《高等微积分 1》第十一次作业

1 (1) 判断无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$ 的收敛发散性.

(2) 判断瑕积分 $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$ 的收敛发散性.

(3) 证明: 当 $a<1$ 时, 有

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}dx.$$

2 设 a 是正实数, b,c 是实数.

(1) 证明: 无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}dx$$

收敛.

(2) 设无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 的值等于 I. 请把无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}dx$$

的值用 a,b,c 与 I 表示.

3 判断收敛发散性.

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}$, 其中 θ 是给定的实数.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{n^n}$, 其中 $a>0$ 是给定的实数.

(4) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

(5) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{1+n^2}$, 其中 p 是给定的正数.

(6) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^q}{n^p}$, 其中 p, q 是给定的正数.

(7) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n^\alpha}\right)$, 其中 α 是给定的正数.

(8) 级数

$$\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^{2p}} + ... + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^{2p}} + ...$$

其中 p 是给定的正数.

(9) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$ 的敛散性, 其中 $\alpha > 0$.