2019 年春季《高等微积分 2》期中考试参考解答

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第一题 10 分, 其余每题 15 分.

1 设 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 与 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 都是 C^2 光滑函数, 定义

$$h(x,y)=f(x,y,g(x,y))$$

计算 h 的各个二阶偏导函数, 要求用 f,g 的高阶偏导函数表示.

解.

$$h_x=f_x(x,y,g(x,y))+f_z(x,y,g(x,y))g_x,$$

$$h_y=f_y(x,y,g(x,y))+f_z(x,y,g(x,y))g_y.$$

$$h_{xx}=f_{xx}+f_{xz}g_x+\left(f_{zx}+f_{zz}g_x\right)g_x+f_z(x,y,g(x,y))g_{xx}$$

$$h_{xy}=f_{xy}+f_{xz}g_y+\left(f_{zy}+f_{zz}g_y\right)g_x+f_z(x,y,g(x,y))g_{xy}$$

$$h_{yx}=f_{yx}+f_{yz}g_x+\left(f_{zx}+f_{zz}g_x\right)g_y+f_z(x,y,g(x,y))g_{yx}$$

$$h_{yy}=f_{yy}+f_{yz}g_y+\left(f_{zy}+f_{zz}g_y\right)g_y+f_z(x,y,g(x,y))g_{yy}.$$

□

2 (1) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数. 证明: 对任何 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, 有

$$f(x,y)=f(0,0)+x\int_0^1 f_x(tx,ty)dt+y\int_0^1 f_y(tx,ty)dt.$$

(2) 设 $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑映射, 满足对任何 $(x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 有

$$|\frac{\partial g(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}|\le K,\quad \forall 1\le i\le n.$$

证明: 对任何两点 $(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)$, 有

$$|g(x_1,...,x_n)-g(y_1,...,y_n)|\le nK\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}.$$

证明*:* (1) 令 $g(t)=f(tx,ty)$, 则由链式法则有

$$g'(t)=f_x(tx,ty)x+f_y(tx,ty)y,$$

特别的, g 是 C^1 光滑的. 这样, 由 Newton-Leibniz 公式, 可得

$$f(x,y)-f(0,0)=g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(t)dt=x\int_0^1 f_x(tx,ty)dt+y\int_0^1 f_y(tx,ty)dt$$

(2) 由微分中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$g(\mathbf{x})-g(\mathbf{y})=\sum_{i=1}^n\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial x_i}(x_i-y_i),$$

其中 $\mathbf{z}=\mathbf{y}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. 由此可得

$$|g(\mathbf{x})-g(\mathbf{y})|\le\sum_{i=1}^n|\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial x_i}|\cdot|x_i-y_i|\le K\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|\le nK\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}.$$

□

3 (1) 求出所有实数 a,b 及正数 α, 使得如下极限式成立:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\alpha}=0.$$

(2) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数, $f(0,0)=0$. 设 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=A, \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=B$, 定义三元函数 $H:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 为

$$H(x,y,z)=\begin{cases}\frac{f(xz,yz)}{z}, & \text{如果} z\neq 0,\\ Ax+By, & \text{如果} z=0.\end{cases}$$

证明: H 是 $\mathbf{R}^3$ 上的连续函数.

解. (1) 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 当 $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 时, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} r^{1-2\alpha}=0$. 注意到

$$0\le \left|\frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\alpha}\right|\le (|a|+|b|)r^{1-2\alpha},$$

利用夹逼定理, 可知对任何 a,b 都有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\alpha}=0.$$

当 $\alpha\ge\frac{1}{2}$ 时, 如果

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\alpha}=0,$$

取 $y=0$, $x\to 0+$, 则有

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a}{x^{2\alpha-1}}=0.$$

注意到 $2\alpha-1\ge 0$, 则在 $x=0$ 附近 $x^{2\alpha-1}$ 有界, 由此可得

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a}{x^{2\alpha-1}}\cdot x^{2\alpha-1}=0,$$

即有 $a=0$. 类似的, 也有 $b=0$.

总结一下, 答案为: 当 $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 时, a,b 可以取任何值; 当 $\alpha\ge\frac{1}{2}$ 时, $a=b=0$.

(2) 当 $z_0\neq 0$ 时, H 在 (x_0,y_0,z_0) 附近为两个连续函数的商, 且分母不为零, 故 H 在该点处连续. 以下来证明 H 在 $(x_0,y_0,0)$ 处连续, 即有

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} H(x,y,z)=Ax_0+By_0.$$

由于 f 是 C^1 光滑的, 它在 $(0,0)$ 处可微, 即有

$$f(x,y)=f(0,0)+Ax+By+\alpha(x,y),$$

且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\alpha(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 由此可得

$$H(x,y,z)-(Ax_0+By_0)=\begin{cases}A(x-x_0)+B(x-x_0)+\frac{\alpha(xz,yz)}{z}, & \text{当}z\neq 0\text{时}\\ A(x-x_0)+B(x-x_0), & \text{当}z=0\text{时}\end{cases}$$

注意到, 在 $(0,0,0)$ 附近, 当 $z\neq 0$ 时, 函数 $\frac{|z|\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ 有界, 因而有

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0),z\neq 0}\frac{\alpha(xz,xz)}{z}=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0),z\neq 0}\frac{\alpha(xz,yz)}{\sqrt{(xz)^2+(yz)^2}}\cdot\frac{|z|\sqrt{x^2+y^2}}{z}=0,$$

由此可得

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}(H(x,y,z)-(Ax_0+By_0))=0.$$

□

4 (1) 给定实数 θ, 把函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}$ 表示成关于 x 的幂级数.

(2) 定义函数 $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}d\theta$, 把函数 $f(x)$ 表示成关于 x 的幂级数.

解. (1) 熟知

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}y^n,\quad \forall|y|<1$$

由此可得, 对于 $\theta\notin\pi\mathbf{Z}$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\sin^{2n}\theta\right)x^{2n},\quad \forall|x|<\frac{1}{|\sin\theta|}.$$

当 $\theta\in\pi\mathbf{Z}$ 时, 函数变成常值函数 1.

(2) 对每个 $|x|<1$, 考虑关于 θ 的函数序列

$$g_n(\theta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\sin^{2n}\theta\right)x^{2n}.$$

注意到

$$|g_n(\theta)|\leq\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad \forall\theta\in[0,\frac{\pi}{2}],$$

利用比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$ 收敛, 由 Weierstrass M-判别法可知函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\theta)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上一致收敛. 这样, 在此区间上可以逐项积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\theta)\right)d\theta\\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}g_n(\theta)d\theta\\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta.\end{aligned}$$

熟知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

这就得到了

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!})^2x^{2n}\right),\quad \forall|x|<1.$$

□

5 在约束条件

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=1\end{cases}$$

下, 求 $f(x,y,z)=xy+yz$ 的最大值与最小值.

解. 令 $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=1\}$, 它是有界闭集, 由最值定理可知连续函数 f 在 S 上有最值点.

设最值点为 (x_0,y_0,z_0). 利用 Lagrange 乘子法, 存在实数 λ_0,μ_0, 使得 $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ 是辅助函数

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)-\mu(x+y+z-1)$$

的临界点, 即满足如下方程组

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial F}{\partial x} = y - 2\lambda x - \mu \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial y} = x + z - 2\lambda y - \mu \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial z} = y - 2\lambda z - \mu \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial \mu} = -(x + y + z - 1). \end{cases}$$

如果 $\lambda \neq 0$, 由第一个和第三个方程可知 $x = z$, 从而有

$$2x + y = 1, \quad 2x^2 + y^2 = 1,$$

解得

$$(x, y, z) = (0, 1, 0), \text{或}(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}).$$

如果 $\lambda = 0$, 则 $y = x + z = \frac{1}{2}$, 解得

$$(x, y, z) = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}), \text{或}(\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}).$$

比较这四个候选条件最值点处的 f 值, 可得

$$\min f = f(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = -\frac{4}{9},$$

$$\max f = f(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}) = f(\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}) = \frac{1}{4}.$$

□

6 考虑三维区域

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \leq 1\}.$$

计算 V 的体积.

解. 有两种配方方法

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx &= (x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z)^2+\frac{3}{4}(y+\frac{1}{3}z)^2+\frac{2}{3}z^2 \\ &= \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(y+z)^2+\frac{1}{2}(x+z)^2, \end{aligned}$$

给出两种换元的办法, 都可以直接算出

$$\mathrm{Vol}(V)=\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}.$$

例如, 采用前一种换元

$$u=x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z, \quad v=y+\frac{1}{3}z, \quad w=z,$$

则 V 在 uvw 坐标系下为椭球体 V'

$$u^2+\frac{3}{4}v^2+\frac{2}{3}w^2\le 1.$$

利用换元公式, 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(V) &= \iiint_V dxdydz=\iiint_{V'}|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|dudvdw \\ &= \mathrm{Vol}(V')=\frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

7 考虑平面区域

$$D=\{(x,y)|0\le x\le 2\pi, 0\le y\le 2\pi\}, \quad E=\{(x,y)|0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}.$$

(1) 证明:

$$\iint_D|\cos x+\cos y|dxdy=4\iint_E|\cos x+\cos y|dxdy.$$

(2) 计算二重积分 $\iint_E|\cos x+\cos y|dxdy$.

解. (1) 利用换元

$$x=\pi\pm u, \quad y=\pi\pm v.$$

例如, 对于区域 $[0,\pi]\times[\pi,2\pi]$, 按如下方式换元

$$x=\pi-u,\quad y=\pi+v,$$

由换元公式可得

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\pi]\times[\pi,2\pi]}|\cos x+\cos y|dxdy &= \iint_{[0,\pi]\times[0,\pi]}|\cos(\pi-u)+\cos(\pi+v)|\cdot|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv\\ &= \iint_{[0,\pi]\times[0,\pi]}|\cos u+\cos v|dudv.\end{aligned}$$

(2) 设 $0\le x,y\le\pi$, 此时有 $\cos\frac{x-y}{2}\ge 0$, 从而

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ge 0 \iff \frac{x+y}{2}\le\frac{\pi}{2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\iint_E|\cos x+\cos y|dxdy\\ =&\iint_{0\le x,y\le\pi,x+y\le\pi}(\cos x+\cos y)dxdy-\iint_{0\le x,y\le\pi,x+y\ge\pi}(\cos x+\cos y)dxdy\\ =&\int_0^\pi dx\int_0^{\pi-x}(\cos x+\cos y)dy-\int_0^\pi dx\int_{\pi-x}^{\pi}(\cos x+\cos y)dy\\ =&\int_0^\pi\left((\pi-x)\cos x+\sin(\pi-x)\right)dx-\int_0^\pi\left(x\cos x-\sin(\pi-x)\right)dx\\ =&\int_0^\pi\left(\pi\cos x-2x\cos x+2\sin x\right)dx\\ =&4\int_0^\pi\sin x dx\\ =&8.\end{aligned}$$

□