

## 3.29 作业

1. 设  $V$  是有限维线性空间  $U$  的一个子空间, 验证:  $U$  在模  $V$  同余等价关系下得到商集构成一个线性空间。
2. 设  $U$  是数域  $F$  上的  $n$  维线性空间,  $V$  是  $U$  的  $m$  维子空间, 从有限维线性空间的维数等于基的个数的角度, 证明:

$$\dim_F U/V = n - m.$$

3. 设  $V$  是复数域上  $n$  维线性空间,  $\sigma$  是  $V$  上的线性变换, 而  $W$  是  $\sigma$  的不变子空间, 设  $\bar{\sigma} : V/W \rightarrow V/W$  是  $\sigma$  的诱导映射, 证明  $\bar{\sigma}$  的特征值也是  $\sigma$  的特征值。
4. 给定线性空间  $V$  上的线性变换  $\sigma$ 。证明:
  - (a)  $\sigma$  的核和像是  $\sigma$  的不变子空间;
  - (b) 设  $L$  为  $V$  的  $\sigma$  的不变子空间, 则  $\sigma(L)$  是  $\sigma$  的不变子空间;
  - (c) 如果  $\sigma$  可逆, 则任意  $\sigma$  的不变子空间是  $\sigma^{-1}$  的不变子空间。
5. 证明:  $n$  维复空间上的任意线性变换有一个  $n - 1$  维不变子空间。