离散数学(2)第三次作业

2. 证明G和$\bar{G}$至少有一个连通图

证明：若G是连通图，则结论显然成立。

若G不是连通图，则G至少会有2个连通支，选出1个连通支记为 $G_1=(V_1,E_1)$，设 $G_2=G-G_1=(V_2,E_2)$，并设 $G=(V,E)$，$\bar{G}=(\bar{V},\bar{E})$

由于G_1中任意一点 $v\in V_1$ 与 G_2 中的点均不连通

则 $\forall v\in V_1,\ u\in V_2,\ vu\notin E$

那么 $\bar{G}=(\bar{V},\bar{E})$ 中 $vu\in\bar{E}$ $(\forall v\in V_1,\ u\in V_2)$ ⊛ ⇒ 即$\bar{G}$中V_1、V_2间任两点连通

① 选取任一个$v\in V_1$，$\forall u\in V_2$ 由⊛有 $vu\in\bar{E}$

则 $\forall u,w\in V_2$ 均有 uvw 这一条通路，即$\bar{G}$中V_2内任两点连通

② 选取任一个$v\in V_2$，$\forall u,w\in V_1$ 有 $uv,\ wv\in\bar{E}$

则 $\forall u,w\in V_1$ 均有 uvw 这一条通路，即$\bar{G}$中V_1内任两点连通

综合⊛①② $\bar{G}$中任两点连通，$\bar{G}$是连通图 □.

3、证明：若连通图的最长道路不唯一，则它们必定相交

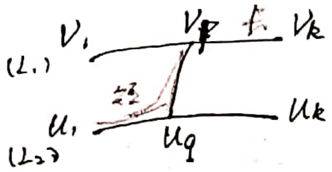
证明：假设有两条最长道路$L_1(v_1\dots v_k)$，$L_2(u_1\dots u_k)$且二者不相交

设 $V_1=\{v_1,\dots,v_k\}$ $V_2=\{u_1\dots u_k\}$

取$\forall v_i\in V_1,\ u_j\in V_2$，$v_iu_j$道路中最短的一条并记为$L(v_p\cdots u_q)$

$L(v_p\cdots u_q)$显然与$L_1=(v_1\dots v_k)$只有一个交点v_p，这是因为如果存在第二个交点v_i

则 $(v_i\cdots u_q)$是比L更短的V_1、V_2间的道路，显然不成立。



则L与L_1只有交点v_p，同理，L与L_2只有交点u_q

$L_1=(v_1\dots v_k)$与$L_2=(u_1\dots u_k)$长度为k，均为最长路

则 $Length(u_1\dots u_q\dots v_p\dots v_k)\le Length(v_1\dots v_p\dots v_k)$

$\Rightarrow Length(u_1\dots u_q)+Length(u_q\dots v_p)\le Length(v_1\dots v_p)$ ①

同理 $Length(u_q\dots u_k)+Length(u_q\dots v_p)\le Length(v_p\dots v_k)$ ②

①+②得 $Length(u_1\dots u_k)+2Length(u_q\dots v_p)\le Length(v_1\dots v_k)$

$k+2Length(u_q\dots v_p)\le k$

则 $Length(u_q\dots v_p)=0$ 显然不成立

则假设不成立 □.

4. pf: 我们先证明，若图中任意一点 $v_i\in V$ 有 $deg(v_i)\geq 3$ 则

寻找图中一个最长道路 $v_1v_2\cdots v_k$ 对于 v_1 来说 $deg\, v_1\geq 3$ 则

v_1 还与两点相连，若 v_1 与道路以外的点x相连，则 $x v_1 v_2\ldots v_k$ 为一条最长道路，这与已知相矛盾，则 v_1 必与道路中两点相连，设为 v_p, v_q

$v_p\neq v_q$，因为图为简单图，不妨设 $p<q$

因此 $v_1-v_q v_{q-1}\cdots v_p v_{p-1}\cdots v_1$ 为一个回路 $v_1-v_p\in E$ 为弦，图中含带弦回路 ⊗

下用数学归纳法证 $\forall n\geq 4$，$m\geq 2n-3$ 结论均成立

$n=4$ 时 $m=5$ 时 只有一种同构的图  含带弦回路

$m=6$ 时 只有一种同构的图  含带弦回路

此为完全图，则 m 只有可能为 5.6，即 $n=4$ 结论成立

假设 $5\leq n\leq k$ 时 只要 $m\geq 2n-3$ 则图中含带弦回路

则 $n=k+1$ 时 ① 最小度数的点 $deg=3$ 由⊗ 图中含带弦回路

② 最小度数的点 $deg=2$

$m\geq 2(k+1)-3=2k-1$

删去这个最小度数的点与和它相连的两条边

则此时 $n'=k$，$m'\geq m-2\geq 2k-3$ 由归纳假设，含带弦回路

③ 最小度数的点 $deg=1$

$m\geq 2k-1$

删去这个最小度数的点与和它相连的一条边

则此时 $n'=k$ $m'=m-1\geq 2k-2$ 由归纳假设，含带弦回路

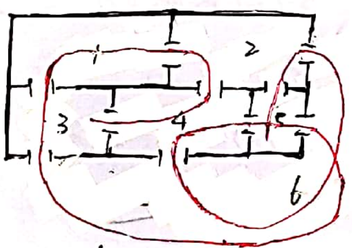
④ 最小度数的点 $deg=0$ 此结点为孤立结点，删去

由归纳假设，含带弦回路

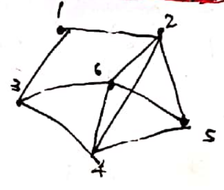
综上：$n=k+1$ 时 只要 $m\geq 2n-3$，含带弦回路

归纳假设成立，得证 □

6.



将房间编号并视作结点，门视作边，连接两个房间（外部也视作一个结点），得到图(b)



此图奇度数的点共两个，由定理，存在欧拉回路

其中一条可行的为 5-2-6-4-5-6-3-1-2-4-3

即存在一条路过各门一次