。

2.10 归结法

- 归结法步骤：

1. 从$A \wedge \neg B$ 出发（欲证$A \Rightarrow B$，等价于证 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式）

2. 建立子句集S，将$A \wedge \neg B$ 化成合取范式：

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$$

其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

$$S = \{ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n \}$$

3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。

4. 直至归结出矛盾式（□）。

2.10 归结法

- 归结法推理规则

设　　子句1　　$C1 = L \vee C1'$

子句2　　$C2 = \neg L \vee C2'$

(其中L和¬L为互补对)

$C1 = \neg L \rightarrow C1'$

$C2 = \neg C2' \rightarrow \neg L$　　因而

新子句　R（C1，C2）$= C1' \vee C2'$

2.10 归结法

- 归结法推理规则 (续)

$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1, C2)$需证明。

$C1 = L \vee C1'$

$C2 = \neg L \vee C2'$

证明:

$C1 \wedge C2 \to C1' \vee C2'$为永真式（定理2.8.1）

设在任一解释下，C1和C2均为真

若$L = T$，则$\neg L = F$，从而必有$C2' = T$（$\because$ C2为真）

若$L = F$，则$\neg L = T$，从而必有$C1' = T$（因为C1为真）

综合上述均有$C1' \vee C2'$为真

因此，$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1, C2)$

2.10 归结法 证明举例

例1：证明 $(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$

证明：1. 先将$(P \rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$ 化成合取范式

$$(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$$

2. 建立子句集 $S = \{\neg P \vee Q,\ P,\ \neg Q\}$

$$S = \{\neg P \vee Q,\ \ P,\ \ \neg Q\}$$

归结过程:

(1) $\neg P \vee Q$

(2) P

(3) $\neg Q$

(4) Q (1) (2)归结

(5) □ (3) (4)归结

归结出空子句□(矛盾式) 证明结束。

例2: 用归结法证明 $((P\to Q)\wedge(Q\to R)) \Rightarrow (P\to R)$

证明：

先将 $(P\to Q) \wedge (Q\to R) \wedge \neg(P\to R)$ 化成合取范式

$(\neg P\vee Q) \wedge (\neg Q\vee R) \wedge P \wedge \neg R$

建立子句集 $S = \{ \neg P\vee Q,\ \neg Q\vee R,\ P,\ \neg R \}$

$$S = \{ \neg P \vee Q,\ \neg Q \vee R,\ P,\ \neg R \}$$

归结过程:

(1) $\neg P \vee Q$

(2) $\neg Q \vee R$

(3) P

(4) $\neg R$

(5) $\neg P \vee R$　　(1) (2)归结

(6) R　　(3) (5)归结

(7) □　　(4) (6)归结

归结出空子句□(矛盾式)　证明结束。

例3 $(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(Q\rightarrow(R\rightarrow A))\Rightarrow P\rightarrow(Q\rightarrow A)$

证明：先将

$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(Q\rightarrow(R\rightarrow A))\wedge\neg(P\rightarrow(Q\rightarrow A))$化为合取范式。

$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(Q\rightarrow(R\rightarrow A))\wedge\neg(P\rightarrow(Q\rightarrow A))$

$=(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg R\vee A)\wedge P\wedge Q\wedge\neg A$。

建立子句集

$S=\{\neg P\vee\neg Q\vee R,\ \neg Q\vee\neg R\vee A,\ P,\ Q,\ \neg A\}$

$S=\{\neg P \vee \neg Q \vee R, \neg Q \vee \neg R \vee A, P, Q, \neg A\}$

- 归结过程

（1） $\neg P \vee \neg Q \vee R$

（2） $\neg Q \vee \neg R \vee A$

（3） P

（4） Q

（5） $\neg A$

（6） $\neg Q \vee R$　　　（1）（3）归结

（7） $\neg R \vee A$　　　（2）（4）归结

（8） R　　　（4）（6）归结

（9） $\neg R$　　　（5）（7）归结

（10） □　　　（8）（9）归结

2.10 归结法 证明举例

补充：推理规则应用题，构造下面推理的证明：

例1：如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。

或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。

A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。

因此，小李没向B队投球。

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。
或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。
A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。
因此，小李没向B队投球。

解：先将简单命题符号化。

P：小张守第一垒；

Q：小李向B队投球；

R：A队取胜；

S：A队成为联赛第一名。

前提：$(P \wedge Q) \rightarrow R$，$\neg R \vee S$，$\neg S$，$P$

结论：$\neg Q$

前提：$(P\wedge Q)\rightarrow R$ $(\neg(P\wedge Q)\vee R)$，$\neg R\vee S$，$\neg S$，P

结论：$\neg Q$

证明：

(1) Q	前提引入
(2) $\neg R\vee S$	前提引入
(3) $\neg S$	前提引入
(4) $\neg R$	(2) (3)归结
(5) $\neg(P\wedge Q)\vee R$	前提引入
(6) $\neg(P\wedge Q)$	(4) (5)归结
(7) $\neg P\vee\neg Q$	(6)置换
(8) P	前提引入
(9) $\neg Q$	(7)(8)归结
(10) $Q\wedge\neg Q$	(1)(9)归结

第二章小结:主要内容

2.1 等值定理

2.2 等值公式

2.3 命题公式与真值表的关系

2.4 联接词的完备集

2.5 对偶式

2.6 范式

2.7 推理形式

2.8 基本的推理公式

2.9 推理演算

2.10 归结推理法

第二章小结与教学要求

1. 掌握和理解命题公式等值的概念，掌握命题公式等值的判别方法；
   - 列真值表
   - 公式的等价变换
   - 主范式
2. 熟悉基本的等值公式，能在理解的基础上熟记并能在等值演算中灵活使用；
3. 理解命题公式与真值表的关系，能够由给定的真值表写出相应的命题公式；

第二章小结与教学要求

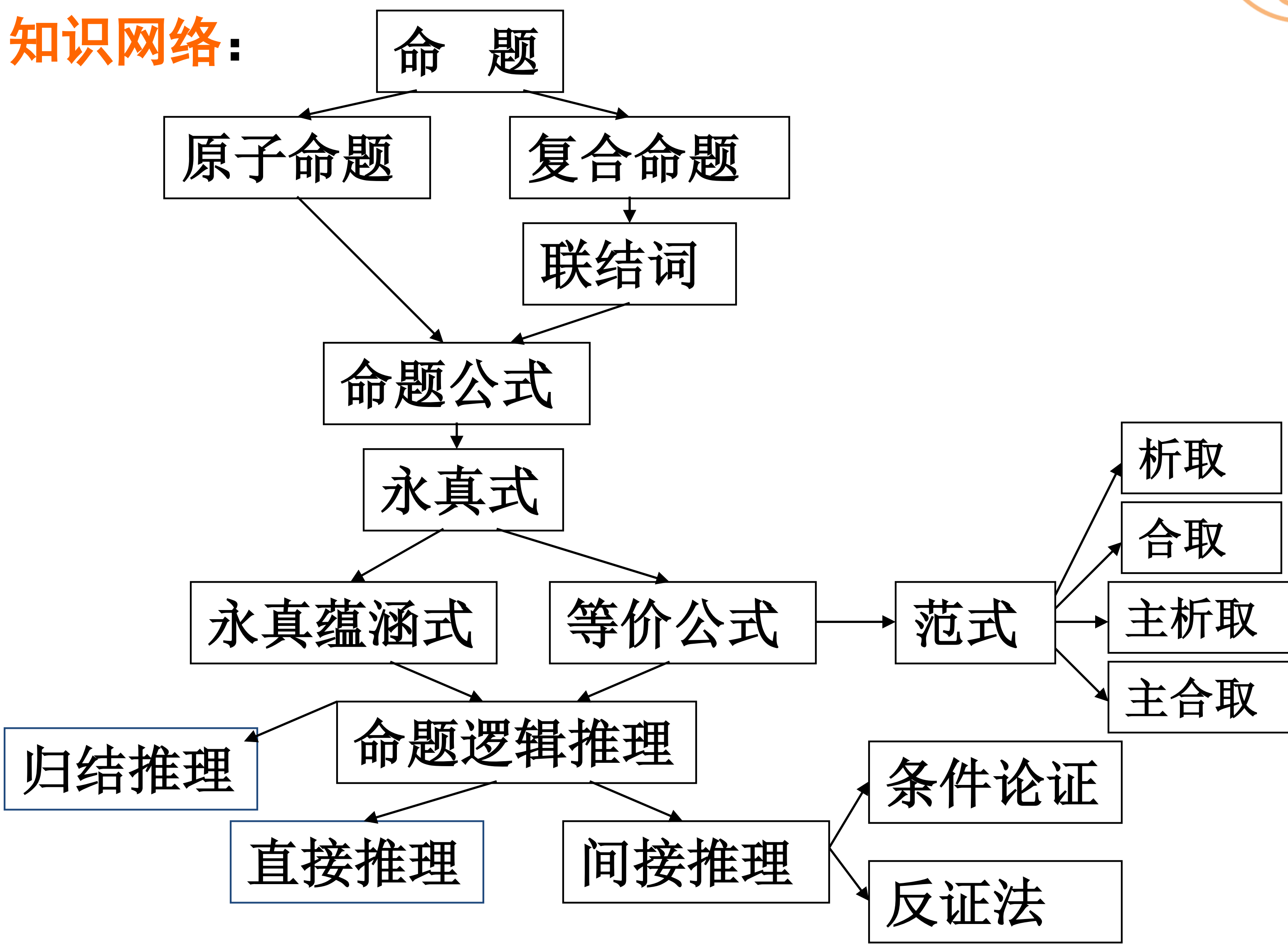
4. 了解联结词完备集的概念，掌握判别联结词完备集的方法；
5. 理解范式的概念和范式定理，能够将命题公式熟练地化成相应的主析取范式和主合取范式；
6. 理解推理形式的基本结构，掌握重言蕴涵的概念和主要结果；

第二章小结与教学要求

7. 熟悉基本的推理公式，掌握推理公式的不同证明方法；
   – $A \rightarrow B$ 是重言式、$A \wedge \neg B$ 为矛盾式、真值表法、$\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法、解释法
8. 理解基本的推理规则，掌握使用推理规则进行推理演算的方法；
9. 理解归结推理规则，掌握用归结推理法证明的方法。

第一章和第二章　小结

知识网络：



第三章 命题逻辑的公理化

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

教材说……

- 前两章是对命题逻辑从语义出发做了较直观的、不严谨地、非形式化的解释性地讨论。
- 而建立了公理系统的命题逻辑，面貌就改观了，从理论上提高了一步，使对命题逻辑讨论有了坚实的基础。

第三章主要内容

- 本章介绍**命题逻辑的公理化**，是命题逻辑理论的系统化和抽象化，主要内容概括如下：
- 介绍命题逻辑的公理系统的概念和基本结构，并以具有代表性的罗素公理系统为例，详细介绍一个命题逻辑公理系统的构成。
- 通过定理推演的实例，给出使用公理系统进行定理证明的过程和方法。
- 此外，对公理系统的完备性、可靠性和演绎定理做简要的叙述。

一切能证明的都要证明

德国 G.Frege (1848-1925)

“数学的本质就在于

一切能证明的都要证明。”

1879年建立了第一个谓词演算系统

发表《计算概念》一书

问题1：为什么要建立或引入命题逻辑的公理系统

- 重言式——命题逻辑研究的重点。
- 重要的重言式是逻辑规律。
- 如何掌握这些逻辑规律，以便从整体上理解和掌握命题逻辑，而不仅仅停留在对部分公式所作的直观解释性的讨论上。
- 需要掌握重言式所揭示的逻辑规律的全体，将它们作为一个整体来考虑。
- 需要系统、全面、严谨地研究等值式和推理式

3.1 公理系统(axiom system)的结构

问题2：
什么叫做公理系统？

公理系统的概念

- 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做公理系统（**axiom system**）。
- 公理系统自成体系，是一个抽象符号系统。又称之为形式系统。
- 似曾相识？

公理系统的例子——Euclid几何学

- Euclid几何学就是一个典型的公理系统。
  - 公元前300年欧几里得的《几何原本》
  - 希尔伯特1899年发表的著作《几何基础》

- Euclid平面几何学的公理体系由结合、顺序、合同、平行、连续五条公设和五组公理构成。

公理和公设

- 公理是在任何数学学科里都适用的不需要证明的基本原理
- 公设则是几何学里的不需要证明的基本原理，就是现代几何学里的公理。

命题逻辑的公理系统

- 命题演算的重言式可组成一个严谨的公理系统，它是从一些作为初始命题的重言式（公理）出发，应用明确规定的推理规则，进而推导出一系列重言式（定理）的演绎体系。
- 命题逻辑的公理系统是一个抽象符号系统，不再涉及到真值。

问题3：

公理系统是怎样构成的？

主要包括哪几部分？

公理系统的结构

1. 初始符号

公理系统内允许出现的全体符号的集合。

2. 形成规则

公理系统内允许出现的合法符号序列的形成方法与规则

3. 公理

精选的最基本的重言式，作为推演其它所有重言式的依据。

4. 变形规则

公理系统所规定的推理规则。

5. 建立定理

所有的重言式和对它们的证明。

3.2 命题逻辑的公理系统

具有代表性的命题逻辑的公理系统

系统名称	年代	公理总条数	彼此独立的条数
Russell公理系统	1910	5	4
Frege公理系统	1879	6	3
Hilbert—Bernays	1934	15	
王浩算法	**1959**	1 (10条变形规则)	
自然演绎系统		0 (5条变形规则)	

罗素(Russell)公理系统

1. 初始符号

$A, B, C, \ldots$（大写英文字母, 表示命题）

$\neg, \vee$（表示联结词）

( )（圆括号）

$\vdash$（断言符），写在公式前，如 $\vdash A$表示A是所要肯定的，或说A是永真式。

由Frege最先引入。

罗素(Russell)公理系统

2. 形成规则

(1) 符号π是合式公式（π为命题，如$A, B, C\ldots$）

(2) 若A, B是合式公式，则$(A \vee B)$是合式公式

(3) 若A是合式公式，则$\neg A$是合式公式。

(4) 只有符合(1) (2) (3)的符号序列才是合式公式。

罗素(Russell)公理系统

3. 定义

(1) $(A \to B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$。

(2) $(A \wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A \vee \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$定义为$((A \to B) \wedge (B \to A))$ 。

罗素(Russell)公理系统

4. 公理

公理1　$\vdash((P\vee P)\rightarrow P)$（重言律）　**等幂律**

公理2　$\vdash(P\rightarrow(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3　$\vdash((P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P))$ (类似析取交换律）

公理4　$\vdash((Q\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R)))$

基本推理公式15

如果y<z,那么x+y<x+z

$$\boxed{15.\ (Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))}$$

罗素(Russell)公理系统

5. 变形(推理)规则

- **代入规则**

　　如果 $\vdash A$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$（将合式公式A中出现的符号π处处都代以合式公式B）。

- **分离规则**

　　如果 $\vdash A$， $\vdash A\rightarrow B$，那么 $\vdash B$。

- **置换规则**

　　定义的左右两边可互相替换。设公式A，替换后为B，则如果 $\vdash A$，那么 $\vdash B$。

罗素(Russell)公理系统

6. 定理的推演

定理的证明必须依据公理或已证明的定理，同时证明的过程（符号的变换过程）必须依据变形规则。

定理推演举例

公理1 $\vdash((P\vee P)\rightarrow P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P\rightarrow(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R)))$

定理3. 2. 1

定理3.2.1 $\vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$

证明：

(1) $\vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow(P\vee Q\rightarrow P\vee R)$ 公理4

(2) $\vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow(\neg P\vee Q\rightarrow\neg P\vee R)$ (1)代入$\frac{P}{\neg P}$

(3) $\vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ 定义(1)

证毕

(1) $(A\rightarrow B)$ 定义为 $(\neg A\vee B)$。

(2) $(A\wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A\vee\neg B)$。

(3) $(A\leftrightarrow B)$定义为$((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$。

三段论原则

一个简便的用三段论的方法

(1) $\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$　　定理3.2.1

(2) $\vdash (Q \to R)$　　前提成立的话

(3) $\vdash (P \to Q) \to (P \to R)$　　(1) (2)分离

(4) $\vdash (P \to Q)$　　前提成立的话

(5) $\vdash P \to R$

- **代入规则**

　　如果 $\vdash A$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$（将合式公式A中出现的符号π 处处都代以合式公式B）。

- **分离规则**

　　如果 $\vdash A$， $\vdash A \to B$，那么 $\vdash B$。

- **置换规则**

　　定义的左右两边可互相替换。设公式A，替换后为B，则如果 $\vdash A$，那么 $\vdash B$。

公理1 $\vdash((P\vee P)\to P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P\to(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\to(Q\vee P))$ （类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R)))$

定理3. 2. 2

$\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$ 定理3.2.1

定理3.2.2 $\vdash P\to P$

证明：

(1) $\vdash P\to P\vee Q$ 公理2

(2) $\vdash P\to P\vee P$ (1)代入$\frac{Q}{P}$

(3) $\vdash P\vee P\to P$ 公理1

(4) $\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$ 定理3.2.1

(5) $\vdash(P\vee P\to P)\to((P\to P\vee P)\to(P\to P))$ (4)代入$\frac{Q}{P\vee P}$，$\frac{R}{P}$

(6) $\vdash(P\to P\vee P)\to(P\to P)$ (3), (5)分离

(7) $\vdash P\to P$ (2), (6)分离

证毕

定理3. 2. 3

定理3.2.3 $\vdash \neg P \vee P$

证明：

(1) $\vdash P \rightarrow P$ 定理3.2.2

(2) $\vdash \neg P \vee P$ (1) 定义1

证毕

(1) $(A \rightarrow B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$。

(2) $(A \wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A \vee \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$定义为$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ 。

公理1 $\vdash((P\vee P)\to P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P\to(P\vee Q))$

（v引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\to(Q\vee P))$ (类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R)))$

定理3. 2. 4

定理3.2.3 $\vdash\neg P\vee P$

定理3.2.4 $\vdash P\vee\neg P$

证明：

(1) $\vdash(P\vee Q)\to(Q\vee P)$ 公理3

(2) $\vdash(\neg P\vee P)\to(P\vee\neg P)$ (1) 代入$\frac{P}{\neg P},\frac{Q}{P}$

(3) $\vdash\neg P\vee P$ 定理3.2.3

(4) $\vdash P\vee\neg P$ (2) (3) 分离

证毕

定理3. 2. 5

定理3.2.4 $\vdash P \vee \neg P$

定理3.2.5 $\vdash P \rightarrow \neg\neg P$

证明：

(1) $\vdash P \vee \neg P$　　定理3.2.4

(2) $\vdash \neg P \vee \neg\neg P$　　(1) 代入$\dfrac{P}{\neg P}$

(3) $\vdash P \rightarrow \neg\neg P$　　(2) 定义1

证毕

(1) $(A \rightarrow B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$。

(2) $(A \wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A \vee \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$定义为$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ 。

定理证明的思路

1. 找出合适的公理或已证的定理；
2. 选择适当的代入做符号变换；
3. 设法将$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ 的结论部分变成欲证的内容。

公理1 $\vdash((P\vee P)\to P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P\to(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\to(Q\vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R)))$

定理3.2.7

定理3.2.7 $\vdash(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$

证明： $\vdash(\neg P\vee Q)\to(\neg\neg Q\vee\neg P)$

(1) $\vdash P\to\neg\neg P$ 定理3.2.5

(2) $\vdash Q\to\neg\neg Q$ (1)代入$\frac{P}{Q}$

(3) $\vdash(Q\to R)\to(P\vee Q\to P\vee R)$ 公理4

(4) $\vdash(Q\to\neg\neg Q)\to(\neg P\vee Q\to\neg P\vee\neg\neg Q)$ (3)代入$\frac{R}{\neg\neg Q},\frac{P}{\neg P}$

(5) $\vdash\neg P\vee Q\to\neg P\vee\neg\neg Q$ (2)(4)分离

$(5) \vdash \neg P \vee Q \to \neg P \vee \neg\neg Q$

公理1 $\vdash((P\vee P)\to P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P\to(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\to(Q\vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R)))$

定理3.2.7

(6) $\vdash P\vee Q \to Q\vee P$ 公理3

(7) $\vdash \neg P\vee\neg\neg Q \to \neg\neg Q\vee\neg P$ (6)代入$\frac{P}{\neg P},\frac{Q}{\neg\neg Q}$

(8) $\vdash (Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$ 定理3.2.1

(9) $\vdash (\neg P\vee\neg\neg Q \to \neg\neg Q\vee\neg P)\to$

$((\neg P\vee Q \to \neg P\vee\neg\neg Q)\to(\neg P\vee Q\to\neg\neg Q\vee\neg P))$

(8)代入$\frac{P}{\neg P\vee Q},\frac{Q}{\neg P\vee\neg\neg Q},\frac{R}{\neg\neg Q\vee\neg P}$

(10) $\vdash (\neg P\vee Q \to \neg P\vee\neg\neg Q)\to(\neg P\vee Q\to\neg\neg Q\vee\neg P)$

(7)(9)分离

(11) $\vdash \neg P\vee Q\to\neg\neg Q\vee\neg P$ (5)(10)分离

(12) $\vdash (P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$ (11)定义1

$\vdash (\neg P\vee Q)\to(\neg\neg Q\vee\neg P)$

补充定理3.2.8：$\vdash P \to (Q \to P \land Q)$

证：

（1）$\vdash P \lor \neg P$　　定理3.2.4

（2）$\vdash (\neg P \lor \neg Q) \lor \neg(\neg P \lor \neg Q)$　　(1)代入$\dfrac{P}{\neg P \lor \neg Q}$

（3）$\vdash (\neg P \lor \neg Q) \lor (P \land Q)$　　(2) 定义2

（4）$\vdash \neg P \lor \neg Q \lor (P \land Q)$　　括号省略规则

（5）$\vdash P \to (Q \to P \land Q)$　　(4) 定义1和结合律

证毕

(1) $(A \to B)$ 定义为 $(\neg A \lor B)$。

(2) $(A \land B)$ 定义为$\neg(\neg A \lor \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$定义为$((A \to B) \land (B \to A))$ 。

括号省略规则

- 最外面的一对括号可以省略
- 教材中规定的**联结词优先顺序**为：

  ( )，$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，

- $(P \vee Q) \vee R$ 可以写作 $P \vee Q \vee R$

补充定理3.2.9：$\vdash P \vee \neg P \vee \neg Q$

- **证明：**

(1) $\vdash P \to P \vee Q$	公理2
(2) $\vdash P \vee \neg P \to P \vee \neg P \vee Q$	(1)代入 $\dfrac{P}{P \vee \neg P}$
(3) $\vdash P \vee \neg P$	定理3.2.4
(4) $\vdash P \vee \neg P \vee Q$	(2) (3)分离

公理系统

- 罗素公理系统
- $Q \vee Q \rightarrow Q$
- $Q \rightarrow Q \vee R$
- $Q \vee R \rightarrow R \vee Q$
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee R \rightarrow Q \vee R)$

- 弗雷格公理系统
- $Q \rightarrow (R \rightarrow Q)$
- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$
- $(Q \rightarrow R) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q)$
- $\neg\neg Q \rightarrow Q$
- $Q \rightarrow \neg\neg Q$

- 卢卡西维茨公理系统
- $Q \rightarrow (R \rightarrow Q)$
- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
- $(\neg Q \rightarrow \neg R) \rightarrow (R \rightarrow Q)$

3.3 公理系统的完备性和演绎定理

- 问题：

  是否所有的定理都可由公理系统推导出来？（完备性）

  非重言式或不成立的公式是否也可推导出来？（可靠性）

3.3.1 公理系统的完备性

- 公理系统的完备性是指，是否所有的重言式或所有成立的定理都可由所建立的公理系统推导出来。
- 形象地说，完备性是指所建立的系统所能推演出的定理少不少。

3.3.2 公理系统的可靠性

- 公理系统的可靠性是指，非重言式或者不成立的公式是否也可由所建立的公理系统推导出来。
- 形象地说，可靠性是指所建立的系统所能推演出的定理**多不多**。
- 不具备可靠性的系统是不能使用的。

命题逻辑的公理系统具有以下性质

- **语义完全性（公理系统的完备性）**

  任一重言式在命题逻辑的公理系统中都是可证的。即重言式是定理。

- **语义无矛盾性（相容性）**

  公理系统必须不含有矛盾。

- **命题演算的可判定性**

  任给一个公式，存在一种机械的方法在有穷步内判定该公式是否为定理。

证明：所建立的公理系统是完备的

设A是任一重言式，需说明它在公理系统中是可以证明的（定理），即 $\vdash A$ 成立

可将A写成与之等值的合取范式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

其中每个A_i都是析取式，

∵A是重言式，故每个Ai亦为重言式

每个A_i必可表为$\pi \vee \neg \pi \vee B$的形式，

π是命题变项。

若Ai为重言式，则它必含一个互补对

反证法：令$A_i = B_1 \vee B_2 \vee \ldots\ldots \vee B_m$

$P_1, \ldots, P_n$是出现在A_i中的所有的命题变项，则$B_i = P_j$或$\neg P_j$

假设 A_i 中不存在互补对，则一定存在一个解释I_k，使得 $B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_m = F$， 矛盾。

因此$\mathrm{A_i}$一定存在一个互补对，可以表示为$\pi \vee \neg\pi \vee B$

证明：所建立的公理系统是完备的

由公理系统

（1） $\vdash P \vee \neg P$ （定理3.2.4）

（2） $\vdash P \vee \neg P \vee Q$ （定理3.2.9）

从而有 $\vdash A_i$ （$i=1,\ldots,n$） (2) 与 $\pi \vee \neg \pi \vee B$ 的形式相同

又依 $\vdash P \to (Q \to P \wedge Q)$（补充定理3.2.8）

由分离规则有 $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$

$\vdash \mathbf{P \to (Q \to P \wedge Q)}$

$\vdash \mathbf{A_1 \to (A_2 \to A_1 \wedge A_2)}$ (代入$\dfrac{P}{\mathbf{A_1}}, \dfrac{Q}{\mathbf{A_2}}$)

$\vdash \mathbf{A_1 \wedge A_2}$

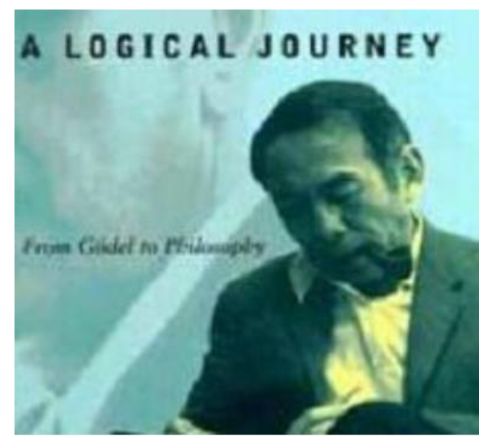
… …

第三章主要内容（续2）

- 介绍命题逻辑的另一公理系统——王浩算法；
- 给出该算法的具体结构；
- 举例说明使用该算法进行定理推演的过程；

王浩算法：定理证明自动化系统

王浩算法是利用计算机来实现定理证明的机械化方法，由美籍华裔科学家王浩于1959年提出。



王浩算法及其影响（一）

- 1958年，王浩编写了三个处理一阶逻辑的程序，其中包括一些当时未解决的问题。
- 程序用**SAP**语言（一种汇编语言）编写，
- 在**IBM 704**机器上实现。
- 王浩使用该程序，将数学原理（**Principia Mathematica)**一书中一阶逻辑部分的全部定理（共约**350**条），在不到**9**分钟内证明完毕。

Seven (Flies) in **One Blow**

H. Wang, "Toward Mechanical Mathematics," in *IBM Journal of Research and Development*, vol. 4, no. 1, pp. 2-22, Jan. 1960.

The gallant tailor: seven (flies) in one blow.

IBM 704: 220 theorems (in the propositional calculus) in three minutes.

Hao Wang

Toward Mechanical Mathematics

Abstract: Results are reported here of a rather successful attempt at proving all theorems, totalling near 400, of *Principia Mathematica* which are strictly in the realm of logic, viz., the restricted predicate calculus with equality. A number of other problems of the same type are discussed. It is suggested that the

王浩算法及其影响（二）

我真希望，在Whitehead和我浪费了十年时间用手算来证明这些定理之前，就知道有这种可能性。我愿相信，演绎逻辑中的一切都能由机器来完成。

—— **B.Russell(1872-1970，英国)**

1950年Nobel文学奖获得者

《西方哲学史》《人类的知识—它的极限和范围》

《我的心路历程》《Principia Mathematica》作者

王浩算法及其影响（三）

Turing机器首次用类似计算机的模型进行阐述，始见于王（浩）的论文中。该文所包含的结果，如用过去的方式来表示将会困难得多。

—— M. Minsky

美国MIT计算机系教授，人工智能创始人之一

1969年Turing奖获得者

代表作《The Society of Mind》

王浩算法及其影响（四）

1972年美国洛克菲勒大学授予Godel名誉学位，王浩在授予仪式上为Godel致贺词。

1977年10月，王浩应邀在中科院做了6次关于数理逻辑的学术讲演，讲演内容的中译本《数理逻辑通俗讲话》于1983年由科学出版社出版(校图书馆有此书)。

王浩算法：定理证明自动化系统

作为命题逻辑的一个公理系统，王浩算法的结构组成与罗素系统类似，下面重点给出与罗素系统的主要差别：

王浩算法与罗素系统的主要差别

(1) 初始符号中的联结词扩充为5个常用联结词，分别是
$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$；

为方便描述推理规则和公理，引入公式串$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$。

(2) 定义了相继式。即，如果α和β都是公式串，则称
$\alpha \xrightarrow{s} \beta$是相继式。其中$\alpha$为前件, β为后件；

前件：“,” − ∧　后件：“,” − ∨

$\alpha \xrightarrow{s} \beta$为真，记为$\alpha \overset{s}{\Rightarrow} \beta$

王浩算法与罗素系统的主要差别

（3）公理只有一条：如果

公式串α和β的公式都只是命题变项A，B，

…，$\alpha \; s\Rightarrow \beta$是公理（为真）的充分必要条件是$\alpha$和$\beta$中至少含有一个相同的命题变项；

（4）变形（推理）规则共有10条，分别包括5条前件规则和5条后件规则；

王浩算法与罗素系统的主要差别

(5) 定理推演的过程将所要证明的定理写成相继式形式；

然后反复使用变形规则，消去全部联结词以得到一个或多个无联结词的相继式

若所有无联结词的相继式都是公理，则定理得证，否则定理不成立。

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \to B$

变形规则（前件规则1–3）

前件规则：

$\neg\Rightarrow$　　如果$\alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow X, \gamma$

　　　　那么$\alpha, \neg X, \ \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

$\wedge\Rightarrow$　　如果X，Y，$\alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

　　　　那么$\alpha, X \wedge Y, \ \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

$\vee\Rightarrow$　　如果$X, \alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$ 而且$Y, \alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

　　　　那么$\alpha, X \vee Y, \ \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

若$A\Rightarrow C$且$B\Rightarrow C$同时成立，则$A \vee B\Rightarrow C$

变形规则（前件规则4–5）

(4) 若 $A \Rightarrow B$且$A \Rightarrow C$同时成立，则$A \Rightarrow B \wedge C$

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \to B$

前件规则：

$\to\Rightarrow$ 如果$Y, \alpha, \beta \ s\Rightarrow \gamma$

而且$\alpha, \beta \ s\Rightarrow X, \gamma$

那么$\alpha, X \to Y, \beta \ s\Rightarrow \gamma$

$\leftrightarrow \Rightarrow$ 如果X，Y，$\alpha, \beta \ s\Rightarrow \gamma$

而且$\alpha, \beta \ s\Rightarrow X, Y, \gamma$

那么$\alpha, X \leftrightarrow Y, \beta \ s\Rightarrow \gamma$

若$A \Rightarrow C$且$B \Rightarrow C$同时成立，则$A \vee B \Rightarrow C$

变形规则（后件规则1-3）

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$

若 $A \Rightarrow B$且$A \Rightarrow C$同时成立，则$A \Rightarrow B \wedge C$

后件规则：

$\Rightarrow\neg$　　如果$X, \alpha \; s\Rightarrow \beta, \gamma$
　　　　那么$\alpha \; s\Rightarrow \beta, \neg X, \gamma$

$\Rightarrow\wedge$　　如果 $\alpha \; s\Rightarrow X, \beta, \gamma$, 而且 $\alpha \; s\Rightarrow Y, \beta, \gamma$
　　　　那么 $\alpha \; s\Rightarrow \beta, X \wedge Y, \gamma$

$\Rightarrow\vee$　　如果 $\alpha \; s\Rightarrow X, Y, \beta, \gamma$
　　　　那么 $\alpha \; s\Rightarrow \beta, X \vee Y, \gamma$

变形规则（后件规则4–5）

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$

若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$ 同时成立，则 $A \Rightarrow B \wedge C$

后件规则：

$\Rightarrow\rightarrow$ 如果 $X, \alpha \underset{s}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$

那么 $\alpha \underset{s}{\Rightarrow} \beta, X \rightarrow Y, \gamma$

$\Rightarrow\leftrightarrow$ 如果 $X, \alpha \underset{s}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$

而且 $Y, \alpha \underset{s}{\Rightarrow} X, \beta, \gamma$

那么 $\alpha \underset{s}{\Rightarrow} \beta, X \leftrightarrow Y, \gamma$

定理推演

定理证明所使用的算法：

(1)　将所要证明的定理$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$

写成相继式形式：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \overset{s}{\Rightarrow} B$$

并从这个相继式出发。

(2) 反复（反向）使用变形规则，消去全部联结词以得到一个或多个无联结词的相继式。

(3) 若所有无联结词的相继式都是公理，则命题得证，否则命题不成立。

王浩算法推理举例与说明

$\rightarrow\Rightarrow$ 如果$Y, \alpha, \beta \ s\Rightarrow \gamma$
而且$\alpha, \beta \ s\Rightarrow X, \gamma$
那么$\alpha, X\rightarrow Y, \beta \ s\Rightarrow \gamma$

定理推演举例和说明

例1 证明 $(\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P$ 成立

证明: (1)$\neg Q \wedge (P\rightarrow Q) \ s\Rightarrow \neg P$ (写成相继式)

(2) $\neg Q, (P\rightarrow Q) \ s\Rightarrow \neg P$ ($\wedge \Rightarrow$) 前件规则2

(3) $P\rightarrow Q \ s\Rightarrow Q, \neg P$ ($\neg \Rightarrow$) 前件规则1

(4) $Q \ s\Rightarrow Q, \neg P$ 而且 $s\Rightarrow Q, \neg P, P$ ($\rightarrow \Rightarrow$)前件规则4

(5)$P, Q \ s\Rightarrow Q$ 而且$P \ s\Rightarrow Q, P$ ($\Rightarrow \neg$) 后件规则1

(5)中两个相继式都已无联接词，而且$s\Rightarrow$ 两端都有共同的命题变项，从而都是公理，定理得证。

$\Rightarrow\neg$ 如果$X, \alpha \ s\Rightarrow \beta, \gamma$
那么$\alpha \ s\Rightarrow \beta, \neg X, \gamma$

定理推演举例和说明

对算法的一些说明:

(1)　如例1中因(5)是公理,自然成立;

对(5)使用规则$\Rightarrow\neg$(正向)便得(4);

对(4)使用规则$\rightarrow\ \Rightarrow$(正向)便得(3);

对(3)使用规则$\neg\ \Rightarrow$(正向)便得(2)。

对例2同样可做类似的解释。

读懂该例，便可大致理解王浩算法的证明思路。

定理推演举例和说明

(2) 证明方法是从所要证明的定理出发，反向使用推理规则（消联结词），直到公理的过程。

(3) 对证明的解释，是反过来从公理出发，经正向使用推理规则（加联结词），直到所要证明的定理。

(4) 限于命题逻辑的定理证明，仅使用五个常用的联结词以及重言蕴涵符号就已足够，引入符号串和相继式完全是为描述推理规则以及公理的方便。

定理推演举例和说明

(5) 由所建立的王浩算法可证明命题逻辑的所有定理，从而是完备的公理系统。算法是可实现的机械方法，可用此算法用计算机来证明命题逻辑中描述的定理。

(6) 算法的另一优点是当所证公式不是定理时，也可以得到相应结果。当消去所有联结词后，得到的相继式中有的不是公理时，便知所要证明的并不是定理。

定理推演举例和说明（例2，选读）

例2 证明$((P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to S))\to(S\vee R)$成立

证明:

(1) $(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to S)\ {}_{s}\Rightarrow(S\vee R)$　（写成相继式）

(2) $P\vee Q,\ P\to R, Q\to S\ {}_{s}\Rightarrow(S\vee R)$　$(\wedge{=}{>})$

(3) $P\vee Q, P\to R, Q\to S\ {}_{s}\Rightarrow S, R$　$({=}{>}\vee)$

(4a) $P, P\to R, Q\to S\ {}_{s}\Rightarrow S, R$ 而且

(4b) $Q, P\to R, Q\to S\ {}_{s}\Rightarrow S, R$　$(\vee{=}{>})$

定理推演举例和说明（例2，选读）

(5a) P, R, $Q \to S \ {}_{s}\!\Rightarrow$ S, R 而且

(5b) P, $Q \to$ S $\ {}_{s}\!\Rightarrow$ P, S, R ((4a)$\to$=>)

(6a)P, R, S $\ {}_{s}\!\Rightarrow$ S, R 而且

(6b) P, R $\ {}_{s}\!\Rightarrow$ Q,S, R ((5a)$\to$=>)

(7a) P, S $\ {}_{s}\!\Rightarrow$ P, S, R

(7b) P $\ {}_{s}\!\Rightarrow$ Q, P, S, R ((5b)$\to$=>)

(4a) P, $P \to R$, $Q \to S \ {}_{s}\!\Rightarrow$ S, R

定理推演举例和说明（例2，选读）

(8a) $Q, R, Q \rightarrow S \ {}_s\!\Rightarrow S, R$

(8b) $Q, Q \rightarrow S \ {}_s\!\Rightarrow P, S, R$ ((4b)→=>)

(9a) $Q, R, S \ {}_s\!\Rightarrow S, R$而且

(9b) $Q, R \ {}_s\!\Rightarrow Q, S, R$ ((8a)→=>)

(10a) $Q, S \ {}_s\!\Rightarrow P, S, R$而且

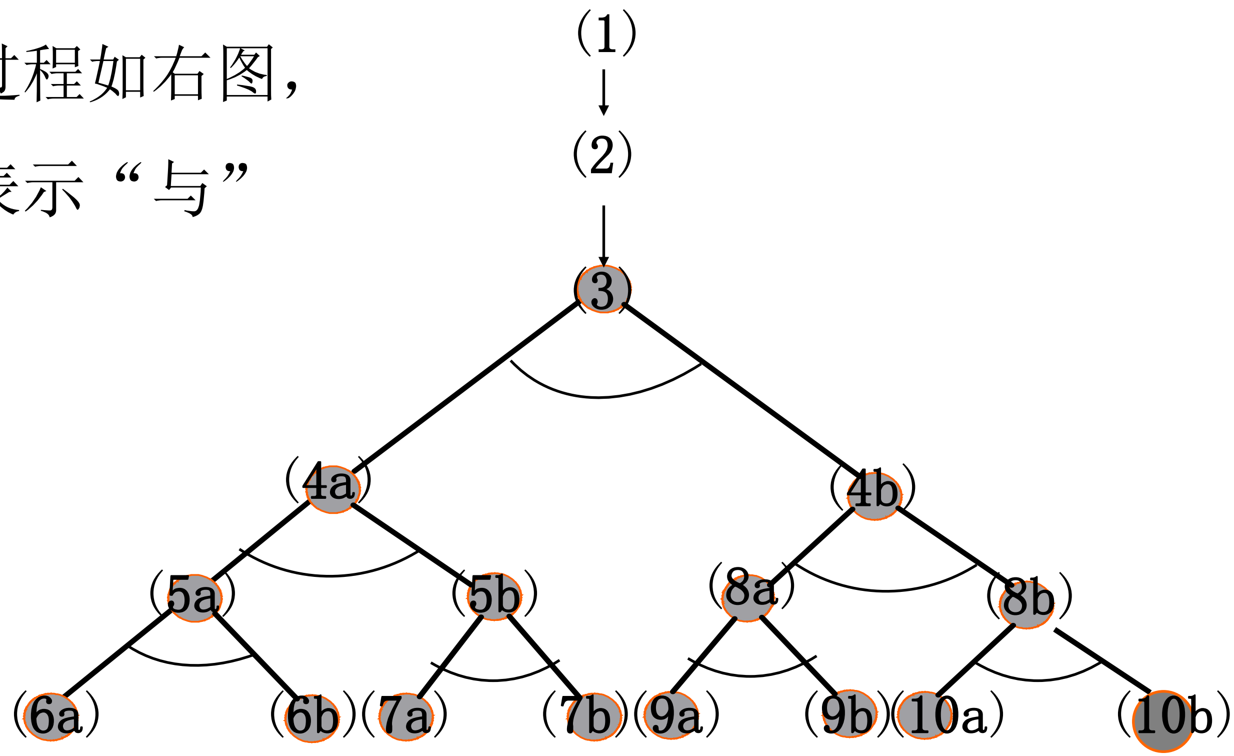
(10b) $Q \ {}_s\!\Rightarrow Q, P, S, R$ ((8b)→=>)

(4b) $Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \ {}_s\!\Rightarrow S, R$

定理推演举例和说明

证明过程如右图，

圆弧表示“与”



谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn