STIRLING数

定义： n个有区别的球放到m个相同的盒子中，要求无一空盒，其不同的方案数称为第二类Stirling数.

定理： 第二类Stirling数$S(n,m)$有下列性质：

$(a) S(n,0)=0,$

$(b) S(n,1)=1,$

$(c) S(n,2)=2^{n-1}-1,$

$(d) S(n,n-1)=C(n,2),$

$(e) S(n,n)=1.$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

STIRLING数

定理： 第二类Stirling数满足下面的递推关系：

$$S(n,m) = mS(n-1,m) + S(n-1,m-1), \qquad (n > 1, m \geq 1).$$

证明：设有n个有区别的球$b_1, b_2, \ldots, b_n$, 从中取一个球设为b_1. 把n个球放到m个盒子无一空盒的方案的全体可分为两类。

（a）b_1独占一盒，其方案数显然为$S(n-1, m-1)$

（b）b_1不独占一盒，这相当于先将剩下的$n-1$个球放到m个盒子，不允许空盒，共有$S(n-1,m)$ 种不同方案，然后将b_1球放进其中一盒，方案数为$mS(n-1,m)$.

根据加法法则有 $S(n,m) = S(n-1,m-1) + mS(n-1,m)$.

STIRLING数

- 红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里。
$$S(5,2) = 2S(4,2) + S(4,1) = 2 \times 7 + 1 = 15$$
- 故共有15种不同的方案。

先把绿球取走，余下的四个球放到两个盒子。用r，y，b，w分别表示红，黄，蓝，白球，绿球用g表示

g不独占一盒				g独占一盒	
第1盒子	第2盒子	第1盒子	第2盒子	第1盒子	第2盒子
rg yg bg wg ryg rbg rwg	ybw rbw ryw ryb bw yw yb	r y b w ry rb rw	ybwg rbwg rywg rybg bwg ywg ybg	g	rybw

STIRLING数

例 第二类Stirling数的展开式义：

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

- $S(n,m)$的组合意义：将n个有标志的球放入m个无区别的盒子，而且无一空盒的方案数.
- 思路：先考虑n个有标志的球，放入m个有区别的盒子，无一空盒的方案数.

STIRLING数

思路：容斥原理

解： n个有标志的球放入m个有区别的盒子的事件全体为S,

$|S| = m^n$

- A_i表示第i个盒子为空, i=1,2…m;

  $|A_i| = (m\text{-}1)^n$ 共有 C(m,1)个

  $|A_i \cap A_j| = (m\text{-}2)^n$ 共有 C(m,2)个

  …………………

- 求无空盒的方案数

m个有区别盒子,无空盒的方案数:

$$N=|\overline{A1}\cap\overline{A2}\ldots\ldots\cap\overline{An}|$$

$$=m^n-C(m,1)(m-1)^n+C(m,2)(m-2)^n+\ldots+(-1)^m C(m,m)(m-m)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

而第二类Stirling数要求盒子无区别,则:

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

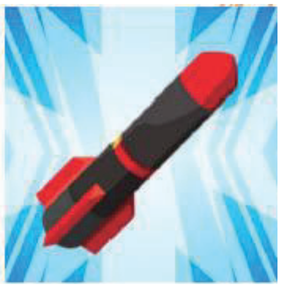
推论:因为$S(m,m)=1$,

$$m!=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^m$$

思考题：导弹拦截问题

1, 2, 3, 2, 4, 1, 3, 4

- 一种导弹拦截系统的第一发炮弹能够到达任意的高度，但是以后每一发炮弹都不能高于前一发的高度。某天，雷达捕捉到敌国的导弹来袭。由于该系统还在试用阶段，所以只有一套系统，因此有可能不能拦截所有的导弹。
- 输入导弹依次飞来的高度，计算这套系统最多能拦截多少导弹。



最长不上升子序列(≥)