离散数学第十四周作业

2. 我们建立双射 $f:[0,1]\to[a,b]$

$f(x)=a+(b-a)x$，下证其为双射

首先 f 是单射，对任何 x_1,x_2 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow a+(b-a)x_1=a+(b-a)x_2\Rightarrow x_1=x_2$

其次 f 是满射，对任何 y $y\in[a,b]$ 都存在 $x=\frac{y-a}{b-a}\in[0,1]$ 使得 $f(x)=y$

故 $ran(f)=[a,b]$

综上，存在双射 $f:[0,1]\to[a,b]$，故 $[0,1]$ 与 $[a,b]$ 等势

4、 $\{x\mid \frac{x}{2}\in N\}$.

$\{x\mid \frac{x+1}{2}\in N\}$.

$\{x\mid \frac{x}{3}\in N\}$.

7、 证明:

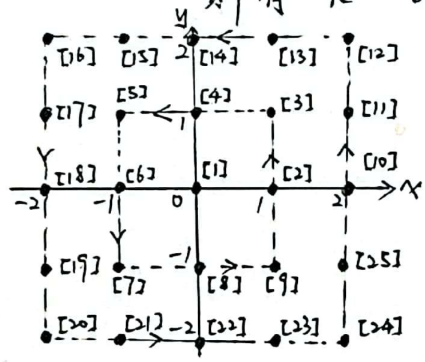
(1) $k^m\le(2^k)^m=2^{k\cdot m}=2^k\cdot 2^m=max(2^k,2^m)=2^m\le k^m$

故有 $k^m=2^m$

(2) 与(1)同理，有 $l^m=2^m$

则有 $k^m=l^m$

9.



我们构造一个坐标序列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$。

(0,0),

(1,0), (1,1), (0,1), (−1,1), (−1,0), (−1,−1), (0,−1), (1,−1)

(2,0), (2,1), (2,2), (1,2) ---

我们看到，每行坐标对应一圈坐标系上的点，这圈点的特征是横、纵坐标的绝对值的最大值相等，

第一行最大值为0，第二行为1，第三行为2，以此类推

且每行坐标不遗漏、不重复地涵盖了所有满足该特征的点

构造函数 $f:N\to\{(x,y)\mid x\in Z\wedge y\in Z\}$ 使得 $f(i)=a_i$ $(i\in N)$

$f(0)=(0,0)$ $f(1)=f(1,0)$ $f(2)=(1,1)$ ---

序列中无重复坐标，故 f 是单射

任意坐标 (x,y) $(x\in N\wedge y\in N)$，设 $m=max(x,y)\in N$，则 (x,y) 在序列的第 $(m+1)$ 行，即 $\exists i\in N$ 使得 $f(i)=(x,y)$，故 f 是满射

综上，f 是双射，card{直角坐标系中所有整数坐标点} $=\aleph_0$。

故集合是可数集

10、(1) 构造双射函数 $f:\{a,b,c\}\to 3$. $f(a)=0$ $f(b)=1$, $f(c)=2$

故 $\{a,b,c\}\approx 3$, $card(A)=3$

(2) 构造函数 $f:N\to B$ $f(x)=x^2$

对任何 $x_1,x_2\in N$, $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1=x_2$，故 f 是单射

对任何 $y\in B$，由B定义，存在 $x\in N$ 使得 $x^2=y$，故 $f(x)=y$，所以 f 是满射

综上：f 是双射，$N\approx B$ 故有 $card(B)=\aleph_0$。

(3) 构造函数 $f:N\to D$ $f(x)=x^5$

与(2)同理可证，f 是双射

故 $N\approx D$, $card(D)=\aleph_0$。

(4) ① $B \cap D \subseteq B$ 可以构造单射 $g: B\cap D \to B$，$g(x)=x$，故 $\mathrm{card}(B\cap D) \leq \mathrm{card}(B) = \aleph_0$

② 设 $E = \{x \mid (\exists n)(n \in \mathbb{N} \wedge x = n^{10})\}$

对任何 x $\quad x \in E \Rightarrow (\exists m)(m \in \mathbb{N} \wedge m^{10} = x) \Rightarrow (\exists m)(m \in \mathbb{N} \wedge (m^3)^2 = x) \wedge$
$(\exists m)(m \in \mathbb{N} \wedge (m^2)^5 = x)$

$\Rightarrow x \in B \wedge x \in D \Rightarrow x \in B \cap D$

$\Rightarrow E \subseteq B \cap D$，E是无限集合，故 $B\cap D$ 是无限集合

故 $\mathbb{N} \leq B \cap D$，即 $\aleph_0 \leq \mathrm{card}(B \cap D)$

综合①② $\quad \mathrm{card}(B\cap D) = \aleph_0$