复变函数试题 （2021年6月, A卷，共10题，每题10分）

1. (I) 设$r>0$是常数，若$|z_1|=|z_2|=|z_3|=r$ 且满足$z_1+z_2+z_3=0$. 证明: 三角形$\Delta_{z_1z_2z_3}$是等边三角形. （6分）

(II)设$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=r$，分别用$z_1,z_2,z_3,z_4$的复数对称多项式方程形式给出四边形$z_1z_2z_3z_4$ 为矩形及正方形的一个充要条件(只写出条件即可). （4 分)

2. 设C_r是圆周：$|z|=r>0$, 函数$f(z)$在复平面处处解析，用$f(z)$关于C_r的闭曲线积分公式给出$f(z)$在原点的n阶导数的公式(Cauchy 高阶导数公式)，这里n是非负整数, 并由此证明：

(a). 若令$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$, 则$|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!M(r)}{r^n}$; (5分)

(b). 若存在常数$M>0$，n是非负整数, 使得$|f(z)|\le M\left(\sum_{k=0}^{n}|z|^k\right), \forall z\in C$, 则$f(z)$为一次数不超过$n$的多项式. (5分)

3. 记$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$. 叙述幂级数$f(z)$的Abel定理的内容（2分）及收敛半径$(R>0)$的定义(2分）, 并分别给出具体例子（每例2分），说明存在幂级数使其在收敛圆周上(I) 处处发散；(II) 既有收敛的点，又有发散的点；(III) 处处收敛（以上例子均须给出理由）.

4. 求复积分$I_n=\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos 5z^6}{z^n}dz$, 这里$n$是正整数.

5. 求复积分$I_1=\oint_{|z|=2}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz$.

6. 求实积分$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin kx dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, 这里$a>0$, $b>0$, $k>0$ 是常数.

7. 求实积分$I_{r,n}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}}$, 这里$r>0$是常数, n是正整数.

8. 求出将第一象限$D=\{z=(x,y):x>0,\ y>0\}$ 到单位圆盘$D'=\{w:|w|<1\}$的一个单值解析映射的形式. (要有具体变换步骤).

9. 定义$w(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, 这里a, b, c, d是实数且满足条件$ad-bc\neq 0$. 证明：$w(z)$将上半复平面映成上半复平面的充要条件是$ad-bc>0$.

10. 写出将单位圆盘$|z|<1$映到单位圆盘$|w|<1$的分式线性映射的一般形式，并证明其满足不变式：

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}. \qquad (7分)$$

另外，写出将圆盘$|z-z_0|<r$映到圆盘$|w-w_0|<R$的分式线性映射的一般形式, 这里$r>0$, $R>0$是常数, z_0, w_0 是复常数. (写出即可，不必推导). (3分)