概统第十二次作业

习题4.3

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n)}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(EX^2-(EX)^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\ln n-0^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ln n<\infty$

则 $\{X_k\}$ 满足Kolmogorov强大数定律条件，$\{X_k\}$ 服从大数定律。

4. $P(X_n=1)=p^2 \quad P(X_n=0)=1-p^2 \quad E(X_n)=p^2 \quad Var(X_n)=EX_n^2-(EX_n)^2=p^2-p^4$

考虑 X_n 与 X_{n+1} 取值，它们与A的第n、n+1、n+2次试验有关。

$P(X_n=1,X_{n+1}=0)=P(A_nA_{n+1}\overline{A_{n+2}})=p^2(1-p)$

$P(X_n=0,X_{n+1}=1)=P(\overline{A_n}A_{n+1}A_{n+2})=p^2(1-p)$

$P(X_n=1,X_{n+1}=1)=P(A_nA_{n+1}A_{n+2})=p^3$

$P(X_n=0,X_{n+1}=0)=1-2p^2(1-p)-p^3=1-2p^2+p^3$

则 $Cov(X_n,X_{n+1})=E(X_n-EX_n)(X_{n+1}-EX_{n+1})=-P(X_n=1,X_{n+1}=0)(1-p^2)p^2-P(X_n=0,X_{n+1}=1)(1-p^2)p^2$
$P(X_n=1,X_{n+1}=1)(1-p^2)^2+P(X_n=0,X_{n+1}=0)p^4$

$=-2p^4(1-p)^2(1+p)+p^3(1-p^2)^2+(1-2p^2+p^3)p^4$

$\leq p^3(1-p^2)^2+p^4+p^7\leq 3$

$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^n X_i)=\frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^n VarX_i+2\sum_{i<j}Cov(X_i,X_j))=\frac{1}{n^2}(np+2(n-1)Cov(X_i,X_{i+1}))$

$\leq\frac{1}{n^2}(np+6(n-1))\to 0\quad (if\ n\to\infty)$

由Markov大数定律，$\{X_k\}$ 服从大数定律。

12. $P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}Var\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)$

$=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}Var(X_1+\cdots+X_n)$

$=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n Cov(X_i,X_j)$

其中c是 $\{X_n\}$ 方差一致有界的上界

因为 $|k-l|\to\infty$ 时一致地有 $Cov(X_k,X_l)\to 0$

故 $\forall\varepsilon_0>0\ \exists N\ \forall|k-l|>N$ 有 $|Cov(X_k,X_l)|<\frac{\varepsilon_0\varepsilon^2}{2}$.

因此 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n Cov(X_i,X_j)\leq\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\|i-j|\leq n}}^n Cov(X_i,X_j)+\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\|i-j|>N}}^n Cov(X_i,X_j)$

$\leq\sum_{i=1}^n c\times 2N+\sum_{i=1}^n\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon^2}\times n$

$\leq 2Nnc+n^2\frac{\varepsilon_0\varepsilon^2}{2}$

则 $\forall\varepsilon_0$ 取 $N_0=\max\{\frac{4c}{\varepsilon_0\varepsilon^2}N,N\}$，则 $\forall n\geq N_0$

$\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_i\sum_j Cov(X_i,X_j)\leq\frac{2Nc}{n\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon_0}{2}\leq\frac{2Nc}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\varepsilon_0\varepsilon^2}{4cN}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_i\sum_j Cov(X_i,X_j)=0$

由夹逼定理 $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right|\geq\varepsilon\right)=0$ □

17. 随机投点法，设 $X, Y \sim U[0,1]$ 独立同分布

$$P(Y \le f(X)) = \int_0^1 \int_0^{f(x)} dy\,dx = \int_0^1 f(x)dx = J$$

则随机生成 $2n$ 个随机数分布于 $[0,1]$，记作 $x_1 \dots x_n$ 与 $y_1 \dots y_n$.

(1) 记 $y_i \le f_1(x_i) = \dfrac{e^{x_i}-1}{e-1}$ 的次数 S_n，则 $J_1 \approx \dfrac{S_n}{n}$ $(n\to\infty)$.

(2) 进行变形 $$\int_{-1}^1 e^x dx = \int_0^1 e^{2x-1} d(2x-1) = 2\int_0^1 e^{2x-1}dx$$
$$= 2(e-e^{-1})\int_0^1 \frac{e^{2x-1}-e^{-1}}{e-e^{-1}}dx + 2e^{-1}$$

设 $$J_2' = \int_0^1 \frac{e^{2x-1}-e^{-1}}{e-e^{-1}}dx$$

记 $y_i \le f_2'(x_i) = \dfrac{e^{2x_i-1}-e^{-1}}{e-e^{-1}}$ 的次数 S_n，则 $J_2' \approx \dfrac{S_n}{n}$ $(n\to\infty)$.

因此 $J_2 = 2(e-e^{-1})\dfrac{S_n}{n} + 2e^{-1}$

平均值法

(1) $J_1 = \int_0^1 \dfrac{e^x-1}{e-1}dx = E\left(\dfrac{e^X-1}{e-1}\right)$ 其中 $X \sim U(0,1)$

$\{X_n\}_{n=1}^\infty$ 是一列独立随机变量且服从 $U(0,1)$，则 $\left\{\dfrac{e^{X_n}-1}{e-1}\right\}_{n=1}^\infty$ 也独立同分布

$\left|\dfrac{e^{X_n}-1}{e-1}\right| \le 1$ 故 $\dfrac{e^{X_n}-1}{e-1}$ 有方差和数学期望

由 Chebyshev 大数定律

$$\frac{\frac{e^{X_1}-1}{e-1}+\cdots+\frac{e^{X_n}-1}{e-1}}{n} \xrightarrow{P} E\left(\frac{e^X-1}{e-1}\right) = J_1$$

因此生成 n 个 $U(0,1)$ 随机的数，计算 $\frac{1}{n}\sum \frac{e^{x_i}-1}{e-1}$ 即得 J_1.

(2) $J_2 = \int_{-1}^1 e^x dx = \int_{-1}^1 2e^x \frac{1}{2}dx = E(2e^X)$ 其中 $X \sim U(-1,1)$

$\{X_n\}_{n=1}^\infty$ 是独立随机变量且服从 $U(-1,1)$，则 $\{2e^{X_n}\}_{n=1}^\infty$ 独立同分布

$|2e^{X_n}| \le 2e$ 故 $2e^{X_n}$ 有方差和数学期望.

由 Chebyshev 大数定律

$$\frac{2e^{X_1}+\cdots+2e^{X_n}}{n} \xrightarrow{P} E(2e^X) = J_2$$

因此生成 n 个 $U(-1,1)$ 随机的数，计算 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 2e^{x_i}$ 即得 J_2.

(也可以同随机投点法一般生成 n 个分布于 $[0,1]$ 的数

计算 $J_2 = 2(e-e^{-1})\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{e^{2x_i}-1}{e-e^{-1}}\right) + 2e^{-1}$)

习题4.4

11. (1) 设取整误差分别为 $X_1 \dots X_n$，$X_i \overset{i.i.d.}{\sim} U(-0.5, 0.5)$

$$EX_i = 0 \quad , \quad Var X_i = \frac{(0.5+0.5)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

故由 Lindeberg－Lévy 中心极限定理 $\dfrac{\sum_{i=1}^{1500} X_i - 1500\times 0}{\sqrt{1500 \times \frac{1}{12}}} = \dfrac{\sum X_i}{\sqrt{125}}$ 服从标准正态

则 $\{|\sum_{i=1}^{1500} X_i| > 15\} = \{|\dfrac{\sum_{i=1}^{1500} X_i}{\sqrt{125}}| > \dfrac{3}{\sqrt{5}}\}$

故 $P(|\sum_{i=1}^{1500} X_i| > 15) = 2 - 2\phi(\frac{3}{\sqrt{5}}) = 2 - 2\times 0.9099 = 0.1802$

(2) $P(|\sum_{i=1}^{k} X_i| \le 10) = P(|\dfrac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{\sqrt{\frac{1}{12}k}}| \le \dfrac{10}{\sqrt{\frac{1}{12}k}}) = 2\phi(20\sqrt{\frac{3}{k}}) - 1 \ge 0.9$

$$\Rightarrow \phi(20\sqrt{\tfrac{3}{k}}) \ge 0.95$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{\tfrac{3}{k}} > 1.65$$

$$\Rightarrow k \le 440 \quad \text{大约440个数.}$$

19. X_n 是总共n间房，开房间数 $X_n \sim b(n, 0.8)$

则 $\dfrac{X_n - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{X_n - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}$ 分布服从标准正态

$$P(X_{500} \le k) = P(\frac{X_{500} - 400}{4\sqrt{5}} \le \frac{k-400}{4\sqrt{5}}) = \phi(\frac{k-400}{4\sqrt{5}}) \approx 0.99$$

$$\Rightarrow \frac{k-400}{4\sqrt{5}} \approx 2.33$$

$$\Rightarrow k \approx 421$$

则需要 $421 \times 2kW = 842kW$ 电力

24. $m \sim b(n, p)$ 则 $\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ 近似服从标准正态.

$$P(|\frac{m}{n} - p| \le 0.01) = P(|\frac{m-np}{n}| \le 0.01) = P(|\frac{m-np}{\sqrt{npq}}| \le \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{pq}})$$

$$= 2\phi(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) - 1 \ge 95\%$$

$$\Rightarrow \phi(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) \ge 0.975$$

$$\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \ge 1.96 \Rightarrow \sqrt{n} \ge 196\sqrt{pq}$$

而 $pq = p(1-p) \ge 0.25$

故 $\sqrt{n} \ge 196 \times 0.5 = 98$

$$\Rightarrow n \ge 9604$$

27、设 $X_1 \cdots X_n \overset{iid}{\sim} P(1)$，则 $X = X_1 + \cdots + X_n \sim P(n)$.

$EX_i = 1$，$Var X_i = 1$

则 $\dfrac{(X_1 + \cdots + X_n) - nEX_i}{\sqrt{Var X_i}\sqrt{n}} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}}$ 收敛到标准正态分布 $(n \to \infty)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(X_1 + \cdots + X_n \leq n) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(X \leq n) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} P(X = i) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + n + \dfrac{n^2}{2!} + \cdots + \dfrac{n^n}{n!}\right)e^{-n} = \dfrac{1}{2}$