清华大学本科生考试试题专用纸

期中考试课程　随机数学与统计　（A 卷）　2022 年 4 月 22 日

学号：__________　姓名：__________　班级：__________

一.（**20** 分）设事件 A,B 满足 $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B|A)=\dfrac{1}{4}, P(A|B)=\dfrac{1}{3}$，

令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$.

（**1**）试问 A,B 是否独立？X,Y 是否独立？为什么？

（**2**）记 $Z=X^2+Y^2$，试求 Z 的分布以及它的矩母函数 $M_Z(u)$；

（**3**）设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，且与 X 具有相同的分布，

试求 $P(X_1=1|\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=3)$。

二.（**20** 分） 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，满足 $P(X_1=2)=P(X_1=-2)=\dfrac{1}{2}$，

记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\ ,n\ge 1\quad S_0=0$；

（**1**）记 $A=\{X_1+X_2=0\}, B=\{X_2+X_3=4\}$，试求事件 A 与 B 的相关系数 $r_{A,B}$；

（**2**）试求 $P(S_4=4)$ 以及 $Cov(S_4,S_{2022})$。

三.（**20** 分）有三枚不同的硬币 C_1,C_2,C_3，正面出现的概率分别为 p_1,p_2,p_3，现考虑两种不同的抛掷策略：

策略一：先从三枚硬币中随机选一枚，再用这枚硬币进行独立重复抛掷；

策略二：每次抛掷时，都是随机地从三枚硬币中选一枚来进行抛掷。

记 N 为前 n 次抛掷中正面出现的次数，试在上述两种策略下分别求出 N 的数学期望。

四.（**20** 分） 设 $X \sim Ge(p_1), Y \sim Ge(p_2)$（均为几何分布）相互独立，

（**1**）试求 $P(X=Y)$；

（**2**）证明：$P(Y > X + n \mid Y > X) = P(Y > n) \quad \forall n = 1, 2, \cdots$；

（**3**）试求 $E(X \mid X < Y)$ 。

五.（**20** 分） 设 $\{N_t : t \geq 0\}$ 为强度为 $\lambda > 0$ 的 **Poisson** 过程，随机变量序列 $Y_1, \cdots, Y_n, \cdots$ 独立同分布，且均与 $\{N_t : t \geq 0\}$ 相互独立。记 $EY_1 = \mu, EY_1^2 = \gamma^2 < \infty$,

（**1**） 试求 $P(N_{2022} = 10 \mid N_{2020} = 7, N_{2000} = 6, N_{1000} = 3)$；

（**2**） 试求 $E[\prod_{i=1}^{N_t} Y_i]$。

- 附加题.（**5** 分）设 $X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，且

$$P(X_i = k) = p_k, k = 1, 2, \cdots, m.$$

$$\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$$

记 $N = \min\{n > 0, X_n = X_0\}$，试求 EN 。