4.19 作业

1. 设 V 是复数域上有限维线性空间，σ 是 V 上的线性变换。

   (a) 设 μ, λ 为 σ 的特征值，且 $\mu \neq \lambda$，证明：$\sigma - \mu\mathrm{I}$ 限制于属于 λ 的根子空间 U_λ 上为单射[1]；

   (b) 设 λ 为 σ 的特征值，证明：$\dim U_\lambda$ 为 λ 的代数重数。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$ 为分块对角矩阵，其中每个 A_i 都为方阵。设 $m_{A_i}(x)$ 是 A_i 的极小多项式，证明：$m_A(x)$ 是 $m_{A_i}(x)(i = 1, \cdots, s)$ 的最小公倍式。

3. 计算如下矩阵的极小多项式。

   (a) Jordan 块 $J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}_{m \times m}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

4. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，σ 是 V 上的线性变换，它在基 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ 下的表示矩阵为 Jordan 块 $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}$.

   证明：

   - V 中包含 ϵ_n 的 σ 的不变子空间只有 V 自身；
   - V 中任何非零的 σ 的不变子空间都包含 ϵ_1；
   - V 不能分解成两个非平凡的 σ 的不变子空间的直和。

[1] 注意 U_λ 是 $(\sigma - \mu\mathrm{I})$-不变子空间，所以 $(\sigma - \mu\mathrm{I})$ 可以看作 U_λ 上的映射。