# 高等微积分第五次作业

1. 证明：$f(0)=a_0<0$

而 $f(x)=x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_0=x^{2n}(1+a_{2n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_0\frac{1}{x^{2n}})$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+a_{2n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_0\frac{1}{x^{2n}})=1$

则取 $\varepsilon\in(0,1)$ $\exists k>0$ 使 $x>k$ 时 $|(1+a_{2n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_0\frac{1}{x^{2n}})-1|<\varepsilon$

即 $1+a_{2n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_0\frac{1}{x^{2n}}>1-\varepsilon>0$.

同理 $\exists k'<0$ 使 $x<k'$ 时 $1+a_{2n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_0\frac{1}{x^{2n}}>1-\varepsilon>0$.

则 $f(k)=x^{2n}(1+a_{2n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_0\frac{1}{x^{2n}})>0$.

$f(k')=x^{2n}(1+a_{2n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_0\frac{1}{x^{2n}})>0$

根据介值定理 $f(x)=0$ 在 $(k',0)$ 与 $(0,k)$ 之间至少分别有一根 #.

2. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty \Rightarrow \forall M>0\ \exists k>0$ s.t. $|x|>k$ 有 $f(x)>M$

取 $M=f(0)$. 则 $|x|>k$ 有 $f(x)>f(0)$.

由最值定理：$f$ 在 $[-k,k]$ 上必存在一个最小值点 $x_1$. 记最小值为 $x_1$

易知 $0\in[-k,k]$ 则 $f(0)\geq f(x_1)$

① $|x|>k$ 时 $f(x)>f(0)\geq f(x_1)$.

② $|x|\leq k$ 时 $f(x)\geq f(x_1)$. 则 $x_1$ 即为所求

综上：$\exists x_0\in R$ $\forall x\in R$ $f(x_0)\leq f(x)$. #

3. 证明：$P(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=x^4(1+\frac{a_3}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_1}{x^3}+\frac{a_0}{x^4})$.

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a_3}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_1}{x^3}+\frac{a_0}{x^4})=1$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\exists k>0$ 使 $|x|>k$ 时 $|(1+\frac{a_3}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_1}{x^3}+\frac{a_0}{x^4})-1|<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1+\frac{a_3}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_1}{x^3}+\frac{a_0}{x^4}>\frac{1}{2}$

$\forall M>0$ 取 $k=\max\{k_0,(2M)^{\frac{1}{4}}\}$

$P(x)=x^4(1+\frac{a_3}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_1}{x^3}+\frac{a_0}{x^4})>\frac{1}{2}x^4>\frac{1}{2}(2M)=M$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=+\infty$ 且 $P(x)$ 在 $R$ 上连续

则由第2题结论，$P(x)$ 在 $R$ 上有最小值 #

4. $f$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续

证明：设函数 $h(t)=\frac{t}{1-t}$ $(\frac{1}{2}\leq t<1)$ 设 $g:[\frac{1}{2},1)\to\mathbb{R}: f\circ h$，则 $f=g\circ h^{-1}$ (其中 $h^{-1}(t)=\frac{t}{1+t}$)

由 $f$ 在 $[1,+\infty)$、$h$ 在 $[\frac{1}{2},1)$ 上连续可知 $g$ 在 $[\frac{1}{2},1)$ 上连续

令 $\tilde{g}(x)=\begin{cases} g(x), & x\in[\frac{1}{2},1) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x), & x=1 \end{cases}$ 则 $\tilde{g}$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 连续

由定理：有界闭区间上的函数都一致连续 $\Rightarrow$ $\tilde{g}$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 一致连续

$\Rightarrow \exists\delta>0\ \forall\varepsilon>0\ \forall t_1,t_2\in[\frac{1}{2},1]$ 且 $|t_1-t_2|<\delta$ 有 $|\tilde{g}(t_1)-\tilde{g}(t_2)|=|f\circ h(t_1)-f\circ h(t_2)|<\varepsilon$

对 $f$：$\exists\delta>0\ \forall\varepsilon>0\ \forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 令 $t_1=\frac{x_1}{1+x_1}$，$t_2=\frac{x_2}{1+x_2}$

则 $|t_1-t_2|=|\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}|=|\frac{x_2-x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}|=\frac{|x_1-x_2|}{|(1+x_1)(1+x_2)|}<|x_1-x_2|<\delta$.

则 $|f(x_1)-f(x_2)|=|f(\frac{t_1}{1-t_1})-f(\frac{t_2}{1-t_2})|=|f\circ h(t_1)-f\circ h(t_2)|<\varepsilon$. $f$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续 #

补证：$x^\alpha$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，考虑到 $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 时，$x^\alpha$ 定义为取 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有理数列使 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，则 $x^\alpha \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}x^{a_n}$.

对于 $\alpha\in\mathbb{Q}$，$x^\alpha$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续已证明，只需证 $x^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ 时也在 $[1,+\infty)$ 上连续

① $\alpha>0$ 时，由稠密性（两实数间必有有理数）可知 $(0,\alpha)$ 与 $(\alpha,\alpha+1)$ 间分别存在 $a,b\in\mathbb{R}$.

$\forall\varepsilon>0$ 取 $\delta=\min\left\{x_0\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{x_0^\alpha}\right)^{\frac{1}{b}}-1\right],\ x_0\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon}{x_0^\alpha}\right)^{\frac{1}{a}}\right]\right\}$ $\forall\ |x-x_0|<\delta$

$$\frac{x^\alpha}{x_0^\alpha}-1<\left(\frac{x_0+\delta}{x_0}\right)^\alpha-1<\left(1+\frac{\varepsilon}{x_0^\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{b}}-1<\left(1+\frac{\varepsilon}{x_0^\alpha}\right)-1=\frac{\varepsilon}{x_0^\alpha}$$

$$\frac{x^\alpha}{x_0^\alpha}-1>\left(\frac{x_0-\delta}{x_0}\right)^\alpha-1>\left(1-\frac{\varepsilon}{x_0^\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{a}}-1>\left(1-\frac{\varepsilon}{x_0^\alpha}\right)-1=-\frac{\varepsilon}{x_0^\alpha}$$

则 $-\varepsilon<x^\alpha-x_0^\alpha<\varepsilon \Rightarrow |x^\alpha-x_0^\alpha|<\varepsilon$，$\alpha>0$ 时 $x^\alpha$ 在 $[1,+\infty)$ 连续

② $\alpha<0$ 时 $x^\alpha=\frac{1}{x^{-\alpha}}$，$x^{-\alpha}$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，则 $x^\alpha$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续、

5、 阶数：$x^x>[x]!>a^x>x^\alpha>\ln x$

证明：① 证 $x^x>[x]!$

$\forall k>0$ 取 $M=[2\log_2 k]+1$ $\forall x>M$ 有 $\frac{[x]}{[\frac{M}{2}]}\geqslant 2$

$$\frac{x^x}{[x]!}\geqslant\frac{[x]^{[x]}}{[x]!}=\frac{[x]}{1}\frac{[x]}{2}\cdots\frac{[x]}{[\frac{M}{2}]}\cdots\frac{[x]}{[x]}>\frac{[x]}{1}\frac{[x]}{2}\cdots\frac{[x]}{[\frac{M}{2}]}$$

$$\geqslant 2^{[\frac{M}{2}]}>2^{\log_2 k}=k$$

则 $x^x$ 阶数大于 $[x]!$

② 证 $[x]!>a^x$

$\forall k>0$ 取 $M=\max\{[ka]+1,[2a]+1\}$ $\forall x>M$

$$\frac{[x]!}{a^x}>\frac{[x]!}{a^{[x]+1}}>\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{a}\cdots\frac{a}{a}\cdots\frac{a^2}{a}\cdot\frac{a^2+1}{a}\cdots\frac{2a^2}{a}\cdot\frac{ka^2}{a}\right.$$

$$>\frac{a^2}{a^2}\cdot\frac{a^2+1}{a^2}\cdots\frac{2a^2}{a^2}ka>ka>k.$$

则 $[x]!$ 阶数大于 $a^x$

③ 证 $a^x>x^\alpha$

$\forall k>0$ 取 $M=\max\left\{1,\left(\frac{2\alpha}{\ln\frac{a}{k}}\right)^2\right\}$ $\forall x>M$.

$$\frac{a^x}{x^\alpha}=e^{x\ln a-\alpha\ln x}=e^x\cdot e^{\ln a-2\alpha\frac{\ln\sqrt{x}}{x}}>e^{\ln a-2\alpha\frac{\sqrt{x}-1}{x}}$$

$$>e^{\ln a-2\alpha\frac{1}{\sqrt{x}}}>e^{\ln a-2\alpha\frac{1}{\sqrt{M}}}>e^{\ln a-2\alpha\frac{\ln\frac{a}{k}}{2\alpha}}=e^{\ln k}=k$$

则 $a^x$ 阶数大于 $x^\alpha$.

④ 证 $x^\alpha>\ln x$

$\forall k>0$ 由③知 $\exists M'>0$ $\forall x>M'$ $\frac{e^x}{x^{\frac{1}{\alpha}}}>(e^k+1)^{\frac{1}{\alpha}}\Rightarrow\frac{e^{x^\alpha}}{x}>e^k+1$

取 $M=\max\{1,M'\}$ $\forall x>M$ $\frac{x^\alpha}{\ln x}=\ln\left((e^x)^\alpha-e^{\ln x}\right)=\ln\left(e^{x^\alpha}-x\right)=\ln\left(\frac{e^{x^\alpha}}{x}-1\right)+\ln x$

$$>\ln e^k=k$$

则 $x^\alpha$ 阶数大于 $\ln x$

6、证明：① 先证 $a_n<\frac{1}{n}$　$a_1<1$ 显然成立，假设 $a_k<\frac{1}{k}$ 成立

则对于 $k+1$　$a_{k+1}=f(a_k)<\frac{1}{\frac{1}{a_k}+1}<\frac{1}{k+1}$ 也成立

综上：$a_n<\frac{1}{n}$

② 再证 $a_n>f(a_n)$

$a_{n+1}=f(a_n)<\frac{1}{\frac{1}{a_n}+1}=\frac{a_n}{a_n+1}<a_n$　$\Rightarrow 0<f(a_n)<a_n$.

③ $0<f(a_n)=a_{n+1}<a_n$　则 $\{a_n\}$ 递减且有下界，$\{a_n\}$ 有极限

而 $0<a_n<\frac{1}{n}$　由夹逼定理　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

④ 取 $t=1+\frac{1}{k}$　$\exists M\geq 1$ 使 $b\geq M$ 时 $f(\frac{1}{b})>\frac{1}{b+t}$

而 $\exists N$ s.t $n\geq N$ 时　$|a_n|<\frac{1}{M}$ $\Rightarrow$ $M<\frac{1}{a_n}$

取 $m=\frac{1}{a_N}-N(1+\frac{1}{k})$ $\Rightarrow$ $a_N=\frac{1}{N(1+\frac{1}{k})+m}$　下证 $n\geq N$ 时 $a_n\geq\frac{1}{n(1+\frac{1}{k})+m}$ 用归纳法

假设 $a_n\geq\frac{1}{n(1+\frac{1}{k})+m}$　则 $a_{n+1}=f(a_n)>\frac{1}{\frac{1}{a_n}+(1+\frac{1}{k})}=\frac{1}{(n+1)(1+\frac{1}{k})+m}$ 对 $n+1$ 也成立，得证

则结合①④　$\frac{1}{\frac{m}{n}+1+\frac{1}{k}}\leq na_n\leq 1$　取极限　$\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\leq\lim\limits_{n\to\infty}na_n\leq 1$

再对 $k$ 取极限　$\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{k}}=1\leq\lim\limits_{n\to\infty}na_n\leq 1$　$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$ 得证