概统第十三周习题课材料

2022 年 5 月 12 日

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布，试求 $E(X|X+Y=n)$.

2. 如果 $X_n \xrightarrow{L} X$, 且数列 $a_n \to a$, $b_n \to b$. 试证 $a_nX_n + b_n \xrightarrow{L} aX + b$.

3. 设随机变量 X_n 服从柯西分布，其密度函数为
$$p_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1}$$
试证：$X_n \xrightarrow{P} 0$.

4. 若 $X_1, X_2, ..., X_n$ 相互独立，均服从 $N(0,1)$, 而
$$Y_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k, \quad Y_2 = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k \tag{2}$$
试证 Y_1 与 Y_2 独立的充要条件为 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$.

5. 试用特征函数的方法证明伽马分布的可加性：若随机变量 $X \sim Ga(\alpha_1, \lambda), Y \sim Ga(\alpha_2, \lambda)$, 且 X 与 Y 独立，则 $X + Y \sim Ga(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

6. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，试用特征函数法求 $E[(X-\mu)^n]$.

7. 求证：对于任何实值特征函数 $f(t)$，以下两个不等式成立：
$$1 - f(2t) \le 4(1 - f(t)), \tag{3}$$
$$1 + f(2t) \ge 2(f(t))^2. \tag{4}$$

8. 设随机变量 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, 证明：当 $\alpha \to \infty$ 时，随机变量 $(\lambda X - \alpha)/\sqrt{\alpha}$ 按分布收敛于标准正态变量.