离散数学(1)
Discrete Mathematics

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

证明实例：$\vdash (P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$

(1) $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ 定理3.2.7

(2) $\vdash ((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow (\neg(Q \vee P) \rightarrow \neg(P \vee Q))$ 代入$\frac{P}{P \vee Q}, \frac{Q}{Q \vee P}$

(3) $\vdash (P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$ 公理3

(4) $\vdash \neg(Q \vee P) \rightarrow \neg(P \vee Q)$ (2)(3)分离

(5) $\vdash \neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P)$ 代入$\frac{P}{\neg Q}, \frac{Q}{\neg P}$

(6) $\vdash (P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$ 定义2

复习：第四章 谓词逻辑的基本概念

4.1 谓词和个体词 ▷

4.2 函数和量词 ▷

4.3 合式公式 ▷

4.4 自然语句的形式化 ▷

4.5 有限域下公式的表示法 ▷

4.6 公式的普遍有效性和判定问题 ▷

命题逻辑的局限性 & 引入谓词逻辑的必要性

举例2：

P：凡有理数都是实数

Q：3/8是有理数

R： 3/8是实数

利用命题逻辑，仅能形式化为（$P \wedge Q$）$\rightarrow R$

显然，对于任意的P，Q，R 来说，这个推理形式不是重言式，即，在命题逻辑中无法给出完整准确的描述。

问题的提出

- 需要进一步分析推理结构
  - 上述推理中，各命题之间的关系在于简单命题的成分之间

- 需要进一步分解简单命题

主谓宾

- 简单命题的符号化

P: 凡有理数都是实数
Q: $\frac{3}{8}$是有理数
––––––––––––––––––––––
R: $\frac{3}{8}$是实数

简单命题的结构

主语	谓语	宾语
↑	↑	↑
讨论对象	对象的性质或关系	讨论对象
↓	↓	↓
个体词(组)	谓词	个体词(组)

- 个体词，谓词

复习：4.1 谓词和个体词

- 谓词逻辑：区分主语、谓语，引入变元，
  引入谓词、量词
- 可将谓词逻辑理解为
  命题逻辑 + {个体词，谓词，量词，函数}
- 这里讨论的是**一阶谓词逻辑**，或称**狭谓词逻辑**。
- 谓词逻辑的三要素
  - 个体词，谓词和量词
  - 函数

复习：个体词

- 个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体。
  - 张三，李四
- 在一个命题中，个体词通常是表示思维对象的词，又称作主词。

复习：谓词

- 谓词是用来刻划个体词的性质或多个个体词间关系的词。

  $P(x), Q(x, y)$

- 谓词又可看作是由给定的个体域到集合$\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$上的一个映射。

复习：谓词常项与谓词变项

- 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项;
- 表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项。
- 谓词常项与谓词变项都用大写英文字母$P, Q, R, \dots$表示，可根据上下文区分。

复习：谓词逻辑与命题逻辑

- 有时将不带个体变项的谓词称作零元谓词。当此时的零元谓词又为谓词常项时，零元谓词即化为命题。
- 因此，命题逻辑中的命题均可以表示成零元谓词，或认为一个命题是没有个体变项的零元谓词。

复习：函数

- 在谓词逻辑中可引入函数，它是某一个体域（不必是实数）到另一个体域的映射。
- 谓词逻辑中的函数一般不单独使用，而是嵌入在谓词中。约定函数符号用小写字母表示。

复习：量词

- 表示个体数量的词称为**量词**。
- 量词是对个体词所加的限制或约束的词。
- 量词分为**全称量词**和**存在量词**两种。

复习：全称量词

- 日常生活和数学中常用的“所有的”，“一切的”，“任意的”，“每一个”，“凡”等词可统称为全称量词；
- 将它们符号化为“∀”，并用$(\forall x)$, $(\forall y)$等表示个体域中所有的个体。
- 用$(\forall x)P(x)$,$(\forall y)Q(y)$等分别表示个体域中所有个体都有性质P和性质Q。

复习：存在量词

- 日常生活和数学中常用的“存在一个”，“有一个”，“有些”，“有的”等词可统称为**存在量词**，将它们符号化为“$\exists$”；
- 用$(\exists x),(\exists y)$等表示个体域中有的个体；
- 用$(\exists x)P(x),(\exists y)Q(y)$等分别表示在个体域中存在个体具有性质$P$，存在个体具有性质$Q$。

复习：全称量词和存在量词的含义归纳

	何时为真	何时为假
$\forall xP(x)$	对个体域中的每个x, $P(x)$都为真	至少存在一个x，使$P(x)$为假
$\exists xP(x)$	个体域中至少有一个x，使$P(x)$为真	对个体域中的每个x, $P(x)$都为假

复习：约束变元与自由变元

- 量词所约束的范围称为量词的辖域。
- 在公式$(\forall x)A$和$(\exists x)A$中，A为相应量词的辖域。
- 在$(\forall x)$和$(\exists x)$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现。
- 所有约束出现的变元称为约束变元。
- A中不是约束出现的其它变元均称为自由变元。

复习：辖域例子

- $(\forall x)P(x) \vee Q(y)$
- $(\forall x)P(x) \vee Q(x)$
- $(\forall x)(\ P(x,y) \rightarrow Q(x,z)\ )$
- $(\forall x)(\ P(x) \rightarrow Q(y)\ ) \rightarrow (\exists y)(\ H(x) \wedge L(x,y,z)\ )$
- $\forall x \exists y \forall z(A(x,y) \rightarrow B(x,y,z)) \wedge C(t)$

$\forall$z的辖域

$\exists$y的辖域

$\forall$x的辖域

说明

对约束变元和自由变元有如下几点说明：

(1) 对约束变元用什么符号表示无关紧要。

(2) 一个谓词公式如果无自由变元，它就表示一个命题。

3) 一个n元谓词$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，若在前边添加k个量词，使其中的k个个体变元变成约束变元，则此n元谓词就变成了n-k元谓词。

复习：一阶谓词逻辑

- 在所讨论的谓词逻辑中，限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项，也不讨论谓词的谓词。

非一阶示例：$\forall p(p \rightarrow Q(x))$， $\exists Q(Q(x) \rightarrow P(x))$

- 在这样的限定范围内的谓词逻辑称为一阶谓词逻辑。一阶谓词逻辑是相对于高阶谓词逻辑而言的。

复习：合式公式定义

(1) 命题常项、命题变项、和原子谓词公式（不含联结词的谓词公式）是合式公式。

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式。

(3) 若A,B是合式公式，而无变元x在A,B的一个中是约束的而在另一个中是自由的，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式（最外层括号可省略）。

(4) 若A是合式公式，则$(\forall x)A$, $(\exists x)A$也是合式公式

（此处教材限制较严）

(5) 只有有限次地应用(1)-(4)构成的符号串才是合式公式。

谓词逻辑中的合式公式也称为谓词公式，简称公式。

复习：自然语句的形式化

- 利用计算机进行推理的基础工作。
- 在分析的基础上，将问题分解成一些合适的谓词表示；即先做一些谓词（函数）设定；
- 然后使用量词、联接词将设定的谓词构成合式公式。

复习：“所有的有理数都是实数”的形式化

分析：所有的有理数都是实数

即对任一事物而言，如果它是有理数，则它是实数。

即对任一x而言，如果x是有理数，那么x是实数。

设$P(x)$：x是有理数，$Q(x)$：x是实数，

这句话的形式描述应为

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

复习："所有的有理数都是实数"的形式化

- 因为x的论域是一切事物的集合, 所以x是有理数是一个条件。
- 需注意这句话不能形式化为

$$(\forall x)(P(x) \land Q(x))$$

上式的意思是说，对所有的x，x是有理数而且又是实数.

- "所有的…都是…"，这类语句的形式描述只能使用"→"而不能使用"∧"。

八股原则

复习：“有的实数是有理数”的形式化

- 同前 $P(x)$：x是有理数，$Q(x)$：x是实数

  则这句话的形式描述应为

  $$(\exists x)(Q(x)\wedge P(x))$$

- 需注意的是不能使用

  $$(\exists x)(Q(x)\rightarrow P(x))$$

说明

- 在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同.
- 同一个命题，在不同个体域中的真值也可能不同.

复习：自然数集的形式描述

论域是自然数集，将下列语句形式化：

1. 对每个数， 有且仅有一个相继后元。
2. 没有这样的数， 0是其相继后元。
3. 对除0而外的数，有且仅有一个相继前元。

* 可将这三句话作为建立自然数集合的公理。

复习：自然数集的形式描述（续）

引入谓词：$\mathrm{E}(x,\ y)$ 表示 $x = y$，

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元，

即 $f(x) = x+1$。

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，

即 $g(x) = x-1$。

复习：自然数集的形式描述（续）

- 语句1需注意"唯一性"的描述，常用的办法是如果存在两个则它们必相等。
- 即若对每个x都存在y，y是x的相继后元，而且对任一 z，如果 z 也是 x 的相继后元，那么 y和z 必相等。

于是对语句1的描述为

$$(\forall x)(\exists y)(\ E(y, f(x)) \wedge (\forall z)(\ E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)\ )\ )$$

复习：关于“唯一性”的一般描述

“唯一性”的一般描述：

常用的办法是：

先表示存在一个，同时如果还能找到另一个的话，则它们一定相等。

一般描述可表述为：

$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \rightarrow E(x, y)))$

其中 $E(x, y)$表示 $x = y$。

复习：有限域下公式的表示法

4-5-1 有限域下全称量词和存在量词的表示

将论域限定为有限集，不失一般性，用 $\{1,2, \ldots,k\}$来表示，这时全称量词和存在量词可化为如下公式：

$$(\forall x)P(x) = P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \lor P(2) \lor \ldots \lor P(k)$$

这种情况下可以说，全称量词是合取词的推广；
存在量词是析取词的推广。

复习：有限域下公式的表示法

- 在有限域下，可将$(\forall x)P(x)$化成由合取词来描述的命题公式。
- 在有限域下，可将$(\exists y)P(y)$化成由析取词来描述的命题公式。
- 但是在无限域下，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。

复习：在{1, 2}域上多次量化公式(4-1)

$(\forall x)(\forall y)\, P(x, y)$

$= (\forall y)\, P(1, y) \wedge (\forall y) P(2, y)$

$= (P(1, 1) \wedge P(1, 2)) \wedge (P(2, 1) \wedge P(2, 2))$

$(\exists x)(\forall y)\, P(x, y)$

$= (\forall y) P(1, y) \vee (\forall y) P(2, y)$

$= (P(1, 1) \wedge P(1, 2)) \vee (P(2, 1) \wedge P(2, 2))$

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5.1 否定型等值式

5.2 量词分配等值式

5.3 范式(全称量词的前束范式)

5.4 基本推理公式

5.5 推理演算

5.6 谓词逻辑的归结推理法

- 普遍有效公式是最重要的逻辑规律。
- 等值式和推理式都是普遍有效的谓词公式。
- 相比命题逻辑，量词谓词的引入，使得谓词演算的应用更为广泛。
- 本章从语义的角度进行非形式的描述。

温习普遍有效公式(4-6-1)

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

例 $(\forall x)\,(P(x) \lor \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \to P(y)$ (y是x个体域中的一个元素)

$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \to (\forall x)(P(x) \lor Q(x))$

$(\forall x)\,P(x) \lor (\forall x)\,\neg P(x)$

在D1上普遍有效，但在D2上则不一定。

D1 = {0}; D2= {0,1}

令P(0) =1, P(1)=0

5.1 否定型等值式

5-1-1 等值

设A, B是一阶谓词逻辑中任意两个公式，若$A \leftrightarrow B$是普遍有效的公式，则称 A与 B等值，记作

$$A = B \quad 或 \quad A \Leftrightarrow B$$

一、从命题公式移植来的等值式

- 命题公式中常常用到的等价式及永真蕴含式也可以看作是谓词演算中的等价式及永真蕴含式

例如

$A(x) \Rightarrow A(x) \vee B(x)$ $P \Rightarrow P \vee Q$

$(A(x) \rightarrow B(x)) = (\neg A(x) \vee B(x))$ $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$

$\neg(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) = \neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x B(x)$ 摩根定律

内容回顾

- 等值公式
- 基本推理公式

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

"→"不满足结合律

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P$$

$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$

$$P \to Q \neq Q \to P$$

“$\to$” 不满足交换律

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

“$\leftrightarrow$” 不满足分配律

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

5. 等幂律（恒等律）

$$P \vee P = P$$

$$P \wedge P = P$$

$$P \rightarrow P = T$$

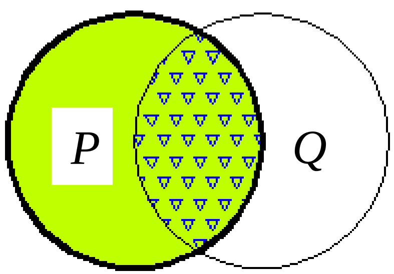
$$P \leftrightarrow P = T$$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

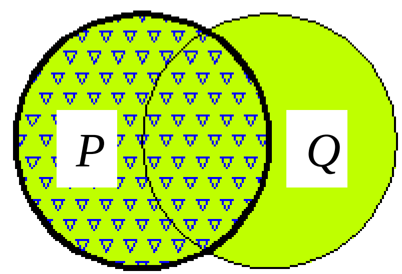
6. 吸收律

$$\boldsymbol{P \vee (P \wedge Q) = P}$$

$$\boldsymbol{P \wedge (P \vee Q) = P}$$



$P \vee (P \wedge Q)$



$P \wedge (P \vee Q)$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

7. 摩根（De Morgan）律：

$$\neg(P \lor Q) = \neg P \land \neg Q$$

$$\neg(P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

$$\neg(P \to Q) = P \land \neg Q$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$

$$= (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

8. 同一律:

$P \vee F = P \qquad P \wedge T = P$

$T \rightarrow P = P \qquad T \leftrightarrow P = P$

还有

$P \rightarrow F = \neg P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

9. 零律:

$$\boldsymbol{P \lor T = T}$$

$$\boldsymbol{P \land F = F}$$

还有

$$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{T} = \mathrm{T}$$

$$\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{T}$$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

10. 补余律:

$\boldsymbol{P \lor \neg P = T}$　　　$\boldsymbol{P \land \neg P = F}$

还有

$P \to \neg P = \neg P$

$\neg P \to P = P$

$P \leftrightarrow \neg P = F$

常用的等值公式

- 蕴涵等值式 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- 等价等值式：$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- 假言易位：$P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- 等价否定等值式：$P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- 归谬论：$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$

常用的等值公式

- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ 前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$ 前提析取合并

证明其他等值式

基本推理公式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$，但 $P \vee Q \not\Rightarrow P$
2. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$　　1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow P$
3. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$　　1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$
4. $P \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$　　2式的逆否，4式的推论。
6. $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$　　3式的逆否，4式的推论。
7. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$　　非 P，而P∨Q又成立，只有Q成立
8. $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$　　*假言推理，分离规则，7式的变形
9. $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$　7式的变形

基本推理公式

10. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$ *三段论

11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$ 类似10式

12. $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$ 10式的推论

13. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$ 10式的推论

14. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee \neg S) \Rightarrow \neg P\vee \neg R$ 9式的推论

15. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$ P=F时左=右，P=T时右=T

16. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ P=T时左=右，P=F时右=T

二、消去量词等值式

将论域限定为有限集， $\{1,2,\ldots,k\}$，则有：

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \ldots \vee P(k)$$

5.1 否定型等值式

5-1-2 否定型等值式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

证明：设论域为$\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，则

$\neg\forall xP(x)=\neg(P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n))$

$=\neg P(a_1)\vee\neg P(a_2)\vee\ldots\vee\neg P(a_n)$

$=\exists x\neg P(x)$

1. $\neg\forall xP(x)=\exists x\neg P(x)$

2. $\neg\exists xP(x)=\forall x\neg P(x)$

- 证明：从语义上证明2。

对任意赋值I(D)，设$\neg\exists xP(x)$为真，则$\exists xP(x)$为假，即对任意的$x\in D$，$P(x)$为假，所以，对任意的$x\in D$，$\neg P(x)$为真，即$\forall x\neg P(x)$为真，因此

$\neg\exists xP(x)\Rightarrow\forall x\neg P(x)$。

对任意赋值I(D)，设$\forall x\neg P(x)$为真，则对任意的$x\in D$，$\neg P(x)$为真，即对任意的$x\in D$，$P(x)$为假，所以$\exists xP(x)$为假，$\neg\exists xP(x)$为真，因此

$\forall x\neg P(x)\Rightarrow\neg\exists xP(x)$。

分析下两式是否相等？

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

- {1，2}域分析
- 否定词越过量词的移动，使用摩根定律

例1. 并非所有的动物都是猫

设 A(x)：x是动物

B(x)：x是猫

原语句可表示成$\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$

依否定型公式得

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\\
&\quad=(\exists x)\neg(A(x)\rightarrow B(x))\\
&\quad=(\exists x)\neg(\neg A(x)\vee B(x))\\
&\quad=(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))
\end{aligned}
$$

而$(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$的含义是有一个动物不是猫，显然这句话与原语句等同

例："天下乌鸦一般黑"的表示

- 设F(x)：x是乌鸦， G(x, y)：x与y 一般黑，

原语句可表示成

$$(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$$

与之等值的公式是

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x, y))$$

即不存在x，y是乌鸦但不一般黑。这两句话含义是相同的。

- 经谓词演算有

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y))$$

$$=(\forall x)\neg(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y)))$$

$$=(\forall x)(\forall y)\neg(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y))$$

$$=(\forall x)(\forall y)(\neg(F(x)\wedge F(y))\vee G(x,y))$$

$$=(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y)\rightarrow G(x,y))$$

原语句可表示成

$(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y)\rightarrow G(x, y))$

与之等值的公式是

$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x, y))$

三、量词分配等值式

5.2 量词分配等值式

5-2-1 量词对析取词、合取词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

其中q 是命题变项，与个体变元 x 无关

5.2 量词分配等值式

5-2-2 量词对蕴含词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \to q) = (\exists x)P(x) \to q$$

$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$

$$(\forall x)(p \to Q(x)) = p \to (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)\big(p \to Q(x)\big) = p \to (\exists x)Q(x)$$

其中p, q是命题变项，与个体变元 x 无关

给出上面等式的证明。

先证明其中的第一个等式。

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q)$$

$$= (\forall x)(\neg P(x) \vee q)$$

$$= (\forall x)\neg P(x) \vee q$$ 依5.2.1的等值式

$$= \neg(\exists x)P(x) \vee q$$ 依5.1.2的等值式

$$= (\exists x)P(x) \rightarrow q$$

再证明其中的第三个等式

$$(\forall x)(p \to Q(x))$$

$$= (\forall x)(\neg p \lor Q(x))$$

$$= \neg p \lor (\forall x)Q(x)$$ 依5.2.1的等值式

$$= p \to (\forall x)Q(x)$$

同样可证其余两个等值式。

5.2 量词分配等值式

5-2-3 全称量词∀对∧，存在量词∃对∨的分配律

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)\ P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

用$\{1, 2\}$域方法验证：

∀对∨ 不满足分配律， ∃对∧不满足分配律

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

- 从{1,2}域上看

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$$

$$= (P(1) \wedge Q(1)) \wedge (P(2) \wedge Q(2))$$

$$= (P(1) \wedge P(2)) \wedge (Q(1) \wedge Q(2))$$

$$= (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)\ P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$= (P(1) \vee Q(1)) \vee (P(2) \vee Q(2))$$

$$= (P(1) \vee P(2)) \vee (Q(1) \vee Q(2))$$

$$= (\exists x)\ P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y)) = (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

$(\exists x)P(x)=(\exists y)P(y)$ 变量易名规则

$$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x) = (\exists x)P(x)\wedge(\exists y)Q(y)$$

$$= (\exists x)(P(x)\wedge(\exists y)Q(y))$$

$$= (\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))$$

5.2.1的等值式

但需注意：

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x) Q(x) \neq (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \neq (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

而只满足

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ (从$\{1,2\}$域上看)

$= (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2))$

$= (P(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2)) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$

$=(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$

$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$

- 证明：

假设在论域D和赋值I下前件$\exists x(P(x)\wedge Q(x))$为真，则论域中至少有一个客体x0，使得 $P(x0)\wedge Q(x0)$为真

于是$P(x0)$和$Q(x0)$都为真，所以$(\exists x)P(x)$以及$(\exists x)Q(x)$为真

进而得$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$为真。

于是有 $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$

- 用解释法证明：

设在一赋值I、D下，有$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$为T，

则对D中的任何一个客体x，有$P(x)\rightarrow Q(x)$为T

这必能保证$(\forall x)P(x)$为T时，$(\forall x)Q(x)$为T

从而$(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$为T。

等值演算规则

- 置换规则
- 变元易名

置换规则

- 设$\Phi(A)$是含公式A的公式，若$A \Leftrightarrow B$，则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.
- 一阶逻辑中的置换规则与命题逻辑中的置换规则形式上完全相同，只是在这里A，B是一阶逻辑公式.

变元易名（约束变元的换名）

- 目的是使每个变元性质唯一
- 设A为一公式，将A中某量词辖域中某约束变项的所有出现及相应的约束变元，改成该量词辖域中未曾出现过的某个体变项符号，公式中其余部分不变，设所得公式为A’，则A’ ⇔ A

例： $\forall x A(x) \lor B(x)$

由于公式中的x 即是自由的又是约束的，可利用此规则进行换名为 ：

$\forall t\, A(t) \lor B(x) \Leftrightarrow \forall x A(x) \lor B(x)$ 后可利用量词的扩充得到：

$\forall t\, A(t) \lor B(x) \Leftrightarrow \forall t(A(t) \lor B(x))$

变元易名（自由变元的代替）

设A为一公式，将A中某个自由出现的个体变项的所有出现用A中未曾出现过的个体变项符号代替，A中其余部分不变，设所得公式为A’，则A’ ⇔ A.

例： $\forall xF(x, y, z) \rightarrow \exists yG(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x, t, z) \rightarrow \exists yG(x, y, z)$

(代替规则) 自由的y用t代换

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x, t, z) \rightarrow \exists yG(w, y, z)$

(代替规则) 自由的x用w代换

例5. 5

例5.5 证明下列等值式。

（1） $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow \neg F(x))$

（2） $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge \neg G(x))$

（3） $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x，y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge \neg H(x,y))$

（4） $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x，y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow \neg L(x,y))$

（1） $\neg\exists x(M(x)\land F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x)\to\neg F(x))$

$$\neg\exists x(M(x)\land F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\neg(M(x)\land F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\lor\neg F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\to\neg F(x))$$

（2） $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge \neg G(x))$

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg F(x)\vee G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

3) $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,\ y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

$$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,\ y))$$

$$\Leftrightarrow \neg\forall x\forall y(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee H(x,\ y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee H(x,\ y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$$

(4) $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,\ y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$

$\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,\ y))$

$\Leftrightarrow \forall x\neg(\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,\ y)))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y\neg(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,\ y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee\neg L(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$

5.3 范式 (Normal Form)

前束范式
Skolem标准型

5-3-1 前束范式

设A为一阶谓词逻辑公式，如果满足

(1) 所有量词都位于该公式的最左边；

(2) 所有量词前都不含否定词；

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

则称A为前束范式。

5-3-1 前束范式

- 前束范式的一般形式为

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

其中$Q_i(1<=i<=n)$为$\forall$或$\exists$，M为不含量词的公式，称作公式A的基式或母式。

5-3-2 前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式都存在与之等值的前束范式，但其前束范式并不唯一。

5-3-3 化前束范式的基本步骤

1. 消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。
2. 右移否定词$\neg$（利用否定型等值式与摩根律）。
3. 量词左移（使用量词分配等值式）。
4. 变元易名（使用变元易名分配等值式）。

例1：求下式的前束范式

$\neg(\ (\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b)\rightarrow R(x))\ )$

可按下述步骤实现：

(1) 消去联结词$\rightarrow, \leftrightarrow$；得

$\neg(\ \neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y, b)\vee R(x))\ )$

(2) $\neg$内移（反复使用摩根律）

得 $(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge\neg\ (\exists x)((\forall y)Q(y, b)\vee R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge(\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b)\wedge\neg R(x))$

$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \land (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \land \neg R(x))$

(3) 量词左移（使用分配等值式）得

$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \land (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \land \neg R(x))$

$= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \land (\exists y)\neg Q(y, b) \land \neg R(x))$

(4) 变元易名（使用变元易名分配等值式）

$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \land (\exists z)\neg Q(z, b) \land \neg R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y) \land \neg Q(z, b) \land \neg R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$

使用以上步骤，可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值性，所以，所得到的前束形与原公式是等值的。这里的

$$S(a, b, x, y, z)$$

便是原公式的母式。

由于前束形中量词的次序排列，如$(\exists y)(\exists z)$也可以写成$(\exists z)(\exists y)$以及对母式没有明确的限制，自然其前束范式并不唯一，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z) \land P)$$

其中P可以是任一不含量词的普遍有效的公式。

前束范式存在定理

定理5.1 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

证明：通过如下算法，可将公式化成等价的前束范式。

1. 利用量词转化公式，把否定符号深入到指导变元的后面。

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

2. 如果必要的话，将约束变量改名。

3. 利用量词辖域收缩、扩张等值式把量词移到全式的最前面，这样便得到与公式等价的前束范式。

说明

求前束范式的过程，就是制造量词辖域可以扩大的条件，进行量词辖域扩大。

任何公式的前束范式都是存在的，但一般说来，并不唯一。

利用一阶逻辑等值式以及两条变换规则（置换规则、变元易名）就可以求出与公式等值的前束范式，或所谓公式的前束范式。

(1) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\neg\exists yG(y)$ (变元易名)

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ (否定型等值式)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\forall y\neg G(y))$ (量词对∧分配律)

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ (量词对∧分配律)

或者 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ (否定型等值式)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ (量词对∧分配律)

由此可知，(1)中公式的前束范式是不唯一的.

(2) $\forall xF(x)\vee\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\forall x\neg G(x)$ (否定型等值式)

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\forall y\neg G(y)$ (变元易名)

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\vee\forall y\neg G(y))$ (量词对∨分配律)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\vee\neg G(y))$ (量词对∨分配律)

问：(2)的下述求法是否正确？

$\forall xF(x)\vee\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\forall x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\vee\neg G(x))$

几点说明

1. 由于$\forall$对$\wedge$适合分配律,所以(1)式才有只带一个量词的前束范式.而$\forall$对$\vee$不适合分配律,因而(2)式不可能有带一个量词的前束范式.

2. 在使用量词的分配律时一定要注意条件.

在演算中都用到了 $\forall y \neg G(y)$是不含x的公式q的条件.

3. 公式的前束范式是不唯一的.

例5.8 求公式的前束范式

(1)$\forall xF(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall tF(t,y)\rightarrow\exists wG(x,w)$ (变元易名)

$\Leftrightarrow \exists t\exists w(F(t,y)\rightarrow G(x,w))$ (分配律)

或者

$\forall xF(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x,t)\rightarrow\exists yG(w,y)$ (变元易名)

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x,t)\rightarrow G(w,y))$ (分配律)

说明

解本题时一定注意，哪些个体变项是约束出现，哪些是自由出现，特别要注意那些既是约束出现又是自由出现的个体变项。不能混淆。

5-3-4 SKOLEM 标准型

Thoralf Skolem worked on Diophantine equations (丢番图方程), mathematical logic, group theory, lattice theory and set theory.

Born: 23 May 1887 in Sandsvaer, Norway
Died: 23 March 1963 in Oslo, Norway

5-3-4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A，若其

  (1) 前束范式中所有的存在量词都在全称量词的左边，且至少有一个存在量词 ($\exists$**前束范式**)；

  (2) 或仅保留全称量词而消去存在量词，便得到公式 A的 SKOLEM 标准型。

- 公式 A与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。

5-3-5　∃前束范式

- 一阶谓词逻辑的任一公式的前束范式（或称SKOLEM标准型）的形式为

$$(\exists \mathrm{x}_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_i)(\forall x_{i+1})\ldots(\forall x_n)M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

即所有的存在量词都在全称量词的左边,且应保证至少有一个存在量词($i \geq 1$)，同时$M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$中不含量词也无自由个体变项。

5-3-6 ∃前束范式存在定理

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A 都可以化为相应的∃前束范式，并且 A 是普遍有效的当且仅当其∃前束范式是普遍有效的。

例2: 求$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)$的∃前束范式(P中无量词)。

将一公式化成∃前束形, 首先要求出前束形, 再做∃前束。这个例子已是前束形， 便可直接求∃前束形。

首先将全称量词$(\forall y)$改写成存在量词$(\exists y)$, 其次是引入谓词S和一个变元z, 得$S(x, z)$, 构造公式

$$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u)\wedge\neg S(x, y))\vee(\forall z)(S(x, z))$$

其中$\neg S(x, y)$的变元, 是$(\forall y)$的变元y和$(\forall y)$左边存在量词$(\exists x)$的变元x。附加的$(\forall z)S(x, z)$中的变元z是新引入的未在原公式中出现过的个体, S也是不曾在M中出现过的谓词。

进而将$(\forall z)$左移(等值演算), 便得∃前束范式

$$(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x, y, u)\land \neg S(x, y))\lor S(x, z))$$

当原公式中有多个全称量词在存在量词的左边时，可按上述方法将全称量词逐一右移。

∃前束范式仅在普遍有效的意义下与原公式等值。∃前束形对谓词逻辑完备性的证明是重要的。

$$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u) \Rightarrow$$

$$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u) \land \neg S(x, y)) \lor (\forall z)S(x, z))$$

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$$

$$= \underline{\neg(\forall x)(\neg P(x) \lor Q(x))} \lor \neg(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$$

$$= \neg(\forall x)P(x) \lor \underline{(\exists x)(P(x) \land \neg Q(x))} \lor (\forall x)Q(x)$$

$$= (\forall x)P(x) \to ((\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \lor (\forall z)Q(z))$$

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \lor (\forall z)Q(z))$$

变元易名

在普遍有效的意义下两者等价

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$$

$((\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \lor (\forall z)Q(z)) \Rightarrow (\forall x)P(x)$

在普遍有效的意义下用$P(x)$ 代$Q(x)$

$((\exists x)(P(x) \land \neg P(x)) \lor (\forall z)P(z))$

得到 $(\forall z)P(z))$

变元易名$(\forall x)P(x)$

5-3-7 $\forall$前束范式

一阶谓词逻辑的任一公式 A的$\forall$前束范式（或称SKOLEM标准型）是仅保留全称量词的前束范式。

5-3-8 ∀前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式 A 都可化成相应的∀前束范式（仅保留全称量词的前束范式，或称SKOLEM标准型），并且 A 是不可满足的当且仅当其∀前束范式是不可满足的。

应注意，该定理是说对于不可满足的公式，它与其Skolem标准形是等值的，而一般的公式与其Skolem标准形并不是等值的。自然仅当A是不可满足的方使用Skolem标准形。

例3: 求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem标准形。

将一公式化成Skolem标准形, 首先也要求出前束形。该例已是前束形，便可直接求Skolem标准形

首先将最左边的$(\exists x)$消去，而将谓词P中出现的所有变元x均以论域中的某个常项a(未在P中出现过)代入。

进而消去从左边数第二个存在量词$(\exists u)$, 因$(\exists u)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$, 而将谓词P中出现的所有变元u均以y, z的某个二元函数f (y, z) (未在P中出现过)代入。

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$$

最后按同样的方法消去存在量词$(\exists w)$，因$(\exists w)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$和$(\forall v)$，需将谓词P中出现的所有变元w均以y、z、v的某个三元函数$g(y, z, v)$ (未在P中出现过也不同于$f(y, z)$)代入。

这样便得到消去全部存在量词的Skolem标准形

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y,z), v, g(y,z,v))$$

消存在量词是将相应变元以函数代入，可这样来理解，

如$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的Skolem标准形是$(\forall x)P(x, f(x))$。因为$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的意思是对任一x，都有一个y使$P(x, y)$成立，那么这个y通常是依赖于x的，可视作x的某个函数$f(x)$。

从而有Skolem标准形$(\forall x)P(x, f(x))$, 然而所能找到的y不必然是x的函数f, 于是$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$不等值。

在{1, 2}域上

$$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

$$= (P(1, 1) \vee P(1, 2)) \wedge (P(2, 1) \vee P(2, 2))$$

$$(\forall x)P(x, f(x)) = P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$$

两者明显不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的。

这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的。

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn