《高等微积分 1》第五次习题课材料

1 设 a, c 是实数, $c > 0$, 定义函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin \frac{1}{|x|^c}, & \text{当} x \neq 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当} x = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

(1) f 在 0 处连续的充分必要条件是什么?

(2) f 在 0 处可导的充分必要条件是什么?

(3) f' 在 0 处连续的充分必要条件是什么?

(4) f 在 0 处有二阶导数的充分必要条件是什么?

并请证明你的断言.

2 计算极限.

(1) 给定实数 a, b, 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left((1+\frac{a}{n})^2 + \frac{b^2}{n^2} \right)^{n/2}$.

(2) 给定实数 a, b, 求函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \cdot \arctan \frac{b}{x+a} \right)$.

(3) 求函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\ln x} \cdot \left(x^{1/x} - 1 \right) \right)$.

(4) 给定实数 t, 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left((1+\frac{t}{\sqrt{n}})^n \cdot e^{-\sqrt{n}t} \right)$.

3 设函数 $x = x(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处有二阶导数, K, L, M, N 是非零实数. 定义

$$\widetilde{t} = K \cdot t + L \cdot x(t), \quad \widetilde{x} = M \cdot t + N \cdot x(t).$$

(1) 证明: 如果 $x'(t)$ 处处不等于 $-\frac{K}{L}$, 则可以将 t 表示为 $\widetilde{t}$ 的函数, 从而将 $\widetilde{x}$ 表示成 $\widetilde{t}$ 的函数.

(2) 用 $x(t)$ 的一阶与二阶导函数表示 $\widetilde{x}$ 对 $\widetilde{t}$ 的二阶导 $\frac{d^2\widetilde{x}}{d\widetilde{t}^2}$.

4 (1) 设 f 在 $[a,b]$ 上处处可导, 且导函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处非零. 证明: f 在 $[a,b]$ 上严格单调.

(2) 设 f 在 $[a,b]$ 上处处可导, 且 $f'(a)<0<f'(b)$. 利用 (1) 的结论证明: 存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$.(这是所谓的 Darboux 定理).

5 给定实数 α, 设 $f(x)=x^\alpha$. 试确定 f 在区间 $(0,1]$ 上是否一致连续, 并请证明你的断言.

6 设 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 在 (a,b) 上处处可导, 且导函数 f' 在 (a,b) 上递增. 证明: 对任何 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 有

$$(x_3-x_1)\cdot f(x_2)\le(x_3-x_2)\cdot f(x_1)+(x_2-x_1)\cdot f(x_3).$$

7 给定正整数 n, 把集合 $\{1,2,...,n\}$ 记为 $[n]$. 如果 $A_1,...,A_k$ 是 $[n]$ 的非空子集, 它们彼此不相交, 且它们的并集等于 $[n]$, 则称 $P=\{A_1,...,A_k\}$ 为 $[n]$ 的一个分组方案. 设函数 f,g 处处有 n 阶导数. 证明: 复合函数 $g\circ f$ 的 n 阶导数为

$$(g\circ f)^{(n)}(x)=\sum_{[n]\text{的分组方案}P=\{A_1,...,A_k\}}\left(g^{(k)}(f(x))\cdot\prod_{i=1}^{k}f^{(|A_i|)}(x)\right),$$

其中 $\sum\limits_{[n]\text{的分组方案}P}$ 表示对 $[n]$ 的所有分组方案求和, $|A_i|$ 表示集合 A_i 的元素个数, $\prod\limits_{i=1}^{k}$ 表示连乘

$$\prod_{i=1}^{k}f^{(|A_i|)}(x)=f^{(|A_1|)}(x)\cdot\cdots\cdot f^{(|A_k|)}(x).$$

例如, 集合 $[3]$ 共有 5 个不同的分组方案

$$P=\{\{3\},\{2\},\{1\}\}\text{或}\{\{2,3\},\{1\}\}\text{或}\{\{2\},\{1,3\}\}\text{或}\{\{3\},\{1,2\}\}\text{或}\{\{1,2,3\}\},$$

则前述要证明的复合函数 3 阶导法则为

$$(g\circ f)^{(3)}=g'''(f)f'f'f'+g''(f)f''f'+g''(f)f'f''+g''(f)f'f''+g'(f)f'''.$$