# 清华大学本科生考试试题专用纸

**考试课程　概率论与随机过程 （A 卷）　2021 年 1 月 5 日**

**学号：__________　姓名：__________　班级：__________**

**一. 填空题（28 分，每空 4 分，将计算结果直接写在横线上）**

**(1)** 已知 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=P(B|A)=\frac{1}{3}$，则 $P(B|A\cup B)$ 等于__________。

**(2)** 在区间 $[0,1]$ 中随机地取出两个数，则此两数之和小于 $\frac{1}{2}$ 的概率 = __________。

**(3)** 设 $X$ 和 $Y$ 独立同分布，$X$ 服从二项分布 $B(4,p)$，则

$P(X=2|X+Y=3)=$__________。

**(4)** 设 $X$ 和 $Y$ 独立同分布，均服从参数为 $p$ 的几何分布，则 $P(X=Y)$=__________。

**(5)** 设 $(X,Y)$ 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & 0<x<1, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，则

$E[X(X-Y)]=$__________。

**(6)** 设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，均服从期望为 **6** 的几何分布，则当 $n\to\infty$ 时，

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-6)^2$ 依概率收敛到__________。

**(7)** 设 $\{B_t: t\geq 0\}$ 为标准 **Brown** 运动（$B_0=0$），则 $D(B_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}B_1)$=__________。

**二.（12 分）**设随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立同分布，满足 $P(X=k)=\frac{1}{4},\ k=1,2,3,4$。

（**1**）试求概率 $P(|X-E(X)|<1)$；

（**2**）试求概率 $P(\min(X,Y)\leq 2)$；

（**3**）记 $Z=\begin{cases} 1, & \min(X,Y)\leq 2, \\ -1, & \min(X,Y)>2. \end{cases}$ 设 $Z_1,Z_2,\cdots$ 相互独立，且均与 $Z$ 同分布，令

$U_n=U_0+\sum_{k=1}^{n}Z_k$，$U_0=0$，试求 $P(U_{2021}=0)$ 和 $P(U_4=2)$。

三.（15 分）设 $X,Y,Z$ 独立同分布，且 $X$ 满足 $P(X>x)=\begin{cases} e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 1, & x\le 0 \end{cases}$，$\lambda>0$，

（1）求 $P(X>aY)$，其中 $a$ 为大于 **0** 的常数；

（2）求 $P(X<Y\mid Y<Z)$；

（3）设与 $X,Y$ 独立的随机变量 $\eta$ 满足 $P(\eta=1)=P(\eta=2)=\frac{1}{2}$，试求 $P(X>\eta Y)$。

四.（20 分）设 $(X,Y)$ 服从区域 $D=\{(x,y):0<y<x<1\}$ 上的均匀分布，

（1）试求 $X$ 和 $Y$ 是否相互独立，为什么？

（2）试求 $Z=\frac{Y}{X}$ 分布函数 $F_Z(z)$；

（3）试求 $E[Y-E(Y\mid X)]^2$；

（4）试求 $E(X\mid X+Y<1)$。

五.（15 分）设三维正态随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3)^T\sim N(\mu,\Sigma)$，其中 $\mu=(0,0,0)^T$，

$$\Sigma=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 4 \end{pmatrix},$$

（1）令 $Z=X_1+2X_2-X_3$，试求 $Z$ 的特征函数 $\varphi_Z(\theta)$；

（2）令 $\begin{cases} X_1=R\cos\Theta \\ X_2=R\sin\Theta \end{cases}$，试问 $R$ 与 $\Theta$ 是否相互独立，为什么？

（3）试求 $E(X_2\mid X_3)$，并问常数 $a$ 为何值时，$aX_2-E(X_2\mid X_3)$ 与 $X_1+X_3$ 相互独立。

六.（10 分）设 $\{N_t:t\ge 0\}$ 是强度为 $\lambda>0$ 的 **Poisson** 过程，

（1）试求 $E(N_5\mid N_2=2),E(N_2\mid N_5=5)$；

（2）设 $T\sim E(1)$（参数为 **1** 的指数分布）且与 $\{N_t:t\ge 0\}$ 独立，求 $N_T$ 的分布。