《高等微积分 1》第九次作业

1 给定正数 $p \geq 1$. 证明: 对任何正数 $x_1, ..., x_n$, 有

$$\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)^p \leq \frac{x_1^p + ... + x_n^p}{n}.$$

2 称 x_0 为函数 f 的拐点, 如果在 x_0 一侧 f 是下凸的, 在 x_0 的另一侧 f 是上凸的. 确定下列函数的拐点, 确定它们的上凸和下凸区间.

(1) $f(x) = \sin x$.

(2) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

(3) 设 $a_1, ..., a_n \geq 1$. 证明:

$$\frac{1}{1+a_1} + ... + \frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 ... a_n}}.$$

3 设 f 在 $[a, b]$ 上处处有非负的二阶导函数. 证明: f 在 $[a, b]$ 上的最大值一定在区间端点 a 或 b 处取得.

4 (1) 叙述有关函数可积性的 Lebesgue 定理.

(2) 设 f 在 $[a, b]$ 上可积. 证明: $|f|$ 与 f^2 在 $[a, b]$ 上也可积.

(3) 假设 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上可积, f 在 $[a, b]$ 上是否一定可积?

5 设 f 是连续函数, 函数 u, v 处处可导. 定义函数

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt.$$

计算 $G'(x)$.

6 (1) 给定正数 $a<1$, 求积分 $\int_a^1 \ln x dx$.

(2) 计算极限 $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_a^1 \ln x dx$.

(3) 证明: 对正整数 n, 有

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x dx < \frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+...+\ln\frac{n}{n}\right) < \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x dx.$$

(4) 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e},$$

7 (1) 设 f 在 $[a,b]$ 上处处有非负的二阶导函数. 证明:

$$(b-a)\cdot f(\frac{a+b}{2}) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

(2) 设 f 在 $[a,b]$ 上处处有正的二阶导函数. 证明:

$$(b-a)\cdot f(\frac{a+b}{2}) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 上处处有二阶导函数, 且

$$f''(x)>M, \quad \forall x\in[a,b].$$

证明:

$$(b-a)\cdot f(\frac{a+b}{2})+\frac{M}{24}(b-a)^3 < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{M}{12}(b-a)^3.$$

提示: 考虑函数 $g(x)=f(x)-\frac{M}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2$.

(4) 设 f 在 $[a,b]$ 上处处有二阶导函数, 且 $f''\in C([a,b])$. 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

(5) 设 f 在 $[a,b]$ 上处处有二阶导函数, 且 $f''\in C([a,b])$. 证明: 存在 $\eta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta).$$