概率统计第十四讲
区间估计

本讲题要

- 抽样分布
  - 三大抽样分布
  - 重要性质
- 区间估计
  - 单正态总体参数的置信区间
  - 双正态总体参数的置信区间

三大抽样分布

统计量的分布称为抽样分布。数理统计中常用到如下三个分布：

χ^2—分布、F—分布和 t—分布。

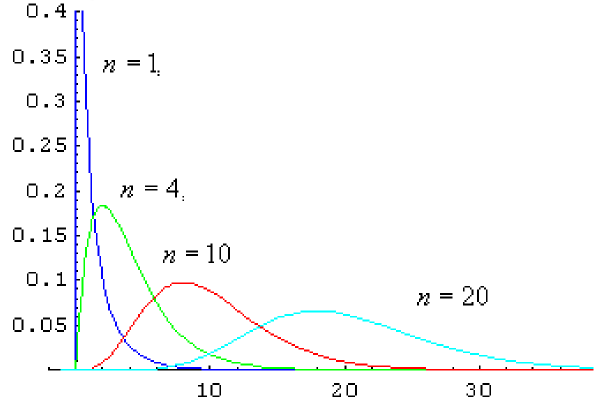
一、χ^2—分布

1、设$X_1,\cdots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0,1)$，则$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \sim\chi^2(n)$

称为自由度为n的χ^2-分布。

2、$\chi^2(n)$分布的概率密度函数$p(y)$及曲线

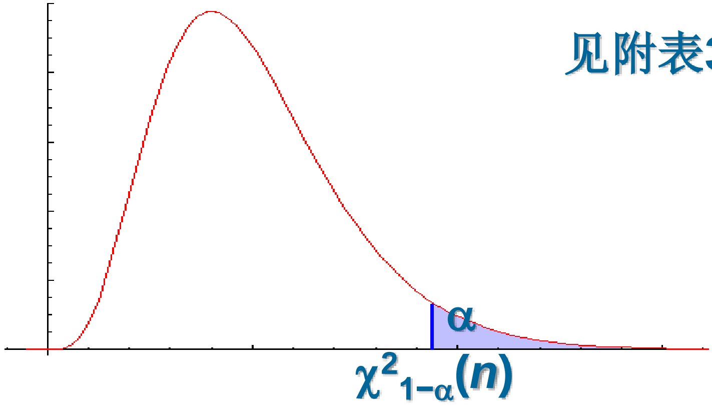
$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}y^{n/2-1}e^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$



3、分位数 设$X\sim\chi^2(n)$，若对于α: 0<α<1,
存在$\chi^2_{1-\alpha}(n)>0$，满足

$$P[X\le\chi^2_{1-\alpha}(n)]=1-\alpha,$$

则称$\chi^2_{1-\alpha}(n)$为$\chi^2(n)$分布的(下侧)1−α分位数。



见附表3

二、F—分布

1、构造 若$X_1\sim\chi^2(n_1)$和$X_2\sim\chi^2(n_2)$相互独立，则

$$F=\frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}\sim F(n_1,n_2)$$

称为分子自由度为n_1，分母自由度为n_2的F—分布。

$F(n_1, n_2)$分布的概率密度为

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)(n_1/n_2)^{n_1/2}\,y^{n_1/2-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}y\right)^{(n_1+n_2)/2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

2、F—分布的分位数

对于α：0 < α < 1，

若存在$F_{1-\alpha}(n_1, n_2)>0$，

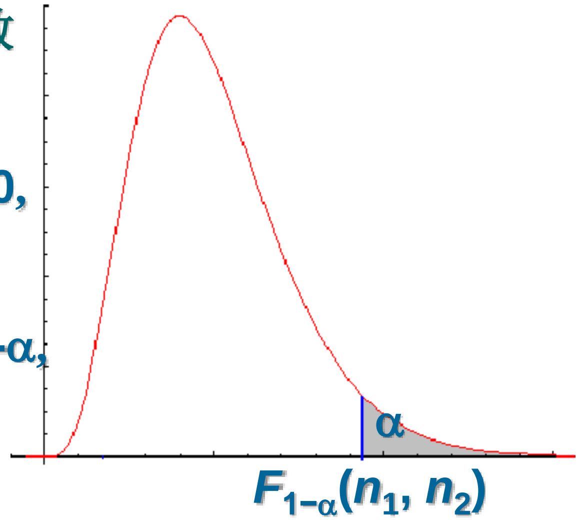
满足

$P[F\le F_{1-\alpha}(n_1, n_2)]=1-\alpha$，

则称$F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$为

$F(n_1, n_2)$的（下侧）

1−α分位数。



注：$F_{\alpha}(n_2,n_1)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}$.

证明：设$F\sim F(n_1, n_2)$, 则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$.

$$P\left[\frac{1}{F}\le F_{\alpha}(n_2,n_1)\right]=\alpha,$$

$$P[F>F_{1-\alpha}(n_1,n_2)]=\alpha,$$

$$P\left[\frac{1}{F}\le \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right]=\alpha,$$

得证!

三、t—分布

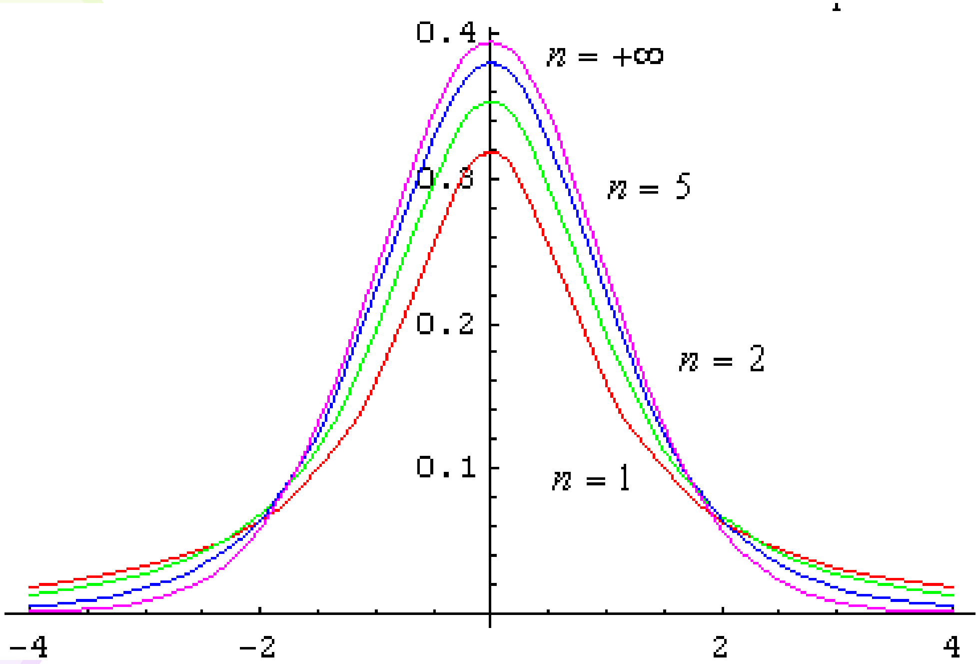
1、若$X_1\sim N(0, 1)$与$X_2\sim \chi^2(n)$独立，则

$$t=\frac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}\sim t(n)$$

$t(n)$称为自由度为n的t—分布。

2、$t(n)$的概率密度为

$$p_n(y)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad -\infty<y<\infty.$$



3、基本性质：

(1) $p_n(y)$关于$y=0$（纵轴）对称。

(2) $p_n(y)$的极限为$N(0,1)$的密度函数，即

$$\lim_{n\to\infty}p_n(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<\infty。$$

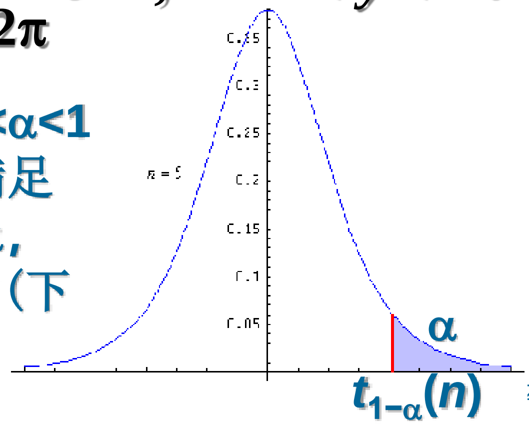
4、分位数

设$t\sim t(n)$, 若对α:0<α<1

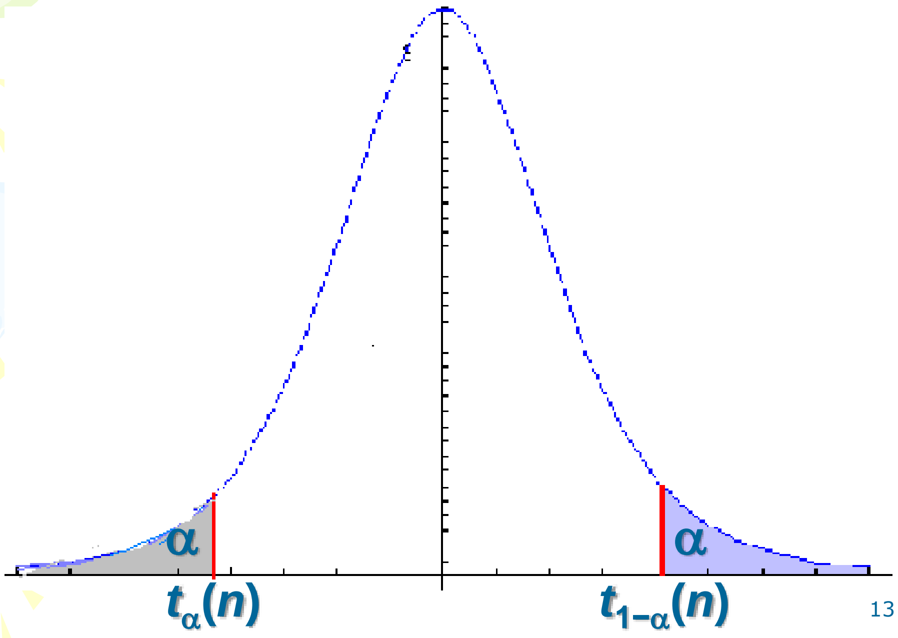
存在$t_{1-\alpha}(n)\in\mathbb{R}$，满足

$P[t\le t_{1-\alpha}(n)]=1-\alpha$,

则称$t_{1-\alpha}(n)$为$t(n)$的（下侧）$1-\alpha$分位数。



注：$t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$.



抽样分布重要结论

定理. 若$x_1,\ldots,x_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$，则

(1) $\bar{x}$与s^2相互独立;

(2) $u = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$;

(3) $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;

(4) $t = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} \sim t(n-1)$.

定理. 若$x_1,\ldots,x_{n_1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_1,\sigma_1^2)$,

$y_1,\ldots,y_{n_2} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且两样本独立, 则

(1) $F = \dfrac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$;

(2) 若$\sigma_1=\sigma_2$，则

$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2),$$ 其中

$$s_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$ 称为混合样本方差。

区间估计

定义 设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有未知参数θ，对于给定值α（$0<\alpha<1$），若由样本$x_1,\ldots,x_n$确定的两个统计量$\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U$使对任意$\theta$,有

$$P(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U) = 1-\alpha,$$

则称随机区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的（同等）置信区间，$\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U$分别称为$\theta$的(双侧)置信下限和置信上限。

注：$F(x;\theta)$也可换成分布律或概率密度。

求总体参数置信区间的解题步骤

1. 根据实际问题构造样本的函数，要求仅含待估参数且分布已知----枢轴量；
2. 令枢轴量落在由分位数确定的区间里的概率为给定的置信水平1–α，要求区间尽量短，即按几何对称或概率对称；
3. 解不等式得随机的置信区间；
4. 由观测值及α值查表计算得所求置信区间。

一、单正态总体期望的置信区间

设$X_1,\dots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$，给定α，由观测值$x_1,\dots,x_n$求出μ的$1-\alpha$置信区间.

1、σ已知 $\because\ u=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$,

取分位数*c*和*d*，使得

$$P(c\le u\le d)=P\left(c\le \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}\le d\right)$$

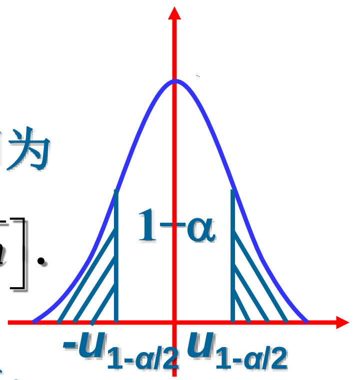
$$=P\left(\bar{x}-d\sigma/\sqrt{n}\le\mu\le\bar{x}-c\sigma/\sqrt{n}\right)$$

$$=1-\alpha,$$

可取$d=-c=u_{1-\alpha/2}$.

μ的置信度为1–α的置信区间为

$$\left[\bar{x}-\sigma u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n},\ \bar{x}+\sigma u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\right].$$



注： μ的1–α置信区间不唯一。

$$\forall\theta\in(0,\alpha),\ \left[\bar{x}+\sigma u_{\theta}/\sqrt{n},\ \bar{x}+\sigma u_{1-\alpha+\theta}/\sqrt{n}\right]$$

都是μ的1–α置信区间，但$\theta=\alpha/2$时区间最短。

P304，例6.6.3解：

σ已知时, μ的置信度为1–α的置信区间为

$$\left[\bar{x}-\sigma u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n},\ \bar{x}+\sigma u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\right].$$

这里$\sqrt{n}=3,\ \bar{x}=15.4,\ \sigma=0.1,\ \alpha=0.05,$

$$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96,$$

$$\bar{x}\pm\sigma u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}=15.4\pm1.96\times0.1/3=15.4\pm0.0653$$

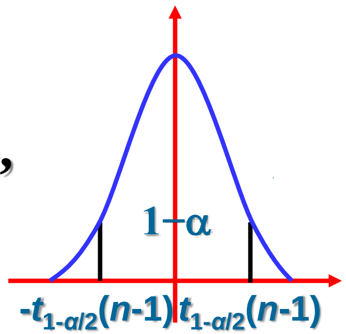
$$=[15.3347,\ 15.4653].$$

2、σ未知

由 $t=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s}\sim t(n-1)$,

令$P[|t|\le t_{1-\alpha/2}(n-1)]=1-\alpha$,

即得



$$P\left[\bar{x}-\frac{st_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{st_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha,$$

μ的置信度为1−α置信区间为

$$\left[\bar{x}-st_{1-\alpha/2}(n-1)\big/\sqrt{n},\ \bar{x}+st_{1-\alpha/2}(n-1)\big/\sqrt{n}\right].$$

P304 例6.6.5解:

σ未知时, μ的置信度为1−α的置信区间为

$$\left[\bar{x}-st_{1-\alpha/2}(n-1)\big/\sqrt{n},\ \bar{x}+st_{1-\alpha/2}(n-1)\big/\sqrt{n}\right].$$

这里$n=12$, $\bar{x}=4.7092$, $s^2=0.0615$, $\alpha=0.05$,

$$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(11)=2.201,$$

$$\bar{x}\pm st_{1-\alpha/2}(n-1)\big/\sqrt{n}=4.7092\pm\sqrt{.0615}\times2.201\big/\sqrt{12}$$

$$=[4.5516,\quad 4.8668].$$

二、单正态总体方差的置信区间

设$X_1,\dots,X_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(\mu,\sigma^2)$，给定置信度$1-\alpha$，

由观测值$x_1,\dots,x_n$，求σ^2（或σ）的置信区间。

假定μ未知，令 $\eta=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,

令 $P\left[\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\le\eta\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right]=1-\alpha$,

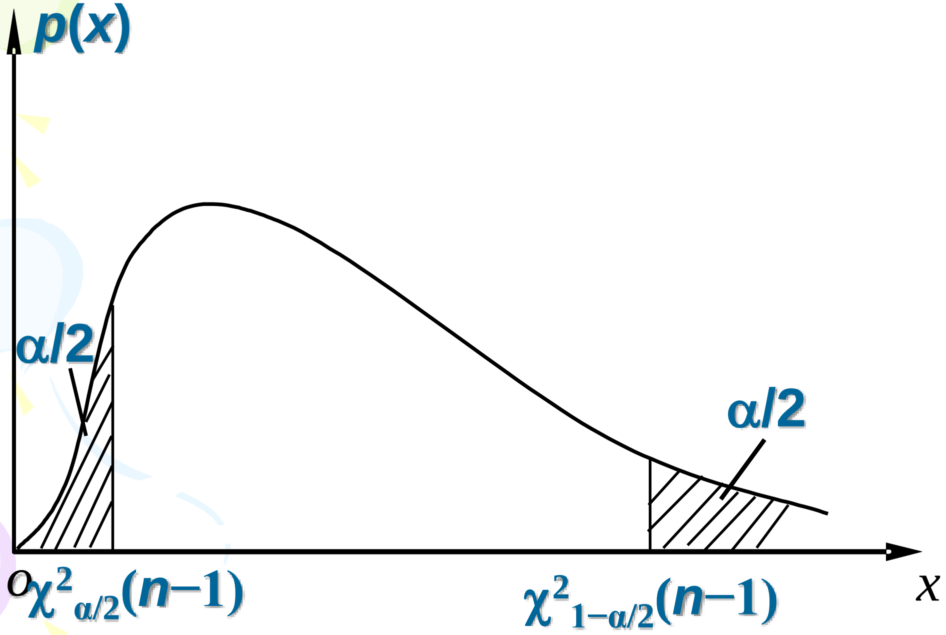
得 $P\left[\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\le\sigma^2\le\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]=1-\alpha.$

σ^2的置信水平为1−α的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right];$$

σ的置信水平为1−α的置信区间为

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}\right].$$



P305 例6.6.6解：

σ的置信水平为1−α的置信区间为

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}\right].$$

这里$n = 9$, $s^2 = 0.0325$, $\alpha = 0.05$,
$\chi^2_{0.025}(8) = 2.1797$, $\chi^2_{0.975}(8) = 17.5345$,
σ的置信水平为95%的置信区间为

$$\left[\sqrt{\frac{8\times 0.0325}{17.5345}},\sqrt{\frac{8\times 0.0325}{2.1797}}\right]=[0.1218,\ 0.3454]。$$

三、双正态总体期望差的置信区间

设$x_1,\ldots,x_{n_1}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $y_1,\ldots,y_{n_2}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(\mu_2,\sigma_2^2)$,
两样本独立。求$\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$置信区间。

1、σ_1和σ_2已知

$$\bar{x}-\bar{y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2\right),$$

$$u=\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1),$$

故$\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$置信区间为

$$\bar{x}-\bar{y}\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}。$$

2、$\sigma_1=\sigma_2$未知

引进 $$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

$$s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}。$$

令$P[|t|\le t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)]=1-\alpha$，
可解得$\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$置信区间为

$$\bar{x}-\bar{y}\pm s_w t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\sqrt{1/n_1+1/n_2}.$$

3、(许宝騄，1910−1970) n_1和n_2很大

$$u=\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}\approx N(0,1),$$

可得$\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$置信区间近似为

$$\bar{x}-\bar{y}\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}。$$

例1. 为了比较A、B两种型号灯泡的寿命，随机抽取A型灯泡5只，测得平均寿命1000h，标准差s_1=28h；随机抽取B型灯泡7只，测得平均寿命980h，标准差s_2=32h。设两个型号灯泡的寿命都服从正态分布，且由生产过程知，两个正态总体的方差相等。试求均值差μ_1-μ_2的置信水平为0.95的置信区间。

解：根据实际情况，可认为来自不同正态总体的两个样本是相互独立的。

因两个总体的方差相等而未知，故可用t分布的置信区间来估计均值差$\mu_1-\mu_2$。

由于$1-\alpha=0.95$即$\alpha=0.05$，且$n_1=5$, $n_2=7$,
查t分布表得：

$$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) = t_{0.975}(10) = 2.2281.$$

又由于 $\bar{x}-\bar{y}=1000-980=20,$

$$s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{1}{10}\left[4\times 28^2+6\times 32^2\right]=928,$$

$$s_w=\sqrt{s_w^2}=30.46,$$

$$\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}=0.5855,$$

所以$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.95的置信区间为20±2.2281×30.46×0.5855=20±39.74，即[−19.74，59.74]。

两正态总体期望差的置信区间的意义是：

- 若$\mu_1-\mu_2$的置信下限大于零，则可认为$\mu_1>\mu_2$；
- 若$\mu_1-\mu_2$的置信上限小于零，则可认为$\mu_1<\mu_2$；
- 若$\mu_1-\mu_2$的置信上、下限异号，则可以认为μ_1与μ_2没有显著差异。

四、双正态总体方差比的置信区间

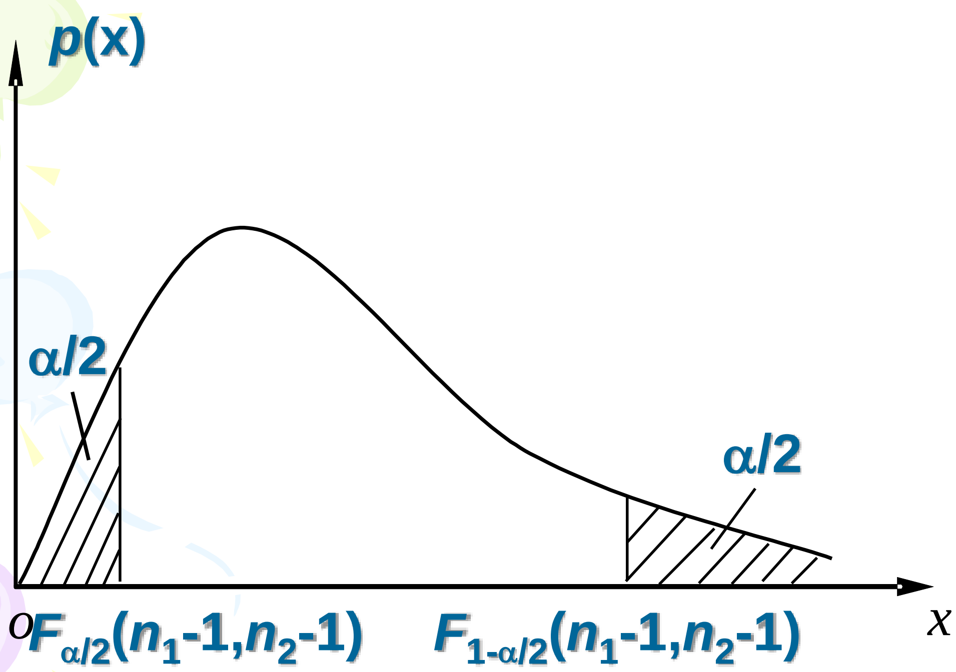
设$X_1,\cdots,X_{n_1}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y_1,\cdots,Y_{n_2}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(\mu_2,\sigma_2^2)$，两样本独立，给定置信度$1-\alpha$，由观测值$x_1,\cdots,x_{n_1}$；$y_1,\cdots,y_{n_2}$，求出$\sigma_1^2/\sigma_2^2$的置信区间。

假定μ_1，μ_2未知，令$F=\dfrac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$，

$P[F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\le F\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)]=1-\alpha$，

可得σ_1^2/σ_2^2的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right]。$$



例2. 研究由机器A和机器B生产的钢管的内径，抽取机器A生产的钢管18只，测量内径后算得样本方差$s_1^2=0.34\text{mm}^2$；抽取机器B生产的钢管13只，测量内径后算得样本方差$s_2^2=0.29\text{mm}^2$。设机器A和机器B生产的钢管的内径分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$与$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，这里$\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2$均未知，抽取的两个样本相互独立，求两个总体的方差比σ_1^2/σ_2^2的置信水平为0.90的置信区间。

解：由题意，$n_1=18$，$n_2=13$，$1-\alpha=0.90$，

且$F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.95}(17,12) = 2.59$，

$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(17,12)=1/F_{0.95}(12,17)$
$=1/2.38.$

又$s_1^2 = 0.34$，$s_2^2 = 0.29$，

于是得两个总体的方差比σ_1^2/σ_2^2的置信水平为0.90的置信区间为

$$\left[\frac{0.34}{0.29}\times\frac{1}{2.59}, \frac{0.34}{0.29}\times 2.38\right]=[0.45, 2.79]。$$

两正态总体方差比的置信区间的**意义**是：

- 若σ_1^2/σ_2^2的置信下限大于1，则可认为$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$；
- 若σ_1^2/σ_2^2的置信上限小于1，则可认为$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$；
- 若σ_1^2/σ_2^2的置信区间包含1，则可认为σ_1^2与σ_2^2没有显著差异。

小结

总体
样本
统计量

抽样分布定理

矩估计
极大似然估计

相容性
无偏性
有效性

区间估计