概率统计第十三讲
点估计

本讲提要

- 数理统计引言
- 总体与样本
- 点估计
- 估计量的评价

引 言

- 数理统计是具有广泛应用的一个数学分支，
- 它以概率论为理论基础，
- 研究怎样有效地收集、整理和分析带有随机性的数据，
- 以对所考察的问题作出推断或预测，
- 并为采取一定的决策和行动提供依据和建议。

几个实际问题：

1. 估计产品寿命问题：根据用户调查获得某品牌洗衣机50台的使用寿命为5年，5.5年，3.5年，6.2年，……。根据这些数据希望得到如下推断：

A.可否认为产品的平均寿命不低于4年?

B.保质期设为多少年，才能保证有95%以上的产品过关?

商品日投放量问题：

1. 草莓的日投放量多少合理？
2. 如何安排银行各营业网点的现金投放量？
3. 快餐食品以什么样的速度生产最为合理等等。

例 制衣厂为了合理的确定服装各种尺码的生产比例,需要调查人们身高的分布。现从男性成人人群中随机选取100人，得到他们的身高数据为：…

1. 试推断男性成人身高X的概率分布；
2. 若已知X服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，试估计参数的μ和σ^2值。

已知“总体”的分布类型，对分布中的未知参数所进行的统计推断属于“参数估计”。

总体与样本

1、总体

总体指研究对象的全体，通常指研究对象的某项数量指标。组成总体的元素称为个体。

从本质上讲，总体就是所研究的随机变量或随机变量的分布。

2、样本

来自总体的部分个体X_1， … ，X_n如果满足：

1. 同分布性：X_i，i=1,…,n与总体同分布
2. 独立性：X_1， … ，X_n相互独立；

则称为容量为n的简单随机样本，简称样本。

而称X_1，…，X_n的一次实现为样本观察值，记为x_1，…，x_n。

来自总体X的随机样本X_1，…，X_n可记为

$$X_1,\ldots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} X\text{或}F(x),p(x),\ldots$$

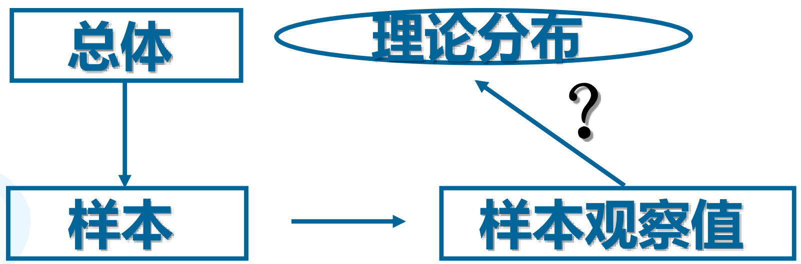
显然，样本联合分布函数为

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i),$$

样本联合密度函数为

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i).$$

3、总体、样本和样本观察值的关系



统计是从手中已有的资料——样本观察值，去推断总体的情况——总体分布。样本是联系两者的桥梁。总体分布决定了样本取值的概率规律，也就是样本取到样本观察值的规律，因而可以用样本观察值去推断总体。

统计量

定义：称样本x_1，…，x_n的函数$T(x_1,\ldots,x_n)$是总体的一个统计量，如果$T(x_1,\ldots,x_n)$不含未知参数。

几个常用的统计量：

1. 样本均值 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$

2. 样本方差 $s_*^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

或 $s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ (无偏方差),

样本标准差 $s_*=\sqrt{s_*^2}$或$s=\sqrt{s^2}$ (无偏标准差).

3.样本k阶矩

原点矩 $\hat{a}_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k,$

中心矩 $\hat{b}_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k$。

4.经验分布函数

用$S(x)$表示随机样本x_1， …，x_n中不大于x的样本个数。定义经验分布函数：

$$F_n(x) = S(x)/n。$$

Glivenko定理

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-F(x)|=0\right)=1.$$

点估计

一、参数估计的概念

定义 设$x_1,\cdots,x_n$是总体的一个样本，其分布函数为$F(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$；其中θ为未知参数，Θ为参数空间，若统计量$\theta'(x_1,\cdots,x_n)$可作为θ的一个估计，则称其为θ的一个**估计量**，记为$\hat{\theta}=\theta'(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

注: $F(x;\theta)$可用分布律或密度函数代替。

若$x_1,\cdots,x_n$是样本的一个观测值，则

$\hat{\theta}=\theta'(x_1,x_2,\ldots,x_n)$称为$\theta$的估计值。

- 由于$\theta'(x_1,\cdots,x_n)$是实数域上的一个点，现用它来估计θ，故称这种估计为**点估计**
- 点估计的经典方法是
  1. 矩估计
  2. 最大似然估计
  3. Bayes估计

二、矩法估计（简称“矩法”）

1.用样本矩作为总体同阶矩的估计，即

若$\alpha_k=\mathrm{E}X^k$，则$\hat{\alpha}_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$;

若$\beta_k=\mathrm{E}(X-EX)^k$，则$\hat{\beta}_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^k$。

2.**约定**：若$\hat{\theta}$是未知参数θ的矩估计，则$g(\theta)$的矩估计为$g(\hat{\theta})$。

例1. 设x_1， …， x_n为取自总体X~$b(m,p)$的样本，其中m已知，$0 < p < 1$未知，求p的矩估计。

解: $EX = mp$, 故$p = EX/m = \mu/m$。

而$\hat{\mu} = \bar{x}$，故p的矩估计$\hat{p} = \bar{x} / m$。

EX. x_1， …， x_n为取自参数为λ的指数分布总体X的样本，求λ的矩估计。

解：由$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$知$EX = 1/\lambda$，

所以$\lambda = 1/EX = 1/\mu$，得 $\hat{\lambda} = 1 / \bar{x}$。

例2. 设$x_1, \ldots, x_n$为取自总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，求参数μ，σ^2的矩估计。

解：$EX = \mu$，$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$，

所以，$\hat{\mu} = \bar{x}$， $\hat{\sigma}^2 = s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$。

例3. 设$x_1, \ldots, x_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} U(a, b)$，试求$\hat{a}$和$\hat{b}$。

解：$EX = (a+b)/2$，$\mathrm{Var}(X) = (a-b)^2/12$。

$$\begin{cases} a = EX - \sqrt{3\mathrm{Var}(X)}, \\ b = EX + \sqrt{3\mathrm{Var}(X)}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = \bar{x} - \sqrt{3}s, \\ \hat{b} = \bar{x} + \sqrt{3}s. \end{cases}$$

例4. 设总体X的概率密度为 $p(x) = \dfrac{1}{2\sigma}e^{-|x|/\sigma}$，
$x_1, \ldots, x_n$为样本，求参数σ的矩估计。

解：$\mu \equiv EX = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2\sigma} e^{-|x|/\sigma} dx = 0$，

$$\alpha_2 \equiv EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2\sigma} e^{-|x|/\sigma} dx = \frac{1}{\sigma}\int_0^{\infty} x^2 e^{-x/\sigma} dx$$

$$= -\int_0^{\infty} x^2 d e^{-x/\sigma} = \int_0^{\infty} 2x e^{-x/\sigma} dx$$

$$= -2\sigma\int_0^{\infty} x d e^{-x/\sigma} = 2\sigma\int_0^{\infty} e^{-x/\sigma} dx = 2\sigma^2,$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\alpha_2 / 2}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\alpha}_2 / 2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / 2n}。$$

三、最大似然估计

1、最大似然思想

1832年5月30日，法国著名数学家Galois与情敌决斗，离25步远用手枪射击，他的命中率为0.1, 情敌的命中率为0.9，第二天传闻有一人胃部中弹，24小时后去世。估计谁中弹身亡？

- 一般说，事件A发生的概率与参数$\theta\in\Theta$有关，θ取值不同，则$P(A)$也不同。
- 因而应记事件A发生的概率为$P(A|\theta)$
- 若A发生了，则认为此时的θ值应是在Θ中使$P(A|\theta)$达到最大的那一个，这就是最大似然思想。

I. 设总体X为离散型随机变量，它的分布律为

$$P(X=a_k)=P_\theta(a_k),\quad k=1,2,\ldots$$

现有样本观察值$x_1,\ldots,x_n$,取值于$\{a_k,k=1,2,\ldots\}$.
则根据最大似然思想，如何用$x_1,\ldots,x_n$估计θ?

记$A=\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\}$,

$$则P(A|\theta)=P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P_\theta(x_i).$$

根据最大似然思想，θ值应是在Θ中使$P(A|\theta)$达到最大的那一个，也就是使样本联合分布$\prod_{i=1}^{n}P_\theta(x_i)$达到最大。

II. 设总体X为连续型随机变量，概率密度$p(x;\theta)$，现有样本观察值$x_1, x_2, \ldots, x_n$，则根据最大似然思想，如何用$x_1,\ldots,x_n$估计θ?

记$\delta(x_1,\ldots,x_n)$为包围点$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$的小球域，
$A=\{(X_1, X_2, \ldots, X_n)\in\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$。

$$则P(A|\theta)=\int\cdots\int_{\delta(x_1,\ldots,x_n)}p(x_1,\ldots,x_n;\theta)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int\cdots\int_{\delta(x_1,\ldots,x_n)}\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)dx_1\cdots dx_n。$$

根据最大似然思想，θ值应是在Θ中使$P(A|\theta)$即使样本联合密度达到最大的那一个。

2、似然函数与最大似然估计

$$设x_1,x_2,\ldots,x_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}p(x;\theta),\ \theta\in\Theta,\ 则称$$

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

为该总体的似然函数。

定义：若有$\hat{\theta}\in\Theta$，使得

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta)\overset{或}{=}\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta),$$

则称$\hat{\theta}$为θ的最（或极）大似然估计。

3、求最大似然估计的步骤*

设$x_1,\dots,x_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} p(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$，求 $\hat\theta=\hat\theta(x_1,\dots,x_n)$。

(1) 做似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^n p(x_i;\theta)$，

(2) 做对数似然函数 $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^n \ln p(x_i;\theta)$，

(3) 列似然方程，令 $\dfrac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=0$，

若该方程有解，则从中得到最值为

$$\hat\theta=\hat\theta(x_1,x_2,\dots,x_n)。$$

例5. 设x_1，…，x_n为取自参数为λ的Poisson分布总体X的样本，求λ的最大似然估计。

解：$L(\lambda)=\prod_{i=1}^n P_\lambda(X=x_i)=\prod_{i=1}^n \dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^{x_1+\cdots+x_n}}{e^{n\lambda}\prod_{i=1}^n x_i!}$，

$$\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^n x_i\ln\lambda-n\lambda-\sum_{i=1}^n \ln(x_i!),$$

$$\frac{d[\ln L(\lambda)]}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i-n=0\Rightarrow\hat\lambda=\bar x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

注1：若总体分布中含有多个未知参数，则可解方程组

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0,\quad 或\ \frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}=0$$

得出θ_i的最大似然估计$\hat\theta_i$，$i=1,2,\dots,m$.

例6. 设x_1，…，x_n为取自$N(\mu,\sigma^2)$总体的样本，求参数μ，σ^2的最大似然估计。

解：

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^n p(x_i;\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\Rightarrow L(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}e^{-\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}。$$

$$令\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^n\dfrac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\hat\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i=\bar x,\quad\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar x)^2=s_n^2.$$

注2：最大似然估计具有不变性：

- 若 $\hat{\theta}$ 是未知参数θ的最大似然估计，则 $g(\theta)$ 的最大似然估计为 $g(\hat{\theta})$.
- 于是正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的

1. 标准差σ的MLE是 s_n;
2. 分布函数 $F(x) = \Phi((x-\mu)/\sigma)$ 的MLE是 $\Phi((x-\bar{x})/s_n)$;
3. 总体α分位数 $x_\alpha = \mu+\sigma u_\alpha$ 的MLE是 $\bar{x}+s_n u_\alpha$，其中 u_α 为 $N(0,1)$ 分布的α分位数。

例7. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为取自参数为λ的指数分布总体的样本，$x>0$ 为一给定实数，求 $p=F(x)$ 的最大似然估计。

解： $p = F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = 1 - e^{-\lambda x}$,

故若λ的最大似然估计为 $\hat{\lambda}$，则 p 的最大似然估计为 $1-e^{-\hat{\lambda}x}$。先求λ的最大似然估计

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n p(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i},$$

$$\ln L(\lambda) = \ln\left(\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}\right) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^n x_i,$$

令 $$\frac{\mathrm{d}[\ln L(\lambda)]}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda = n\Big/\sum_{i=1}^n x_i \quad \Rightarrow \hat{\lambda} = 1/\bar{x},$$

$$\therefore \hat{p} = 1 - e^{-x/\bar{x}}.$$

注3*： 由似然方程解不出θ的似然估计时，可由定义通过分析直接推求。事实上 $\hat{\theta}$ 满足

$$L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta\in\Theta} L(\theta).$$

例8. 设 $x_1, \cdots, x_n$ 为取自 $U(0, \theta)$ 总体的样本，$\theta > 0$ 未知，求参数θ的最大似然估计。

解：
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & 0 < x_i < \theta, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

$$\ln L(\theta) = \ln \theta^{-n} = -n \ln \theta,$$

令 $\dfrac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = -\dfrac{n}{\theta} = 0$，无解！

注意到 $L(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & 0 < x_i < \theta, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

为使 $L(\theta) \neq 0$，必须 $0 < \max\{x_i\} < \theta$，故 θ 的值域为 $(\max\{x_i\}, \infty)$，再由 $L(\theta) = 1/\theta^n$ 关于 θ 单减，故 θ 越小，$L(\theta)$ 越大。于是 $L(\max\{x_i\}) = \sup L(\theta)$。

$$\therefore \hat{\theta} = \max\{x_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\} = x_{(n)}.$$

点估计

矩估计法

最大似然估计法

基本步骤

基本步骤

估计量的评选标准

相合性

无偏性

有效性

一、相合性

定义：设 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ 是 θ 的估计量，

若 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合估计量。

例1.设 $x_1, \ldots, x_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} b(m, p)$，$m$ 已知，$0 < p < 1$，讨论 p 的矩估计量的相合性。

解：由Chebyshev大数定律，

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow{P} EX = mp.$$

$$\therefore \hat{p} = \bar{x} / m \xrightarrow{P} p.$$

故 p 的矩估计量是相合的。

二、无偏性

定义：设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,...,x_n)$为$\theta$的估计量，

若$E\hat{\theta}=\theta$，则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量。

$$E\bar{x}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ex_i=EX=\mu,$$

$$Es^2=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}Ex_i^2-nE\bar{x}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[n(\mu^2+\sigma^2)-n(\mu^2+\sigma^2/n)\right]=\sigma^2.$$

例2. 设$x_1,x_2,...,x_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0,\theta)$,

考察θ的矩估计和最大似然估计的无偏性。

解：θ的矩估计和最大似然估计分别为

$$\hat{\theta}_M=2\bar{x},\quad \hat{\theta}_{MLE}=x_{(n)}.$$

$$E\hat{\theta}_M=2E\bar{x}=2\times EX=2\times\frac{\theta}{2}=\theta,$$

故θ的矩估计无偏，但最大似然估计是偏的，

注：若取$\theta^*=\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_{MLE}$，则$\theta^*$是$\theta$的无偏估计。

三、有效性

定义：设$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$分别是参数θ的两个无偏估计，

若$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)\le\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$且存在$\theta\in\Theta$使得不等号

严格成立，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

续例2. 已知$\hat{\theta}_M$与$\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_{MLE}$都是$\theta$的无偏估计，

通过比较方差知后者比前者有效。

例3. 设$\bar{x}_1$和$\bar{x}_2$分别为取自总体X的容量为n_1和n_2的两个样本的样本均值，求证：对任意实数$a,\ b>0,\ a+b=1$，统计量$a\bar{x}_1+b\bar{x}_2$都是EX的无偏估计，并求a和b使所得统计量最有效。

解：$E(a\bar{x}_1+b\bar{x}_2)=aE\bar{x}_1+bE\bar{x}_2=EX,$

$$\mathrm{Var}(a\bar{x}_1+b\bar{x}_2)=a^2\mathrm{Var}(\bar{x}_1)+b^2\mathrm{Var}(\bar{x}_2)$$

$$=\left(\frac{a^2}{n_1}+\frac{b^2}{n_2}\right)\mathrm{Var}(X)\ge\frac{\mathrm{Var}(X)}{n_1+n_2},$$

$$\Rightarrow(a,b)=\left(\frac{n_1}{n_1+n_2},\frac{n_2}{n_1+n_2}\right).$$