《高等微积分 2》第十二周习题课

1 定义函数 $f(x)=\int_1^x \sin(t^2)dt$. 求 $\int_0^1 f(x)dx$.(一般的, 可以把 $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ 称为 f 在 $[a,b]$ 上的平均值)

2 当 $t\to 0^+$ 时, 求无穷小量

$$f(t)=\iint_{x^2+y^2\le t^2}\left(1-\cos(x^2+y^2)\right)d\sigma$$

的阶.

3 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$. 计算二重积分 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

4 设 $f(x)$ 是连续的偶函数. 证明:

$$\iint_D f(x-y)dxdy = 2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)du,$$

其中 $D=\{(x,y): |x|\le a, |y|\le a\}$.

5 设 $f\in C([0,1])$, 且 $\int_0^1 f(x)dx = A$. 求

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy.$$

6 (1) 设函数 f 在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有连续的二阶偏导数. 计算积分

$$\iint_I \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy.$$

(2) 利用 (1) 的结果证明: 如果 f 的二阶偏导数都连续, 则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},$$

这个证明也许比微分中的证明方法简单.

7 计算

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz,$$

其中 $D=\{(x,y,z)|z\geq 0, a^2\leq x^2+y^2+z^2\leq b^2\}$.

8 设 D 是两个球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 和 $x^2+y^2+z^2=az$ 之间的所有点构成的三维闭区域. 计算

$$\iiint_D zdxdydz.$$

9 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leq 1, y^2+z^2\leq 1, z^2+x^2\leq 1\}$. 求 Ω 的体积.

10 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $0<m\leq f(x)\leq M, \forall x\in[0,1]$.

(1) 证明: $\displaystyle\iint_{0\leq x,y\leq 1}\frac{f(x)}{f(y)}dxdy\geq 1$.(提示: 对不等式 $\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\geq 2$ 积分)

(2) 证明: $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx+mM\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\leq m+M$.(提示: 利用不等式 $(f(x)-m)\cdot(f(x)-M)\leq 0$)

(3) 利用 (2) 的结论证明:

$$\iint_{0\leq x,y\leq 1}\frac{f(x)}{f(y)}dxdy\leq\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

(注: 此不等式称为康托洛维奇不等式)

11 计算三重积分

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz,$$

其中 $D=\{(x,y,z)|z\geq 0, a^2\leq x^2+y^2+z^2\leq b^2\}$.

12 设 D 是两个球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 和 $x^2+y^2+z^2=az$ 之间的所有点构成的三维闭区域. 计算

$$\iiint_D zdxdydz.$$

13 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数. $\Omega_t=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leq t^2, 0\leq z\leq h\}$, 定义

$$F(t)=\iiint_{\Omega_t}\left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz.$$

计算 $F'(t)$ 与 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^2}$.

14 给定可逆矩阵 $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$. 令

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) | 0 \le \sum_{i=1}^{3} a_i x_i \le A, 0 \le \sum_{i=1}^{3} b_i x_i \le B, 0 \le \sum_{i=1}^{3} c_i x_i \le C\}.$$

证明: 对正数 α, β, γ, 有

$$\iiint_\Omega (\sum_{i=1}^{3} a_i x_i)^\alpha \cdot (\sum_{i=1}^{3} b_i x_i)^\beta \cdot (\sum_{i=1}^{3} c_i x_i)^\gamma \cdot dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{A^{\alpha+1} B^{\beta+1} C^{\gamma+1}}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \cdot |\det M|}.$$

15 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是连续函数.

(1) 证明:

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f(x) \cdot (b-x)^{n-1} dx.$$

(2) 证明:

$$\int_a^b dx \int_a^x dy \int_a^y f(x) f(y) f(z) dz = \frac{1}{6} (\int_a^b f(u) du)^3.$$