《高等微积分 1》第八次作业

1 (1) 叙述带 Peano 余项的 Taylor 公式.

(2) 叙述带 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

2 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 满足

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1},\quad \forall x\neq 0.$$

求 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近展开至二阶的带皮亚诺余项的泰勒公式, 即要求余项是 $o(x^2)$.

3 定义函数 $f(x)=\sqrt{1-x}$. 请找出 x 的多项式 $P(x)$, 使得

$$|f(x)-P(x)|\leq 0.01,\quad \forall x\in[0,\frac{1}{4}].$$

4 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上处处有 $(n+1)$ 阶导函数, $a\neq b$ 是给定的实数.

(1) 定义函数

$$F(x)=f(x)+\frac{f^{(1)}(x)}{1!}(b-x)+\frac{f^{(2)}(x)}{2!}(b-x)^2+...+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

计算 F 的导函数 $F'(x)$.

(2) 证明: 存在 ξ 介于 a,b 之间, 使得

$$F(b)-F(a)=(b-a)\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n.$$

5 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上处处有 3 阶导函数.

(1) 写出 f 在点 x 处的 3 阶的带佩亚诺余项的泰勒公式.

(2) 求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}.$$

6 给定 $\alpha > 0$. 求函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x^\alpha}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值.

(2) 求集合 $\{\sqrt[n]{n} | n \in \mathbf{Z}_+\}$ 的最大元素.

7 给定正数 $a \geq b$. 已知矩形内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 且其边平行于坐标轴. 求该矩形面积与周长的最大值.