《高等微积分 (2)》期中考试参考解答

本试卷分三页, 共 6 道试题. 其中第 1 题 $4\times 8=32$ 分; 第 2 题 $4\times 4=16$ 分; 第 3 题 $4\times 3=12$ 分; 第 4 题 10 分; 第 5 题 $5\times 3=15$ 分; 第 6 题 15 分.

1 设 $F(x,y,z)=x^2-x+y^2-z(z-1)(z-2)$.

(1) 求 F 的 (全) 微分.

(2) 求 F 在点 $(1,2,3)$ 处的梯度向量.

(3) 对于方向 $\mathbf{q}=(a,b,c)$, 求方向导数 $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}|_{(2,3,4)}$ 的值.

(4) 设 $z=z(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(2,2,3)$ 附近确定的隐函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(2,2)}, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,2)}$.

(5) 求上述隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(2,2)$ 附近的带有皮亚诺余项的二阶泰勒公式, 即要求余项形如 $o\left((x-2)^2+(y-2)^2\right)$.

(6) 求曲面 $S=(x,y,z)|F(x,y,z)=0$ 在点 $(2,2,3)$ 处的切平面方程.

(7) 求曲线 $L=\{(x,y,z)|F(x,y,z)=0, x+y+z=7\}$ 在点 $(2,2,3)$ 处的切线方程.

(8) 求出 F 的所有临界点 (驻点), 并判断它们是否为极值点.

解答. 直接求导, 可得 F 的偏导函数为

$$F_x=2x-1,\quad F_y=2y,\quad F_z=-(3z^2-6z+2).$$

(1) F_x, F_y, F_z 都是连续函数, 则 F 处处可微, 其微分为

$$dF=F_xdx+F_ydy+F_zdz=(2x-1)dx+2ydy-(3z^2-6z+2)dz.$$

(2) F 在点 $(1,2,3)$ 处的梯度向量为

$$\nabla F|_{(1,2,3)}=(F_x,F_y,F_z)|_{(1,2,3)}=(1,4,-11).$$

(3) 由于 F 是 C^1 光滑的, 则有

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}|_{(2,3,4)} = \nabla F|_{(2,3,4)} \cdot \mathbf{q} = (3,6,-26)\cdot(a,b,c) = 3a+6b-26c.$$

(4) 利用隐函数定理, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= \frac{-F_x(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))} = \frac{2x-1}{3z^2-6z+2},\\ \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} &= \frac{-F_y(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))} = \frac{2y}{3z^2-6z+2},\end{aligned}$$

将 $z(2,2)=3$ 代入, 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(2,2)} = \frac{3}{11}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,2)} = \frac{4}{11}.$$

(5) 对 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 进一步求导, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{2\cdot(3z^2-6z+2)-(2x-1)\cdot(6z-6)\cdot z_x}{(3z^2-6z+2)^2},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} &= \frac{-(2x-1)\cdot(6z-6)\cdot z_y}{(3z^2-6z+2)^2},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{-2y\cdot(6z-6)\cdot z_x}{(3z^2-6z+2)^2},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{2\cdot(3z^2-6z+2)-2y\cdot(6z-6)\cdot z_y}{(3z^2-6z+2)^2},\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(2,2)} &= \frac{134}{1331}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}|_{(2,2)} = \frac{-144}{1331},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(2,2)} &= \frac{-144}{1331}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(2,2)} = \frac{50}{1331}.\end{aligned}$$

这样, $z=z(x,y)$ 在 $(2,2)$ 附近的带有皮亚诺余项的二阶泰勒公式为

$$\begin{aligned}z(x,y) =& 3 + \frac{3}{11}(x-2) + \frac{4}{11}(y-2) + \frac{1}{1331}\left(67(x-2)^2 - 144(x-2)(y-2) + 25(y-2)^2\right)\\ &+ o\left((x-2)^2+(y-2)^2\right).\end{aligned}$$

(6) 曲面 S 在 $(2,2,3)$ 处的法向量为 $\nabla F|_{(2,2,3)} = (3,4,-11)$, 由此可知该点处的切平面方程为

$$3(x-2)+4(y-2)-11(z-3)=0,$$

也即 $3x+4y-11z=-19$.

(7) 曲线 L 的一个切向量为

$$(3,4,-11)\times(1,1,1)=(15,-14,-1),$$

由此可知该点处的切线方程为

$$\frac{x-2}{15}=\frac{y-2}{-14}=\frac{z-3}{-1}.$$

(8) F 的临界点方程为

$$F_x=F_y=F_z=0,$$

解得共有两个临界点 $\mathbf{p_1}=(\frac{1}{2},0,1+\frac{\sqrt{3}}{3})$, $\mathbf{p_2}=(\frac{1}{2},0,1-\frac{\sqrt{3}}{3})$.

直接计算可知, F 的 Hessian 矩阵为对角矩阵

$$H(F)_{(x,y,z)}=\mathrm{diag}\{2,2,6-6z\}.$$

这样, 点 $\mathbf{p_1}$ 处 F 的 Hessian 矩阵为 $\mathrm{diag}\{2,2,-2\sqrt{3}\}$, 它是不定的二次型, 因而 $\mathbf{p_1}$ 不是 F 的极值点; 点 $\mathbf{p_2}$ 处 F 的 Hessian 矩阵为 $\mathrm{diag}\{2,2,2\sqrt{3}\}$, 它是正定的二次型, 因而 $\mathbf{p_1}$ 是 F 的极小值点. □

2 定义函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{如果}(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{如果}(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1) 证明: f 是连续函数.

(2) 给定方向 $\mathbf{q}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 求 f 在 $(0,0)$ 处的方向导数 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial\mathbf{q}}$.

(3) 对 $(x,y)\neq(0,0)$, 求偏导数 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

(4) 计算二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(0,0)},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}|_{(0,0)}.$$

解答. (1) 二元函数 $\frac{-1}{x^2+y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 上连续, 一元函数 e^t 处处连续, 则它们的复合函数 $e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$ 在 $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 上连续. 下面我们来证明 f 在 $(0,0)$ 处连续, 只需验证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$. 为此, 令 $t=\frac{1}{x^2+y^2}$, 利用复合函数的极限定理, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}=\lim_{t\to+\infty} e^{-t}=0.$$

这就完成了证明.

(2) 利用方向导数的定义直接计算, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{q}}&=\lim_{t\to0}\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t}\\&=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^{z^2}}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{2z\cdot e^{z^2}}=0.\end{aligned}$$

(3) 直接求导, 有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

(4) 在 (2) 取 $\mathbf{q}=(1,0)$, 可得 $f_x(0,0)=0$. 利用高阶偏导数的定义, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(0,0)}&=\frac{\partial f_x(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to0}\frac{f_x(x,0)-f_x(0,0)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^4}{e^{t^2}}=0,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}|_{(0,0)}=\frac{\partial f_x(0,0)}{\partial y}=\lim_{y\to0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0.$$

□

3 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 的二阶偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数.

(1) 给定 $a_1<a_2,b_1<b_2$, 令

$$D=\{(x,y)|a_1\le x\le a_2,b_1\le y\le b_2\}.$$

计算二重积分

$$\iint_D\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}d\sigma.$$

(2) 利用 (1) 的结论证明: 存在 $(x_0, y_0) \in D$, 使得

$$f(a_2, b_2) - f(a_1, b_2) - f(a_2, b_1) + f(a_1, b_1) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{(x_0, y_0)}.$$

(3) 证明: 如果 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{(x,y)} = 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, 则存在一元函数 $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 使得

$$f(x, y) = g(x) + h(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

解答. (1) 把二重积分化成累次积分进行计算, 并利用一元函数的 Newton-Leibniz 公式, 可得

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} d\sigma &= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y} dy \\
&= \int_{a_1}^{a_2} \left(f_x(x, b_2) - f_x(x, b_1)\right) dx \\
&= f(x, b_2)|_{a_1}^{a_2} - f(x, b_1)|_{a_1}^{a_2} \\
&= f(a_2, b_2) - f(a_1, b_2) - f(a_2, b_1) + f(a_1, b_1).
\end{aligned}$$

(2) 由积分中值定理, 存在 $(x_0, y_0) \in D$, 使得

$$\iint_D \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} d\sigma = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{(x_0, y_0)},$$

再结合 (1) 中的结果即可.

(3) 对任何 $x, y \in \mathbf{R}$, 由 (2) 的结论, 存在 (x_0, y_0), 使得

$$f(x, y) - f(0, y) - f(x, 0) + f(0, 0) = xy\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{(x_0, y_0)} = 0,$$

取 $g(x) = f(x, 0) - f(0, 0), h(y) = f(0, y)$ 即可.

□

4 给定 n 个正数 $\alpha_1, ..., \alpha_n$. 设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 满足约束条件:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1, \quad 且 x_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq n,$$

求函数 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1^{\alpha_1}) \cdot (x_2^{\alpha_2}) \cdot ... \cdot (x_n^{\alpha_n})$ 的最大值.

解答. 令 $g(x_1,...,x_n)=x_1+x_2+...+x_n-1$,

$$S=\{(x_1,...,x_n)|g(x_1,...,x_n)=0,x_1,...,x_n\geq 0\}.$$

(1) 容易验证 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的有界闭集, 由最值定理, 连续函数 f 在 S 上有最大值. 设 $\mathbf{b}=(b_1,...,b_n)$ 是最大值点.

(2) S 的边界为

$$\partial S=\{(x_1,...,x_n)\in S|\exists x_i=0\},$$

f 在 ∂S 上恒等于 0, 在 S 上不恒等于 0, 则有 $\mathbf{b}\notin\partial S$. 注意到 $\frac{\partial g}{\partial x_i}=1$, 则 $\mathbf{b}$ 是 S 的光滑的内点. 这样, 利用拉格朗日乘子法, 存在 $\lambda\in\mathbf{R}$, 使得 $(b_1,...,b_n,\lambda)$ 是辅助函数

$$F(x_1,...,x_n,\lambda)=f(x_1,...,x_n)-\lambda\cdot g(x_1,...,x_n)$$

的临界点, 即满足如下方程组

$$\begin{cases}\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}-1=0\\ \alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1}...x_n^{\alpha_n}-1=0\\ ......\\ \alpha_nx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n-1}-1=0\\ x_1+...+x_n-1=0\end{cases}$$

解得 $\frac{b_1}{\alpha_1}=...=\frac{b_n}{\alpha_n}$, 即 $(b_1,...,b_n)=(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+...+\alpha_n},...,\frac{\alpha_n}{\alpha_1+...+\alpha_n})$.

结合 (1),(2), 所求的最大值为

$$\max_S f=f(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+...+\alpha_n},...,\frac{\alpha_n}{\alpha_1+...+\alpha_n})=\frac{\alpha_1^{\alpha_1}\cdot...\cdot\alpha_n^{\alpha_n}}{(\alpha_1+...+\alpha_n)^{\alpha_1+...+\alpha_n}}.$$

□

5 设 n 元函数 $f(x_1,...,x_n),g(x_1,...,x_n)$ 与一元函数 $x_1(t),...,x_n(t)$ 都是 C^2 光滑的. 定义函数

$$h(t)=f(x_1(t),...,x_n(t)).$$

(1) 求 $h''(t)$, 请用 $f(x_1,...,x_n)$ 与 $x_1(t),...,x_n(t)$ 的高阶 (偏) 导函数表示.

(2) 令 $\mathbf{p}=(x_1(0),...,x_n(0))$. 假设 $\mathbf{p}$ 是函数 $f(x_1,...,x_n)$ 在约束条件 $g(x_1,...,x_n)=0$ 下的条件极值点. 请叙述此情形下的拉格朗日乘子法.

(3) 设 $\lambda\in\mathbf{R}$ 满足 (2) 中所述拉格朗日乘子法的结论, 定义 n 元函数 F 为

$$F(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)-\lambda\cdot g(x_1,...,x_n).$$

证明: 如果对任何 t, 都有 $g(x_1(t),...,x_n(t))=0$, 则

$$h''(0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}|_{\mathbf{p}}\cdot x_i'(0)\cdot x_j'(0).$$

解答. (1) 利用链式法则, 有

$$h'(t)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i'(t),$$

$$\begin{aligned}h''(t)&=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i''(t)+\sum_{i=1}^{n}x_i'(t)\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_j'(t)\\&=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i''(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i'(t)\cdot x_j'(t).\end{aligned}$$

(2) 拉格朗日乘子法断言: 存在 $\lambda\in\mathbf{R}$, 使得

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\mathbf{p}}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}|_{\mathbf{p}},\quad \forall 1\le i\le n.$$

(3) 由于 $g(x_1(t),...,x_n(t))=0$, 求二阶导可得

$$\begin{aligned}0&=\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}g(x_1(t),...,x_n(t))\\&=\sum_{i=1}^{n}g_i(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i''(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}(x_1(t),...,x_n(t))\cdot x_i'(t)\cdot x_j'(t).\end{aligned}$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
h''(0) = h''(0) - \lambda \cdot \frac{d^2}{dt^2}|_{t=0} g(x_1(t), ..., x_n(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f_i(x_1(t), ..., x_n(t)) - \lambda g_i(x_1(t), ..., x_n(t))) \cdot x_i''(t) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (f_{ij}(x_1(t), ..., x_n(t)) - \lambda g_{ij}(x_1(t), ..., x_n(t))) \cdot x_i'(t) \cdot x_j'(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}|_{\mathbf{p}} \cdot x_i'(0) \cdot x_j'(0).
\end{aligned}
$$

□

6 给定三个互不相同的实数 A, B, C. 设函数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 有连续的二阶导函数 $f^{(2)}(x)$, 计算二重积分

$$
I = \iint_{x+y\le 1, x,y\ge 0} f^{(2)}(Ax + By + C(1-x-y))d\sigma
$$

的值, 要求将结果用 $f(A), f(B), f(C)$ 表示.

证明:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f^{(2)}(Ax + By + C(1-x-y))dy \\
&= \int_0^1 dx \frac{f^{(1)}(Ax + By + C(1-x-y))}{B-C}|_0^{1-x} \\
&= \int_0^1 \frac{f^{(1)}(Ax + B(1-x)) - f^{(1)}(Ax + C(1-x))}{B-C} \\
&= \frac{f(A) - f(B)}{(B-C)(A-B)} - \frac{f(A) - f(C)}{(B-C)(A-C)} \\
&= \frac{f(A)}{(A-B)(A-C)} + \frac{f(B)}{(B-C)(B-A)} + \frac{f(C)}{(C-A)(C-B)}.
\end{aligned}
$$

□