线性代数作业 2

1. 初等变换

1 ① $\begin{bmatrix}3&7&2\\6&19&4\\-3&-2&3\end{bmatrix}$ 经过 $E_{21}(-2)E_{31}(1)$ 变换得 $\begin{bmatrix}3&7&2\\0&5&0\\0&5&5\end{bmatrix}$ 经过 $E_{32}(-1)$ 得 $\begin{bmatrix}3&7&2\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$

则 $L=E_{21}^{-1}(-2)E_{31}^{-1}(1)E_{32}^{-1}(-1)=E_{21}(2)E_{31}(-1)E_{32}(1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}3&7&2\\6&19&4\\-3&-2&3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}3&7&2\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}}_{U}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix}1&\frac{7}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{U'}$$

② $\begin{bmatrix}2&3&2\\4&13&9\\-6&5&4\end{bmatrix}$ 经过 $E_{21}(-2)E_{31}(3)$ 变换得 $\begin{bmatrix}2&3&2\\0&7&5\\0&14&10\end{bmatrix}$ 经过 $E_{32}(-2)$ 得 $\begin{bmatrix}2&3&2\\0&7&5\\0&0&0\end{bmatrix}$

则 $L=E_{21}^{-1}(-2)E_{31}^{-1}(3)E_{32}^{-1}(-2)=E_{21}(2)E_{31}(-3)E_{32}(2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&2&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2&3&2\\4&13&9\\-6&5&4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&2&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}2&3&2\\0&7&5\\0&0&0\end{bmatrix}}_{U}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&2&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&7&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix}1&\frac{3}{2}&1\\0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0\end{bmatrix}}_{U'}$$

③ $\begin{bmatrix}1&3&-5&-3\\-1&-5&8&4\\4&2&-5&-7\\-2&-4&7&5\end{bmatrix}$ 经过 $E_{21}(1)E_{31}(-4)E_{41}(2)$ $\begin{bmatrix}1&3&-5&-3\\0&-2&3&1\\0&-10&15&5\\0&2&-3&-1\end{bmatrix}$ 经过 $E_{32}(-5)E_{42}(1)$ $\begin{bmatrix}1&3&-5&-3\\0&-2&3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

则 $L=E_{21}^{-1}(1)E_{31}^{-1}(-4)E_{41}^{-1}(2)E_{32}^{-1}(-5)E_{42}^{-1}(1)=E_{21}(-1)E_{31}(4)E_{41}(-2)E_{32}(5)E_{42}(-1)$

$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\4&5&1&0\\-2&-1&0&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&3&-5&-3\\-1&-5&8&4\\4&2&-5&-7\\-2&-4&7&5\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\4&5&1&0\\-2&-1&0&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}1&3&-5&-3\\0&-2&3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{U}$$

无 LDU 分解

④ $\begin{bmatrix}1&3&1&5\\5&20&6&31\\-2&-1&-1&4\\-1&7&1&7\end{bmatrix}$ 经过 $E_{21}(-5)E_{31}(2)E_{41}(1)$ $\begin{bmatrix}1&3&1&5\\0&5&1&6\\0&5&1&14\\0&10&2&12\end{bmatrix}$ 经过 $E_{32}(-1)E_{42}(-2)$

$\begin{bmatrix}1&3&1&5\\0&5&1&6\\0&0&0&8\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 则 $L=E_{21}^{-1}(-5)E_{31}^{-1}(2)E_{41}^{-1}(1)E_{32}^{-1}(-1)E_{42}^{-1}(-2)$

$=E_{21}(5)E_{31}(-2)E_{41}(-1)E_{32}(1)E_{42}(2)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&1&0&0\\-2&1&1&0\\-1&2&0&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&3&1&5\\5&20&6&31\\-2&-1&-1&4\\-1&7&1&7\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&1&0&0\\-2&1&1&0\\-1&2&0&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}1&3&1&5\\0&5&1&6\\0&0&0&8\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{U}$$

无 LDU' 分解

2. ① $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ $[A|I]\Rightarrow[I|A^{-1}]$

则 $[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right]$

$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&4&-1&-1&3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&0&\frac{5}{8}&\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}\right]$

$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}\right]$

则 $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$

---

②
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 1 & 0 & 2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2\end{array}\right]$$

则 $\operatorname{rank} A=2<n=3$ 矩阵不可逆

---

③
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]=[I\mid A^{-1}]$$

则 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

---

④
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -5 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & +1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{3}{5}\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 0 & -15 & 4 & 20 & -12\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -22 & 5 & 30 & -18\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 6 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 0 & 0 & -12 & 4 & 14 & -9\\ 0 & 3 & 0 & 0 & -51 & 15 & 60 & -39\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 6 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 0 & 0 & -12 & 4 & 14 & -9\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3\end{array}\right]$$

则 $A^{-1}=\begin{bmatrix}22 & -6 & -26 & 17\\ -17 & 5 & 20 & -13\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ 4 & -1 & -5 & 3\end{bmatrix}$

2、其他问题

1、A可逆则U的最后一行必不全为0，下证这两个命题等价

U为A经消元的行化简得到的，U最后一行不为0则A必有n个主元位置，

再经回代操作必可以行化简为I

因此 U最后一行必不全为0 $\Leftrightarrow$ A可行化简为I

① A可逆则 $Ax=b$ 对任何b均有解 $x=A^{-1}b$，说明A有n个主元位置，

且n个主元位置均在对角线上，则 A可行化简为I

② A可行化简为I，则设经p步初等矩阵变换可得I，每一步为E_i

$$E_pE_{p-1}\cdots E_1A=I$$

$$\Rightarrow A=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_p^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=(E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_p^{-1})^{-1}=E_pE_{p-1}\cdots E_1$$ 即A可逆

综上：U最后一行不全为0 $\Leftrightarrow$ A与I行等价 $\Leftrightarrow$ A可逆 得证

2、令 $E=\begin{bmatrix}I_{r_1} & 0\\ CA^{-1} & I_{r_2}\end{bmatrix}$ 则 $EM=\begin{bmatrix}I_{r_1} & 0\\ CA^{-1} & I_{r_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D-BCA^{-1}\end{bmatrix}$ （其中I_{r_1}、I_{r_2}为单位矩阵

① M中的A需可逆（满秩）且 A、$D-BCA^{-1}$ 均为上三角矩阵

② $EM=\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D-BCA^{-1}\end{bmatrix}$