《高等微积分 1》第三次习题课材料

1 设 f 在 $(x_0-r,x_0]$ 上不减, 其中 r 是某个给定的正数. 证明: 左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\le f(x_0)$.

2 (讲评作业) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. 设 r 是正数, 且对任何 $x\in N^*(x_0,r)$, 总有 $f(x)\neq 0$.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(f(x))}{g(x)}$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{1/g(x)}$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{1/x}$.

3 (1) 设 k 是正整数, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos kx)^{1/k}}{x^2}$.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-f(x)}{x^2}=A, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-g(x)}{x^2}=B$. 证明:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)\cdot g(x)}{x^2}=A+B.$$

(3) 给定正整数 n. 设 $f_1,...,f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是 n 个函数, 满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f_k(x)}{x^2}=A_k,\quad \forall 1\le k\le n.$$

计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot ...\cdot f_n(x)}{x^2}.$$

(4) 给定正整数 n, 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)\cdot(\cos 2x)^{1/2}\cdot ...\cdot(\cos nx)^{1/n}}{x^2}.$$

4 设连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足: 对任何 $x,y\in\mathbf{R}$ 都有

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

证明: $f(x)=xf(1)$.

5 Riemann 函数 $f:(0,1]\to\mathbf{R}$ 按如下方式定义. 当 x 为无理数时令 $f(x)=0$; 当 x 是有理数时, 若把 x 写成既约分数 $x=\frac{m}{n}, n\in\mathbf{Z}_+$, 则令 $f(x)=\frac{1}{n}$. 请找出 f 的所有间断点.

6 设当 $a\in\mathbf{Q}$ 时, 已经定义好幂函数 $f(x)=x^a:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$. 下面我们对一般的 $\alpha\in\mathbf{R}$ 定义幂函数 $f(x)=x^\alpha:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$. 为此, 任取单调递增的有理数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, 我们希望定义

$$x^\alpha:=\lim_{n\to\infty}x^{a_n}.$$

(1) 证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{a_n}$ 存在.

(2) 证明: 上述定义不依赖与 $\{a_n\}$ 的选取. 具体的说, 如果任取另一个单调递增的有理数列 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}x^{a_n}=\lim_{n\to\infty}x^{b_n}.$$

(3) 证明: 如果 $\alpha>0$, 则对 $0<x<y$ 有 $x^\alpha<y^\alpha$.

(4) 证明: 如果 $x>1$, 则对 $\alpha<\beta$ 有 $x^\alpha<x^\beta$.

(5) 证明: 幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 是 $\mathbf{R}_+$ 上的连续函数.

7 (1) 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 严格单调递增, 且 $[f(a),f(b)]\subseteq f([a,b])$. 证明: f 连续.

(2) 证明: 如果 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是连续的单射, 则 f 严格单调递增或者严格单调递降.

(3) 证明: 如果 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是连续的单射, 则 f 有连续的反函数.

8 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是连续函数, 且对任何 $x\in[0,1]$ 有 $f(f(x))=x$. 证明: 如果 $f(0)=0, f(1)=1$, 则 $f(x)\equiv x, \forall x\in[0,1]$.

9 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是连续函数, 且对任何 $0\le x<y\le 1$ 有 $f(x)\le f(y)$. 证明: 对任何 $a\in[0,1]$, 或者 a 是 f 的一个不动点, 或者序列 $\{f^{(n)}(a)\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 f 的一个不

动点. 这里 $f^{(n)}$ 表示 f 的 n 次迭代:

$$f^{(n)}(a) = \underbrace{f(f(...f(a)...))}_{n\text{个}f}.$$