1 矩阵乘法

1. $A = [a_1, \ldots, a_n]$ 是一个行向量， $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$ 是一个列向量。计算矩阵乘积 AB 和 BA.

2. A, B, C 分别是一个$l \times m, m \times n, n \times p$ 的矩阵。 1): 需要做多少次乘法来计算 AB; 2): 哪一种顺序计算ABC使得乘法的次数最少, 请给出乘法的个数。

3. 验证矩阵乘法的结合律：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

4. 计算下列矩阵乘积：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n \tag{2}$$

5. 一个方块矩阵A称之为幂零的如果存在一个k使得$A^k = 0$. 证明： 如果A是幂零的，那么$I + A$是可逆的。

6. 求多项式$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$在下列矩阵时的取值:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

7. 如果方块矩阵A,B的逆矩阵分别是A^{-1} 和 B^{-1}, 求AB 的逆。

8. 两个矩阵乘法是交换的，如果$AB = BA$. 证明：如果一个方矩阵A和所有的方矩阵都是交换的，那么 $A = cI$, 这里I是一个单位矩阵，c是一个实常数。

9. 证明： $AB - BA = I$ 无论对怎样的A和B都不成立。

1.1 分块矩阵

1. 用分块矩阵的办法计算下列矩阵乘积：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{array}\right] \tag{4}$$

2. $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$，这里$B$和$C$都是方块矩阵。证明：A是可逆的当且仅当$B$和$C$都是可逆的。

3. A是一个分块矩阵，证明： A可以乘上自己的充分必要条件是A的对角上的小块都是方块。