理科线性代数第九次作业

一、线性映射的进一步练习

1、(a) 设在某组基 $\{v_i\}$ 下 f 的矩阵为 A

则 $A^2=I$，$n\geq rank(A)\geq rank(A^2)=rank\,I=n$ $\Rightarrow rank A=n$ $\Rightarrow A$ 无 0 特征值

对于特征方程 $A\alpha=\lambda\alpha$ ① $(\lambda\neq 0)$.

$\Rightarrow A^2\alpha=\lambda A\alpha$

$\Rightarrow \lambda A\alpha=I\alpha=\alpha$

$\Rightarrow A\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$ ②

则 $\lambda=\frac{1}{\lambda}$ $\Rightarrow \lambda=\pm 1$

(b) pf: 设 $f(x)=y$

令 $v_+=\frac{x+y}{2}$，$v_-=\frac{x-y}{2}$

则 $f(v_+)=f(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]=\frac{1}{2}[f(x)+f\circ f(x)]=\frac{1}{2}(y+x)=v_+$

$f(v_-)=f(\frac{x-y}{2})=\frac{1}{2}[f(x)-f(y)]=\frac{1}{2}[f(x)-f\circ f(y)]=\frac{1}{2}(y-x)=-v_-$

即 $v_+\in W_+$，$v_-\in V_-$ #.

2. pf: $f^2=f\Rightarrow A^2=A$ $\Rightarrow A(A-I)=0$

以前曾证在此情况下 $rank\,A+rank(A-I)=n$.

$\Rightarrow rank(A-I)=n-r$

对于特征方程：① $\lambda=0$ 时 $A\alpha=0$，$\dim Nul(A)=n-r$.

则 $\lambda=0$ 有 $(n-r)$ 个线性无关特征向量.

② $\lambda\neq 0$ 时 $A\alpha=\lambda\alpha$

$\Rightarrow A^2\alpha=\lambda A\alpha$

$\Rightarrow A\alpha=\lambda A\alpha$

$\Rightarrow A\alpha=\alpha$ $(\lambda=1)$

$\Rightarrow (A-I)\alpha=0$ $\dim Nul(A-I)=n-(n-r)=r$

则 $\lambda=1$ 有 r 个线性无关特征向量.

$\therefore A$ 至多 n 个线性无关特征向量. 则以上为全部特征向量.

$tr(A)=\sum_i\lambda_i=r$ #

3. 充要条件 $Ker f=Ker f^2$

pf: ① 先证 $Ker f=Ker f^2\Rightarrow Im f\cap Ker f=\{0\}$.

$Ker f=Ker f^2\Rightarrow Nul A=Nul A^2$

反证法. 设 $\exists\alpha\neq 0$ 且 $\alpha\in Im f$，$\alpha\in Ker f$.

则 $\exists y\neq 0$ s.t. $Ay=\alpha$

$\Rightarrow A^2y=A\alpha=0$ 即 $y\in Nul A^2$ 而 $y\notin Nul A$. 矛盾. 得证.

② 再证 $Im f\cap Ker f=\{0\}\Rightarrow Ker f=Ker f^2$

$A\alpha=0\Rightarrow A^2\alpha=0$ 则 $Nul A\subset Nul A^2$

不妨设 $\exists y\in Nul A^2$ 且 $y\notin Nul A$

则 $A^2y=0$ 且 $Ay\neq 0$

设 $Ay=\alpha$. 则 $A\alpha=0$

$\therefore \exists\alpha\neq 0$ 且 $\alpha\in Im f$，$\alpha\in Ker f$. 矛盾. 得证.

4. (a) 换基矩阵 P, Q 应均为正交矩阵.

当 P, Q 为正交矩阵时

$$A'^TA' = (Q^{-1}AP)^TQ^{-1}AP$$
$$= P^TA^T(Q^{-1})^TQ^{-1}AP$$
$$= P^TA^TAP$$

而 A'^TA' 与 A^TA 相似, 特征值不变

$\therefore$ A' 的奇异值与 A 的相同

则 $norm(A') = norm(A)$.

(b) pf: 对于 A 的特征方程 $A\alpha = \lambda\alpha$

$$\Rightarrow \alpha^TA^TA\alpha = \lambda_1(A\alpha)^T\alpha$$
$$\Rightarrow |A\alpha|^2 = \lambda_1^2\alpha^T\alpha$$
$$\Rightarrow |A\alpha|^2 = \lambda_1^2|\alpha|^2$$
$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{|A\alpha|^2}{|\alpha|^2} \leq |A|^2 = \sigma_1^2$$
$$\Rightarrow \sigma_1 \geq |\lambda| \quad \text{(对于任意特征值)}$$
$$\Rightarrow \sigma_1 \geq |\lambda_1|$$

5. (a) pf: 先证 T 幂零 $\Rightarrow det(\lambda I - A) = \lambda^n$

$|A| = 0$ 时 $\quad det(\lambda I) = \lambda^n$ 显然成立

$|A| \neq 0$ 时

$$|\lambda I - A||A|^{k-1}$$
$$= |\lambda A^{k-1} - A^k|$$
$$= |\lambda A^{k-1}|$$
$$= \lambda^n |A|^{k-1}$$
$$\Rightarrow |\lambda I - A| = \lambda^n.$$

再证 $det(\lambda I - A) = \lambda^n \Rightarrow T$ 幂零

$det(\lambda I - A) = \lambda^n \Rightarrow A$ 的特征值全为 0

$\Rightarrow$ A 相似于一个若当标准型 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

$A = P^{-1}JP$ (P 为可逆矩阵)

$$\Rightarrow A^2 = P^{-1}JPP^{-1}JP = P^{-1}J^2P = P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}^2 P = P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} P$$

数学归纳法: 设 J^k 时 $\forall\, i-j = k \quad (J^k)_{ji} = 1$ 其余元素全为 0.

下证 k+1 时也成立

$$J^{k+1} = J^k \cdot J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{bmatrix} \text{也成立}$$

则 $J^n = 0$.

$$\Rightarrow A^n = (P^{-1}JP)^n = P^{-1}J^nP = P^{-1}0P = 0.$$

$\Rightarrow$ A 幂零 $\Rightarrow$ T 幂零

(b) 由 (a) 的证明: $\quad A^n = 0 \Rightarrow T^n = 0$

二阶时 $k=1 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k=2 \quad$ 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} a^2+bc = 0 \\ ab+bd = 0 \\ ac+cd = 0 \\ bc+d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -d \\ a^2 = bc \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & ka \\ \frac{1}{k}a & -a \end{bmatrix} \quad (a, k \in R)$$

(c) 由(a) $T-I$ 幂零 $\Leftrightarrow \det(\lambda I-(A-I))=\lambda^n$

$\Leftrightarrow \det((\lambda+1)I-A)=\lambda^n=(\lambda+1-1)^n$

$\Leftrightarrow \det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^n$

则 A n 个特征值全为 1

(d) T^k-I 幂零 $\Leftrightarrow A^k=I$

设 A 的 n 个特征值依次为 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$。

则 $\exists$ 可逆矩阵 P s.t. $A=P^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & 0\\ & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ 0 & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}P$

设 $J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & 0\\ & \lambda_2 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$

归纳法，设 $J^{m-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{m-1} & & *\\ & \lambda_2^{m-1} & \\ 0 & & \ddots & \lambda_n^{m-1}\end{bmatrix}$

$J^m=J^{m-1}J=\begin{bmatrix}\lambda_1^{m-1} & & *\\ & \lambda_2^{m-1} & \\ 0 & & \ddots & \lambda_n^{m-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & 0\\ & \lambda_2 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{m} & & *\\ & \lambda_2^{m} & \\ 0 & & \ddots & \lambda_n^{m}\end{bmatrix}$

则 $A^k=P^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1^{k} & & *\\ & \lambda_2^{k} & \\ 0 & & \ddots & \lambda_n^{k}\end{bmatrix}P=P^{-1}P=I$.

$\Rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1^{k} & & *\\ & \lambda_2^{k} & \\ 0 & & \ddots & \lambda_n^{k}\end{bmatrix}=I$

$\Rightarrow \lambda_1^k=\lambda_2^k=\dots=\lambda_n^k$

① k 为偶数　A 的特征值均为 -1 或 1

② k 为奇数　A 的特征值均为 1

6. pf: 设在某组基 $\{v_1\dots v_n\}$ 下 f 的矩阵为 A.

A 可以相似上三角化 $\Rightarrow$ $\exists$ 可逆矩阵 P s.t. $A=P^{-1}CP$ (其中 C 为上三角矩阵).

$\Rightarrow C=PAP^{-1}$

设 $\{v_1\dots v_n\}$ 在换基矩阵 P^{-1} 作用下可以得到 $\{w_1\dots w_n\}$

先证 $\{w_1\dots w_n\}$ 是一组基，反证法，设 $w_1\dots w_n$ 线性相关

$\Rightarrow Wx=0$ 有非零解

$\Rightarrow VP^{-1}x=0$ 有非零解 $(x\neq0\Rightarrow P^{-1}x\neq0)$

$\Rightarrow Vx=0$ 有非零解，矛盾，则 $w_1\dots w_n$ 线性无关，可以作为一组基。

再说明在 $\{w_1\dots w_n\}$ 下 f 对应矩阵为上三角矩阵.

由换基后矩阵变换 $A'=(P^{-1})^{-1}AP^{-1}=PAP^{-1}=C$ 为上三角矩阵

$\therefore$ 在 $\{w_1\dots w_n\}$ 下 f 可以上三角化.

7. i. pf: ① λ 是 A 特征值 $\Rightarrow$ 广义特征值方程有解.

λ 是 A 特征值 $\Leftrightarrow \lambda I-A=0$

$\Rightarrow (\lambda I-A)^n=0$

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}^n\quad (\lambda I-A)^n x=0$.

$\Rightarrow (\lambda I-A)^n x=0$ 有解

② 广义特征值方程有解 $\Rightarrow \lambda$ 是 A 特征值.

反证法，假设 λ 不是特征值

则 $(\lambda I-A)x=0$ 无零解

设 $n=k$ 时　$(\lambda I-A)^{k-1}x=0$ 无零解

则 $\forall x\neq0$，$(\lambda I-A)x\neq0 \Rightarrow (\lambda I-A)^{k-1}(\lambda I-A)x=(\lambda I-A)^k\neq0$　归纳假设成立

$\Rightarrow$ $(\lambda I-A)^n x=0$ 无零解，与有解矛盾

$\therefore$ λ 是 A 的特征值

ii. pf: 1) $\forall i\in\mathbb{Z}_+$ 如果 $(\lambda_1 I-A)^i x=0$

则 $(\lambda_1 I-A)^{i+1}x=(\lambda_1 I-A)(\lambda_1 I-A)^i x=0$

$\Rightarrow$ $Nul_i(\lambda_1)\subset Nul_{i+1}(\lambda_1)$

$\therefore$ $N_1(\lambda_1)\subset N_2(\lambda_1)\cdots$ 得证.

2) $N_0=\{0\}$. $\Rightarrow$ $\dim N_0=0$

$(\lambda I-A)x=0$ 有非零解 $\Rightarrow$ $N_1\neq N_0$ $\dim N_1\geq 1$

而 $N_1(\lambda_1)\subset N_2(\lambda_1)\subset\cdots$

$\Rightarrow 0=\dim N_0<\dim N_1\leq\dim N_2\leq\cdots\leq n$

由 Weierstrass Thm $\lim\limits_{n\to\infty}\dim N_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dim N_n=L$.

即 $\exists M>0$ $\forall n\geq M$ $|\dim N_n-L|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\dim N_n=L$.

而从 $n=0$ 到 $M-1$ 区间内，由介值定理

$\exists k$ 使 $\dim N_{k-1}<L$ 而 $\dim N_k=L$.

从而此 k 即为所求 #

iii. pf. $\forall x\in N_k(\lambda_1)$ $\Rightarrow$ $(\lambda_1 I-A)^k x=0$

而 A 与 $(\lambda I-A)$ 可交换（即 $A(\lambda I-A)=\lambda A-A^2=(\lambda I-A)A$）.

则 $A(\lambda_1 I-A)^k x=(\lambda_1 I-A)A(\lambda_1 I-A)^{k-1}x$

$=\cdots=(\lambda_1 I-A)^k Ax=0$

$\Rightarrow$ $Ax\in N_k(\lambda_1)$

$\Rightarrow$ $N_k(\lambda_1)$ 是 A 的不变子空间

iv. pf: 由第3题 $Im(\lambda_1 I-A)^k\cap Ker(\lambda_1 I-A)^k=0$

$\Leftrightarrow N((\lambda_1 I-A)^k)=N((\lambda_1 I-A)^{>k})$

而由 ii $N((\lambda_1 I-A)^k)=N((\lambda_1 I-A)^n)$ 显然成立

v. pf: 设 A 可转化为 1 个若当标准形，其中 λ_1 代数重数为 m_1

$\exists$ 可逆矩阵 P s.t. $J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & 0\\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_2 & & \\ & & & \ddots & 1\\ \underbrace{0}_{m_1个} & & & & \lambda_{n-m}\end{bmatrix}=P^{-1}AP$.

则 $\lambda_1 I-A=P^{-1}(\lambda_1 I)P-P^{-1}\cdot P=P^{-1}(\lambda_1 I-J)P$.

设 $\lambda_1 I-J=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & 0\\ & 0 & & & \\ & & \lambda_2' & & \\ & & & \ddots & 1\\ 0 & & & & \lambda_{n-m}'\end{bmatrix}$

则 $(\lambda_1 I-J)^{m_1}=\begin{bmatrix}0 & & & & *\\ & 0 & & & \\ & & \lambda_2'^{m_1} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{n-m_1}'^{m_1}\end{bmatrix}$ 即 $rank((\lambda_1 I-J)^{m_1})=m$

则 $(\lambda_1 I-A)^{m_1}x=(P^{-1}(\lambda_1 I-J)P)^{m_1}x=P^{-1}(\lambda_1 I-J)^{m_1}Px=0$.

$\Leftrightarrow$ $(\lambda_1 I-J)^{m_1}Px=0$

$\dim Nul(\lambda_1 I-J)^{m_1}=\dim N_m(\lambda_1)=n-rank((\lambda_1 I-J)^{m_1})=m_1$.

而 $n\geq m_1$ 时 $rank((\lambda_1 I-J)^{n})=m$ 即 $m_1\geq k$

$\Rightarrow$ $\dim N_m(\lambda_1)=\dim N_k(\lambda_1)=m_1$

$\therefore$ $N_1(\lambda_1)$ 的维数等于 λ_1 的代数重数

二、张量

1. (a) Pf: 设 $c_1e^{1*}+c_2e^{2*}+c_3e^{3*}=0$

同时作用于 e_1 $\Rightarrow c_1e^{1*}(e_1)=0$

$\Rightarrow c_1=0$

则 $c_1=c_2=c_3$ $\Rightarrow e^{1*}、e^{2*}、e^{3*}$ 线性无关

下证其为一组基，对 $\forall f\in V^*$

设 $f(e_1)=a_1,\ f(e_2)=a_2,\ f(e_3)=a_3$

则 $f=a_1e^{1*}+a_2e^{2*}+a_3e^{3*}$ 可被 $\{e^{i*}\}$ 线性表示

$\therefore e^{1*}、e^{2*}、e^{3*}$ 可以张开对偶空间.

(b)

$e^{1*}:[1,0,0]$

$e^{2*}:[0,1,0]$

$e^{3*}:[0,0,1]$

(c) $f=f_1e^{1*}+f_2e^{2*}+f_3e^{3*}$ 对应矩阵 $[f_1, f_2, f_3]$

$$f(\vec{x})=[f_1\ f_2\ f_3]\begin{bmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{bmatrix}=f_ix^i$$

(d)

$$e_i'=\sum_{j=1}^{3}e_jP^j{}_i \quad (\text{对偶基变换公式})$$

$$\vec{x}=[e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[e_1'\ e_2'\ e_3']P\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=E'P^{-1}x$$

则 $\vec{x}$ 在新的基下坐标为 $P^{-1}x$

$$f(\vec{x})=[f_1\ f_2\ f_3]\begin{bmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{bmatrix}=[f_1\ f_2\ f_3]P\begin{bmatrix}x'^1\\x'^2\\x'^3\end{bmatrix}$$

则 f 在新的基下坐标为 $[f_1\ f_2\ f_3]P$

2. (a) 由1题，定义 V^* 中一组基为 $e^{i*}(e_j)=\delta_{ij}$

则 $V^*\otimes V^*$ 一组基为 $e^{1*}\otimes e^{1*},\ e^{1*}\otimes e^{2*},\ e^{2*}\otimes e^{1*},\ e^{2*}\otimes e^{2*}$

(b) 先计算 e^{i*} 的变换　设 $[e'^{1*}\ e'^{2*}\cdots e'^{n*}]=[e^{1*}\ e^{2*}\cdots e^{n*}]C$

$$\Rightarrow e'^{i*}=\sum_j C_{ji}e^{j*}$$

$$\Rightarrow e^{i*}=\sum_j (C^{-1})_{ji}e'^{j*}$$

$$\begin{aligned}e^{i*}(e_j)&=\sum_k (C^{-1})_{ki}e'^{k*}(e_j)\\&=\sum_k (C^{-1})_{ki}e'^{k*}\left(\sum_l P^{-1}{}_{lj}e_l'\right)\\&=\sum_k\sum_l (C^{-1})_{ki}(P^{-1})_{lj}e'^{k*}(e_l')\\&=\sum_k (C^{-1})_{ki}(P^{-1})_{kj}\\&=\sum_k (P^{-1})^T{}_{jk}(C^{-1})_{ki}=\delta_{ji}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (P^{-1})^TC^{-1}=I \Rightarrow C=(P^{-1})^T$$

则

$$\begin{aligned}f=\sum_i\sum_j f_{ij}e^{i*}\otimes e^{j*}&=\sum_i\sum_j f_{ij}\left(\sum_k (C_{ki}^{-1})e'^{i*}\right)\otimes\left(\sum (C_{lj}^{-1})e'^{j*}\right)\\&=\sum_i\sum_j f_{ij}(P^T)_{ki}e'^{i*}\otimes(P^T)_{lj}e'^{j*}\\&=\quad f_{ij}P^i{}_kP^j{}_l\quad e'^{i*}\otimes e'^{j*}\end{aligned}$$

则 f 在新的基下坐标为 $f_{ij}P^i{}_kP^j{}_l$.

3. (a) $\vec{x} = [e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = [e_1'\ e_2'\ e_3']\ P^{-1}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = [e_1'\ e_2'\ e_3']\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix}$

则 $x'^i = x^j (P^{-1})^i{}_j$

(b) $\vec{x}' = P^{-1}\vec{x}$

$|x'|^2 = |x|^2$

$\Leftrightarrow x^T (P^{-1})^T P^{-1} x = x^T x$

$\Leftrightarrow x^T [(P^{-1})^T P^{-1} - I] x = 0$

$(P^{-1})^T P^{-1}$ 可正交对角化，设 $(P^{-1})^T P^{-1} = Q^T \Lambda Q$ （Q为正交矩阵）

$\Leftrightarrow x^T [Q^T \Lambda Q - I] x = 0$

$\Leftrightarrow x^T Q^T (\Lambda - I) Q x = 0$

$\forall x \in R^3$ 此式成立，Qx 可取遍 R^3

则 $\Lambda = I \Leftrightarrow P^{-1} = Q^T \Leftrightarrow P = Q$ 为正交矩阵.

(c)

~~P 课表 ⇒ P为正交矩阵~~

$\delta_{ij} = \delta_{ij} = \sum_k (P^{-1})^j{}_k ((P^{-1})^T)^k{}_i = \sum_k (P^{-1})^j{}_k (P^{-1})^i{}_k$

$= \sum_k \sum_l (P^{-1})^j{}_k (P^{-1})^i{}_l \delta_{kl}$

则 $M'^{ij} = m(|x'|^2 \delta_{ij} - x'^i x'^j)$

$= m(|x|^2 \sum_k \sum_l (P^{-1})^j{}_k (P^{-1})^i{}_l \delta_{kl} - (P^{-1})^i{}_k x^k (P^{-1})^j{}_l x^l)$

$= \sum_k \sum_l (P^{-1})^j{}_k (P^{-1})^i{}_l\ m(|x|^2 \delta_{kl} - x^k x^l)$.

$= (P^{-1})^i{}_k (P^{-1})^j{}_l M^{kl}$

(d) P 课表 ⇒ P为正交矩阵

$M'^{ij} = \sum_k \sum_l (P^{-1})^i{}_k (P^{-1})^j{}_l M^{kl}$

$= \sum_k \sum_l (P^{-1})^i{}_k M^{kl} (P^T)^j{}_l$

$= \sum_k \sum_l (P^{-1})^i{}_k M^{kl} (P)^l{}_j$

$\Rightarrow M' = P^{-1} M P$ 即转动惯量总可以在某坐标系下对角化.

4. (a) $S = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$

(b) $x' = P^{-1} x$，则 $x'^T S x' = x^T S x$

$\Leftrightarrow x^T (P^{-1})^T S P^{-1} x = x^T S x$

$\Leftrightarrow x^T [(P^{-1})^T S P^{-1} - S] x = 0$

$(P^{-1})^T S P^{-1} - S$ 为对称矩阵，设可以正交对角化 $(P^{-1})^T S P^{-1} - S = Q^T \Lambda Q$

$\Leftrightarrow x^T Q^T \Lambda Q x = 0 \Leftrightarrow \Lambda = 0$.

$\Leftrightarrow (P^{-1})^T S P^{-1} = S$

$\Leftrightarrow P^T S P = S$

(c) 对 $P^T S P = S$ 两边取行列式

$-|P^T||P| = -1$

$\Leftrightarrow |P|^2 = 1$

$\Leftrightarrow |P| = 1$ 或 -1

① $|P| = 1$ 时　P 可取 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

② $|P| = -1$ 时　P 可取 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5、 (a) σ_A 对应矩阵 $A=[e_A^1\ e_A^2]\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}[e_A^1\ e_A^2]^T$

则 $\lambda I-A=[e_A^1\ e_A^2]\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}[e_A^1\ e_A^2]^T-[e_A^1\ e_A^2]\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}[e_A^1\ e_A^2]^T$

$=[e_A^1\ e_A^2]\begin{bmatrix}\lambda-1&0\\0&\lambda+1\end{bmatrix}[e_A^1\ e_A^2]^T$

对于特征方程 $(\lambda I-A)x=0$，e_A^1, e_A^2 恰分别为 $\lambda=1$ 与 -1 的特征向量.

于是 $A=[e_A^1\ e_A^2]\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}[e_A^1 e_A^2]^T=e_A^1e_A^{1T}-e_A^2e_A^{2T}$

同理 $B=[e_B^1\ e_B^2]\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}[e_B^1 e_B^2]^T=e_B^1e_B^{1T}-e_B^2e_B^{2T}$

(b)

$\sigma_A\otimes I_B\ (e_A^1\otimes e_B^1)=e_A^1\otimes e_B^1$

$\sigma_A\otimes I_B\ (e_A^1\otimes e_B^2)=e_A^1\otimes e_B^2$

$\sigma_A\otimes I_B\ (e_A^2\otimes e_B^1)=-e_A^2\otimes e_B^1$

$\sigma_A\otimes I_B\ (e_A^2\otimes e_B^2)=-e_A^2\otimes e_B^2$

$S=\begin{bmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&-1&\\0&&&-1\end{bmatrix}$

(c)

$v\otimes w=(a_1e_A^1+a_2e_A^2)\otimes(b_1e_B^1+b_2e_B^2)$

$=a_1b_1\ e_A^1\otimes e_B^1+a_1b_2\ e_A^1\otimes e_B^2+a_2b_1\ e_A^2\otimes e_B^1+a_2b_2\ e_A^2\otimes e_B^2$

则 $v\otimes w$ 坐标为 $\begin{bmatrix}a_1b_1\\a_1b_2\\a_2b_1\\a_2b_2\end{bmatrix}$

$|v\otimes w|=\sqrt{a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2}=\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}=\sqrt{1\cdot 1}=1$ 归一.

(d) 例 $\psi=e_A^1\otimes e_B^1+e_A^2\otimes e_B^2$

(e) $x^TSx=[a_1b_1\ a_1b_2\ a_2b_1\ a_2b_2]\begin{bmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&-1&\\0&&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1b_1\\a_1b_2\\a_2b_1\\a_2b_2\end{bmatrix}$

$=[a_1b_1\ a_1b_2\ a_2b_1\ a_2b_2]\begin{bmatrix}a_1b_1\\a_1b_2\\-a_2b_1\\-a_2b_2\end{bmatrix}=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2-a_2^2b_1^2-a_2^2b_2^2$

$=a_1^2-a_2^2$

(f) 验证：假设 ψ 可表示为 $v\otimes w$

则坐标为 $\begin{bmatrix}a_1b_1\\a_1b_2\\a_2b_1\\a_2b_2\end{bmatrix}$ $\begin{cases}a_1b_1=\frac{1}{\sqrt2} & ①\\ a_1b_2=0 & ②\\ a_2b_1=0 & ③\\ a_2b_2=\frac{1}{\sqrt2} & ④\end{cases}$ 由①④：$a_1b_1a_2b_2\neq0$ 与②③矛盾

$\therefore$ ψ 是个纠缠态.