

## 概统第十六周（第六次）习题课材料

2022 年 5 月 31 日

1. 设  $\{X_n\}$  为独立同分布的随机变量序列，其共同分布为

$$P(X_n = \frac{2^k}{k^2}) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

试问  $\{X_n\}$  是否服从大数定律？

2. 用蒙特卡罗方法计算定积分（平均值或随机投点）：

$$I = \int_0^\infty e^{\sin(\ln(x)) - x^2} dx \quad (2)$$

3. 设  $\{X_n\}$  为以独立同分布的随机变量序列，已知  $E(X_i^k) = \alpha_k, k = 1, 2, 3, 4$ . 试证明：当  $n$  充分大时， $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$  近似服从正态分布，并指出此正态分布的参数。

4. 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是一个样本， $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  是样本方差，试证：

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2 = s^2 \quad (3)$$

5. 设  $x_1, x_2, x_3$  服从均匀分布  $U(0, \theta)$ ，试证  $\frac{4}{3}x_{(3)}$  及  $4x_{(1)}$  都是  $\theta$  的无偏估计，哪个更有效？

6. 设总体概率函数如下， $x_1, x_2, \dots, x_n$  是样本，试求未知参数的最大似然估计

(a)  $p(x; \theta) = \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, 0 < x < 1, \theta > 0;$

(b)  $p(x; \theta) = \theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, x > c, \theta > 1; c > 0$  已知。

7. 设随机变量  $X \sim F(n, m)$ ，证明： $Z = \frac{n}{m} X / (1 + \frac{n}{m} X)$  服从贝塔分布，并指出其参数。

8. 设总体  $X$  的密度函数为  $\lambda e^{-\lambda x} I_{x>0}$ ，其中  $\lambda > 0$  为位置参数， $x_1, \dots, x_n$  为抽自此总体的简单随机样本，求  $\lambda$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间。