概统第四次习题课参考答案

1. 设 X_i 的概率密度函数为 $f(t)$，~~注意到~~ 概率分布为 $F(t)$. 注意到：

$$(X_n>\max\{X_1,\cdots,X_{n-1}\})=(X_1<X_n,\ \cdots,\ X_{n-1}<X_n)$$

故 $P(X_n>\max\{X_1,\cdots,X_{n-1}\})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{X_n}\cdots\int_{-\infty}^{X_n}\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\,dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F^{n-1}(x_n)f(x_n)\,dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F^{n-1}(x)\,dF(x)=\frac{1}{n}F^n(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{n}$$

2. $\max\{X,Y\}=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)\Rightarrow E(\max\{X,Y\})=\frac{1}{2}(EX+EY+E|X-Y|)$

由 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(0,1)$ $\overset{\text{且}X,Y\text{独立}}{\Longrightarrow}$ $X-Y\sim N(0,2)$, $EX=EY=0$

故 $\frac{1}{2}E|X-Y|=\frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}|t|e^{-\frac{t^2}{4}}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

3. $Cov(X,Y)=EXY-EXEY$ $\qquad Corr(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX}\cdot\sqrt{VarY}}$

$EX=\frac{5}{7}$ $\qquad EY=\frac{8}{7}$, $\qquad EX^2=\frac{39}{70}$ $\qquad EY^2=\frac{34}{21}$

$EXY=\frac{17}{21}$ $\qquad VarX=\frac{39}{70}-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{23}{490}$ $\qquad VarY=\frac{34}{21}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{46}{147}$

故 $Cov(X,Y)=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147}$

$Corr(X,Y)=-\frac{\sqrt{15}}{69}\approx-0.05613$

4. $Cov(Y_1,Y_2)=Cov(X_1+X_2,\ X_2+X_3)=E(X_1+X_2)(X_2+X_3)-E(X_1+X_2)E(X_2+X_3)$

$$=EX_1X_2+EX_2X_3+EX_1X_3+EX_2^2$$

$$=Cov(X_1,X_2)+Cov(X_2,X_3)+Cov(X_1,X_3)+VarX_2^2$$

$=(1+\rho_{12}+\rho_{23}+\rho_{13})\sigma^2$，同理可算得 $Cov(Y_2,Y_3)$, $Cov(Y_3,Y_1)$.

5. 记 $EX_i=\mu_i$, $VarX_i=\sigma_i^2$, 注意到

$$\cancel{E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{E(X_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right)} \quad E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right)$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}+\sum_{i\neq j}\frac{(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)}{\sigma_i\sigma_j}\right]$$

$$=n+n(n-1)\rho\geq 0 \Rightarrow \rho\geq-\frac{1}{n-1}$$

6. 令 $Y_i=\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}$, 则 $0\leq Y_i\leq 1$, EY_i 存在, 由对称性知 Y_i 同分布

故 $1=E\frac{X_1+\cdots+X_n}{X_1+\cdots+X_n}=E\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}EY_i \Rightarrow EY_i=\frac{1}{n}$, 故 $E\left(\sum_{i=1}^{k}Y_i\right)=\frac{k}{n}$.

7. 由于 $\det(B)=0 \Rightarrow$ 存在不全为0的数 $c_1,\cdots,c_n$, 使 $c^TBc=0$, $c=(c_1,\cdots,c_n)^T$

故 $0=c^TBc=\sum_{i,j}c_ic_j\,cov(X_i,X_j)$

$$=\sum_{i,j}cov(c_iX_i,c_jX_j)$$

$$=\sum_{i,j}E\left([c_iX_i-E(c_iX_i)][c_jX_j-E(c_jX_j)]\right)$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}(c_iX_i-E(c_iX_i))\right]^2 \quad \left(\text{这里是由于 } \sum_{i,j}a_ia_j=(a_1+\cdots+a_n)^2\right)$$

$$\cancel{=E\left(\sum_{i=1}^{n}[c_iX_i-E(c_iX_i)]\right)^2-\left(E\sum_{i=1}^{n}[c_iX_i-E(c_iX_i)]\right)^2}$$

$$=Var\left(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)\cancel{=E\left(\sum c_iX_i\right)^2 \Rightarrow \text{结论成立}}$$

记 $Y=c_1X_1+\cdots+c_nX_n$. 则 $0=E(Y-EY)^2=VarY \Rightarrow P(Y=EY)=1$

即 $P(c_1X_1+\cdots+c_nX_n=\text{常数})=1$. 事实上, $VarX=0 \Leftrightarrow P(X=EX)=1$

Date

8. $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx=\int_y^1 24(1-x)y\,dx=12y(1-y)^2,\ 0<y<1$

故 $p(x|y)=\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2(1-x)}{(1-y)^2}, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

$y\in(0,1)$时 $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x|y)dx=\dfrac{2y+1}{3}$

9. (1) $E(I|X=x)=P(I=1|X=x)$

$=P(Y<X|X=x)=P(Y<x)=\Phi(x)$

(2) 由 $E[I|X=x]=\Phi(x)$ 知,

$E\Phi(X)=E(E(I|X))=E(I)=P(Y<X)$

(3) 注意到 $X-Y\sim N(\mu,2)$, 故 $E(\Phi(X))=P(Y<X)=P(X-Y>0)$

$=1-\Phi(-\frac{\mu}{\sqrt{2}})=\Phi(\frac{\mu}{\sqrt{2}})$