《高等微积分 2》第十五周习题课

设 V 是 $\mathbf{R}^3$ 的有界闭区域, 其边界 ∂V 赋予指向 V 外面的定向, $\mathbf{n}$ 是单位外法向量.

1 计算第一型曲面积分.

(1) $\iint_{\partial V} \mathbf{n}(x,y,z)dS$.

(2) $\iint_{\partial V} (x,y,z) \times \mathbf{n}(x,y,z)dS$.

(3) $\iint_{\partial V} z\mathbf{n}(x,y,z)dS$.

2 设 $\mathbf{n}$ 的各个分量分别为

$$\mathbf{n}(x,y,z) = (\mathbf{n}_1(x,y,z), \mathbf{n}_2(x,y,z), \mathbf{n}_3(x,y,z)).$$

设 f, g 是 V 上的光滑函数. 证明:

$$\iiint_V g\frac{\partial f}{\partial x}dxdydz = \iint_{\partial V} f(x,y,z)g(x,y,z)\mathbf{n}_1(x,y,z)dS - \iiint_V f\frac{\partial g}{\partial x}dxdydz,$$

$$\iiint_V g\frac{\partial f}{\partial y}dxdydz = \iint_{\partial V} f(x,y,z)g(x,y,z)\mathbf{n}_2(x,y,z)dS - \iiint_V f\frac{\partial g}{\partial y}dxdydz,$$

$$\iiint_V g\frac{\partial f}{\partial z}dxdydz = \iint_{\partial V} f(x,y,z)g(x,y,z)\mathbf{n}_3(x,y,z)dS - \iiint_V f\frac{\partial g}{\partial z}dxdydz.$$

3 Laplace 算子为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

设 u, v 是 V 上的光滑函数. 证明:

(1) $\iint_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS = \iiint_V \Delta u dxdydz$.

(2) $\iint_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla u \cdot \nabla v dxdydz + \iiint_V v\Delta u dxdydz$.

(3) 设 u 是 V 上的调和函数, 即有 $\Delta u \equiv 0$. 证明:

$$\iint_{\partial V} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla u \cdot \nabla u dxdydz.$$

(4) 证明第二 Green 公式:

$$\iint_{\partial V}(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}) = \iiint_V (v\Delta u - u\Delta v)dxdydz.$$

4 设 u 是 V 上的调和函数, 且坐标原点 $\mathbf{0}$ 位于 V 内部.

(1) 证明:

$$u(\mathbf{0}) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial V}(u\frac{\cos\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}\rangle}{|\mathbf{r}|^2} + \frac{1}{|\mathbf{r}|}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}})dS,$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 是 ∂V 上的向量值函数. 这一结果表明, 调和函数由其在边界上的值完全确定.

(2) 设 $\Sigma \subset V$ 是以 $\mathbf{0}$ 为球心, R 为半径的球面. 证明:

$$u(\mathbf{0}) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_\Sigma u dS.$$

5 给定 $a > 0$, 设 V 是实心圆柱体 $x^2 + y^2 \leq ax$ 被球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截得的有界三维区域. 求 V 的体积与表面积.

6 给定 $a > b > 0$, 定义 Ω 为

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 \leq b^2\}.$$

求 Ω 的体积.

7 设 $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ 为 n 阶实对称正定矩阵, 令

$$V = \{(x_1, ..., x_n) | \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j \leq 1\}.$$

计算 n 重积分

$$\int ... \int_V dx_1...dx_n.$$

8 (Poincare 不等式) 设 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,\phi(x)\le y\le\psi(x)\}$ 是平面区域, 其中 ϕ,ψ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明: 存在常数 $C>0$, 使得对满足条件

$$f(x,\phi(x))=0,\quad \forall x\in[a,b]$$

的函数 $f\in C^1(D,\mathbf{R})$, 总有如下不等式成立:

$$\iint_D f^2(x,y)dxdy\le C\iint_D f_y^2(x,y)dxdy.$$

9 设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中的定向曲面, 对其边界 ∂S 赋予边界的正定向. 设 ∂S 的正定向由如下的单位切向量给出:

$$\mathbf{e}(x,y,z)=(\mathbf{e}_1(x,y,z),\mathbf{e}_2(x,y,z),\mathbf{e}_3(x,y,z)).$$

把如下第一型的曲线积分化成第二型的曲面积分:

$$\int_{\partial S}f(x,y,z)\mathbf{e}_1(x,y,z)dl,$$

$$\int_{\partial S}f(x,y,z)\mathbf{e}_2(x,y,z)dl,$$

$$\int_{\partial S}f(x,y,z)\mathbf{e}_3(x,y,z)dl.$$

10 (1) 给定整数 n. 设曲线 L_n 由如下参数方程给出

$$\begin{cases}x(t)=(2+\cos t)\cos(nt),\\ y(t)=(2+\cos t)\sin(nt),\\ z(t)=\sin t,\end{cases}$$

其中参数 $t\in[0,2\pi]$. 上述参数方程确定了 L_n 的一个定向 (教材上称之为 “方向”), 求第二型曲线积分

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{L_n}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$

(2) 设 $C\subseteq\mathbf{R}^3$ 是封闭的定向曲线 (给定了 “方向” 的曲线), 且与 z 轴 $\{(0,0,z)|z\in\mathbf{R}\}$ 不相交. 证明: 第二型曲线积分

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

的值是整数.(这一问可能有点困难)

11 (作业题) 设 C 是平面上的道路连通的封闭曲线, D 是 C 围成的有界闭区域. 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑的函数.

(1) 假设 $(0,0)\notin C\cup D$. 计算

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{-yf(x,y)dx+xf(x,y)dy}{x^2+y^2}-\frac{1}{2\pi}\iint_D\frac{xf_x(x,y)+yf_y(x,y)}{x^2+y^2}d\sigma.$$

(2) 假设 $(0,0)\in D$ 且 $(0,0)\notin C$. 证明:

$$f(0,0)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{-yf(x,y)dx+xf(x,y)dy}{x^2+y^2}-\frac{1}{2\pi}\iint_D\frac{xf_x(x,y)+yf_y(x,y)}{x^2+y^2}d\sigma,$$

其中积分曲线 C 按逆时针定向, $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}, f_y=\frac{\partial f}{\partial y}$ 是 f 的两个偏导数.

12 设 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是光滑函数, 且存在正数 R 使得

$$f(x,y,z)=0,\quad \forall x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{4}R^2.$$

对正数 ϵ, 令

$$\Omega_\epsilon=\{(x,y,z)|\epsilon^2\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2\}.$$

计算

$$\lim_{\epsilon\to0+}\iiint_{\Omega_\epsilon}\Delta f(x,y,z)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz,$$

其中 Δ 是 Laplace 算子, 定义为

$$\Delta f(x,y,z)=\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}.$$