清华大学试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　考试时间：2019 年 6 月 23 日 19：00—21：00

姓名____________学号 20___________班级________.

一 填空题（每空 3 分，共 30 分；答案均写在试卷上，注意标清题号）

1. 设 X 服从几何分布，$P(X=3|X>2)=0.4$，则 $P(X=3)=$__________，$E(X|2<X<5)=$__________。

2. 二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,1,4,0)$，则 $E\left(X^2\middle|2X+Y=2\right)=$________________________。

3. 随机变量 X 服从二项分布 $b(100,0.6)$，c 为任意实数，则 $E\left((X-c)^2\right)$ 的最小值为________________。

4. 对正态总体 $N(\mu,1)$ 的参数 μ 做假设检验 $H_0:\mu=10, H_1:\mu>10$，显著性水平 $\alpha=0.1$，样本容量 $n=16$，检验统计量为样本均值 $\overline{X}$，则拒绝域为____________，现得到 $\overline{X}$ 的观测值为 11，则其对应的 p 值＝__________。

5. 设随机变量 $X\sim N(0,0.25)$，则随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度函数 $p_Y(y)=$ __________________。

6. 总体分布服从 $N(\mu,\sigma^2)$，样本容量为 n，写出方差 σ^2 的 0.95 置信区间表达式____________________。

7. 利用切比雪夫不等式,估计一个有方差的随机变量落在与其期望左右不超过 3 个标准差的概率至少为________。

8. 已知期望为 $1/\lambda$ 的指数分布随机变量的方差为 $1/\lambda^2$，利用此结果计算积分 $\int_0^{+\infty}7x^2e^{-5x}dx=$______________。

二. （16 分） 一份考卷共有 20 题，均为 4 个选项的选择题，每题 5 分。假设对于参加考试的某考生，考卷中 60% 的题目涉及的知识已基本掌握，此时答对的概率是 0.8；其他题目则在 4 个选项中随机地任选一个，试计算

（1） 任选一道考题，该考生回答正确的概率；

（2） 对于某一道该考生答对的题目，计算该考题涉及的知识是这名学生已基本掌握的概率；

（3） 该考生考试成绩的期望值；

（4） 该考生成绩在 70 分以上的概率（利用中心极限定理估计）。

三．(8 分)随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$，$X$和$Y$ 相互独立，

（1）求随机变量 $W = XY$ 的分布函数；（2）判断 X 与 W 是否独立，并说明理由。

四．(12 分) 随机变量 $X_1 \sim U(0,2)$，$X_2 \sim U(0,1)$，X_1 和 X_2 相互独立，$Y = 2X_1 + X_2$。

（1）求 Y 的分布函数；　（2）计算 X_1 和 X_2 的期望和方差；　（3）计算 X_1 和 Y 的相关系数 $Corr(X_1,Y)$。

五．（8 分）$X_1,\cdots,X_n$ 为参数 λ 的泊松分布总体的一个样本，定义 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 及 $\theta_0 = \begin{cases} 1, & X_1 = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$。

（1）求 $E(\theta_0)$；　（2）求 $E(\theta_0 | S_n)$。

六．（18 分）设总体 $X \sim U(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$ 为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的次序统计量，

（1）求 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 各自的分布函数、期望和方差，以及 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 的协方差 $Cov(X_{(1)},X_{(n)})$；

（2）判断并解释 $X_{(1)} + X_{(n)}$、$X_{(n)}$、$2\bar{X}$ 与 $2\sqrt{3}S$ 是否为参数 θ 的无偏估计量，如果不是，是否可以做无偏校正。

七．(8 分) 总体 $X \sim N(\mu,2^2)$，做假设检验 $H_0: \mu = 10, H_1: \mu = 11$，显著性水平 $\alpha = 0.05$，求当样本容量至少达到多少，可使第二类错误不超过 0.01。

备注 1．本考卷的样本均为简单随机样本，样本均值 $\bar{X} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$，样本方差为 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$

备注 2．正态总体的样本均值和样本方差相互独立，且 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，其中 n 为样本容量

备注 3．解答中标准正态随机变量的分布函数和密度函数分别可用 $\Phi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 表示

备注 4．$\Phi(1.28) = 0.9$，$\Phi(1.44) = 0.925$，$\Phi(1.65) = 0.95$，$\Phi(1.96) = 0.975$，$\Phi(2.33) = 0.99$

备注 5．正态、χ^2、t 等分布所需取值，均用（下侧）分位数表示，例如 $X \sim \chi^2(n)$，则 $P(X < \chi_\alpha^2(n)) = \alpha$

备注 6．$t_{0.75}(1) = 1, t_{0.75}(2) = 0.79, t_{0.8}(1) = 1.38, t_{0.8}(2) = 1.06, F_{0.5}(1,1) = 1, F_{0.5}(1,2) = 0.67, F_{0.75}(1,1) = 5.83$

备注 7．分部积分公式 $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$