高代选讲 作业一

徐浩博 2020010108

练习 7.4.9

1. 假设 $c_1\vec{f_1}+\cdots+c_n\vec{f_n}=\vec{0}$

展开 $\vec{f_i}$ 得 $(c_1+\cdots+c_n)\vec{e_1}+(c_2+\cdots+c_n)\vec{e_2}+\cdots+c_n\vec{e_n}=\vec{0}$

由于 $\vec{e_1}\ldots\vec{e_n}$ 是一组基，故有

$$\begin{cases} c_1+\cdots+c_n=0 & ① \\ c_2+\cdots+c_n=0 & ② \\ \vdots \\ c_{n-1}+c_n=0 & (n-1) \\ c_n=0 & (n) \end{cases}$$

ⓝ代(n-1)中，得 $c_{n-1}=0$

(n-1)代(n-2)中，得 $c_{n-2}=0$. 以此类推：$\underline{c_1=c_2=\cdots=c_n=0}$.

因此 $\vec{f_1}\ldots\vec{f_n}$ 构成V的一组基

2. 假设 $c_1\vec{f_1}+\cdots+c_n\vec{f_n}=\vec{0}$

展开 $\vec{f_i}$ 得 $(c_1+c_n)\vec{e_1}+(c_1+c_2)\vec{e_2}+(c_2+c_3)\vec{e_3}+\cdots+(c_{n-1}+c_n)\vec{e_n}=\vec{0}$

即 $$\begin{bmatrix} 1&0&0&\cdots&0&1 \\ 1&1&0&\cdots&0&0 \\ 0&1&1&\cdots&0&0 \\ &&\ddots&\ddots&& \\ 0&0&0&\cdots&1&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}=0$$ 记作 $A\vec{c}=\vec{0}$

对于 $\det A_n$ 研究，设 $n\geq 4$

$$\det A_n = \det\begin{array}{c} n\text{列} \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&\cdots&0&1 \\ 1&1&0&\cdots&0&0 \\ 0&1&1&\cdots&0&0 \\ &&\ddots&\ddots&& \\ 0&0&0&\cdots&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(\text{初等变换}) = \det\begin{pmatrix} 1&0&0&\cdots&0&1 \\ 0&1&0&\cdots&0&-1 \\ 0&1&1&\cdots&0&0 \\ &&\ddots&\ddots&& \\ 0&0&0&\cdots&1&1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{初等变换}) = \det\begin{pmatrix} 1&0&0&0&\cdots&0&1 \\ 0&1&0&0&\cdots&0&-1 \\ 0&0&1&0&\cdots&0&1 \\ &&&\ddots&\ddots&& \\ 0&0&0&0&\cdots&1&1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$(\text{第一列展开}) = \det\begin{pmatrix} 1&0&0&\cdots&0&-1 \\ 0&1&0&\cdots&0&1 \\ &&\ddots&\ddots&& \\ 0&0&0&\cdots&1&1 \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$(\text{第一列展开}) = \det\begin{pmatrix} 1&0&\cdots&0&1 \\ &&\ddots&\ddots& \\ 0&0&0&\cdots&1&1 \end{pmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$= \det A_{n-2}$$

即 $\forall n\geq 4$，$\det A_n=\det A_{n-2}$.

而 $\det A_2=\det\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=0$

$\det A_3=\det\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=2$

即 $\forall n\geq 2$ n为奇数 $\det A_n=2 \Rightarrow \operatorname{rank}A_n=n$.

n为偶数 $\det A_n=0 \Rightarrow \operatorname{rank}A_n<n$.

回到 $A_n\vec{c}=0$ n为奇数时 A_n满秩，故 $\vec{c}$ 没有非平凡解，$\vec{c}=0$.

即 $\vec{f_1}\ldots\vec{f_n}$ 构成一组基

n为偶数时 A_n不满秩，$\vec{c}$ 有非平凡解

即 $\exists\,\vec{c}\neq 0$ s.t. $A_n\vec{c}=\vec{0}$

因此 $\vec{f_1}\ldots\vec{f_n}$ 不构成一组基.

练习 7.4.11

1、(I) 到 (II) 过渡矩阵为 P

即有 $[t_1 \dots t_n] = [e_1 \dots e_n] P$

$\Rightarrow [t_1 \dots t_n] P^{-1} = [e_1 \dots e_n]$

即 (II) 到 (I) 过渡矩阵为 P^{-1}

2、(I) 到 (II) 过渡矩阵为 P $\Rightarrow$ $[t_1 \dots t_n] = [e_1 \dots e_n] P$

(II) .. (III) … 为 Q $\Rightarrow$ $[S_1 \dots S_n] = [t_1 \dots t_n] Q$.

故 $[S_1 \dots S_n] = [t_1 \dots t_n]$

$= [e_1 \dots e_n] PQ$

即 (I) 到 (III) 的过渡矩阵为 PQ.

练习 7.5.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

求 $N(A)$： $A x = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$ 则 $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是一个解

考虑到 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

则 $\dim N(A) = n - \operatorname{rank}(A) = 1$

$\vec{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是 $N(A)$ 的基

求 $R(A)$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_3 = -v_2$ 故 v_3 不独立，而 v_1、v_2 独立

$R(A) = \operatorname{span}\langle v_1, v_2 \rangle$

$\dim R(A) = \operatorname{rank}(A) = 2$

$\vec{e_1} = \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\vec{e_2} = \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 $R(A)$ 的一组基

练习 7.5.2

$f_1' = a e^{ax} \cos bx - b e^{ax} \sin bx = a f_1 - b f_2$

$f_2' = a e^{ax} \sin bx + b e^{ax} \cos bx = b f_1 + a f_2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $f_1', f_2' \in \operatorname{span}\langle f_1, f_2 \rangle$

故 D 是 V 上的线性变换

$$D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

练习 7.5.7

设F上的加法单位元是1_F，乘法单位元是0_F，设V基是$\{e_1 \dots e_n\}$

我们定义$e_1^* \dots e_n^*$，其中$e_i^*: V \to F$的定义是$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ $\forall 1 \le j \le n$且e_i^*是线性的

e_i^*是线性的 $\Rightarrow \forall a, b \in F$，$e_i^*(a+b) = e_i^*(a) + e_i^*(b) \Rightarrow e_i^* \in V^*$

设 $V'^* = span\langle e_1^* \dots e_n^* \rangle$

① 首先 $\sum_i c_i e_i^*(a+b) = \sum_i c_i(e_i^*(a) + e_i^*(b)) = \sum_i c_i e_i^*(a) + \sum_i c_i e_i^*(b)$

故 $\sum_i c_i e_i^* \in V^*$ $(c_i \in F)$ 即 $\forall f \in V'^*$，$f \in V^*$

故 $V'^* = span\langle e_1^* \dots e_n^* \rangle \subseteq V^*$

② 其次 $\forall f \in V^*$，$f(a+b) = f(a) + f(b)$ 故f线性

设 $f(e_i) = a_i$ $\forall 1 \le i \le n$.

$\forall v \in V$ (设 $v = \sum_j c_j e_j$)

$f(v) = f(\sum_j c_j e_j) = \sum_j c_j f(e_j) = \sum_j c_j a_j$

$= \sum_j c_j \sum_i a_i e_i^*(e_j) = \sum_i a_i e_i^*(\sum_j c_j e_j) = \sum_i a_i e_i^*(v)$

故 $f = \sum_i a_i e_i^* \in V'^* \Rightarrow V^* \subseteq V'^*$

综合①② $V'^* = span\langle e_1^* \dots e_n^* \rangle = V^*$

③ 而 $e_1^* \dots e_n^*$ 是线性无关的，因为 $c_1 e_1^* + \dots + c_n e_n^* = 0$ 时

$(c_1 e_1^* + \dots + c_n e_n^*)(e_i) = c_i e_i^*(e_i) = c_i = 0(e_i) = 0$

故 $c_1 = \dots = c_n = 0$，$\dim V^* = n$，$\forall f \in V^*$，在$\{e_1^* \dots e_n^*\}$下表示唯一

④ 构造 $\varphi: V^* \to V$，s.t. $\varphi(e_i^*) = e_i$ 且 φ是线性的；φ是相同维数线性空间之间的映射则φ显然存在

i) $\forall f_1, f_2 \in V^*$，设 $f_1 = \sum a_i e_i^*$，$f_2 = \sum b_i e_i^*$

$\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(\sum_i (a_i + b_i) e_i^*)$

$= \sum_i (a_i + b_i) \varphi(e_i^*)$

$= \varphi(\sum_i a_i e_i^*) + \varphi(\sum_i b_i e_i^*)$

$= \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$，即$\varphi$是同态映射

ii) $\forall f_1, f_2 \in V^*$，设 $f_1 = \sum_i a_i e_i^*$，$f_2 = \sum_i b_i e_i^*$

$f_1 \ne f_2 \Leftrightarrow \exists i$ s.t. $a_i \ne b_i$

则 $\varphi(f_1) = \varphi(\sum_i a_i e_i^*) = \sum_i a_i \varphi(e_i^*) = \sum_i a_i e_i \ne \sum_i b_i e_i = \varphi(f_2)$

即φ是单射

iii) $\forall v \in V$，设 $v = \sum_i c_i e_i$

则有 $f = \sum_i c_i e_i^*$ 满足 $\varphi(f) = \varphi(\sum_i c_i e_i^*) = \sum_i c_i \varphi(e_i^*)$

$= \sum_i c_i e_i = v$

即φ是满射

综合 i)、ii)、iii) φ是同构映射，即V^*与V同构

练习 7.5.11

先求过渡矩阵

$$[t_1\ t_2\ t_3] = I_{3\times 3}P \Rightarrow P = [t_1\ t_2\ t_3] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^* = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det P = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= -1$$

故 $$P^{-1} = \frac{P^*}{\det P} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则 f 在新基下矩阵 $$A' = P^{-1}AP$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$