离散数学(1)
Discrete Mathematics

第十章 关系

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

主观题 10分

Setting

上节课有什么疑问吗？欢迎投稿。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

第十章　关系

复习：闭包的定义

- 设R是非空集合A上的关系，如果A上有另一个关系R'满足：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）； **满足性质**

（2）$R \subseteq R'$； **包含关系**

（3）对A上任何自反的（对称的或传递的）

关系R''，$R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$。 **最小的那个**

- 则称关系R'为R的自反（对称或传递）闭包 **闭包**
- 一般将R的自反闭包记作$r(R)$，

  对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

复习：进一步思考

- 自反闭包$r(R)$，

  是具有自反性的R的“最小”超集合

- 对称闭包$s(R)$，

  是具有对称性的R的“最小”超集合

- 传递闭包$t(R)$,

  是具有传递性的R的“最小”超集合

若R已经是自反(对称、传递)的，那么R的自反(对称、传递)闭包就是它自身。

复习：闭包的性质1

- 对非空集合A上的关系R，

（1）R是自反的 $\Leftrightarrow r(R)=R$；

（2）R是对称的 $\Leftrightarrow s(R)=R$；

（3）R是传递的 $\Leftrightarrow t(R)=R$。

复习：闭包的性质2

- 对非空集合A上的关系$R1, R2$，若 $R_1 \subseteq R_2$ 则

（1）$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2）$s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3）$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

复习：闭包的性质3

对非空集合A上的关系$R1, R2$，

（1） $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$

（2） $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$

（3） $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

复习：R是非空集合A上的关系，则 $t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots$

证明：首先证明$R^1 \cup R^2 \cup \ldots \subseteq t(R)$，使用归纳法。

$n = 1$，显然$R^1 = R \subseteq t(R)$

假设$R^k \subseteq t(R)$，对任意$< x, y >$有

$$< x, y > \in R^{k+1} = R^k \circ R^1$$

$$\Leftrightarrow \exists t(< x, t > \in R \land < t, y > \in R^k)$$

$$\Rightarrow \exists t(< x, t > \in t(R) \land < t, y > \in t(R)) \Rightarrow < x, y > \in t(R)$$

其次， $t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \ldots$即证$R^1 \cup R^2 \cup \ldots$传递

推论：设A是非空有限集，R是集合A上的二元关系，

则存在正整数n，使得$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$

复习：闭包的关系矩阵

给定关系R，$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的关系矩阵分别为M，M_r，M_s，M_t，那么：

- $M_r = M + I$
- $M_s = M + M^{\mathrm{T}}$
- $M_t = M + M^2 + M^3 + \cdots$

复习：闭包的关系图

关系图分别为G，G_r，G_s，G_t，那么：

- 考察G的每个顶点，如果没有环就加上一个环，最终得到的是G_r
- 考察G的每一条边，如果有一条从x_i到x_j的单向边，则在G中加一条x_j到x_i的反方向边，最终得到G_s
- 考察G的每个顶点x_i，找出从x_i出发的所有2步，3步，…，n步长的路径。设路径的终点为x_{j1}，x_{j2}，…，x_{jk}。如果没有从x_i到x_{jl}的边，就加上这条边，最终得到G_t

复习：传递闭包的有限构造方法

- A为非空有限集合，$|A| = n$，R为A上的关系，则存在正整数$k \leq n$，使得

$$t(R) = R^{+} = R \cup R^{2} \cup \ldots \cup R^{k}$$

10.5 关系的闭包(closure)

定理：设A是集合，R_1和R_2是A上的二元关系，$R_1 \subseteq R_2$，则有：

- $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
- $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
- $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

证明： $r(R_1) = R_1 \cup I_A$，$r(R_2) = R_2 \cup I_A$

关系的闭包(closure)

定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：

- 若R是自反的，则$s(R), t(R)$也自反
- 若R是对称的，则$r(R), t(R)$也对称
- 若R是可传递的，则$r(R)$也可传递

$s(R)$不是可传递的？

定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：若R是对称的，则$t(R)$也对称

证明：归纳法证明若R是对称，则R^n也对称

$n = 1$，显然成立

假设R^n对称，对任意$< x, y >$

$$< x, y > \in R^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \exists t(< x, t > \in R \land < t, y > \in R^n)$$

$$\Rightarrow \exists t(< t, x > \in R \land < y, t > \in R^n)$$

$$\Rightarrow < y, x > \in R \circ R^n \Rightarrow < y, x > \in R^{n+1}$$

定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：若R是对称的，则$t(R)$也对称

证明：$\cdots \Rightarrow < y,x > \in R \circ R^n \Rightarrow < y,x > \in R^{n+1}$

任取$< x,y >$，有

$$< x,y > \in t(R)$$
$$\Rightarrow \exists n(< x,y > \in R^n)$$
$$\Rightarrow \exists n(< y,x > \in R^n)$$
$$\Rightarrow < y,x > \in t(R)$$

若R是传递的，$s(R)$不一定是传递的

反例：$R = \{< a,b >,< c,b >\}$，

R是传递的

$$s(R) = \{< a,b >,< b,a >,< c,b >,< b,c >\}$$

$s(R)$不是传递的

若$\boldsymbol{R}$是可传递的，则$\boldsymbol{r(R)}$也可传递

闭包同时具有的多种性质2

对非空集合A上的关系R，

（1） $rs(R) = sr(R)$

（2） $rt(R) = tr(R)$

（3） $st(R) \subseteq ts(R)$

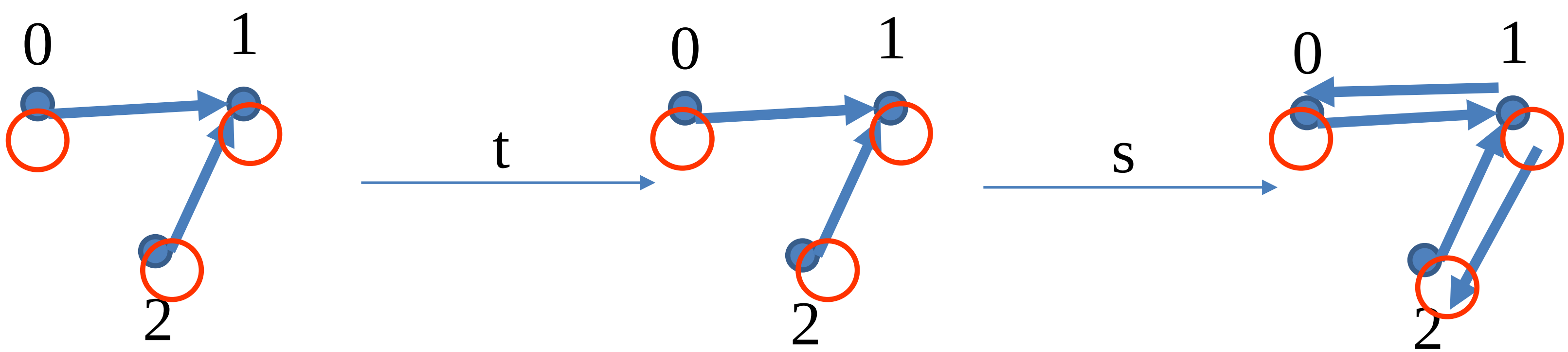
自反关系是万金油

其中 $rs(R) = r(s(R))$，其它类似。

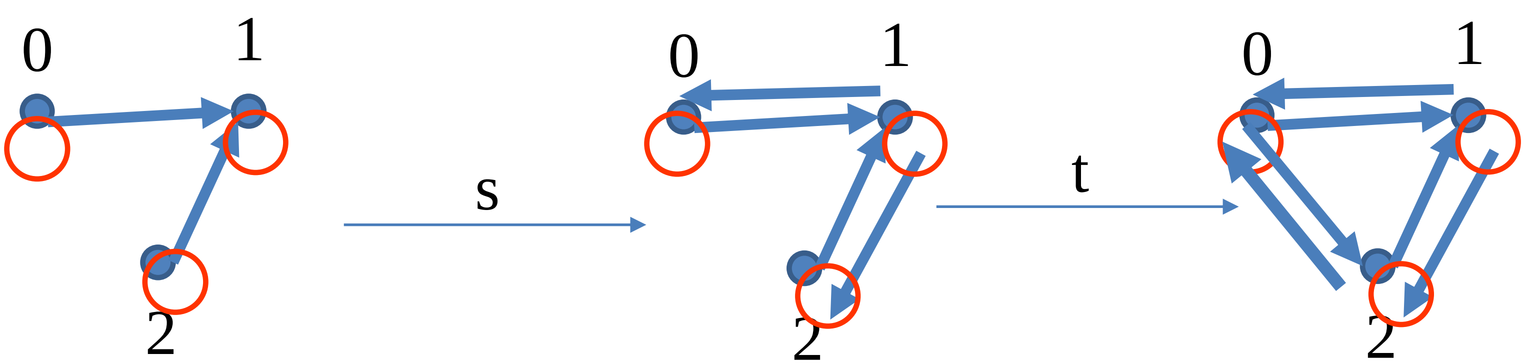
$r(R) \rightarrow sr(R) \rightarrow tsr(R)$

$r(R) \rightarrow tr(R) \rightarrow str(R)$ ？

复习：反例



对称的，但不是传递的，少了(0,2)和(2,0)



关系的性质

- 自反？对称？传递？
- 日常生活中的关系？

  同龄人

  同班同学

  ……

10.6 等价关系和划分

定义10.6.1 等价关系

- 设R为非空集合A上的关系，如果R是

  自反的、

  对称的、

  传递的，

- 则称R为A上的等价关系。

多选题 1分

Setting

以下哪些关系是等价关系？

A 平面几何中三角形间的相似关系

B 同学集合中同班同学的关系

C 朋友关系

D 恒等关系、全域关系

E 非空集合上的空关系

提交

典型的等价关系

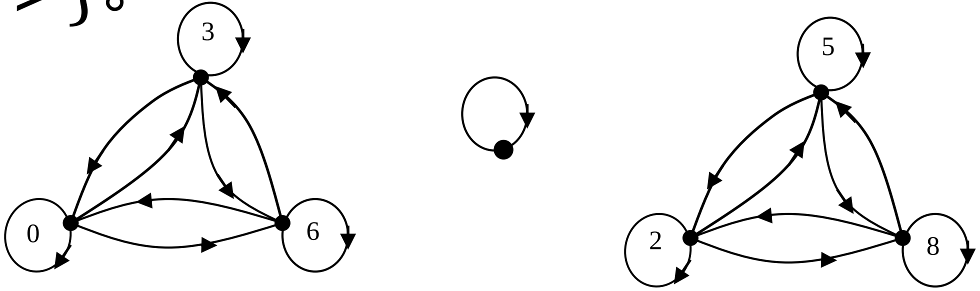
- 平面几何中三角形间的相似关系
- 同学集合中同班同学的关系
- 同学集合中同年龄的关系
- 同学集合中的老乡关系
- 但朋友关系并非等价关系（不满足传递）
- 非空集合A上的恒等关系、全域关系
- 非空集合上的空关系不是等价关系（满足反自反故不满足自反性）

例：整数集上的同余关系

- 整数集上关系$R=\{<x,y>|x-y$能被m整除$\}$。
- 关系R是等价关系。
- 证明：R有自反性；对称性；传递性。
- 设$A=\{0,1,2,3,5,6,8\}$，R为A上的模3等价关系，则

$R=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<5,5>,<6,6>,<8,8>,<0,3>,<3,0>,<0,6>,<6,0>,<2,5>,<5,2>,<2,8>,<8,2>,<3,6>,<6,3>,<5,8>,<8,5>\}$。

R的关系图见图



是否等价关系中有天然的划分？

10.6 等价关系与划分

等价类

设R是非空A集合上的等价关系，对于任何$x \in A$，令：

- $[x]_R = \{y | y \in A \ \wedge \ xRy\}$
- $[x]_R$是由$x \in A$生成的R等价类
- x为等价类$[x]_R$的表示元素
- 有如下性质：

  （1）$\forall x \in X, x \in [x]_R, [x]_R \neq \emptyset$

  （2）若$y \in [x]_R$, 则$[x]_R = [y]_R$

  （3）$y \in [y]_R$, 若$y \notin [x]_R$, 则$[x]_R \neq [y]_R$

定理 设A是一个集合，R是A上的等价关系，xRy当且仅当$[x]_R = [y]_R$

证明：

- 充分性，因为$x \in [x]_R = [y]_R$, 即$x \in [y]_R$，所以xRy。
- 必要性，已知xRy，考虑$[x]_R$的任意元素z，有zRx。根据R的传递性，有zRy，因此$z \in [y]_R$。证明$[x]_R \subseteq [y]_R$。类似可证明$[y] \subseteq [x]_R$，所以$[x]_R = [y]_R$。

10.6 等价关系与划分

定理 设A是一个集合，R是A上的等价关系，对于所有$x, y \in A$，或者$[x]_R = [y]_R$，或者$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

证明：只需证明如果 $x \not{R} y$，则$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

反证法：假设$[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$，则$\exists z \in [x]_R \cap [y]_R$

$$\Rightarrow < x, z > \in R \wedge < z, y > \in R$$

$$\Rightarrow < x, y > \in R$$ （矛盾！）

10.6 等价关系与划分

定理 设R是集合A上的等价关系，则

$$A = \cup \{[x]_R \mid x \in A\}$$

证明：首先易证$\cup \{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$

其次，对任意$y \in A$

$$y \in A \Rightarrow y \in [y]_R \wedge y \in A$$

$$\Rightarrow y \in \cup \{[x]_R \mid x \in A\}$$

所以：$A \subseteq \cup \{[x]_R \mid x \in A\}$

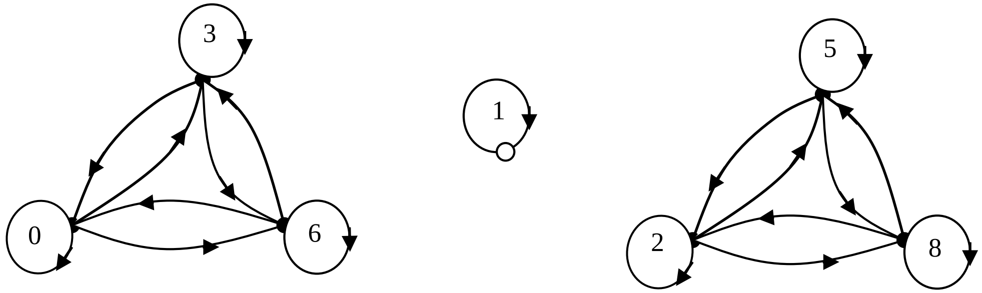
等价类覆盖集合

10.6 等价关系与划分-等价类

- 由等价类的定义性质知:X内的任两元素对于R的等价类或相等或分离，故X内所有元素对R的等价类的并集就是X。
- 也可以说，X的元素对于R的等价类定义了X的一个划分，且这样的划分就是唯一的。原因：由等价类的性质知等价关系R构成的类两两不相交，且覆盖X，且X的所有元素对于R的等价类是唯一的。

10.6 等价关系与划分-讨论

- 等价类$[x]_R$是一个集合，$[x]_R \subseteq A$（$[x]_R$是A的子集）
- $[x]_R$中的元素是在A中所有与x具有等价关系R的元素所组成的集合
- 在等价关系中的关系图中，
  - 每个连通子图中的所有点就构成一个等价类



10.6 等价关系与划分-实例

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $R = \{< a, a >, < b, b >, < a, b >, < b, a >, < c, c >, < d, d >, < c, d >, < d, c >\}$
- $[a]_R = \{a, b\} = [b]_R$
- $[c]_R = \{c, d\} = [d]_R$

10.6 等价关系与划分-实例

- 设$A = N$

  $R = \{< x, y > | x \in A \wedge y \in A \wedge (x - y)$可被3整除$\}$

- 等价类

  $[0]_R = \{0, 3, 6, 9 \ldots\}$

  $[1]_R = \{1, 4, 7, 10 \ldots\}$

  $[2]_R = \{2, 5, 8, 11 \ldots\}$

10.6 等价关系与划分

商集：R是A上的等价关系，R的所有等价类构成的集合

记为A/R：$\{[x]_R \mid x \in A\}$

- 例：A为全班同学的集合，$|A| = n$，$(n \in N)$

  按指纹的相同关系R_1是一个等价关系

  $$A/R_1 = \{[x_1]_{R_1}, \ldots [x_{\mathrm{n}}]_{R_1}\}$$

  同姓关系R_2是一等价关系

  $$A/R_2 = \{[张]_{R_2}，[李]_{R_2}，\ldots\}$$

10.6 等价关系与划分

划分：给定一非空集合A，A的一个划分为非空子集族$S=\{A_1,A_2,\ldots A_m\}$，满足：

（1） $\emptyset \notin S$

（2） $\forall x \forall y(x,y \in S \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y=\emptyset)$

（3） $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = A$

非空子集，不相交，并为A

多选题 1分

Setting

- 例：A={a,b,c},下列哪些A_i为A的一个划分？
  - $A_1=\{\{a\},\{b,c\}\}$
  - $A_2=\{\{a\},\{c\},\{b\}\}$
  - $A_3=\{\{a\},\{a,b,c\}\}$
  - $A_4=\{\{a,b\},\{c\},\varnothing\}$
  - $A_5=\{\{a,\{a\}\},\{b,c\}\}$

A A_1

B A_2

C A_3

D A_4

E A_5

提交

等价关系与划分有一一对应关系

- 划分到等价关系转化：A是一非空集合，S是A的一个划分，下述关系必定是一个等价关系

$$R=\{<x,y>\ |\ x,y\in A\ \wedge\ x,y\text{在}S\text{的同一划分}\}$$

- 等价关系到划分的转化：设A是非空集合，R是A上的等价关系。R的商集是A的划分

10.6 等价关系与划分

例1 整数集Z上，$R=\{<x,y>)|x-y$能被4整除$\}$

$$=\{<x,y>|x\equiv y(mod4)\}$$

R是等价关系，由Z上元素所构成的类分别以余数为0、1、2、3分类：

$$[0]_R=\{\cdots-8,-4,0,4,8,12\cdots\cdots\}=\{4k\}$$

$$[1]_R=\{\cdots-7,-3,1,5,9,13\cdots\cdots\}=\{4k+1\}$$

$$[2]_R=\{\cdots-6,-2,2,6,10,14\cdots\cdots\}=\{4k+2\}$$

$$[3]_R=\{\cdots-5,-1,3,7,11,15\cdots\cdots\}=\{4k+3\}$$

分析等价类的性质

- 令$W = [\mathrm{i}]_R$

1、任$w \in W$，wRw

2、任w_1、$w_2 \in W$，$[w_1]_R = [w_2]_R$

3、$[0]_R \cap [1]_R = \varnothing, \ldots, [2]_R \cap [3]_R = \varnothing,$

$[0]_R \cup [1]_R \cup [2]_R \cup [3]_R = Z$

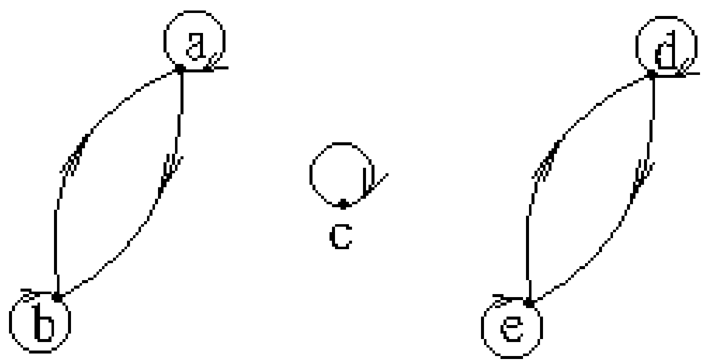
- 得$Z/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R\}$，这个商集是$Z$上的一个划分。这些类称为模4的剩余类。

10.6 等价关系与划分

例 $A = \{a, b, c, d, e\}, S = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$

对应划分S的等价关系为

$$R = \{a, b\} \times \{a, b\} \cup \{c\} \times \{c\} \cup \{d, e\} \times \{d, e\}$$
$$= \{< a, a >, < b, b >, < a, b >, < b, a >, < c, c >, < d, d >, < e, e >, < d, e >, < e, d >\}$$



定理：任一集合上的一个划分可产生一个等价关系。

证明：

- 设$C = \{C_1, C_2 \dots \dots C_m\}$, C_i为C的划分块，由C可建立一个关系

$$R = (C_1 \times C_1) \cup (C_2 \times C_2) \cup \dots\dots \cup (C_m \times C_m)$$

- 易知R是等价关系。
- 集合上的等价关系和其上的划分是一一对应的。

10.6 等价关系与划分

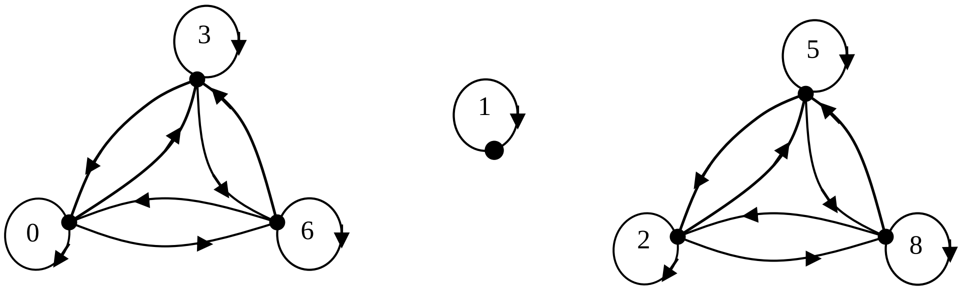
例 设$A=\{0,1,2,3,5,6,8\}$，R为Z上模3等价关系$R=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<5,5>,<6,6>,<8,8>,<0,3>,<3,0>,<0,6>,<6,0>,<2,5>,<5,2>,<2,8>,<8,2>,<3,6>,<6,3>,<5,8>,<8,5>\}$，$R$的关系图见图

- 模3的等价类：

$[0]=\{0, 3, 6\}=[3]=[6]$，

$[1]=\{1\}$，

$[2]=\{2, 5, 8\}=[5]=[8]$。



10. 6 等价关系与划分

例 设$X = \{a, b, c, d, e\}$，求由划分$S = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$确定的等价关系。

$$R1 = \{a, b\} \times \{a, b\}$$

$$= \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>\}$$

$$R2 = \{c\} \times \{c\} = \{<c, c>\}$$

$$R3 = \{d, e\} \times \{d, e\}$$

$$= \{<d, d>, <d, e>, <e, e>, <e, d>\}$$

$$R = R1 \cup R2 \cup R3$$

由划分的定义可知：

集合A的划分和A上的等价关系可以建立一一对应。即：

A的一个划分确定了A上的一个等价关系；反之亦然。

定理10. 6. 2　等价关系诱导出的划分

- 对非空集合A上的等价关系R，A的商集A/R就是A的划分，称为由等价关系R诱导出的A的划分，记作π_R。

定理10. 6. 3　划分π诱导出的A上的等价关系

- 对非空集合A上的一个划分π，令A上的关系R_π为
- $$R_\pi = \{\langle x, y\rangle \mid (\exists z)(z \in \pi \wedge x \in z \wedge y \in z)\}$$

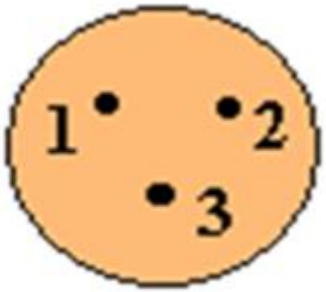
  R_π则为A上的等价关系，它称为划分π诱导出的A上的等价关系。

定理10. 6. 4　划分π和A上的等价关系R

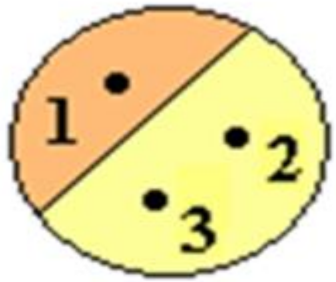
- 对非空集合A上的一个划分π，和A上的等价关系R，π诱导R当且仅当R诱导π。

例8：给出A＝{1,2,3}上所有的等价关系。

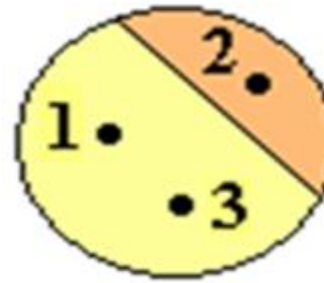
求解思路：先做出A的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系。



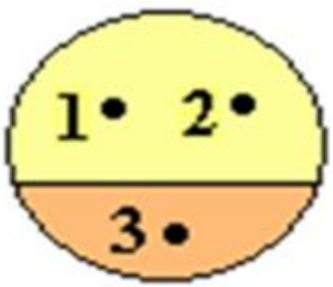
π_1



π_2



π_3



π_4

π_5

10.6 等价关系与划分-思考题

计算集合A上不同的等价关系的个数。

如$P182$上例6，$A=\{1,2,3\}$时，A上可得到5个不同的等价关系，即 $f(A_3) = 5$。

- 当$|A|= 4$时， $f(A_4) = ?$
- 当$|A|= 5$时， $f(A_5) = ?$
- 当$|A|= n$时， $f(A_n) = ?$

STIRLING数

定义： n个有区别的球放到m个相同的盒子中，要求无一空盒，其不同的方案数称为第二类Stirling数.

定理： 第二类Stirling数$S(n,m)$有下列性质：

$(a)S(n,0)=0,$

$(b)S(n,1)=1,$

$(c)S(n,2)=2^{n-1}-1,$

$(d)S(n,n-1)=C(n,2),$

$(e)S(n,n)=1.$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

STIRLING数

定理： 第二类Stirling数满足下面的递推关系：

$$S(n,m) = mS(n-1,m) + S(n-1,m-1), \qquad (n>1, m\geq 1).$$

证明：设有n个有区别的球$b_1, b_2, \ldots, b_n$, 从中取一个球设为b_1. 把n个球放到m个盒子无一空盒的方案的全体可分为两类。

（a）b_1独占一盒，其方案数显然为$S(n-1, m-1)$

（b）b_1不独占一盒，这相当于先将剩下的$n-1$个球放到m个盒子，不允许空盒，共有$S(n-1,m)$ 种不同方案，然后将b_1球放进其中一盒，方案数为$mS(n-1,m)$.

根据加法法则有 $S(n,m) = S(n-1,m-1) + mS(n-1,m)$.

STIRLING数

- 红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里。

$$S(5,2) = 2S(4,2) + S(4,1) = 2 \times 7 + 1 = 15$$

- 故共有15种不同的方案。

先把绿球取走，余下的四个球放到两个盒子。用 r，y，b，w分别表示红，黄，蓝，白球，绿球用g表示

g 不独占一盒				g 独占一盒	
第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子
rg yg bg wg ryg rbg rwg	ybw rbw ryw ryb bw yw yb	r y b w ry rb rw	ybwg rbwg rywg rybg bwg ywg ybg	g	rybw

STIRLING数

例 第二类Stirling数的展开式义：

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}C(m,k)(m-k)^{n}$$

- $S(n,m)$的组合意义：将n个有标志的球放入m个无区别的盒子，而且无一空盒的方案数.
- 思路：先考虑n个有标志的球，放入m个有区别的盒子，无一空盒的方案数.

STIRLING数

思路：容斥原理

解：n个有标志的球放入m个有区别的盒子的事件全体为S,

$$|S| = m^n$$

- A_i表示第i个盒子为空, i=1,2…m;

  $|A_i| = (m-1)^n$ 共有 C(m,1)个

  $|A_i \cap A_j| = (m-2)^n$ 共有 C(m,2)个

  …………………

- 求无空盒的方案数

m个有区别盒子,无空盒的方案数:

$$N = |\overline{A1} \cap \overline{A2} \ldots\ldots \cap \overline{An}|$$
$$= m^n - C(m,1)(m-1)^n + C(m,2)(m-2)^n + \ldots + (-1)^m C(m,m)(m-m)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

而第二类Stirling数要求盒子无区别,则:

$$S(n,m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

推论:因为$S(m,m) = 1$,

$$m! = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C(m,k)(m-k)^m$$

第十章　关系

10.1 二元关系

10.2 关系矩阵和关系图

10.3 关系的逆、合成、（限制和象）

10.4 关系的性质

10.5 关系的闭包

10.6 等价关系和划分

10.7 相容关系和覆盖

10.8 偏序关系

学习相容关系的原因

- 集合的分划与等价关系是紧密相关的
- 但等价关系的传递性是个较麻烦的问题，在实际问题中往往有些关系不具有传递性
  - 朋友关系、父子关系
  - 关系数据库中考虑元组运算时还要排除传递性
- 本节介绍一种应用广泛的新的关系—相容关系。

定义10.7.1　相容关系

- 对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、对称的，则称R为A上的相容关系。
- 与等价关系的区别：不一定满足传递性
- 例：朋友关系等

名字中有同字的关系？

相容关系举例

- 例1　A是英文单词的集合

  A={cat, teacher, cold, desk, knife, by}

  A 上的关系R为

  $R=\{<x, y>|\ x$和 y 至少有一相同字母$\}$

- 容易证明，R是自反的，对称的，但不是传递的，因此， R是相容关系。

令x_1=cat，x_2=teacher，x_3=cold，x_4=desk，x_5=knife，x_6=by

则$R\{<x_1, x_1>, <x_1, x_2>, <x_1, x_3>,$

$<x_2, x_1>, <x_2, x_2>, <x_2, x_3>, <x_2, x_4>, <x_2, x_5>,$

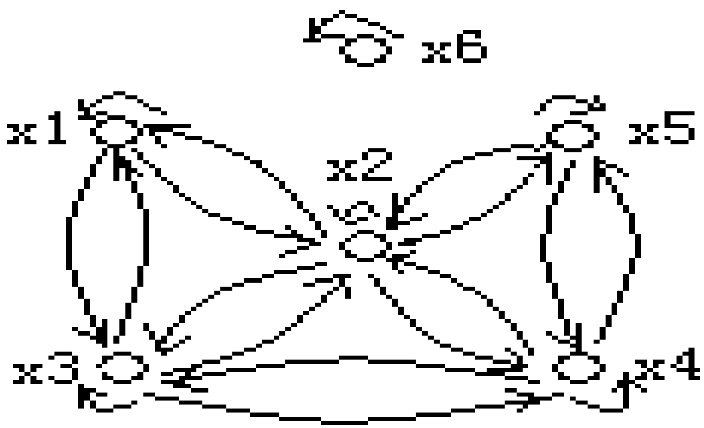
$<x_3, x_1>, <x_3, x_2>, <x_3, x_3>, <x_3, x_4>,$

$<x_4, x_2>, <x_4, x_3>, <x_4, x_4>, <x_4, x_5>,$

$<x_5, x_2>, <x_5, x_4>, <x_5, x_5>,$

$<x_6, x_6>\}$

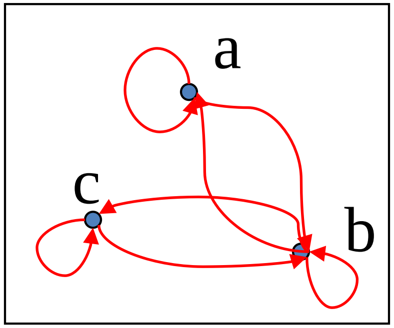
R的关系图为：

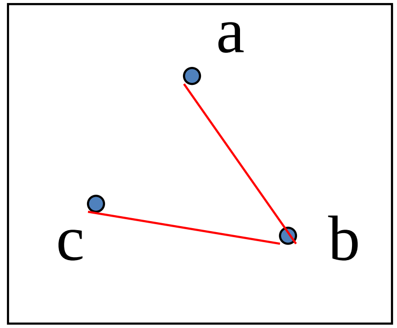


R的关系矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 相容关系的图形表示与矩阵表示





$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \mathbf{1} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

关系图

- 每个节点都有自回路
- 有向弧成对出现

所以，可以省去自回路，用单线代替来回弧线。

关系矩阵

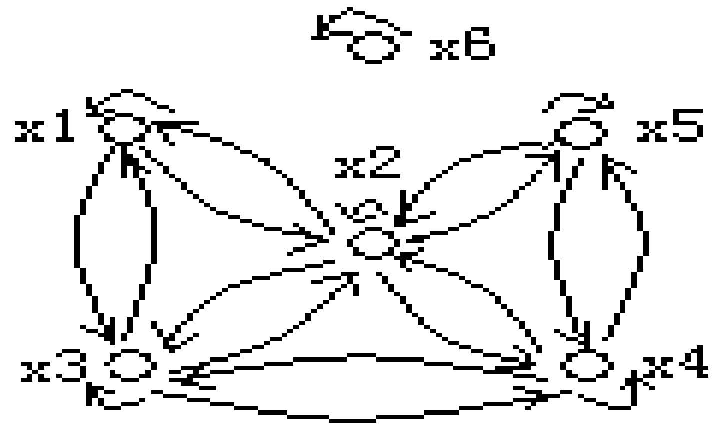
- 主对角线全为1
- 矩阵关于主对角线对称

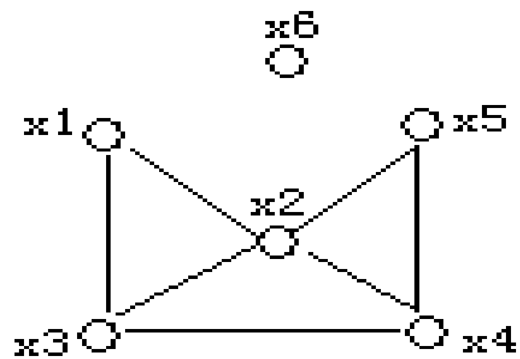
所以，只需主对角线以下部分即可表示全部信息。

2、表示：简化关系矩阵、关系图

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x_2	1				
x_3	1	1			
x_4	0	1	1		
x_5	0	1	0	1	
x_6	0	0	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5 x_6





定义10.7.2　相容类

- 对非空集合A上的相容关系R，若 $C \subseteq A$，且 C 中任意两个元素x和y有xRy，则称C是由相容关系产生的相容类，简称相容类。这个定义也可以写成：

$$C = \{ x \mid x \in A \wedge (\forall y)(y \in C \rightarrow xRy) \}$$

- 相容类的判定：在关系图中

（1）完全多边形的顶点的集合；

（2）任一条连线上的两个结点构成的集合；

（3）任一个结点构成的单元素的集合.

x_1=cat， x_2=teacher， x_3=cold， x_4=desk， x_5=knife， x_6=by

- 例如上例的相容关系

$R = \{<x_1, x_1>, <x_1, x_2>, <x_1, x_3>,$

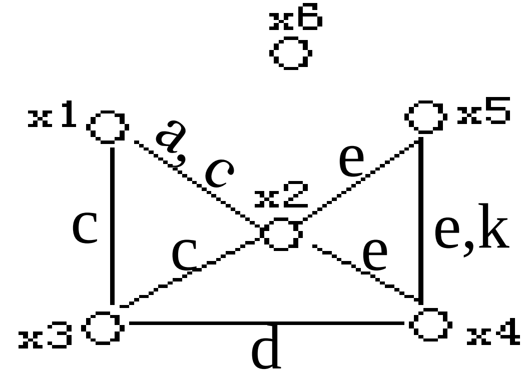
$<x_2, x_1>, <x_2, x_2>, <x_2, x_3>, <x_2, x_4>, <x_2, x_5$

$<x_3, x_1>, <x_3, x_2>, <x_3, x_3>, <x_3, x_4>,$

$<x_4, x_2>, <x_4, x_3>, <x_4, x_4>, <x_4, x_5>,$

$<x_5, x_2>, <x_5, x_4>, <x_5, x_5>,$

$<x_6, x_6>\}$



可产生相容类$\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}$等等。

相容类$\{x_1, x_2\}$中加进x3组成新的相容类$\{x_1, x_2, x_3\}$,

相容类$\{x_1, x_3\}$中加进x2组成新的相容类$\{x_1, x_2, x_3\}$,

相容类$\{x_2, x_3\}$中加进x1组成新的相容类$\{x_1, x_2, x_3\}$

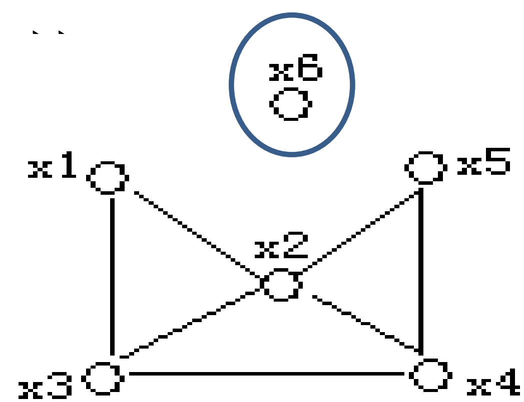
相容类 $\{x_6\}$和$\{x_2, x_4, x_5\}$加入任一新元素，就不再组成相容类，称它们是**最大相容类**。

定义10.7.3　最大相容类

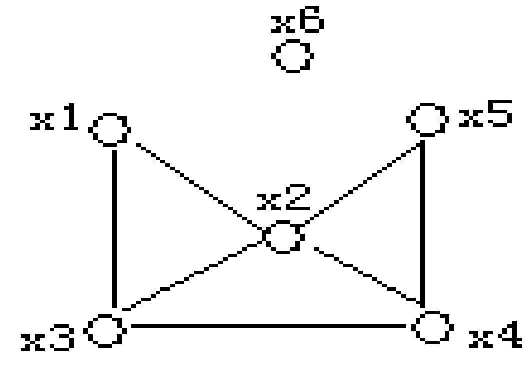
- 非空集合A上的相容关系R，一个相容类若不是任何相容类的真子集，就称为最大相容类，记作C_R。
- 最大相容类C_R有下列性质：

$$(\forall x)(\forall y)((x \in C_R \wedge y \in C_R) \to xRy) \text{ 和}$$

$$(\forall x)(x \in A - C_R \to (\exists y)(y \in C_R \wedge x \not R$$



最大相容类



- 最大相容类的判定：在关系图中

（1）最大完全多边形的顶点的集合；

（2）任一条不是完全多边形的边的连线上的两个结点构成的集合；

（3）任一个孤立结点构成的单元素的集合.

- （所谓完全多边形就是其每个顶点都与其它顶点连接的多边形。）

- 如上面例题中，$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}$都是最大相容类。

所有最大相容类的求解算法？

- 利用相容关系图可找出所有最大相容类。

(1)最大完全多边形的顶点集合构成最大相容类；

(2)孤立结点构成最大相容类；

(3)不是完全多边形边的两个端点集合构成最大相容类。

- 定理10.7.1 最大相容类的存在性

对非空有限集合A上的相容关系R，若C是一个相容类，则存在一个最大相容类C_R，使 $C \subseteq C_R$。

设R为有限集A上的相容关系，C是一个相容类，那么必存在一个最大相容类C_R，使得$C \subseteq C_R$。

证明：设$A=\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$，构造相容类序列

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots, \text{其中} C_0=C$$

且$C_{i+1}= C_i \cup \{a_j\}$，其中j是满足$a_j \notin C_i$而$a_j$与$C_i$中各元素都有相容关系的最小足标。

由于A的元素个数$|A|=n$，所以至多经过$n-|C|$步，就使这个过程终止，而此序列的最后一个相容类，就是所要找的最大相容类。

此定理的证明告诉我们找最大相容类的方法。

10.7 相容关系和覆盖

定义10.7.4　覆盖

- 对非空集合A，若存在集合Ω 满足下列条件：

  (1) $(\forall x)(x \in \Omega \rightarrow x \subseteq A)$

  (2) $\emptyset \notin \Omega$

  (3) $\cup\,\Omega = A$

- 则称Ω为A的一个覆盖，称Ω中的元素为Ω 的覆盖块。

❑ **划分：**给定一非空集合**A**，**A**的一个划分为非空子集族$\mathbf{S}=\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_m\}$，满足：

① $\emptyset \notin \mathbf{S}$

② $\forall x \forall y(x, y \in \mathbf{S} \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$

③ $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_m = \mathbf{A}$

10.7 相容关系和覆盖

定理10.7.2 完全覆盖

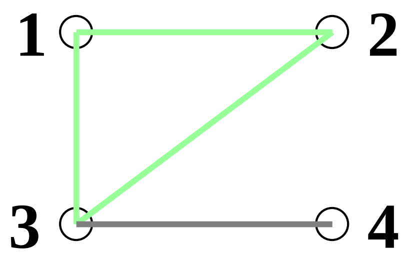
- 对非空集合A上的相容关系R，最大相容类的集合是A的一个覆盖，称为A的完全覆盖，记作$C_R(A)$。而且$C_R(A)$是唯一的。

定理10.7.3 覆盖与相容关系

- 对非空集合A的一个覆盖$\Omega=\{A_1,A_2,\ldots A_n\}$，由$\Omega$ 确定的关系$R=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup \ldots\cup A_n\times A_n$是$A$上的相容关系。

不同的覆盖可能构造出相同的相容关系。

例 设A={1，2，3，4}，集合{{1，2，3}，{3，4}}和{{1，2}，{2，3}，{1，3}，{3，4}}都是A的覆盖，但它们可以产生相同的相容关系如图所示:



定理3 集合A上相容关系 R 与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。

注意：给定集合A的一个相容关系，
覆盖不是唯一的，但**完全覆盖是唯一**的。

如前面的例子，设A是由下列英文单词组成的集合。

A={cat，teacher，cold，desk，knife，by}

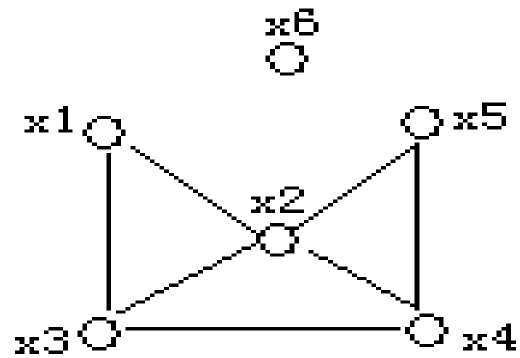
定义关系：

R={<x，y>|x，y $\in$ A，x和y至少有一个相同的字母}。

R是一个相容关系。

- R的关系矩阵和关系图分别为：

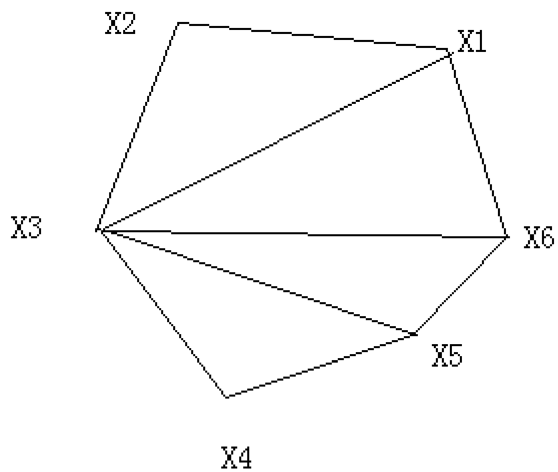
x_2	1					
x_3	1	1				
x_4	0	1	1			
x_5	0	1	0	1		
x_6	0	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6



- 最大相容类为$\{x_1,x_2,x_3\},\{x_6\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_2,x_4,x_3\}$
- 集合A的完全覆盖

$$C_{R(A)}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_6\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_2,x_4,x_3\}\}$$

- 相容关系图为：



- 解：最大相容类为:
$\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_3,x_6\},\{x_3,x_5,x_6\},\{x_3,x_4,x_5\}$。

- 集合A的完全覆盖:
$C_R(A)$
$=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_3,x_6\},\{x_3,x_5,x_6\},\{x_3,x_4,x_5\}\}$

相容类： 设R为集合A上的相容关系，若$C \subseteq A$，如果对于C中任意两个元素a_1、a_2有$a_1 R a_2$，称C是由相容关系R产生的相容类。

相容类的判定： 在关系图中

(1) 完全多边形的顶点的集合；

(2) 任一条连线上的两个结点构成的集合；

(3) 任一个结点构成的单元素的集合.

最大相容类： 设R为集合A上的相容关系，不能真包含在任何其他相容类中的相容类，称作最大相容类，记作C_R。

最大相容类的判定： 在关系图中

(1) 最大完全多边形的顶点的集合；

(2) 任一条不是完全多边形的边的连线上的两个结点构成的集合；

(3) 任一个孤立结点构成的单元素的集合.

设R为有限集A上的相容关系，C是一个相容类，那么必存在一个最大相容类C_R，使得$C \subseteq C_R$。

完全覆盖

- 在集合A上的给定相容关系R，其最大相容类的集合称作集合A的完全覆盖，记作$C_R(A)$。
- 设$C=\{C_1, C_2, \ldots, C_R\}$是集合A的覆盖，由C决定的关系$R=(C_1\times C_1)\cup(C_2\times C_2)\cup\ldots\cup(C_R\times C_R)$是A上的一个相容关系。
- 集合A上的相容关系R与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。

第十章　关系

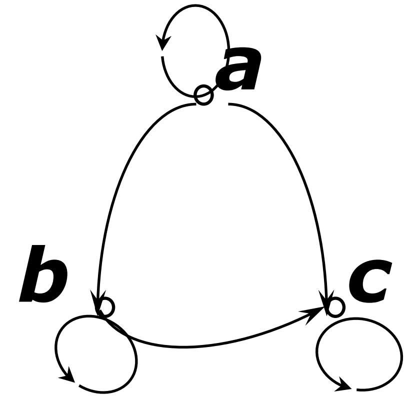
- 在普通生活中常见的许多粗劣（愚昧）的思维方式，可以通过学习数学来改善。有一种近乎是常见的且容易引起误解的假设，认为事物必须按线性次序来排列，这种假设可以通过学习偏序来消除。 — Cambridge Report
- 次序在现实生活中常见：
  - 小于，包含等
- 研究序理论的动机：
  - 研究一般次序关系
  - 推导出一般序关系的性质
  - 这些关系可以应用于所有特定的序关系

定义10.8.1（偏序关系 半序关系）

- 对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R为A上的偏序关系。

- 在不会产生误解时，偏序关系R通常记作$\leq$。当xRy时，可记作$x \leq y$，读作x“小于等于” y。偏序关系又称弱偏序关系，或半序关系。

偏序关系



- 偏序关系R (记作≤)
  - 自反性: $\forall a \in A$，有$<a,a> \in R$
  - 反对称性: $\forall a,b \in$ R,如果$<a,b> \in R$且$<b,$a$> \in R$,则必有$a = b$
  - 传递性: $\forall a,b,c \in A$,如果$<a,b> \in R$,$<b,c> \in R$, 必有$<a,c> \in R$
- 例:偏序关系
  - $A = \{a,b,c\}$
  - $R = \{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>,<c,c>\}$

偏序关系举例

- 设A是实数集合的非空子集，则A上的小于等于关系和大于等于关系都是A上的偏序关系。

- 设A为正整数集合Z^+的非空子集，则A上的整除关系D_A

  $$D_A = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x \mid y\}$$

  是A上的偏序关系。

偏序关系举例

- 设A为一集合，P(A)为A的幂集，则P(A) 上的包含关系 $R_{\subseteq} = \{<x, y> \mid x, y \in P(A) \land x \subseteq y\}$ 是P(A)上的偏序关系。

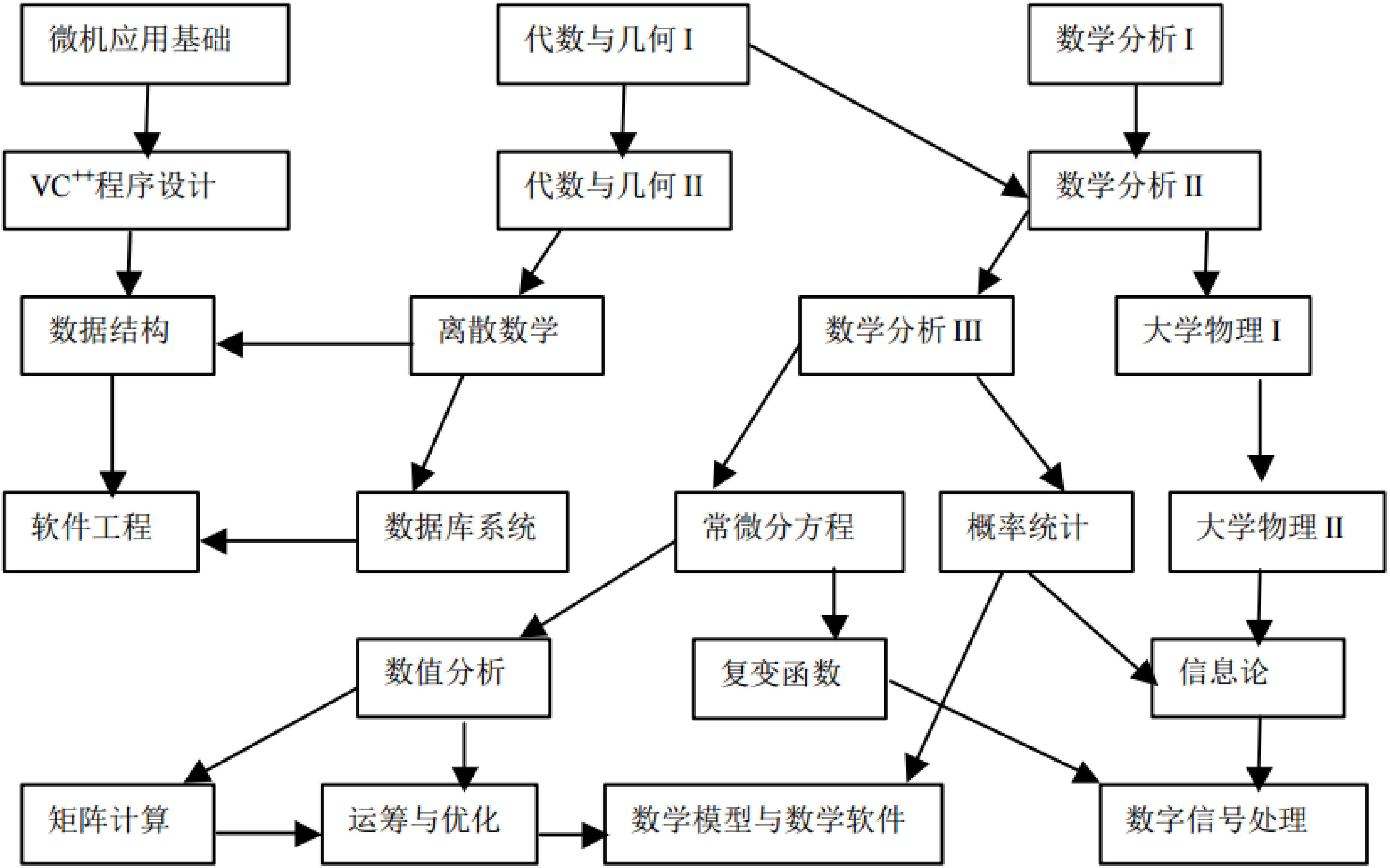
- 例 A={a, b}， P(A)={∅, {a}, {b}, A}
  试写出P(A) 上的包含关系$R_{\subseteq}$ 。

定义10.8.3（偏序集）

- 集合A与A上的关系R一起称为一个结构。集合A与A上的偏序关系R一起称为一个偏序结构，或称偏序集，并记作$\langle A, R\rangle$。

如$\langle P(A), \subseteq \rangle$是偏序集。

应用：课程设置


微机应用基础
代数与几何 I
数学分析 I
VC++程序设计
代数与几何 II
数学分析 II
数据结构
离散数学
数学分析 III
大学物理 I
软件工程
数据库系统
常微分方程
概率统计
大学物理 II
数值分析
复变函数
信息论
矩阵计算
运筹与优化
数学模型与数学软件
数字信号处理

应用：排序

- 在评分标准不能准确标定而又需要排序的场合里，把要排序的成员两两比较，确定两者之间谁好谁差，是较容易且较准确。
- 因此在这种场合使用“0 － 1”法评判。用偏序关系的传递性可以减少比较次数，
- 用反对称性又可使评判在比赛过程中动态进行。

定义10.8.2 （拟序关系 强偏序关系）

- 对非空集合A上的关系R，如果R是反自反的和传递的，则称R为A上的拟序关系 (Quasi-ordering relation) （ 反对称的）。

- 在不会产生误解时，拟序关系R通常记作$<$。当 xRy 时，可记作$x<y$，读作x“小于” y。拟序关系又称强偏序关系。

> **定义10.8.1（偏序关系 半序关系）**
>
> - 对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R为A上的偏序关系。

10.8 偏序关系

- 定理10.8.1　R为A上的拟序关系, 则R是反对称的。

（可见，偏序与拟序差别**只在自反性上**）

- 定理10.8.2　对A上的拟序关系R, $R\cup R^0$是A上的偏序关系。
- 定理10.8.3　对A上的偏序关系R，$R-R^0$是A上的拟序关系。

> 对非空集合A上的关系R，如果R是反自反的和传递的，则称R为A上的拟序关系 (Quasi-ordering relation)（反对称的）。

哈斯图

- 得名于德国数学家Helmut Hasse
- 用来表示有限偏序集的一种数学图表
  - 偏序集：$< A, \leq >$
  - 依据Birkhoff (1948)，这么叫是因为Hasse有效的利用了它们。
  - Hasse不是第一个使用它们的人，它们早就出现在如Vogt (1895)中.
  - 抽象有向无环图的传递简约.

定义10.8.4（盖住关系）

- 对偏序集$< A, \leq >$，如果$x, y \in A$，$x \leq y$，$x \neq y$，且不存在元素$z \in A$ 使得$x \leq z$且$z \leq y$，则称y盖住x。A上的盖住关系定义为$cov\ A$

$$cov\ A = \{< x, y > | x \in A \wedge y \in A \wedge y \text{ 盖住} x\}$$

10.8 偏序关系

- 哈斯图思路：

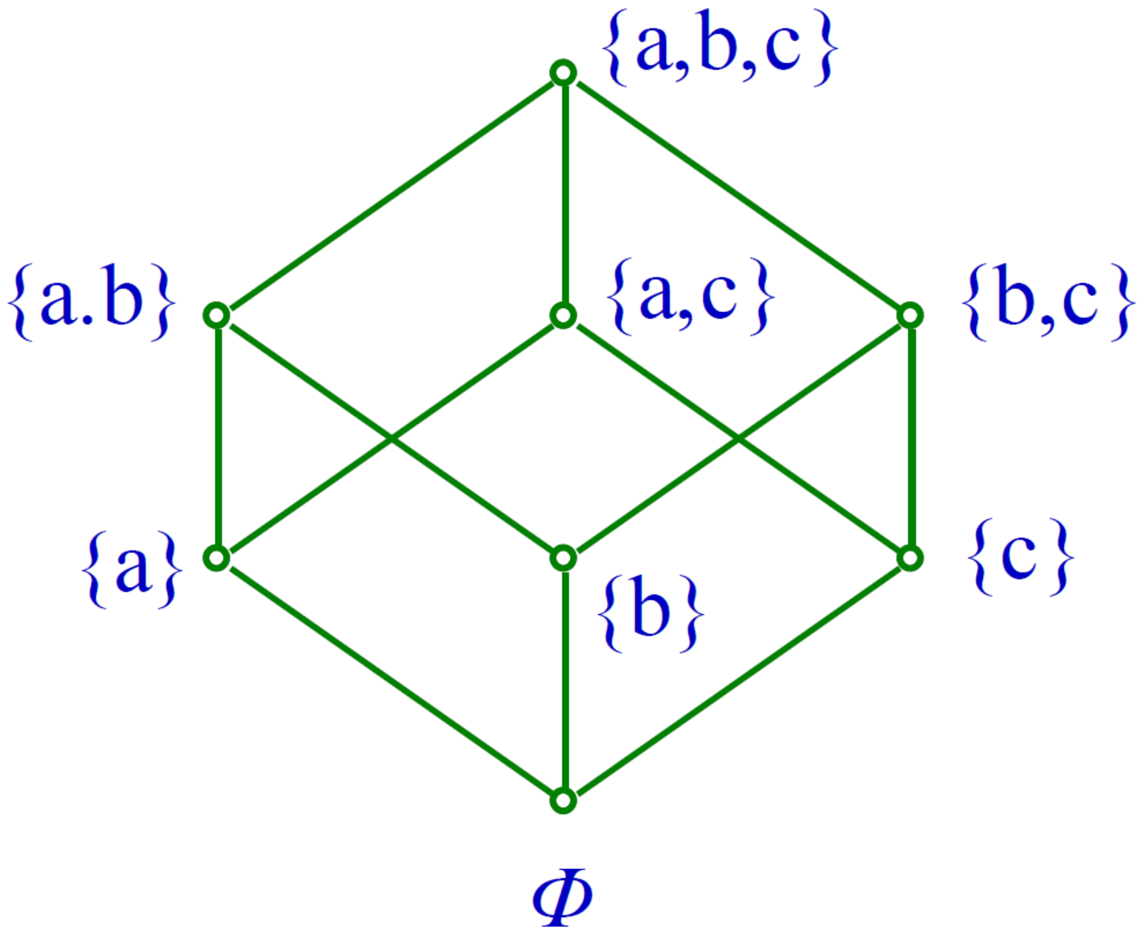
① 所有结点的自回路均省略

② 省略所有弧上的箭头,适当排列A中元素的位置,如$a \preccurlyeq b$,则a画在b的下方

③ 如$a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq c$,则必有$a \preccurlyeq c$, a到b有边, b到c有边,则a到c的无向弧省略

- 条件2，3等于说如果b盖住a,则画一条从a到b的弧线，否则不画

- 例：$A=\{a,b,c\}, <P(A),\subseteq>$是偏序集，它的哈斯图如下图（图10.8.2）



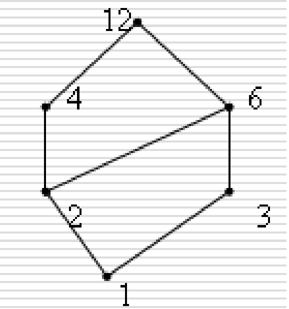
偏序集中的8个特殊元素
（最大元、最小元）

- 对于偏序集$< A, \leq >$和集合A的任意子集B，
- 如果存在元素$b \in B$，使得任意$x \in B$都有$x \leq b$，则称b为B的最大元素，简称为最大元；

- 如果存在元素$b \in B$，使得任意$x \in B$都有$b \leq x$，则称b为B的最小元素，简称为最小元。

对于例中偏序关系①

（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），



整除关系

令$B_1 = \{1,6\}$、$B_2 = \{1,2,3\}$、$B_3 = \{4,6,12\}$、$B_4 = \{2,4,6\}$、$B_5 = \{1,2,6,12\}$、$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。

分别求出B_1、B_2、B_3、B_4、B_5和B_6的最大元和最小元。

对于集合$B_1 = \{1,6\}$，最大元为6，最小元为1；

对于集合$B_2 = \{1,2,3\}$，元素2和3不可比，

所以，不存在最大元，最小元为1；

对于集合$B_3 = \{4,6,12\}$，元素4和6不可比，

所以，不存在最小元，最大元为12；

对于集合$B_4 = \{2,4,6\}$，元素4和6不可比，

所以，不存在最大元，最小元为2；

对于集合$B_5 = \{1,2,6,12\}$，最大元为12，最小元为1；

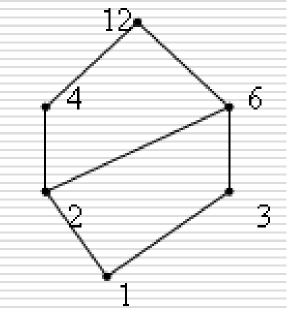
对于集合$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$，最大元为12，最小元为1。

偏序集中的8个特殊元素（极大元、极小元）

- 对于偏序集$< A, \leq >$和集合A的任意子集B，
- 如果存在元素$b \in B$，使得B中不存在其它元素x满足$b \leq x$，则称b为B的极大元素，简称为极大元；
- 如果存在元素$b \in B$，使得B中不存在其它元素x满足$x \leq b$，则称b为B的极小元素，简称为极小元。
- 注意：最大（小）元 vs. 极大（小）元

  最大（小）元必须与B中每个元素都可比，

  极大（小）元无此要求（只要求没有比它更大或更小的元素）。



对于例中偏序关系①

（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），

令 $B_1 = \{1,6\}$、$B_2 = \{1,2,3\}$、$B_3 = \{4,6,12\}$、

$B_4 = \{2,4,6\}$、$B_5 = \{1,2,6,12\}$、$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。

分别求出B_1、B_2、B_3、B_4、B_5和B_6的极大元和极小元。

对于集合$B_1 = \{1,6\}$，极大元为6，极小元为1；

对于集合$B_2 = \{1,2,3\}$，极大元为2和3，极小元为1；

对于集合$B_3 = \{4,6,12\}$，极大元为12，极小元为4和6；

对于集合$B_4 = \{2,4,6\}$，极大元为4和6，极小元为2；

对于集合$B_5 = \{1,2,6,12\}$，极大元为12，极小元为1；

对于集合$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$，极大元为12，极小元为1。

最小元 最大元 极小元 极大元

(y在B中) 对偏序集$< A, \leq >$, $B \subseteq A$

(1) 若$(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x))$, 则称$y$为$B$的最小元;

(2) 若$(\exists y)\big(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow \mathrm{x} \leq y)\big)$,则称$y$为$B$的最大元;

(3) 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)\big((x \in B \wedge \mathrm{x} \leq y) \rightarrow x = y)\big)$, 则称$y$为$B$的极小元,

(4) 若$(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)\big((x \in B \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)\big)$ 则称y为B的极大元。

注意几个区别

- 对于偏序集A上的子集B,

（1）B中的最小元应小于等于B中其它各元；

（2）B中的极小元应不大于B中其它各元（它小于等于B中一些元，可与B中另一些元无关系）；

（3）最小元（最大元）不一定存在，若存在必唯一；

（4）在非空有限集合B中，极小元（极大元）必存在，但不一定唯一；

（5）极大元不一定是最大元，但最大元显然是极大元；

偏序集中的8个特殊元素（上界、下界）

- 对于偏序集$< A, \leq >$和集合A的任意子集B，
- 如果存在元素$a \in A$，使得任意$x \in B$都有$x \leq a$，则称a为子集B的上界；
- 如果存在元素$a \in A$，使得任意$x \in B$都有$a \leq x$，则称a为子集B的下界。

- 注意：B 的上（下）界不一定是B 中的元素！

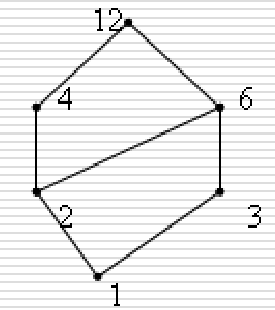
对于例中偏序关系①

（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），

令$B_1 = \{1,6\}$、$B_2 = \{1,2,3\}$、$B_3 = \{4,6,12\}$、

$B_4 = \{2,4,6\}$、$B_5 = \{1,2,6,12\}$、$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。

分别求出B_1、B_2、B_3、B_4、B_5和B_6的上界和下界。



整除关系

对于集合$B_1 = \{1,6\}$，上界为6和12，下界为1；

对于集合$B_2 = \{1,2,3\}$，上界为6和12，下界为1；

对于集合$B_3 = \{4,6,12\}$，上界为12，下界为1和2；

对于集合$B_4 = \{2,4,6\}$，上界为12，下界为1和2；

对于集合$B_5 = \{1,2,6,12\}$，上界为12，下界为1；

对于集合$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$，上界为12，下界为1。

偏序集中的8个特殊元素
（上确界、下确界）

对于偏序集$< A, \leq >$和集合A的任意子集B，

- 如果存在B的某个上界a，使得对于B的任意上界x都有$a \leq x$，则称a为子集B的最小上界或上确界，记为$\sup(B) = a$；
- 如果存在子集B的某个下界a，使得B的任意下界x都有$x \leq a$，则称a为子集B的最大下界或下确界，记为$\inf(B) = a$。
- 说明：

  令C是由B的所有上界组成的集合，则C的最小元c称为B的上确界；令C是B的所有下界的集合，则C的最大元c称为B的下确界。

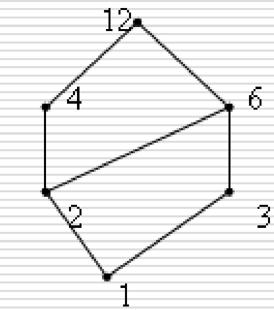
对于例中偏序关系①

（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），

令$B_1 = \{1,6\}$、$B_2 = \{1,2,3\}$、$B_3 = \{4,6,12\}$、

$B_4 = \{2,4,6\}$、$B_5 = \{1,2,6,12\}$、$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。

分别求出B_1、B_2、B_3、B_4、B_5和B_6的上确界和下确界。



整除关系

对于集合$B_1 = \{1,6\}$，上确界为6，下确界为1；

对于集合$B_2 = \{1,2,3\}$，上确界为6，下确界为1；

对于集合$B_3 = \{4,6,12\}$，上确界为12，下确界为2；

对于集合$B_4 = \{2,4,6\}$，上确界为12，下确界为2；

对于集合$B_5 = \{1,2,6,12\}$，上确界为12，下确界为1；

对于集合$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$，上确界为12，下确界为1。

上界 下界 上确界 下确界

(y在A中) 对偏序集$< A, \leq >$, $B \subseteq A$

(1) 若$(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq y))$, 则称 y为B的上界;

(2) 若$(\exists y)\big(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \leq x)\big)$, 则称 y为B的下界;

(3) 若集合$C = \{y | y是B的上界\}$, 则C的最小元称为B的上确界或最小上界;

(4) 若集合$C = \{y | y是B的下界\}$, 则C的最大元称为B的下确界或最大下界;

8大元的性质

定理

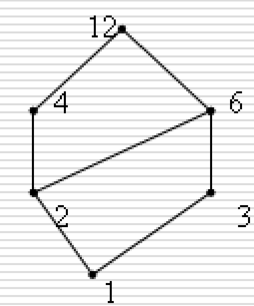
- 对于偏序集$<A,\preccurlyeq>$和集合A的任意子集B：

① 若b为B的最大元，则b为B的极大元、上界和上确界；

② 若b为B的最小元，则b为B的极小元、下界和下确界；

③ 若a为B的上界且$a \in B$，则a为B的最大元；

④ 若a为B的下界且$a \in B$，则a为B的最小元。



整除关系

8大元的性质

定理

- 对于偏序集$< A, \preccurlyeq >$和集合A的任意子集B：

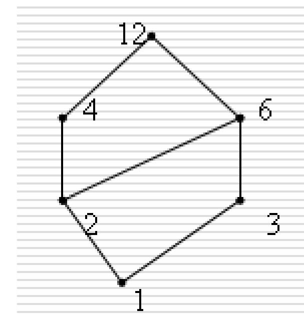
① 若B有最大元，则B的最大元唯一；

② 若B有最小元，则B的最小元唯一；

③ 若B有上确界，则B的上确界唯一；

④ 若B有下确界，则B的下确界唯一；

⑤ 若B为有限集，则B的极大元、极小元恒存在。



整除关系

多选题 1分

Setting

对偏序集的非空子集，下面哪句陈述是成立的？

A **最小元一定是下界，且是下确界A**

B **下界、下确界不一定是最小元**

提交

偏序关系

- 可比：a与b可比 $\Leftrightarrow$ a $\leq$ b$\vee$b $\leq$ a
  - 可比不同于等于
- 例：A={1，2，3}， $\leq$是A上的整除关系
  - 1，3可比

- 全序关系R：R是A上的偏序关系，满足：
  - $\forall$a,b$\in$A, a与b可比
- 例：实数上的$\leq$,$\geq$关系是全序关系

定义10.8.8（全序关系与全序集）

- 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$，如果对任意的 $x, y \in A$，x和y都可比，则称$\leq$为A上的全序关系（Total ordering relation），或称线序关系。
- 称 $\langle A, \leq \rangle$ 为全序集。
- 上确界、下确界的讨论
  - 全序关系：如果有上（下）界，就有上（下）确界
  - 偏序关系：如果有上（下）界，就有上（下）确界?

例：A={2,3,12,18}，B={2,3}，整除关系

偏序与全序

- 偏序只对部分元素成立关系R，全序对集合中任意两个元素都有关系R（线性序）。
- 例如：
  - 集合的包含关系就是偏序，因为两个集合可以互不包含；
  - 而实数中的大小关系是全序，两个实数必有一个大于等于另一个；
  - 又如：复数中的大小就是偏序，虚数不能比较大小。

- 判断下列关系是否为全序关系？并给出其哈斯图。

① 集合{2, 3, 4, 6, 8, 12}上的整除关系*R*1；

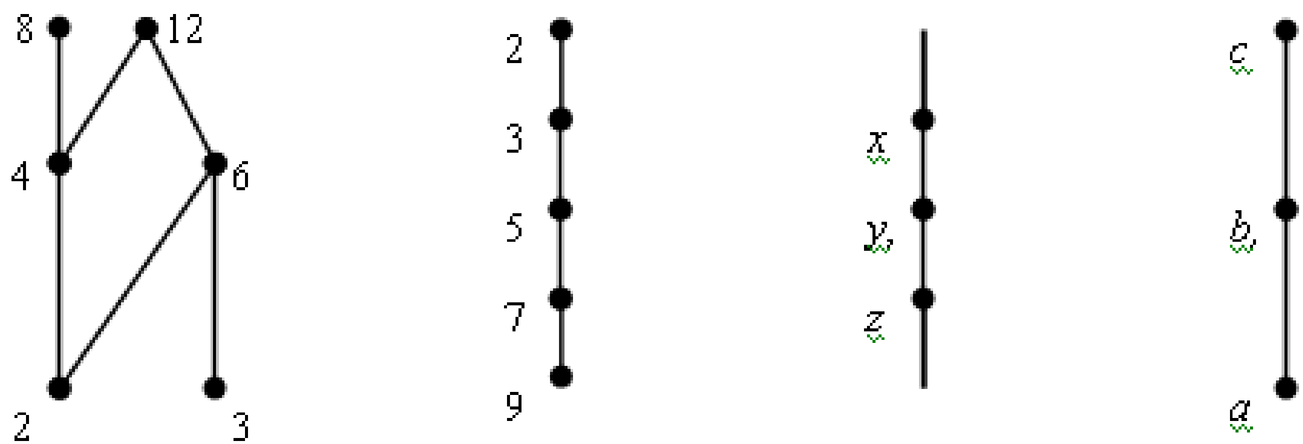
② 集合{2, 3, 5, 7, 9}上的大于等于关系*R*2；

③ 实数集合上的小于等于关系*R*3；

④ 集合{*a*, *b*, *c*}上的关系*R*4 ={<*a*, *a*>, <*b*, *b*>, <*c*, *c*>, <*a*, *b*>, <*b*, *c*>, <*a*, *c*>}；

解: 关系①、②、③和④都是偏序关系。

②、③和④都是全序关系；①不是全序关系。



R_1　　R_2　　R_3　　R_4

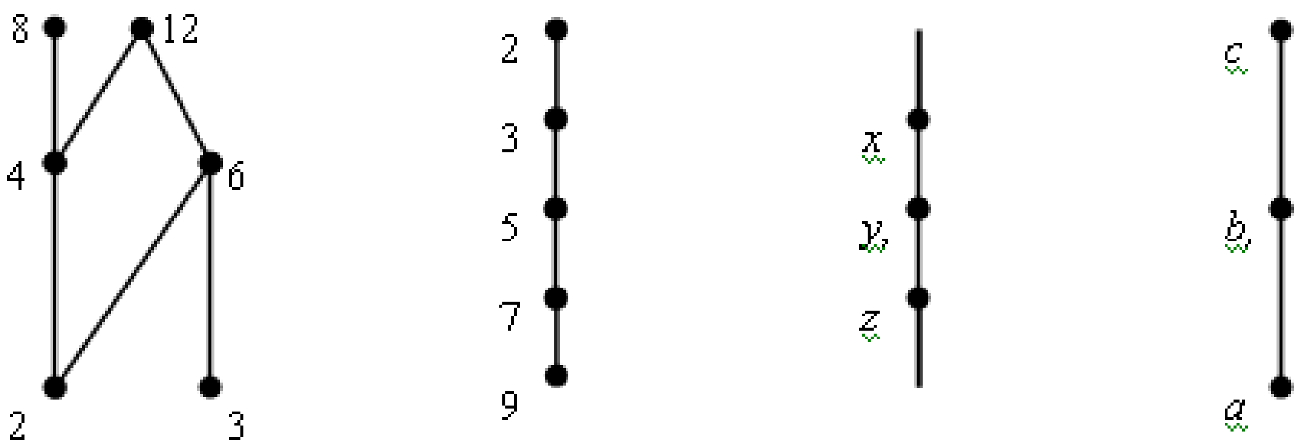
10.8 偏序关系

定义10.8.9（链、反链）

- 对偏序集$< A,\leq >$, $B \subseteq A$

(1)如果对任意的$x, y \in B$, x 和 y 都是可比的，则称B为A上的链，B 中元素个数称为链的长度。

(2)如果对任意的$x, y \in B$, x 和 y 都不是可比的，则称B为A上的反链，B 中元素个数称为反链的长度。



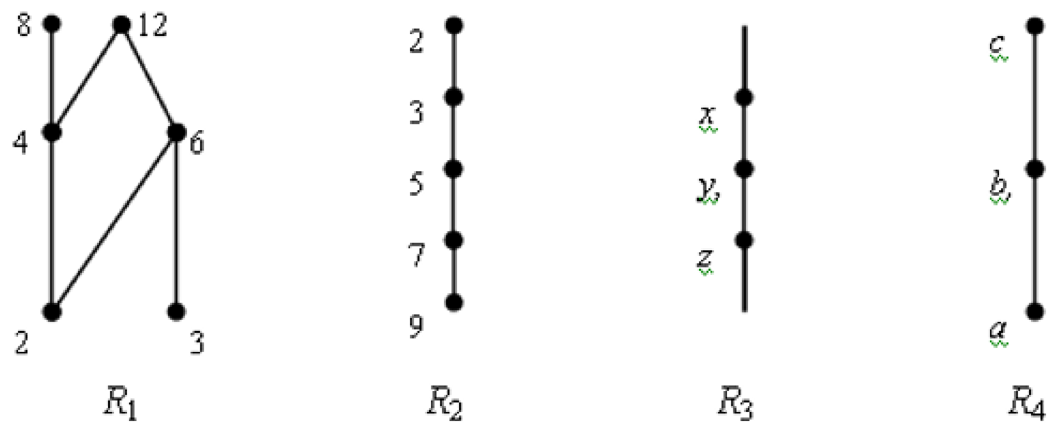
R_1 R_2 R_3 R_4

定理10.8.4（偏序集的分解定理）

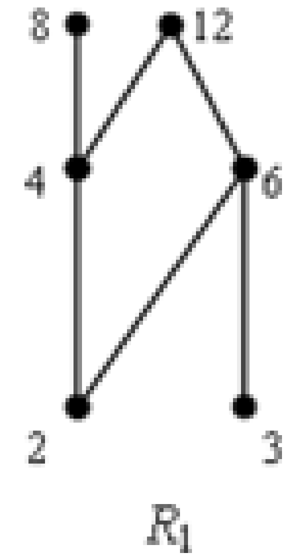
- 对偏序集$< A, \leq >$，设A中最长链的长度是n，则将A中元素分成不相交的反链，反链个数至少是n。
- 其对偶定理称为Dilworth定理：

定理：令（A,≤）是一个有限偏序集，并令m是反链的最大的大小。则A可以被划分成m个但不能再少的链。

链的最少划分数=反链的最长长度



等价证明：设A中最长链的长度是n, A中在n个划分块的划分，每个划分块都是反链。



对n作归纳。

当$n=1$时，A本身为一反链，取$P_A=\{A\}$，则P_A为A的只含一个划分块且为反链的划分。

设$n=k$时结论成立。

当$n=k+1$时，取M为A中全体极大元的集合，可知M不为空, 且A中每条最长链对应A的极大（最大）元均在M中。

且M中各元素均不可比，于是M为一反链。

$A-M$中最长链的长度为k，由归纳假设可知，$A-M$中存在每个划分块都是反链，且有k个划分块的划分P'，则$P_A=P'\cup\{M\}$为A的满足要求的划分。

定理10.8.5

- 对偏序集$< A, \leq >$, 若A中元素为$mn+1$个，则A中或者存在一条长度为$m+1$的反链，或者存在一条长度为$n+1$的链。
- 用反证法。
- 若不然, A中既无长度为$m+1$的反链，也无长度为$n+1$的链，于是A中最长链的长度至多为n，设最长链的长度为r $(r \leq n)$, 由定理10.8.4可知， A中存在 r 个划分块的划分，且每个划分块至多有m个元素，于是A中至多有mn个元素，这与已知矛盾。

思考题：导弹拦截问题

1, 2, 3, 2, 4, 1, 3, 4

- 一种导弹拦截系统的第一发炮弹能够到达任意的高度，但是以后每一发炮弹都不能高于前一发的高度。某天，雷达捕捉到敌国的导弹来袭。由于该系统还在试用阶段，所以只有一套系统，因此有可能不能拦截所有的导弹。
- 输入导弹依次飞来的高度，计算这套系统最多能拦截多少导弹。

最长不上升子序列(≥)

主观题 10分

设置

思考题：导弹拦截问题

1,2,3,2,4,1,3,4

要求最少的覆盖，按照Dilworth定理

最少链划分 = 最长反链长度

所以最少系统 = 最长导弹高度上升序列长度。

一种导弹拦截系统的第一发炮弹能够到达任意的高度，但是以后每一发炮弹都不能高于前一发的高度。某天，雷达捕捉到敌国的导弹来袭。由于该系统还在试用阶段，所以只有一套系统，因此有可能不能拦截所有的导弹。

如果试用之后效果不错，想要拦截所有导弹最少要配备多少套这种导弹拦截系统？

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

12	十二			1	2	3	4	5
13		6	7	8	9	10	11	12
14		13	14	15	16	17	18	19
15		20	21	22	23	24	25	26
16		27	28	29	30	31		
							1	2
17		3	4	5	6	7	8	9

- 12周-15周 学生评教
- 13周：第11章　　　14周：第12章
- 15周：总复习
- 考试时间：1月8日下午2:30—4:30
- 考场：建馆报告厅0

谢谢！