高等微积分1第十一次作业

1. (1) 注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^{a-1}}{1+x}}{x^{a-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x}=1$

即 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}x^{a-2}dx$ 有相同收敛发散性

而 $\int_1^{+\infty}x^{a-2}dx=\begin{cases}收敛, a<1\\ 发散, a\geq 1\end{cases}$ 则 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\begin{cases}收敛, a<1\\ 发散, a\geq 1\end{cases}$

(2) ① $a\geq 1$ $\frac{x^{a-1}}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上连续，Riemann 可积，由最值定理，设 $[0,1]$ 最大值为 M

$\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}dx\leq\int_0^1 Mdx=M$ 即 $\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$ 收敛

② $a<1$ $\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$ 存在瑕点 $x=0$

注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x^{a-1}}{1+x}}{x^{a-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1+x}=1$ 即 $\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$ 与 $\int_0^1 x^{a-1}dx$ 有相同收敛发散性

而 $\int_0^1 x^{a-1}dx=\begin{cases}收敛, 0<a<1\\ 发散, a\leq 0\end{cases}$ 即 $\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\begin{cases}收敛, 0<a<1\\ 发散, a\leq 0\end{cases}$

综上：$a>0$ 时收敛，$a\leq 0$ 时发散

(3) 由(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$ 在 $a<1$ 时收敛　由(2) $\int_0^1\frac{x^{-a}}{1+x}dx$ 在 $a<1$ 时收敛，即 $a<1$ 二者均收敛

$\int_0^1\frac{x^{-a}}{1+x}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1\frac{x^{-a}}{1+x}dx\xlongequal{y=x^{-1}}\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1\frac{y^a}{1+\frac{1}{y}}(-\frac{1}{y^2})dy=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{y^{a-1}}{y+1}dy$

$\xlongequal{M=\frac{1}{\varepsilon}}\lim\limits_{M\to+\infty}\int_1^M\frac{y^{a-1}}{y+1}dy=\int_1^{+\infty}\frac{x^{-a}}{1+x}dx$

2. (1) 将 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2-bx-c}dx$ 进行截断，先证明 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2-bx-c}dx$ 收敛

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-ax^2-bx-c}}{e^{-|x|}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{ax^2+(b-1)x+c}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x^2(a+\frac{b-1}{x}+\frac{c}{x^2})}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x^2}}=0$

而 $\int_0^{+\infty}e^{-|x|}dx$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2-bx-c}dx$ 收敛

同理 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-ax^2-bx-c}}{e^{-|x|}}=0$ 　$\int_{-\infty}^0 e^{x}dx$ 收敛，则 $\int_{-\infty}^0 e^{-ax^2-bx-c}dx$ 收敛

综上：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2-bx-c}dx$ 收敛

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2-bx-c}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2+\frac{b^2}{4a}-c}dx=e^{\frac{b^2}{4a}-c}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2}dx$

$=\frac{e^{\frac{b^2}{4a}-c}}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2}d(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}})=\frac{e^{\frac{b^2}{4a}-c}}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{e^{\frac{b^2}{4a}-c}}{\sqrt{a}}I$

3、(1) 注意到 $\frac{|\sin n\theta|}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ 　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\theta|}{n^2}$ 收敛

则 $\sum\frac{\sin n\theta}{n^2}$ 绝对收敛 $\Rightarrow\sum\frac{\sin n\theta}{n^2}$ 收敛

(2) 设 $\frac{n!}{n^n}=a_n$ 　$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{e}$ 　则由 Ratio Test $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛

(3) 设 $\frac{n!\,a^n}{n^n}=a_n$ 　$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$ 　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a}{e}$

① $a>e$ 　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,a^n}{n^n}$ 发散

② $0<a<e$ 　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,a^n}{n^n}$ 收敛

③ $a=e$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$

$k_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} - 1 = \frac{(1+\frac{1}{n})^n - e}{e} < 0$

即 $\forall n \geq 1$ 有 $k_n \leq 0$ 由 d'Alembert 判别法 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ 发散

综上：$0<a<e$ 时原级数收敛，$a \geq e$ 时原级数发散

(4) 设 $a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ $\quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\ln n / n}}{\ln n}$

而 $n^{\ln n/n} = e^{\frac{\ln^2 n}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\ln n/n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln^2 n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n}} = e^0 = 1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim n^{\ln n/n} \cdot \lim \frac{1}{\ln n} = 1 \cdot 0 = 0$

则根据 Root test $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(\ln n)^p}{1+n^2}}{\frac{(\ln n)^p}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{1+n^2}$ 敛散性与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^2}$ 一致

$\frac{(\ln n)^p}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \frac{(\ln n)^p}{\sqrt{n}}$

考虑到 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^p}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow$ 取 $0<c<1$ $\exists N$ $\forall n \geq N$ $\frac{(\ln n)^p}{\sqrt{n}} < c$

则 $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^2} = \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \frac{(\ln n)^p}{\sqrt{n}} < c \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 而 $c \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛

$\Rightarrow \sum_{i=N}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{1+n^2}$ 收敛

(6) ① $0<p\leq 1$ 时 $\quad \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\ln n)^q}{n^p} > \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 而 $\sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散 则原级数发散

② $p>1$ 时 $\quad$ 设 $c = \frac{p-1}{2}$ 则 $1+2c = p$. $(c>0)$

$\frac{(\ln n)^q}{n^p} = \frac{(\ln n)^q}{n^c} \frac{1}{n^{1+c}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^q}{n^c} = 0 \Rightarrow$ 取 $\varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n \geq N$ $\frac{(\ln n)^q}{n^c} \leq \varepsilon$

$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{(\ln n)^q}{n^p} \leq \varepsilon \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{n^{1+c}}$ 而 $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{n^{1+c}}$ 收敛 $\Rightarrow$ 原级数收敛

综上：$0<p\leq 1$ 时 级数发散 $\quad p>1$ 时 级数收敛

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{3\alpha}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x - (x - \frac{1}{6}x^3) + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n^\alpha})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3\alpha}}$ 敛散性一致

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3\alpha}} = \begin{cases} \text{发散}, & 0<\alpha\leq\frac{1}{3} \\ \text{收敛}, & \alpha>\frac{1}{3} \end{cases}$

则原级数在 $0<\alpha\leq\frac{1}{3}$ 时发散，$\alpha>\frac{1}{3}$ 时收敛

(8) ① $0<p\leq\frac{1}{2}$ 证 $\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^{2p}} \geq \frac{1}{n^{2p}} + \frac{1}{(n+1)^{2p}}$ $\quad \forall n \geq 3^{\frac{1}{p}}$

$\Leftarrow \frac{n^p - 1}{n^{2p}} \geq \frac{2}{(n+1)^{2p}}$ 而 $\frac{n^p-1}{n^{2p}} \geq \frac{2}{n^{2p}} \geq \frac{2}{(n+1)^{2p}}$ 显然成立 $\forall n \geq 3^{\frac{1}{p}}$

设 $N_0 \geq 3^{\frac{1}{p}}$

则 $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^{2p}} + \cdots \geq \frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \cdots \geq \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 而 $\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 发散

则原级数发散

② $p>\frac{1}{2}$ 设 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^p}, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$ $\quad b_n = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ \frac{1}{n^{2p}}, & n\text{为偶数} \end{cases}$

则原级数 $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

$2°$ $p>1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛

则原级数收敛

$3°$ $\frac{1}{2}<p\leq 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 收敛

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$

$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

而 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，原级数发散

综上：$0<p\leq 1$ 原级数发散，$p>1$ 原级数收敛

(9) 设 $S_n = \sin 1 + \cdots + \sin n$

$2\sin\frac{1}{2} S_n = \left(\cos(1-\frac{1}{2}) - \cos(1+\frac{1}{2})\right) + \left(\cos(2-\frac{1}{2}) - \cos(2+\frac{1}{2})\right) + \cdots + \left(\cos(n-\frac{1}{2}) - \cos(n+\frac{1}{2})\right)$

$= \cos\frac{1}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}$

$\Rightarrow S_n = \frac{\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{2\sin\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$

而 $\frac{1}{n^\alpha}$ 单调且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

综上，由 Dirichlet 判别法，原级数收敛