

### 第三章部分习题解答及提示

3. 错误。例如,  $f(z) = z$ , 则  $Re[f(z)] = x, Im[f(z)] = y$ . 令  $C : |z| = 1$ , 即  $f(z) = z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

则有

$$\begin{aligned}\oint_C Re[f(z)]dz &= \int_0^{2\pi} \cos \theta d(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} i \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi i \neq 0.\end{aligned}$$

同理可证:

$$\begin{aligned}\oint_C Im[f(z)]dz &= \int_0^{2\pi} \sin \theta d(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} i \sin \theta (\cos \theta + i \sin \theta) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = -\pi \neq 0.\end{aligned}$$

10. 证明: (a). 当曲线  $C$  包含原点时, 记  $2d(> 0)$  为  $C$  到原点的最小距离, 则由闭路变形定理, 知

$$\oint_C \frac{1}{z^2} dz = \oint_{|z|=d} \frac{1}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ide^{i\theta} d\theta}{d^2 e^{2i\theta}} = \frac{-i}{d} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0.$$

(b). 当曲线  $C$  不包含原点时, 被积函数  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  在  $C$  内和  $C$  上均解析, 故知积分为零。

16. 错误。反例见习题10.

17. 提示: 利用Cauchy积分公式(3.5.1).

21. 提示: 证明两边均等于  $2\pi i f'(z_0)$ .

27. (1)  $\overline{if(z)} = \overline{i(u - iv)} = \overline{v + iu} = v - iu$ . 这时由Cauchy-Riemann定理得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(-u)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(-u)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

故 $\overline{if(z)}$ 也解析。

(2) 的结论可由(1)得到。

(3). 证明: 由 $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ , 可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} |f(z)|^2 = 2 [(u_x)^2 + (v_x)^2 + uu_{xx} + vv_{xx}],$$

及

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} |f(z)|^2 = 2 [(u_y)^2 + (v_y)^2 + uu_{yy} + vv_{yy}].$$

将以上两式相加并利用 $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$ 得:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} |f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} |f(z)|^2 \\ &= 2 [(u_x)^2 + (v_x)^2 + (u_y)^2 + (v_y)^2] + 2 [u(u_{xx} + u_{yy}) + v(v_{xx} + v_{yy})] \\ &= 2 [(u_x)^2 + (v_x)^2 + (u_y)^2 + (v_y)^2]. \end{aligned}$$

再利用Cauchy-Riemann定理 $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ 和导数公式 $f'(z) = u_x + iv_x$ 得上面等式的右边为

$$4 [(u_x)^2 + (v_x)^2] = 4 |f'(z)|^2.$$

补充题证明:

令 $r > R_0$ , 由Cauchy 积分公式得:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} r d\theta \\ &= \frac{n!M(r)}{r^n}. \end{aligned}$$

当 $f(z)$ 有界时, 存在常数 $M_0 > 0$ , 使得 $M(r) \leq M_0$ , 当 $n \geq 1$ 时有

$$0 \leq |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!M_0}{r^n} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty,$$

即得 $f^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \dots$ . 由Taylor 公式

$$f(z) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0).$$

即 $f(z)$ 为常数。

类似的，当 $M(r) \leq M_0 \sum_{k=0}^n r^k$ 时，可证 $f^{(n+j)}(0) = 0, j = 1, 2, \dots$ 。因而由Taylor级数可得

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

即 $f(z)$ 是一次数不超过 $n$ 的多项式。