《高等微积分》第二次作业

1、解 (1) $\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})$

由极限不等式 $\lim(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}) \leqslant \lim\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) = \lim\frac{1}{2}+\lim\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

而 $\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \geqslant \frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} = \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}$

由极限不等式 $\lim(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}) \geqslant \frac{1}{2}$

则由夹逼定理 $\lim(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}) = \frac{1}{2}$

(2) ① 若 $a>0$ 或 $a=0$ 且 $b\geqslant 0$ $\quad \forall \varepsilon>0$ 取 $N=\max\{[\frac{b-(\frac{a}{2}+\varepsilon)^2}{2\varepsilon}]+1, 1\}$

则 $\forall n \geqslant N$ 均有 $2n\varepsilon > b-(\frac{a}{2}+\varepsilon)^2$ 即有 $n^2+an+b < (n+\varepsilon+\frac{a}{2})^2$

即有 $\sqrt{n^2+an+b}-n-\frac{a}{2}<\varepsilon \Rightarrow |(\sqrt{n^2+an+b}-n)-\frac{a}{2}|<\varepsilon$

则 $\lim(\sqrt{n^2+an+b}-n) = \frac{a}{2}$

② 若 $a<0$ 或 $a=0$ 且 $b<0$ $\quad \forall \varepsilon>0$ 取 $N=\max\{[\frac{(\frac{a}{2}-\varepsilon)^2-b}{2\varepsilon}]+1, 1\}$

则 $\forall n \geqslant N$ 均有 $2n\varepsilon > (\frac{a}{2}-\varepsilon)^2-b$ 即有 $(n+\frac{a}{2}-\varepsilon)^2 < n^2+an+b$

即有 $n-\sqrt{n^2+an+b}+\frac{a}{2}<\varepsilon \Rightarrow |(\sqrt{n^2+an+b}-n)-\frac{a}{2}|<\varepsilon$

则 $\lim(\sqrt{n^2+an+b}-n) = \frac{a}{2}$

综上：$\lim(\sqrt{n^2+an+b}-n) = \frac{a}{2}$

2、解：设 $a_k=1$ 则 $n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$

$\forall \varepsilon>0$ 对于第 i 项 $a_i n^i$ 取 $N_i=\max\{2i+1, [\frac{2^i|a_i|i!}{\varepsilon^{i+1}}]+1\}$

则 $\forall n_i \geqslant N_i$ 均有 $a_i i! < \frac{n}{2^i}\varepsilon^{i+1}$

而对于 $1\leqslant j\leqslant i$ 均有 $\frac{n-j}{n} \geqslant \frac{1}{2}$

则 $a_i i! < \frac{n}{2^i}\varepsilon^{i+1} \leqslant \frac{n(n-1)\cdots(n-i)}{\underbrace{n\cdots n}_{i+n}}\varepsilon^{i+1}$

$\Rightarrow a_i n^i < \frac{n(n-1)\cdots(n-i)}{i!}\varepsilon^{i+1} = C_n^{i+1}\varepsilon^{i+1}$

取 $N=\max\{N_0,\dots N_k\}$ 则对于 $n \geqslant N$ 有

$$\sum_{i=0}^{k} a_i n^i < \sum_{i=0}^{k} C_n^{i+1}\varepsilon^{i+1} < \sum_{i=0}^{n} C_n^i \varepsilon^i = (1+\varepsilon)^n$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt[n]{\sum_{i=0}^{k} a_i n^i}-1\right| < \varepsilon$$

则 $\lim\sqrt[n]{n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_0} = 1$

3. (1) 证明：$\lim\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q<1$ 则 $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{Z}_+$ 使 $n\geqslant N$ 有

$|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}-q|<\varepsilon \Rightarrow q-\varepsilon<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<q+\varepsilon$

① 若 $0<\varepsilon<1-q$ 则 $q+\varepsilon<1$ 设 $\frac{1}{q+\varepsilon}=1+A>1\ (A>0)$ 设 $C=\frac{|a_N|}{|a_{N-1}|}\cdots\frac{|a_2|}{|a_1|}|a_1| / (q+\varepsilon)^N$

$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_2|}{|a_1|}|a_1| = C(q+\varepsilon)^N\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdots\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} \leqslant C(q+\varepsilon)^N(q+\varepsilon)^{n-N} = C(q+\varepsilon)^n$

$= C\frac{1}{(1+A)^n} \leqslant C\frac{1}{1+nA}$

取 $N_0=\max\{[\frac{C-\varepsilon}{\varepsilon A}]+1, N\}$ $\forall n\geqslant N_0$ 有 $|a_n| \leqslant C\frac{1}{1+nA} < \varepsilon$

即 $|a_n|<1-q$

② 若 $\varepsilon \geqslant 1-q$ 则 取 $N_1=\max\{[\frac{C-\varepsilon}{\varepsilon A}]+1, N\}$ $\forall n\geqslant N_1$ $|a_n|<1-q\leqslant\varepsilon$

综上：$\forall \varepsilon>0$ 取 N_0 $\forall n\geqslant N_0$ $|a_n|<\varepsilon$

则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(2) 解：设 $x_n=\frac{a^n}{n!}$ 则 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\frac{a}{n+1}$

则两边取极限 $\lim\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\lim\frac{a}{n+1}=0<1$

由(1)中结论 $\lim x_n=\lim\frac{a^n}{n!}=0$.

(3) 解：设 $x_n=\frac{n^k}{a^n}$ 则 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\frac{(n+1)^k/a^{n+1}}{n^k/a^n}=\frac{1}{a}(1+\frac{1}{n})^k$

则两边取极限 $\lim\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\lim\frac{1}{a}(1+\frac{1}{n})^k$

由极限四则运算 $\lim\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\frac{1}{a}[\lim(1+\frac{1}{n})]^k$

$=\frac{1}{a}[\lim 1+\lim\frac{1}{n}]^k=\frac{1}{a}<1$

由(1)中结论 $\lim x_n=\lim\frac{n^k}{a^n}=0$.

(4) 解：设 $x_n=\frac{n!}{(\frac{n}{q})^n}$ 则 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\frac{(n+1)!/(\frac{n+1}{q})^{n+1}}{n!/(\frac{n}{q})^n}=(\frac{n}{n+1})^n q$

$\Rightarrow \lim\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\lim[(\frac{n}{n+1})^n q]=q\lim(\frac{n}{n+1})^n<e\lim(\frac{n}{n+1})^n=\lim(1+\frac{1}{n})^n\lim(\frac{n}{n+1})^n$

$=\lim[(\frac{n+1}{n})^n\cdot(\frac{n}{n+1})^n]=\lim 1=1$

即 $\lim\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}<1$

由(1)中结论 $\lim x_n=\lim\frac{n!}{(\frac{n}{q})^n}=0$.

4. (1) 证明： 由数学归纳法 $x_1=\frac{1}{2}(x_0+\frac{k}{x_0})=\frac{1}{2}(a+\frac{k}{a})\geq\sqrt{a\cdot\frac{k}{a}}=\sqrt{k}>0$.

设 $n=i$ 时 $x_i\geq\sqrt{k}>0$

则 $x_{i+1}=\frac{1}{2}(x_i+\frac{k}{x_i})\geq\sqrt{x_i\cdot\frac{k}{x_i}}=\sqrt{k}>0$.

即 $n=i+1$ 时 $x_{i+1}\geq\sqrt{k}>0$ 也成立

综上 $\forall n\in\mathbb{Z}_+$, $x_n\geq\sqrt{k}$

(2) 证明： $\forall n\in\mathbb{Z}_+$ 欲证 $x_{n+1}\leq x_n$

只需证 $\frac{1}{2}(x_n+\frac{k}{x_n})\leq x_n$

即证 $x_n\geq\frac{k}{x_n}$ （$x_n>0$ 已证）

即证 $x_n^2\geq k$

而由(1) $x_n\geq\sqrt{k}$ 则 $x_n^2\geq k$ 显然成立

综上 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不增.

(3) 证明： $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不增 且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有下界 $\sqrt{k}$

由 Weierstauss 定理 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在极限，将之设为 L.

由极限定义 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{Z}_+$ $\forall n\geq N$ $|x_n-L|<\varepsilon$

又由极限定义知 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 极限也为 L.

因此 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛

(4) 解： $\forall n\in\mathbb{Z}_+$ $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{k}{x_n})$

取极限 $\lim x_{n+1}=\lim\frac{1}{2}(x_n+\frac{k}{x_n})$

$=\frac{1}{2}\lim x_n+\frac{1}{2}\frac{k}{\lim x_n}$

设 $\lim x_n=L$

则 $L=\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}\frac{k}{L}$

$\Rightarrow L^2=k$

考虑到 $x_n\geq0$ 则有 $\lim x_n=L\geq0$

$\therefore L=\sqrt{k}$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{k}$.

5. (1) 证明：$\forall n\in\mathbb{Z}_+$ $x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$ $y_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+y_{n-1})$ 由数学归纳法 $x_n>0$ $y_n>0$

$$(x_{n-1}-y_{n-1})^2\geq 0$$
$$\Rightarrow x_{n-1}^2+y_{n-1}^2\geq 2x_{n-1}y_{n-1}$$
$$\Rightarrow (x_{n-1}+y_{n-1})^2\geq 4x_{n-1}y_{n-1}$$
$$\Rightarrow \frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}\geq\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$$
$\Rightarrow y_n\geq x_n$ 得证

(2) 证明：$\forall n\in\mathbb{Z}_+$ $x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}\geq\sqrt{x_{n-1}\cdot x_{n-1}}=x_{n-1}$

$y_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+y_{n-1})\leq\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_{n-1})=y_{n-1}$

∴ 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不增的

(3) 证明：由 (1)(2) $\sqrt{ab}=x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n\leq y_n\leq y_{n-1}\leq\cdots\leq y_1=\frac{a+b}{2}$
$\forall n\in\mathbb{Z}_+$

则 $\forall n\in\mathbb{Z}_+$ $x_n\leq\frac{a+b}{2}$；$y_n\geq\sqrt{ab}$

即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界 $\frac{a+b}{2}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有下界 $\sqrt{ab}$，得证.

(4) 证明：$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界且不减，由 Weierstrass 定理，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限设为 A.

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有下界且不增，由 Weierstrass 定理，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限，设为 B

综上：$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛

(5) 证明：对 $y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$ 两边取极限

$$\lim y_{n+1}=\lim\frac{1}{2}(x_n+y_n)$$
$$=\frac{1}{2}[\lim x_n+\lim y_n]$$

设 $\lim x_n=A$，$\lim y_n=B$

则 $B=\frac{1}{2}(A+B)$ 即 $A=B$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

6. (1) 证明：由极限的定义 取 $\varepsilon=1$ $\exists N\in\mathbb{Z}_+$ $\forall n\geq N$ 有 $|a_n-A|<1$

则 $a_n-A<1\Rightarrow a_n<A+1$

因 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不减，则 $\forall n<N$ 也有 $a_n<A+1$

∴ $A+1$ 为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个上界，由确界定理，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在上确界

设上确界为 L，$a_n\leq L$ 对任意 $n\in\mathbb{Z}_+$ 均成立

$\forall\varepsilon>0$ $L-\varepsilon$ 不是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上界

则 $\exists N_0\in\mathbb{Z}_+$ $a_{N_0}>L-\varepsilon$

又 ∵ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不减 则 $\forall n\geq N_0$ 均有 $a_n>L-\varepsilon$.

则 $-\varepsilon<a_n-L\leq 0$ $\Rightarrow$ $|a_n-L|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\lim a_n=L$.

于是 $L=A$，即 A 是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上确界

$\forall n\in\mathbb{Z}_+$ 均有 $a_n\leq A$.

(2) 证明：① 先证不等式左侧 $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n\cdot 1}\leq\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$

即 $(1+\frac{1}{n})^n\leq(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$，设 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 则 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减数列

又 ∵ $\lim a_n=e$，由 (1) 中结论 $\forall n\in\mathbb{Z}_+$ 均有 $a_n\leq e$.

即 $(1+\frac{1}{n})^n\leq e$ 得证

② 对于不等式的右边 设 $b_n=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$

先证 $\forall n\in\mathbb{Z}_+$ $\{b_n\}$ 是不减的

$\Leftarrow$ 即证 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 是不增的

$\Leftarrow$ 即证 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}\geq(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$

$\Leftarrow$ 即证 $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}\leq 1+\frac{1}{n}$

而 $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}=\sqrt[n+1]{(\frac{n+2}{n+1})^2\cdot(\frac{n+2}{n+1})^n}\leq\frac{(\frac{n+2}{n+1})^2+(\frac{n+2}{n+1})n}{n+1}=\frac{(n+2)^2+n(n+1)(n+2)}{(n+1)^3}$

$=\frac{n^3+4n^2+6n+4}{n^3+3n^2+3n+1}=1+\frac{n^2+3n+3}{n^3+3n^2+3n+1}\leq 1+\frac{n^2+3n+3+\frac{1}{n}}{n^3+3n^2+3n+1}=1+\frac{1}{n}$

即 $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}\leq 1+\frac{1}{n}$ 得证，因此 $\{b_n\}$ 是不减的

而 $\lim b_n=\lim\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{1}{\lim(1+\frac{1}{n})^n\cdot\lim(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{e}$

则由(1)结论 $\forall n\in\mathbb{Z}_+$ $b_n\leq\frac{1}{e}$

即 $\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}\leq\frac{1}{e}\Rightarrow e\leq(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

结合①② $(1+\frac{1}{n})^n\leq e\leq(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 得证

(3)

由(2) $(1+\frac{1}{n})^n\leq e\leq(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

$\Rightarrow\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\leq en\leq\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$

$$\begin{cases} n=1\text{时} & \frac{2^1}{1^0}\leq e\cdot 1\leq\frac{2^2}{1^1} \quad ① \\ n=2\text{时}, & \frac{3^2}{2^1}\leq e\cdot 2\leq\frac{3^3}{2^2} \quad ② \\ & \vdots \\ n=n\text{时} & \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\leq e\cdot n\leq\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \quad ⓝ \end{cases}$$

累乘①~ⓝ式 $(n+1)^n\leq e^n n!\leq(n+1)^{n+1}$

$\Rightarrow\frac{(n+1)^n}{e^n}\leq n!\leq\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$

(4)

由(3) $\frac{(n+1)^n}{e^n}\leq n!\leq\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$

$\Rightarrow\frac{(n+1)^n}{e^n n^n}\leq\frac{n!}{n^n}\leq\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n n^n}$

$\Rightarrow\frac{n+1}{en}\leq\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\leq\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}{en}=\frac{n+1}{en}(1+n)^{\frac{1}{n}}$ *

$\forall\varepsilon>0$ 取 $N=\max\{3,[\frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2}]+2\}$ $\forall n\geq N$ 时

$\frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2}+1<n\Rightarrow 1<\varepsilon+\frac{n-1}{2}\varepsilon^2$

$\Rightarrow 1+n<1+n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2\leq(1+\varepsilon)^n$

$\therefore 0<(1+n)^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$

即 $|(1+n)^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon\Rightarrow\lim(1+n)^{\frac{1}{n}}=1$

由*式 $\lim\frac{n+1}{en}=\frac{1}{e}\lim(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{e}$

$\lim\frac{n+1}{en}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim\frac{n+1}{en}\lim(1+n)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{e}$

由夹逼定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{e}$