2018 年春季《高微 2》期中考试参考解答

2018 年 4 月 21 日 $8:00-10:00$

1 (每小问 5 分) 定义函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{如果}(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{如果}(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

设 $\mathbf{q}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 是单位长度的向量.

(1) 对每点 $(x,y)\neq(0,0)$, 计算方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{(x,y)}$.

(2) 判断方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{(0,0)}$ 是否存在? 请说明理由.

(3) 判断 f 在点 $(0,0)$ 处是否连续, 请说明理由.

证明: (1) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 对 0 附近的 t, $(x+t\cos\theta,y+t\sin\theta)\neq(0,0)$, 由此可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{(x,y)}&=\frac{d}{dt}|_{t=0}f(x+t\cos\theta,y+t\sin\theta)\\&=\frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{(x+t\cos\theta)(y+t\sin\theta)}{(x+t\cos\theta)^2+(y+t\sin\theta)^2}\\&=\frac{(x\sin\theta+y\cos\theta)(x^2+y^2)-xy(2x\cos\theta+2y\sin\theta)}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\cos\theta+\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\sin\theta.\end{aligned}$$

(共 5分, 不设中间分. 如果直接用 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}=\nabla f\cdot\mathbf{q}$, 不说明 f 在原点外 C^1 光滑, 即便结果正确, 扣 2 分)

(2) 当 $t \neq 0$ 时, $(t\cos\theta, t\sin\theta) \neq (0,0)$, 由此可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{(0,0)} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\cos\theta\sin\theta}{t}\\ &= \begin{cases}0, & \text{当} \cos\theta\sin\theta = 0,\\ \text{不存在}, & \text{当} \cos\theta\sin\theta \neq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

因此, 当 $\mathbf{q} = (\pm 1, 0)$ 或 $(0, \pm 1)$ 时, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{(0,0)} = 0$(2分); 对其他方向 $\mathbf{q}$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{(0,0)}$ 不存在.(3分)

(3) f 在点 $(0,0)$ 处不连续. 用反证法, 假设 f 在 $(0,0)$ 处连续, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

考虑映射 $\Delta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \Delta(t) = (t,t)$, 由复合映射极限定理, 有

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\Delta)(t) = 0,$$

但直接计算可得

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\Delta)(t) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2},$$

矛盾!

(5分, 不设中间分.)

□

2 设 $F \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, $F(0,0) = 0$ 且 $F_y(0,0) \neq 0$. 由隐函数定理可知, 在 $(0,0)$ 附近, 由方程 $F(x,y) = 0$ 可把 y 表示成 x 的隐函数 $y = y(x)$.

(1)(10 分) 求 $y''(x)$, 要求把答案用 F 的偏导函数与高阶偏导函数表示.

(2)(5 分) 设 F 在 $(0,0)$ 处的泰勒公式为

$$F(x,y) = 2x + y + x^2 - xy + 3y^2 + o(x^2+y^2),$$

求上述隐函数 $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处的带皮亚诺余项的泰勒公式, 要求展开至二阶, 即余项形如 $o(x^2)$.

解. (1) 由隐函数定理, $y(x)$ 是 C^1 光滑的, 且有

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}. \quad \text{(2分)}$$

由假设 F 是 C^2 光滑的, 则 F_x, F_y 都 C^1 光滑. 利用链式法则, 可得

$$\frac{d}{dx}F_x(x, y(x)) = F_{xx} + F_{xy} \cdot y'(x), \quad \frac{d}{dx}F_y(x, y(x)) = F_{yx} + F_{yy} \cdot y'(x),$$

由此可得

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{-(F_{xx} + F_{xy}y')F_y + F_x(F_{yx} + F_{yy}y')}{F_y^2} \\ &= \frac{-F_{xx}F_y^2 + F_{xy}F_xF_y + F_{yx}F_xF_y - F_{yy}F_x^2}{F_y^3} \\ &= \frac{-F_{xx}F_y^2 + 2F_{xy}F_xF_y - F_{yy}F_x^2}{F_y^3}. \end{aligned}$$

特别的, 当 F 是 C^2 光滑函数时, 隐函数定理中给出的隐函数也是 C^2 光滑的.

(y'' 的计算共 8分, 不设中间分.)

(2) 由 Taylor 公式的唯一性, 有

$$F_x(0,0) = 2, \quad F_y(0,0) = 1, \quad F_{xx}(0,0) = 2, \quad F_{xy}(0,0) = -1, \quad F_{yy}(0,0) = 6,$$

代入 (1) 的计算结果, 有

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = -30,$$

(算出 $y'(0), y''(0)$ 共 4分.)

由此可得 $y(x)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒公式为

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + o(x^2) = -2x - 15x^2 + o(x^2).$$

(正确写出 Taylor 公式 1分.) □

3 (每小问 5 分) 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 处处有各个偏导, 正数 M 满足如下条件:

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \leq M, \quad \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq M, \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

(1) 证明: 对任何两点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2), 有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \le M\left(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\right).$$

(2) 证明: f 是连续函数.

证明: (1) 利用一元函数的微分中值定理, 存在 $\alpha,\beta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1) &= f_x(x_2+\alpha(x_1-x_2),y_1)\cdot(x_1-x_2),\\ f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2) &= f_y(x_2,y_2+\beta(y_1-y_2))\cdot(y_1-y_2), \end{aligned}$$

由此以及题目条件, 有

$$\begin{aligned} |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| &= |\,(f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1))+(f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2))\,|\\ &\le |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)|+|f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)|\\ &\le M(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|). \end{aligned}$$

(5分, 不设中间分. 由于题目中没有假设 f 是 C^1 光滑, 因此不能直接用多元函数的微分中值定理, 那样做的扣 1 分)

(2) 我们来验证 f 在每个点 (x_0,y_0) 处都连续. 为此, 对任何 $\epsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\epsilon}{2M}$, 则对任何点 (x,y), 只要 $d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$, 则由 (1) 的结论, 有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \le M(|x-x_0|+|y-y_0|) \le 2M\cdot d((x,y),(x_0,y_0))<\epsilon,$$

这就完成了证明.

(5分, 不设中间分.) □

4 设 $f(x,y)=(2+\sin x)\cdot\sin y$, 令 $D=\{(x,y)|0<x,y<2\pi\}$.

(1)(5 分) 求出 f 在 D 上的所有临界点.

(2)(10 分) 判断上述每个临界点是否为 f 的极值点. 如果是的话, 请指出它是极大值点还是极小值点.

解. (1) f 的临界点方程为

$$\begin{cases} 0=f_x=\cos x\sin y,\\ 0=f_y=(2+\sin x)\cos y, \end{cases}$$

(写出临界点方程 2分)

由 $2+\sin x\neq 0$ 可知 $\cos y=0$, 从而 $\sin y\neq 0$, 故 $\cos x=0$. 这样, f 在 D 上一共有四个临界点

$$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad (\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}),\quad (\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad (\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}).$$

(算出四个临界点共 3分)

(2) f 的 Hessian 为

$$H(f)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin x\sin y & \cos x\cos y \\ \cos x\cos y & -(2+\sin x)\sin y \end{pmatrix}.$$

(写出 Hessian 矩阵 2分)

由此可得:

点	$H(f)$	正定性	极值点类型
$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$\mathrm{diag}\{-1,-3\}$	负定	极大值点
$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	$\mathrm{diag}\{1,3\}$	正定	极小值点
$(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$\mathrm{diag}\{1,-1\}$	不定	不是极值点
$(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	$\mathrm{diag}\{-1,1\}$	不定	不是极值点

(共 8分, 每个点的结论 2 分)

$\square$

5 (1)(7 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 的收敛半径, 其中 $(2n+1)!!=(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1$ 表示双阶乘.

(2)(8 分) 证明: $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数.

解. (1) 对每个 x, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!!}|}{|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{2n+3}=0,$$

由达朗贝尔判别法可知幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处绝对收敛, 由此可知其收敛半径为 $R=+\infty$.

(共 7分, 其中答案 2 分, 具体证明过程 5 分)

(2) 对每个 $x \in \mathbf{R}$, 有 $\frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$. 熟知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由比较定理可知函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上点点收敛.

(证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ 点点收敛 3分)

注意到

$$|\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'| = \frac{2|x|}{(n^2+x^2)^2} = \frac{2n|x|}{n(n^2+x^2)^2} \leq \frac{n^2+x^2}{n(n^2+x^2)^2} \leq \frac{1}{n^3}, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

熟知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛, 由 Weierstrass 强级数判别法可知函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛. 这样, 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上可逐项求导, 其和函数是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数.

(证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$ 一致收敛 5分) □

6 设 $f(x,y,z) = x+y+z+xyz$, 令 $B = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

(1)(3 分) 证明: f 在 B 上有最大值.

(2)(12 分) 利用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法求出 f 在 B 上的最大值.

解. (1) 显然 B 是有界闭集, 由最值定理可知连续函数 f 在 B 上有最大值.

(用最值定理证明结论, 3分)

(2) 设 f 在 B 上的最大值点为 $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. 分两种情况讨论.

如果 $\mathbf{p}_0$ 在 B 的内部 $\{x^2+y^2+z^2 < 1\}$, 则 $\mathbf{p}_0$ 是 f 的极值点, 因而满足 f 的临界点方程

$$\begin{cases} 0 = f_x = 1+yz, \\ 0 = f_y = 1+zx, \\ 0 = f_z = 1+xy, \end{cases}$$

化简可得 $-xyz = x = y = z$ 且 $0 = 1 + yz = 1 + x^2$, 无解!

(证明最大值点不在内部 4分)

如果如果 $\mathbf{p}_0$ 在 B 的边界 $\partial B = \{x^2+y^2+z^2=1\}$ 上, 则 $\mathbf{p}_0$ 是 f 在约束 $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ 下的条件极值点. 注意到 $J(g) = (2x, 2y, 2z)$ 在 ∂B 上处处满秩, $\mathbf{p}_0$ 是 ∂B 的光滑点, 则由 Lagrange 乘子法可知存在 λ_0, 使得 $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ 满足 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

的临界点方程, 即有

$$\begin{cases} 0 = L_x = 1 + yz - 2\lambda x \\ 0 = L_y = 1 + zx - 2\lambda y \\ 0 = L_z = 1 + xy - 2\lambda z \\ 0 = L_\lambda = 1 - x^2 - y^2 - z^2 \end{cases}$$

(叙述出 Lagrange 乘子法 1分)

令 $Q = x_0y_0z_0$, 则 x_0, y_0, z_0 都是同一个次数不超过二次的非零多项式 $-2\lambda_0 t^2 + t + Q$ 的根, 该多项式至多两个不同根, 从而 x_0, y_0, z_0 中有两个相同. 不妨设 $x_0 = y_0$, 由此可得

$$\begin{cases} 1 + x_0z_0 - 2\lambda_0 x_0 = 0 \\ 1 + x_0^2 - 2\lambda_0 z_0 = 0 \\ 2x_0^2 + z_0^2 = 1 \end{cases}$$

前两式相减得 $(x_0 - z_0)(x_0 + 2\lambda_0) = 0$, 故 $x_0 = z_0$ 或者 $x_0 = -2\lambda_0$. 前一情况下解得 $(x_0, y_0, z_0) = \pm(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$; 后一情况下, 有 $\lambda_0 \neq 0$, $z_0 = 2\lambda_0 + \frac{1}{2\lambda_0}$ 且 $z_0^2 + 8\lambda_0^2 = 1$, 由此可得

$$1 = z_0^2 + 8\lambda_0^2 = 12\lambda_0^2 + \frac{1}{4\lambda_0^2} + 2 \geq 2,$$

矛盾!

(解出 Lagrange 乘子法的方程组 5分, 其中答案 1 分, 具体求解过程 4 分)

总结上述讨论, 最大值点只能是 $\pm(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 之一, 故所求的最大值为

$$\max_{(x,y,z)\in B} f(x,y,z) = f(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

(最大值答案 2分)

□

7 (1)(7 分) 把上半平面记作 $\mathbf{R}_+^2=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\geq 0\}$. 设 $h\in C^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, 且对任何 $(x,y)\in\mathbf{R}_+^2$ 有 $h(x_0,0)\leq h(x,y)$. 证明:

$$\frac{\partial h(x_0,0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial h(x_0,0)}{\partial y}\geq 0.$$

(2)(8 分) 设 $f,g\in C^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, 令 $D=\{(x,y)|g(x,y)\geq 0\}$. 设 $g(x_0,y_0)=0$, $g_y(x_0,y_0)\neq 0$, 且对任何 $(x,y)\in D$ 有 $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$. 证明: 存在非负实数 λ, 使得

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)-\lambda g_x(x_0,y_0)=0,\\ f_y(x_0,y_0)-\lambda g_y(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

证明: (1) 由假设, x_0 是一元函数 $h(x,0)$ 的最小值点, 从而有

$$0=\frac{d}{dx}|_{x_0}h(x,0)=\frac{\partial h(x_0,0)}{\partial x}.\quad \text{(3分)}$$

另一方面, 当 $t>0$ 时, $h(x_0,t)\geq h(x_0,0)$, 由此可得

$$\frac{\partial h(x_0,0)}{\partial y}=\lim_{t\to 0}\frac{h(x_0,t)-h(x_0,0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{h(x_0,t)-h(x_0,0)}{t}\geq 0.\text{(4分)}$$

(2) 由假设, (x_0,y_0) 是 f 在约束 $g(x,y)=0$ 下的最小值点. 又由 $g_y(x_0,y_0)\neq 0$ 可知 (x_0,y_0) 是 $\{g(x,y)=0\}$ 的光滑点. 这样, 由 Lagrange 乘子法可知存在实数 λ, 使得 (x_0,y_0,λ) 满足 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

的临界点方程. 特别的, 有

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)-\lambda g_x(x_0,y_0)=0,\\ f_y(x_0,y_0)-\lambda g_y(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

(利用 Lagrange 乘子法证明 ∇f 与 ∇g 成比例 3分)

下面来证明 $\lambda=\frac{f_y(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}\geq 0$. 按照 $g_y(x_0,y_0)$ 的符号讨论.

当 $g_y(x_0,y_0)>0$ 时, 注意到

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(x_0,y_0+t)-g(x_0,y_0)}{t}=g_y(x_0,y_0)>0,$$

则存在 $r>0$, 使得对任何 $t\in(0,r)$, 有 $g(x_0,y_0+t)-g(x_0,y_0)>0$, 即有 $(x_0,y_0+t)\in D$. 由假设, 有

$$f(x_0,y_0+t)\geq f(x_0,y_0),\quad \forall t\in(0,r),$$

由此可得

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}\geq 0,$$

因此有 $\lambda=\frac{f_y(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}\geq 0$.

当 $g_y(x_0,y_0)<0$ 时, 完全类似, 只需把前述 $\lim\limits_{t\to 0+}$ 换成 $\lim\limits_{t\to 0-}$.

(证明 λ 非负 5分) $\square$