1 奇异值分解的进一步练习

1. 假如我们观测到一组数据(两个变量，五个测量)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   (a) 求出每一行的平均值，并得到一个居中化 (centered) 的数据矩阵B.
   (b) 求出矩阵B对应的协方差矩阵$S = \frac{BB^T}{n-1}$.
   (c) 求出S的特征值$\lambda_1 \geq \lambda_2$ 和特征向量 u_1, u_2.
   (d) 在一个二维的平面把B里的数据表示出来，并找到u_1对应的方向。u_1是一个主分量。 同时在把u_2的方向画出来，观测数据在这个方向的分布。

2. 我们定义了一个广义逆$A^+ = V\Sigma^+U^T$. 下面我们研究一下它的性质
   (a) 证明: $(A^+A)^2 = A^+A$, $(AA^+)^2 = AA^+$.
   (b) 证明: A^+的列空间是A的行空间。A^+的行空间是A的列空间。
   (c) 我们之前研究过一个向量b在A的列向量子空间上的投影: 我们有这样的公式$A^TAx = A^Tb$. 证明: $x^+ = A^+b$ 是前面方程的解。
   (d) 对于方程$A^TAx = A^Tb$的任意一个解$\hat{x}$, 证明: 1) $A^TA(\hat{x} - x^+) = 0$, 2): $A(\hat{x} - x^+) = 0$.
   (e) 因为$x^+ = A^+b$是在A的行空间(思考一下为什么?)，用上一题的 结论证明: $\hat{x} - x^+$是垂直于x^+的.
   (f) 用上题的结论证明: $|\hat{x}|^2 = |\hat{x} - x^+|^2 + |x^+|2$. 试说明:当$\hat{x} = x^+$的时候，方程$A^TA\hat{x} = A^Tb$的解的长度最小。

3. 我们考虑奇异值分解对一个矩阵的近似。考虑一个$m \times n$的矩阵A. 我们首先定义了一个矩阵的norm $|A|$:

$$|A| = max \frac{Ax|}{|x|} \tag{2}$$

   这里我们对所有的非零向量求最大值. A有奇异值分解

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \ldots + \sigma_r u_r v_r^T. \tag{3}$$

   这里奇异值有排序: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$. r 是矩阵A的秩.

   (a) 证明: $|A| = \sigma_1$.
   (b) 我们令$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \ldots + \sigma_k u_k v_k^T$. 证明: $|A - A_k| = \sigma_{k+1}$.
   (c) 考虑一个任意的秩为k的矩阵B $(m \times n)$矩阵, 证明: B可以写成下列的形式

$$B = XY^T \tag{4}$$

   这里Y 有k列，且秩为k. 也就是说Y 是一个$n \times k$的矩阵.

(d) 证明: 存在一个非零向量w

$$w = r_1 v_1 + \ldots + r_{k+1} v_{k+1} \tag{5}$$

使得 $Y^T w = 0$. (反证法: 如果结论不成立，那么考虑Y^T 的零空间的维数。)

(e) 对于上题中的w, 我们可以取$r_1^2+r_2^2+...+r_{k+1}^2 = 1$, 证明:1) $|A-B| \geq |(A-B)w| = |Aw|$ (用norm的定义); 2) $|Aw| \geq {}_{k+1} = |A-A_k|$. 这说明对于任何一个秩为$k$的矩阵$B$，我们有$|A-B| \geq |A-A_k|$。

2 线性映射

1. 考虑两个线性映射 $R^n \to^f R^k \to^g R^m$. 分别在三个线性空间中选定一组基，假设f对应的矩阵为A, g对应的矩阵为B, 复合映射gf 对应的矩阵为C, 证明: $C = BA$.

2. 考虑线性映射$f : R^n \to R^m$. 我们现在把我们之前学过的关于矩阵的结果和映射的一些概念结合起来。一个映射称之为单射，如果R^n中两个不同的元素被f映到R^m中不同的元素。一个映射称之为满射，如果R^m中每一个元素都有原像。

   (a) 证明: 一个线性映射是满射的条件是: $n \geq m$ 并且 线性映射所对应的矩阵的秩是m.

   (b) 证明:一个线性映射是单射的条件是: 线性映射所对应的矩阵的零 空间维数为0.

   (c) 证明: 一个线性映射即是单射，又是满射的条件是: 1): $n = m$; 2): 线性映射所对应的矩阵的秩是m。

3. 选定R^3中的一组基，那么任意一个向量x在这组基下面的坐标是(x_1, x_2, x_3). 对于下列变换，先判断它是不是线性变换，如果是，写成所对应的矩 阵

   (a) $f(x) = (x_1 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.

   (b) $f(x) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$.

   (c) $f(x) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$.

   (d) $f(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

4. 我们有一个从R^3到自己的线性变换。这个线性变换在一组基(e_1, e_2, e_3)下面的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix} \tag{6}$$

   求该线性变换在基$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$下的矩阵.

5. 我们有下列线性变换 $0 \to^{f_1} R^n \to^{f_2} R^k \to^{f_3} R^m \to^{f_4} 0$. 如果 对于每一个线性空间，我们都有$im(f_i) = ker(f_{i+1}), i = 1, 2, 3$. 分别选了 基以后，我们记四个线性映射对应的矩阵为A_1, A_2, A_3, A_4,

   (a) 证明: A_2的零空间的维数是0. (利用$\ker(f_2)$和$\mathrm{im}(f_1)$的定义). A_2的 秩是多少?

   (b) 证明: $A_3A_2 = 0$. 也就是说A_2的列向量都在A_3的零空间里面。A_3的秩是多少? (利用$\ker(f_3)$和$\mathrm{im}(f_2)$的定义).

   (c) 证明: A_3的秩是m. (利用 $\ker(f_4)$和$\mathrm{im}(f_3)$的定义).

   (d) 证明: $k = m + n$.