HW1 参考答案

判断题

1-1 True
1-2 False
　　G 不是有效的，不意味着 G 不可满足。一个简单的反例是 F=True，G=p
1-3 True
1-4 False
　　一个公式的有效性等价于其非的不可满足性，因此，一阶逻辑公式的可满足性也是不可判定的

解答题

2-1

F 为有效式，真值表略。

使用相继式演算证明 F 的有效性时，需完整地画出推导树，一般从下往上画，每一步最好标明使用的规则，不要省略步骤。参考下图

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{
            \dfrac{}{P \to (Q \to R), P \vdash P, R}\,(\text{包含})
          }{P \to (Q \to R), \neg P, P \vdash R}\,(\text{左否定})
          \qquad
          \dfrac{
            \dfrac{
              \dfrac{}{R, Q, P \vdash R \qquad Q, P \vdash Q, R}\,(\text{包含})
            }{(Q \to R), Q, P \vdash R}\,(\text{左蕴含})
            \qquad
            \dfrac{}{Q, P \vdash P, R}\,(\text{包含})
          }{P \to (Q \to R), Q, P \vdash R}\,(\text{左蕴含})
        }{P \to (Q \to R), \neg P \vee Q, P \vdash R}\,(\text{左析取})
      }{P \to (Q \to R), \neg P \vee Q \vdash \neg P, R}\,(\text{右否定})
    }{P \to (Q \to R), \neg P \vee Q \vdash \neg P \vee R}\,(\text{右析取})
  }{P \to (Q \to R) \vdash (\neg P \vee Q) \to (\neg P \vee R)}\,(\text{右蕴涵})
}{\vdash (P \to (Q \to R)) \to ((\neg P \vee Q) \to (\neg P \vee R))}\,(\text{右蕴涵})
$$

2-2

证明一条相继式演算规则可靠的方法，见第 2 节课件 28 页的例子。此处注意需从语义出发，讨论不同的赋值下的情况，不能直接将推导规则化为 前提→结论 形式的公式进行证明。

2-3

取值为 True，按照定义化简即可

2-4

使用一阶逻辑的相继式演算系统时，注意两点：

1. 规则应应用在主连接词上。本题中，大量同学在 2.中首先应用左存在消去相继式左侧的存在量词，这种作法可能导致错误的推导。

2. 理解左存在、右全称的应用条件，区别它们和右存在、左全称的区别。

参考下图

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(c)\vdash p(c),q(c) \qquad q(c),p(c)\vdash q(c)}\text{(包含)}}{p(c)\to q(c),p(c)\vdash q(c)}\text{(左蕴含)}}{p(c)\to q(c),p(c)\vdash \exists z.q(z)}\text{(右存在)}}{p(c)\to q(c),\forall y.p(y)\vdash \exists z.q(z)}\text{(左全称)}}{\exists x.p(x)\to q(x),\forall y.p(y)\vdash \exists z.q(z)}\text{(左存在)}}{\exists x.p(x)\to q(x)\vdash (\forall y.p(y))\to \exists z.q(z)}\text{(右蕴含)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q(c),p(c)\vdash q(c)}\text{包含}}{q(c)\vdash p(c)\to q(c)}\text{右蕴含}}{q(c)\vdash \exists x.p(x)\to q(x)}\text{右存在}}{\exists z.q(z)\vdash \exists x.p(x)\to q(x)}\text{左存在} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(c)\vdash p(c),q(c)}\text{包含}}{\vdash p(c),p(c)\to q(c)}\text{右蕴含}}{\vdash p(c),\exists x.p(x)\to q(x)}\text{右存在}}{\vdash \forall y.p(y),\exists x.p(x)\to q(x)}\text{右全称}}{(\forall y.p(y))\to \exists z.q(z)\vdash \exists x.p(x)\to q(x)}\text{左蕴含}$$