高代选讲　第十次作业

1. (a)

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}\qquad |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&-4\\-4&\lambda+7&-8\\-6&7&\lambda-7\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+7&-8\\7&\lambda-7\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}3&-4\\7&\lambda-7\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}3&-4\\\lambda+7&-8\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+7)+4(3\lambda+7)-6(4\lambda+4)$$

$$=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$$

$\lambda_1=3$　根子空间维数为1

$\lambda_2=-1$　根子空间维数为2

$$(\lambda_2 I-A)=\begin{pmatrix}-2&3&-4\\-4&6&-8\\-6&7&-8\end{pmatrix}\qquad \dim N(\lambda_2 I-A)=1$$

$$(\lambda_2 I-A)^2=\begin{pmatrix}16&-16&16\\32&-32&32\\32&-32&32\end{pmatrix}\qquad \dim N(\lambda_2 I-A)^2=2$$

$d_1=0\quad d_2=1$

Jordan 标准型为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

(b)

$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}\qquad |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\3&\lambda+5&0\\3&6&\lambda-1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}3&0\\3&\lambda-1\end{vmatrix}+(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda+5&0\\6&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=18(\lambda-1)+(\lambda-4)(\lambda+5)(\lambda-1)$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$\lambda_1=-2$　根子空间维数为1

$\lambda_2=1$　根子空间维数为2

$$(\lambda_2 I-A)=\begin{pmatrix}-3&-6&0\\3&6&0\\3&6&0\end{pmatrix}\qquad \dim N(\lambda_2 I-A)=2$$

$d_1=2$

Jordan标准型 $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(c)

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&0&3\\-2&-6&0&13\\0&-3&1&3\\-1&-4&0&8\end{pmatrix}\qquad |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&0&-3\\2&\lambda+6&0&-13\\0&3&\lambda-1&-3\\1&4&0&\lambda-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&0&-3\\0&\lambda-2&0&-2\lambda+3\\0&3&\lambda-1&-3\\1&4&0&\lambda-8\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\lambda+3\\3&\lambda-1&-3\\4&0&\lambda-8\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&0&-3\\\lambda-2&0&-2\lambda+3\\3&\lambda-1&-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda-2&-2\lambda+3\\4&\lambda-8\end{vmatrix}+(\lambda-1)\begin{vmatrix}3&-3\\\lambda-2&-2\lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^4$$

$\lambda=1$ 的根子空间维数为 4

$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}0&3&0&-3\\2&7&0&-13\\0&3&0&-3\\1&4&0&-7\end{pmatrix}\qquad \dim \mathrm{Im}(\lambda I-A)=2$$

$$(\lambda I-A)^2=\begin{pmatrix}3&9&0&-18\\1&3&0&-6\\3&9&0&-18\\1&3&0&-6\end{pmatrix}\qquad \dim \mathrm{Im}(\lambda I-A)^2=1$$

$$(\lambda I-A)^3=0\qquad \dim \mathrm{Im}(\lambda I-A)^3=0$$

则 $d_3=1$, $d_2=0$　$d_1=1$

Jordan标准型 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

2. (a) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\3&\lambda+3&-3\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1\\3&\lambda&-3\\2&\lambda&\lambda-2\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+3\lambda)+\lambda=\lambda^3$

$\lambda=0$ 的根子空间维数为 3

$\lambda I-A=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\3&3&-3\\2&2&-2\end{pmatrix}$ $\dim Im(\lambda I-A)=1$

$(\lambda I-A)^2=0$ $\dim Im(\lambda I-A)^2=0$

$d_2=1$ $d_1=1$ Jordan 标准型为 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\alpha_1^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ 是 $Im(\lambda I-A)$ 的基

而取 $\alpha_1^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ 有 $(\lambda I-A)\alpha_1^{(0)}=\alpha_1^{(1)}$.

扩充 $\{\alpha_1^{(1)}\ \alpha_1^{(0)}\}$ 为一组基，取 $\alpha_2'^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

则 $(\lambda I-A)\alpha_2'^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}=-\alpha_1^{(1)}$

则 $\alpha_2^{(0)}=\alpha_2'^{(0)}+\alpha_1^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

故 $P=(\alpha_2^{(0)}\ \alpha_1^{(1)}\ \alpha_1^{(0)})=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-3&0\\0&-2&0\end{pmatrix}$

(b) $A=\begin{pmatrix}6&-9&5&4\\7&-13&8&7\\8&-17&11&8\\1&-2&1&3\end{pmatrix}$ $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&9&-5&-4\\-7&\lambda+13&-8&-7\\-8&17&\lambda-11&-8\\-1&2&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&9&-5&-4\\0&\lambda+13&-8&-7\\0&17&\lambda-11&-8\\-\lambda+2&2&-1&\lambda-3\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+13&-8&-7\\17&\lambda-11&-8\\2&-1&\lambda-3\end{vmatrix}+(\lambda-2)\begin{vmatrix}9&-5&-4\\\lambda+13&-8&-7\\17&\lambda-11&-8\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)(\lambda-2)^3$

$\lambda=1$ 的根子空间维数为 1 特征根为 $\beta=\frac{1}{\sqrt{95}}\begin{pmatrix}3\\6\\7\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=2$ 的根子空间维数为 3

$\lambda I-A=\begin{pmatrix}-4&9&-5&-4\\-7&15&-8&-7\\-8&17&-9&-8\\-1&2&-1&-1\end{pmatrix}$ $\dim Im(\lambda I-A)=2$

$(\lambda I-A)^2=\begin{pmatrix}-3&+6&-3&-3\\-6&12&-6&-6\\-7&14&-7&-7\\-1&2&-1&-1\end{pmatrix}$ $\dim Im(\lambda I-A)^2=1$

$d_2=1$ $d_1=1$ Jordan 标准型为 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

$N(\lambda I-A)=span\{\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\}$

$N(\lambda I-A)^2=span\{\alpha_1'=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\ \alpha_2'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\ \alpha_3'=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$

$(\lambda I-A)\alpha_3'=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=-\alpha_2$

$\Rightarrow (\lambda I-A)(-\alpha_3')=\alpha_2$

故 $P=(\beta\ \ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ -\alpha_3')=\begin{pmatrix}3/\sqrt{95}&0&1&0\\6/\sqrt{95}&1&1&0\\7/\sqrt{95}&1&1&-1\\1/\sqrt{95}&1&0&1\end{pmatrix}$

3. pf: $AB-BA=B$

$\Rightarrow A^*B^*-B^*A^*=B^* \quad \Rightarrow BB^*=ABA^*B^*-ABB^*A^*-BAA^*B^*+BAB^*A^*$

$\Rightarrow tr(BB^*)=tr(ABA^*B^*-ABB^*A-BAA^*B^*+BAB^*A^*)$

$=tr(ABA^*B^*)-tr(ABB^*A^*)-tr(BAA^*B^*)+tr(BAB^*A^*)$

$=tr(ABA^*B^*)-tr(ABA^*B^*)-tr(ABA^*B^*)+tr(ABA^*B^*)=0$

而设 B Jordan 标准形为 $C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & & 0\\ & \lambda_2 & * & \\ & & \lambda_3 & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & * \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\exists P$ 可逆 s.t. $C=P^{-1}BP$

$\Rightarrow B=PCP^{-1}$

$\Rightarrow B^*=P^*C^*(P^{-1})^*$

则 $trace(CC^*)=tr(PP^{-1}CP^*(P^{-1})^*C^*)=tr(PCP^{-1}P^*C^*(P^{-1})^*)=tr(BB^*)$

而 $CC^*=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\lambda_1} & & & *\\ & \overline{\lambda_2} & & \\ & & \overline{\lambda_3}\ddots & \\ & & & \overline{\lambda_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\lambda_1|^2 & & *\\ & |\lambda_2|^2 & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2\end{pmatrix}$

$tr(CC^*)=\sum_i|\lambda_i|^2=0 \Rightarrow |\lambda_i|^2=0 \quad \forall i \Rightarrow \lambda_i=0 \quad \forall i$

故 $C=\begin{pmatrix}0 & * & & 0\\ & 0 & * & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & *\\ & & & 0\end{pmatrix}$

下证 C^i 形如 $\begin{pmatrix}\overbrace{0\ 0 \cdots 0}^{n个} & * & & *\\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & & *\\ 0 & & & \ddots & 0\\ & & & & \vdots\\ & & & & 0\end{pmatrix}$

$i=1$ 成立

设 $i=k$ 成立

$i=k+1$ 时 $C^{k+1}=C^k\cdot C=\begin{pmatrix}\overbrace{0\ 0\cdots 0}^{k个} & * & & *\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & *\\ 0 & & & 0\\ & & & \vdots \\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & * & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & *\\ & & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overbrace{0\cdots 0}^{k+1个} & * & & *\\ & \ddots & \ddots & \\ & & & *\\ 0 & & & 0\\ & & & \vdots\\ & & & 0\end{pmatrix}$

因此 $C^n=0 \Rightarrow B^n=(PCP^{-1})^n=PC^nP^{-1}=0$.

即 B 幂零

4. pf: 设 A 对应的 Jordan 标准形为 $C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & & 0\\ & \lambda_2 & * & \\ & & \lambda_3 & \ddots \\ 0 & & & \ddots & *\\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\exists P$ 可逆 s.t. $C=P^{-1}AP$

值得说明的是, 对任何 $(i+1)$ 行 i 列元素 $C_{i+1,i}$ 若 $C_{i+1,i}=1$ 则有 $\lambda_{i+1}=\lambda_i$

$A=PCP^{-1} \Rightarrow A^s=(PCP^{-1})^s=PC^sP^{-1}=I \Rightarrow C^s=I$

而 $C^s=\begin{pmatrix}\lambda_1^s & & *\\ & \lambda_2^s & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^s\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_i^s=1 \Rightarrow \lambda_i$ 是 s 次单位根

① $s\neq 1$, 反证证明 $C_{i+1,i}=0$, $\forall i$

假设 $\exists k$ $C_{k+1,k}=1$ 则 $\lambda_{k+1}=\lambda_k$

则 $(C^2)_{k+1,k}=\sum_i (C)_{k+1,i}\cdot(C)_{i,k}=C_{k+1,k+1}\cdot C_{k+1,k}+C_{k+1,k}\cdot C_{k,k}$

$=(\lambda_{k+1}+\lambda_k)\cdot 1=(\lambda_{k+1}+\lambda_k)=2\lambda_k$

归纳, 设 $(C^i)_{k+1,k}=(i-1)\lambda_k^{i-1}$

$(C^{i+1})_{k+1,k}=(C)_{k+1,k+1}\cdot(C^i)_{k+1,k}+(C)_{k+1,k}\cdot(C^i)_{k,k}=\lambda_{k+1}(i-1)\lambda_k^{i-1}+1\cdot\lambda_k^i$

$=i\lambda_k^i$

则 $(C^i)_{k+1,k}=(i-1)\lambda_k^{i-1}$, $\forall i$ 成立

故 $(C^s)_{k+1,k}=(s-1)\lambda_s^{i-1}=(I)_{k+1,k}=0$.

$s\neq 1$ 故 $\lambda_k^{i-1}=0 \Rightarrow \lambda_k=0$ 与 λ_k 是 s 次单位根矛盾.

则假设不成立 $\forall k$ $C_{k+1,k}=0$, 也即 C 是对角阵, A 可相似对角化

② $s=1$, 则 $A=I$, A 显然可相似对角化 综上: 周期矩阵相似于一个对角阵

5. pf: a) 设变换为σ，

$\forall \sigma$ 的不变子空间 U，$U^{\perp}$ 是不变子空间，下证 σ 在 U 内也是半单变换。

$\forall$ U 内的 σ 不变子空间 U_0，只需证 U_0 在 U 内的补 U_1 是不变的。

设 U_0 基为 $e_1 \dots e_k$，补成 U 基为 $e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_m$，

再补成 V 的基为 $e_1 \dots e_k \dots e_m \dots e_n$ （U_1 的基即为 $e_{k+1} \dots e_m$）

$\sigma(U_0) \subseteq U_0$，则根据 σ 半单，U_0 补空间是不变子空间

$\Rightarrow \forall k+1 \le i \le m \quad \sigma(e_i) \in \mathrm{span}\{e_{k+1} \dots e_m \dots e_n\}$

而 U 是 σ 不变子空间 $\quad \forall k+1 \le i \le m \quad \sigma(e_i) \in \mathrm{span}\{e_1 \dots e_k \dots e_m\}$

则 $\forall k+1 \le i \le m \quad \sigma(e_i) \in \mathrm{span}\{e_{k+1} \dots e_n\} \cap \mathrm{span}\{e_1 \dots e_m\}$

$= \mathrm{span}\{e_{k+1} \dots e_m\} = U_1$

则 $\forall u_1 \in U_1$，$\sigma(u_1) = \sigma(\sum c_i e_i) = \sum c_i \sigma(e_i) \in U_1$。

因此 U_0 在 U 内的补 U_1 是 σ 不变的。

综上：半单变换限制在一个不变子空间也是半单变换。

b) 先证 A 半单 $\Rightarrow$ 空间 V 是最小不变子空间直和（在这里，定义最小不变子空间为内部没有非零真子空间的不变子空间）

我们进行如下操作，先取 V 中一个最小不变子空间 U_1（肯定存在，因为至少 A 是一个不变子空间），

设 $V_1 = U_1$ 补空间，则 V_1 也是 A 的不变子空间，由 a) A 在 V_1 内也是半单变换

我们递推地选取 V_k 内的最小不变子空间 U_{k+1}，递推假设 A 在 V_k 内半单，

则 $V_{k+1} = U_{k+1}$ 在 V_k 内的补空间 也是不变子空间，由 a) A 在 V_{k+1} 内是半单变换

终止条件为 $V_k = \{0\}$，由于 $V \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_k$，而 V 是有限维的，故

算法可以停止，设我们找出 $U_1 \dots U_k$，它们均是 A 的不变子空间，且是 $V_i \subsetneq V$

内的最小不变子空间，则必是 V 内的最小不变子空间（由最小不变子空间定义）

$U_k = V_{k-1}$，$\quad U_{k-1}$ 是 V_{k-2} 内 V_{k-1} 的补，故 $V_{k-1} \oplus U_{k-1} = V_{k-2} \Rightarrow U_k \oplus U_{k-1} = V_{k-2}$

U_{k-2} 是 V_{k-3} 内 V_{k-2} 的补，故 $V_{k-2} \oplus U_{k-2} = V_{k-3} \Rightarrow (U_k \oplus U_{k-1}) \oplus U_{k-2} = V_{k-3}$

以此类推，得到 $V = U_k \oplus U_{k-1} \oplus \cdots \oplus U_1$

故空间 V 是最小不变子空间直和

再证空间 V 是最小不变子空间直和 $\Rightarrow$ A 半单

$\forall U$ 是 V 的不变子空间，

令 U_0 是 U 的一个最小不变子空间，由已知 $V = U_0 \oplus \cdots \oplus U_k$，其中 U_i 是最小不变的

令 $W = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$，$W$ 显然是 σ 不变的

取 $W' = W \cap U$，下证 $U = W' \oplus U_0$

$\forall x \in U$ 由 $V = U_0 \oplus W$

$\exists\ x = \alpha + \beta$ 其中 $\alpha \in U_0$，$\beta \in W$ 有唯一分解形式

$\Rightarrow \beta = x - \alpha \in U + U_0 \subseteq U$ （U_0 是 U 子空间）

$\Rightarrow \beta \in W \cap U = W'$

即 $\forall x \in U$，唯一分解为 $x = \alpha + \beta$，其中 $\alpha \in U_0$，$\beta \in W'$

因此 $U = W' \oplus U_0$ 而 W、U 是 σ 不变的，$W' = W \cap U$ 显然也是 σ 不变

由此，我们可以继续取 W' 的最小不变子空间 U_1，以此类推，直到 $U_{m+1} = \{0\}$

一系列操作后，U 分解为 $U = U_0 \oplus \cdots \oplus U_m$，而由 V 分解为一系列最小不变子空间直和 $V = U_0 \oplus \cdots \oplus U_m \oplus U_{m+1} \oplus \cdots \oplus U_n$，取 $U' = U_{m+1} \oplus \cdots \oplus U_n$，它是不变子空间且 $V = U \oplus U'$，即 U 有不变补空间 也即 A 半单

c) $\forall V$ 的 A 不变子空间 U，假设 V 可分解为 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$，$W_i$ 是不变子空间且 A 半单

令 $U_i=U\cap W_i$，U、W_i 是 A 不变的，则 U_i 也是 A 不变的且 $U_i\subseteq W_i$

由 A 在 W_i 上半单，存在 W_i' s.t. $W_i=U_i\oplus W_i'$ 且 W_i' 是 A 不变的

令 $U'=W_1'\oplus\cdots\oplus W_k'$（由 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k=(U_1\oplus W_1'\oplus\cdots\oplus U_k\oplus W_k')$ 知 $W_1'+\cdots+W_k'$ 是直和）是 A 不变的

下证 $V=U\oplus U'$，$\forall v\in V$，$\exists v=(u_1+w_1')+\cdots+(u_k+w_k')$

其中 $u_i\in U_i$，$w_i'\in W_i'$（因为 $V=U_1\oplus W_1'\oplus\cdots\oplus U_k\oplus W_k'$）

$\Rightarrow v=(u_1+\cdots+u_k)+(w_1'+\cdots+w_k')$

$u_i\in U_i=U\cap W_i\subseteq U\Rightarrow u_1+\cdots+u_k\in U$.

$w_i'\in W_i'\subseteq U'\Rightarrow w_1'+\cdots+w_k'\in U'$.

因此 $V=U+U'$ ①

下面只需说明 U 和 $U'=W_1'\oplus\cdots\oplus W_k'$ 是直和.

反证，设 $U\cap W_i'\neq\{0\}\Rightarrow\exists\alpha\in U\cap W_i'$ 且 $\alpha\neq\vec{0}$.

考虑到 $U=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$

（因为 $W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ 是直和，$(U\cap W_1)\oplus\cdots\oplus(U\cap W_k)$ 显然是直和，

而 $U\supseteq(U\cap W_1)+(U\cap W_2)+\cdots+(U\cap W_k)$

$=U\cap(W_1+W_2+\cdots+W_k)=U\cap V=U$

故 $U=(U\cap W_1)\oplus\cdots\oplus(U\cap W_k)=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$）.

则 $\alpha\in(U_1\oplus\cdots\oplus U_k)\cap W_i'$

$=(U_1\cap W_i')\oplus\cdots\oplus(U_k\cap W_i')$.

$=(U_1\cap W_1\cap W_i')\oplus\cdots\oplus(U_i\cap W_i\cap W_i')\oplus\cdots\oplus(U_k\cap W_k\cap W_i')$

$i\neq j$ 时 $W_i'\subseteq W_i$ 则 $W_i'\cap W_j\subseteq W_i\cap W_j=\{0\}\Rightarrow W_i'\cap W_j=\{0\}$.

而又有 $W_i'\oplus U_i\Rightarrow U_i\cap W_i\cap W_i'=\{0\}$.

于是有 $\alpha\in\{0\}\Rightarrow\alpha=\vec{0}$ 矛盾

综上：$U\cap W_i'=\{0\}\Rightarrow U\oplus(W_1'\oplus\cdots\oplus W_k')\Rightarrow U\oplus U'$ ②

结合①② $V=U\oplus U'$，故 $\forall V$ 的不变子空间 U，$\exists$ 不变补空间 U'.

$\Rightarrow A$ 在 V 是半单的