《高等微积分 1》第三次作业

1 设 a, b 是给定的实数, 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{如果} x > 0, \\ a\cos x + b\sin x, & \text{如果} x < 0. \end{cases}$$

当 a, b 取哪些值时, 极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在?

2 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

(1) 证明: 对于正奇数 k, 有 $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$.

(2) 证明: 对于正偶数 k, 如果 $A > 0$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$.

3 计算函数极限.

(1) 给定正整数 m, n. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$.

(2) 给定正整数 n 与正数 p. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x^n + p^n} - p}{x^n}$.

(3) 给定正整数 n 与正数 p, q. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x^n + p^n} - p}{\sqrt[n]{x^n + q^n} - q}$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$.

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

4 (1) 给定正数 A. 证明: $\lim\limits_{x\to A} \ln x = \ln A$.

(2) 给定实数 c. 证明: $\lim\limits_{x\to c} e^x = e^c$.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$. 证明: $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$.

5 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. 设 r 是正数, 且对任何 $x\in N^*(x_0,r)$, 总有 $f(x)\neq 0$.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(f(x))}{g(x)}$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{1/g(x)}$.

(3) 给定实数 $a, b\neq 0$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

(6) 给定实数 k. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{1/x}$.

(7) 给定实数 a. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^{x}$.

(8) 给定实数 a, b. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{a}{x})^{bx}$.

(9) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$.

(10) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{1/x}$.