《高等微积分 2》第六周作业

1 设 $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 在点 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 处沿着方向 $\mathbf{q}$ 有方向导数. 证明:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial \mathbf{q}}|_{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{\mathbf{x}} + f(\mathbf{x})\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}}|_{\mathbf{x}}.$$

2 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数, $f(0,0) = 0$. 设 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = A$, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = B$, 定义三元函数 $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ 为

$$H(x,y,z) = \begin{cases} \frac{f(xz,yz)}{z}, & \text{如果} z \neq 0, \\ Ax + By, & \text{如果} z = 0. \end{cases}$$

证明: H 是 $\mathbf{R}^3$ 上的连续函数.

3 定义函数 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{如果}(x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{如果}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) 证明: f 是连续函数.

(2) 给定方向 $\mathbf{q} = (\cos\theta, \sin\theta)$, 求 f 在 $(0,0)$ 处的方向导数 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{q}}$.

(3) 对 $(x,y) \neq (0,0)$, 求偏导数 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

(4) 计算二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(0,0)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}|_{(0,0)}.$$

4 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是 C^3 光滑的.

(1) 叙述 f 在点 (x_0, y_0) 附近带拉格朗日余项的泰勒公式, 要求展开至 3 阶.

(2) 利用 (1) 中的结论, 证明 f 在 (x_0, y_0) 附近展开至 2 阶的带皮亚诺型余项的泰勒公式.

5 (1) 求函数 $f(x,y)=\sqrt{\frac{1-x}{1-y}}$ 在点 $(0,0)$ 附近带皮亚诺型余项的泰勒公式, 要求余项是 $o((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$.

(2) 定义函数 $g(x,y)=\log_x y$, 其中 $\log_x y$ 表示方程 $x^z=y$ 的解 z. 求 g 在点 $(e,1)$ 附近带皮亚诺型余项的泰勒公式,要求余项是 $o((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$. 这里 $e=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$.

6 设 $A=(A_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是 $n\times n$ 的对称矩阵 (即对任何 i,j 有 $A_{ij}=A_{ji}$), 考虑函数

$$f(x_1,...,x_n)=e^{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}x_ix_j}=\exp(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}x_ix_j).$$

对任何指标 i,j, 计算

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}|_{(0,...,0)}.$$

7 设 $\mathbf{R}^n$ 的坐标为 $x_1,...,x_n$, $\mathbf{R}^m$ 的坐标为 $y_1,...,y_m$. 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 与 $g:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ 都是光滑函数 (即它们的各个高阶偏导函数都存在且连续), 设 f 的各个分量为 $f=(f_1,...,f_m)$. 定义函数 $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为 $h=g\circ f$, 具体的说即

$$h(x_1,...,x_n)=g(f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n)).$$

请用 f,g 的高阶偏导函数表示 h 的 2 阶偏导函数.