

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计

考试日期：2020 年 6 月 11 日上午

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 任课教师姓名 _____

试卷说明：

1、本试卷共 12 道大题。

2、所有题目都要答在答题纸上，并且**每页标明考生信息**（班级+学号+姓名）**以及题号**。

3、**考试结束时请将答卷拍照并合并成一个文件上传至网络学堂作业栏（限时 20 分钟）**。

1. 假设 30%的计算机用户使用操作系统 M，20%的计算机用户使用操作系统 L，50%的计算机用户使用操作系统 W。已知某一种计算机病毒感染了 65%的 M 系统用户，50%的 L 系统用户和 82%的 W 系统用户。

(1) 随机选择一个计算机用户，其感染了该计算机病毒的概率是多少？

(2) 若发现该用户感染了这个计算机病毒，那该用户是 W 系统用户的概率是多少？

2. 按如下方式生成随机变量 X ：抛一枚均匀的硬币，若出现正面，令 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布；若出现反面，令 X 服从 $(2,4)$ 的均匀分布，求 X 的期望和方差。

3. 将区间 $(0,1)$ 随机分成三段，中间一段左端点坐标记为 X ，右端点坐标记为 Y 。

(1) 求 X,Y 的联合概率密度函数。

(2) 求 Y 的概率密度函数。

(3) 求 X 与 $Y-X$ 的协方差。

4. 调查公司为了了解市民对某项议题的看法，进行随机抽样调查。若想以不低于 99%的概率得到绝对误差不超过 5%的民众支持率的估计，需要至少调查多少人？（需说明理由）

5. 假设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，参数 μ, σ^2 均未知，前 10 次独立观测记为 X_1, \dots, X_{10} 。请基于前 10 次观测利用小样本方法给出下一次独立观测值的 95%置信的双侧区间估计。

6. 假设总体 X 服从均匀分布 $U(0, \theta)$ ，参数 θ 未知， X_1, \dots, X_n 为为其独立随机样本。

(1) 求参数 θ 的极大似然估计 θ^* 。

(2) θ^* 是否是参数 θ 的无偏估计? (需说明理由)

(3) θ^* 是否是参数 θ 的充分统计量? (需说明理由)

7. 假设总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 参数 σ^2 已知, X_1, \dots, X_n 为其随机样本, μ 的先验分布为 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$, μ_0, σ_0^2 为已知常数。求 μ 的最大后验估计。

8. 随机变量 X 的分布如下表前两行所示, 其中 $p_i > 0$ ($i=1, \dots, 6$) 未知, 表中最后一行为实验员报告的 120 次观测结果统计。

| X 值 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 概率 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | p_6 |
| 观测频数 | 23 | 19 | 21 | 21 | 18 | 18 |

(1) 请在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下利用似然比检验假设 $H_0: p_1 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$ 。

(2) 你对实验员报告的观测数据有何评价? (需说明你的依据)

9. 四种同类药品效用时间都服从正态分布, 随机观测结果如右表所示, 试在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下检验该四种产品效用时间是否有显著差异。

| 药品 | 持续时间 (单位: 小时) | | | |
|----|---------------|---|---|----|
| A | 8 | 6 | 4 | 2 |
| B | 6 | 6 | 4 | 4 |
| C | 8 | 9 | 9 | 8 |
| D | 10 | 9 | 8 | 11 |

10. 下面是某品牌元件使用时间的调查数据 (单位: 年):

3.6, 2.2, 2.9, 2.3, 2.0, 4.6, 3.8, 3.5, 3.3, 3.2, 2.7。

(1) 请在检验水平 $\alpha = 0.1$ 下利用符号检验判断该品牌汽车电瓶使用中位数的是否为 3.5 年。

(2) 考虑符号秩和检验, 请计算相应的正秩和。

11. 设想学校正在调查对某项议题的意见, 分别随机抽取了 200 名学生、100 名教师和 100 名职员进行调查, 调查结果如右表所示。请据此利用齐性检验判断不同群体对该议题的意见是否一致 (取检验水平 $\alpha = 0.05$)。

| | 学生 | 教师 | 职员 |
|----|-----|----|----|
| 支持 | 83 | 47 | 30 |
| 反对 | 117 | 53 | 70 |

12. 假设总体服从正态分布 $N(\mu, 9)$, X_1, \dots, X_n 为其独立随机样本, 考虑检验 $H_0: \mu = 0$

vs $H_1: \mu = 1$, 取 \bar{X} 为检验统计量。

(1) 取检验水平 $\alpha = 0.05$, 请给出临界值检验准则。

- (2) 求出 (1) 中检验准则在 H_1 下的势。
- (3) 证明：当样本容量 n 无限增大时，该势趋向于 1
- (4) 如果 $n=100$ ，检验统计量的观测值为 $\bar{x}=0.6$ ，请计算其 P 值（精确到小数点后两位）。
- (5) 如果依据 (4) 中得到的 P 值拒绝原假设，你知道自己出错的概率就等于该 P 值，这个说法是否正确？（需简要说明理由）

附录 1：标准正态累积分布函数 $\Phi(x)$

| | | | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | 1.00 | 1.64 | 1.80 | 1.96 | 2.05 | 2.33 | 2.58 |
| $\Phi(x)$ | 0.841 | 0.950 | 0.964 | 0.975 | 0.980 | 0.990 | 0.995 |

附录 2：记号约定： $0 < \alpha < 1$ ，自由度为 n 的 t 分布为 $t(n)$ ，自由度为 n 的卡方分布为 $\chi^2(n)$ ，

自由度为 (m, n) 的 F 分布为 $F(m, n)$ ，其上 α 分位点分别为 $t_\alpha(n)$ ， $\chi_\alpha^2(n)$ ， $F_\alpha(m, n)$ 。

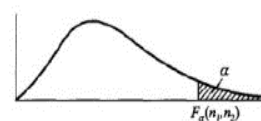
$$t_{0.05}(9) = 1.83 \quad t_{0.025}(9) = 2.26 \quad t_{0.05}(10) = 1.81 \quad t_{0.025}(10) = 2.21$$

$$\chi_{0.975}^2(2) = 0.05 \quad \chi_{0.95}^2(2) = 0.10 \quad \chi_{0.05}^2(2) = 5.99 \quad \chi_{0.025}^2(2) = 7.38$$

$$\chi_{0.975}^2(5) = 0.83 \quad \chi_{0.95}^2(5) = 1.15 \quad \chi_{0.05}^2(5) = 11.07 \quad \chi_{0.025}^2(5) = 12.83$$

$$\chi_{0.975}^2(6) = 1.24 \quad \chi_{0.95}^2(6) = 1.64 \quad \chi_{0.05}^2(6) = 12.59 \quad \chi_{0.025}^2(6) = 14.45$$

$$F_{0.05}(3, 12) = 3.49 \quad F_{0.05}(12, 3) = 8.74 \quad F_{0.05}(4, 15) = 3.06 \quad F_{0.05}(15, 4) = 5.86$$



附录 3：

二项分布 $B(10, 05)$

| | | | | | | | | | | | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 概率 | 0.0010 | 0.0098 | 0.0439 | 0.1172 | 0.2051 | 0.2461 | 0.2051 | 0.1172 | 0.0439 | 0.0098 | 0.0010 |

二项分布 $B(11, 05)$

| | | | | | | | | | | | | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 概率 | 0.0005 | 0.0054 | 0.0268 | 0.0806 | 0.1611 | 0.2256 | 0.2256 | 0.1611 | 0.0806 | 0.0268 | 0.0054 | 0.0005 |