《高等微积分 (2)》期中考试

2017 年 4 月 10 日 $9:50-12:20$, 共 150 分钟

本试卷分三页, 共 6 道试题. 其中第 1 题 $4\times 8=32$ 分; 第 2 题 $4\times 4=16$ 分; 第 3 题 $4\times 3=12$ 分; 第 4 题 10 分; 第 5 题 $5\times 3=15$ 分; 第 6 题 15 分.

1 设 $F(x,y,z)=x^2-x+y^2-z(z-1)(z-2)$.

(1) 求 F 的 (全) 微分.

(2) 求 F 在点 $(1,2,3)$ 处的梯度向量.

(3) 对于方向 $\mathbf{q}=(a,b,c)$, 求方向导数 $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}|_{(2,3,4)}$ 的值.

(4) 设 $z=z(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(2,2,3)$ 附近确定的隐函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(2,2)}, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,2)}$.

(5) 求上述隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(2,2)$ 附近的带有皮亚诺余项的二阶泰勒公式, 即要求余项形如 $o\left((x-2)^2+(y-2)^2\right)$.

(6) 求曲面 $S=(x,y,z)|F(x,y,z)=0$ 在点 $(2,2,3)$ 处的切平面方程.

(7) 求曲线 $L=\{(x,y,z)|F(x,y,z)=0, x+y+z=7\}$ 在点 $(2,2,3)$ 处的切线方程.

(8) 求出 F 的所有临界点 (驻点), 并判断它们是否为极值点.

2 定义函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{如果}(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{如果}(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1) 证明: f 是连续函数.

(2) 给定方向 $\mathbf{q}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 求 f 在 $(0,0)$ 处的方向导数 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{q}}$.

(3) 对 $(x,y)\neq(0,0)$, 求偏导数 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

(4) 计算二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(0,0)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{(0,0)}.$$

3 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 的二阶偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数.

(1) 给定 $a_1 < a_2, b_1 < b_2$, 令

$$D = \{(x,y) | a_1 \le x \le a_2, b_1 \le y \le b_2\}.$$

计算二重积分

$$\iint_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} d\sigma.$$

(2) 利用 (1) 的结论证明: 存在 $(x_0, y_0) \in D$, 使得

$$f(a_2,b_2) - f(a_1,b_2) - f(a_2,b_1) + f(a_1,b_1) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{(x_0,y_0)}.$$

(3) 证明: 如果 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{(x,y)} = 0, \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, 则存在一元函数 $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 使得

$$f(x,y) = g(x) + h(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

4 给定 n 个正数 $\alpha_1, ..., \alpha_n$. 设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 满足约束条件:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1, \quad 且 x_i \ge 0, \forall 1 \le i \le n,$$

求函数 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1^{\alpha_1}) \cdot (x_2^{\alpha_2}) \cdot ... \cdot (x_n^{\alpha_n})$ 的最大值.

5 设 n 元函数 $f(x_1, ..., x_n), g(x_1, ..., x_n)$ 与一元函数 $x_1(t), ..., x_n(t)$ 都是 C^2 光滑的. 定义函数

$$h(t) = f(x_1(t), ..., x_n(t)).$$

(1) 求 $h''(t)$, 请用 $f(x_1, ..., x_n)$ 与 $x_1(t), ..., x_n(t)$ 的高阶 (偏) 导函数表示.

(2) 令 $\mathbf{p} = (x_1(0), ..., x_n(0))$. 假设 $\mathbf{p}$ 是函数 $f(x_1, ..., x_n)$ 在约束条件 $g(x_1, ..., x_n) = 0$ 下的条件极值点. 请叙述此情形下的拉格朗日乘子法.

(3) 设 $\lambda \in \mathbf{R}$ 满足 (2) 中所述拉格朗日乘子法的结论, 定义 n 元函数 F 为

$$F(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) - \lambda \cdot g(x_1, ..., x_n).$$

证明: 如果对任何 t, 都有 $g(x_1(t),...,x_n(t))=0$, 则

$$h''(0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}|_{\mathbf{p}}\cdot x_i'(0)\cdot x_j'(0).$$

6 给定三个互不相同的实数 A,B,C. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 有连续的二阶导函数 $f^{(2)}(x)$, 计算二重积分

$$I=\iint_{x+y\leq 1,x,y\geq 0} f^{(2)}(Ax+By+C(1-x-y))d\sigma$$

的值, 要求将结果用 $f(A),f(B),f(C)$ 表示.