概统 第二次作业

习题1.4

2. 设 A="任取一件是一等品" B="任取一件是二等品", C="任取一件是三等品"
在 $\bar{C}$ 发生条件下求 A 发生的概率，即求

$$P(A|\bar{C})=\frac{P(A\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(A)}{P(\bar{C})}=\frac{P(A)}{1-P(C)}=\frac{60\%}{1-5\%}=\frac{12}{19}$$

9. 由容斥原理 $P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})$

$$=1-P(\bar{A})+1-P(B)-P(A\bar{B})=1-0.3+1-0.4-0.5=0.8$$

$$P(B\cap(A\cup\bar{B}))=P(A\cap B\cup B\cap\bar{B})=P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})$$
$$=1-P(\bar{A})-P(A\bar{B})=1-0.3-0.5=0.2$$

故 $P(B|A\cup\bar{B})=\frac{P(B\cap(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}$

15、设钥匙掉在宿舍、教室、路上的事件分别为 B_1、B_2、B_3
设找到钥匙的事件为A

$P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=1$ 且 $B_iB_j=\phi\ (\forall i\neq j)$

则 $\bigcup_{i=1}^{3}B_i=\Omega$，$B_i$ 构成分割

根据全概率公式 $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$

$$=50\%\times0.8+30\%\times0.3+20\%\times0.1$$
$$=0.51$$

18、设 A="答对题"，B_1="知道正确答案" B_2="胡乱猜测"。
显然有 $P(A|B_1)=1$，$P(A|B_2)=\frac{1}{4}$

(1) 已知 $P(B_1)=P(B_2)=0.5$ 则

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)}=\frac{1\times0.5}{1\times0.5+\frac{1}{4}\times0.5}=0.8$$

(2) 已知 $P(B_1)=0.2$ $P(B_2)=0.8$ 则

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)}=\frac{1\times0.2}{1\times0.2+\frac{1}{4}\times0.8}=0.5$$

19. 设 A="任选一人是色盲"，B_1="任选一人是男人" B_2="任选一人是女人"

则 $P(B_1)=\frac{22}{43}$，$P(B_2)=\frac{21}{43}$

已知：$P(A|B_1)=\frac{1}{20}$ $P(A|B_2)=\frac{1}{400}$

则 $P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)}=\frac{\frac{1}{20}\times\frac{22}{43}}{\frac{1}{20}\times\frac{22}{43}+\frac{1}{400}\times\frac{21}{43}}$

$$=\frac{20\times22}{20\times22+21}=\frac{440}{461}$$

22. 设 A_i 为"第 i 次传球时由甲传出"

显然 A_i 与 $\overline{A_i}$ 是对 Ω 的分割

$$P(A_{i+1}) = P(A_{i+1}|A_i)P(A_i) + P(A_{i+1}|\overline{A_i})P(\overline{A_i}) \quad \forall i \geq 1$$

而 $P(A_{i+1}|A_i)=0$, $P(A_{i+1}|\overline{A_i}) = \frac{1}{m-1}$

故 $P(A_{i+1}) = \frac{1}{m-1}P(\overline{A_i}) = \frac{1}{m-1}(1-P(A_i))$

$$\Rightarrow P(A_{i+1}) - \frac{1}{m} = -\frac{1}{m-1}\left(P(A_i) - \frac{1}{m}\right)$$

考虑到 $P(A_1)=1$ 故

$$P(A_n) - \frac{1}{m} = \left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-1}\left(P(A_1) - \frac{1}{m}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-1}\frac{m-1}{m} = (-1)^{n-1}\frac{1}{(m-1)^{n-2}m} \quad (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow P(A_n) = (-1)^{n-1}\frac{1}{m(m-1)^{n-2}} + \frac{1}{m} \quad (n \geq 2)$$

综上：

$$P(A_n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^{n-1}\frac{1}{m(m-1)^{n-2}} + \frac{1}{m}, & n \geq 2 \end{cases}$$

26. 用数学归纳法证明，设 $A_{n,b,r}$ 表示初始盒子有 b 个黑，r 个红，第 n 次摸球摸出黑球

对 n 归纳

$n=1$ $A_{1,b,r} = \frac{b}{b+r}$ $\forall b,r$ 成立

假设 $n \leq k$ 时均有 $A_{n,b,r} = \frac{b}{b+r}$ $\forall b,r$ 成立，

则 $n=k+1$ 时

设 B 为第一次摸球摸出黑球，B 与 $\overline{B}$ 构成 Ω 分割

$$P(A_{k+1,b,r}) = P(A_{k,b,r}|B)P(B) + P(A_{k,b,r}|\overline{B})P(\overline{B})$$

$$= P(A_{k,b+c,r}) \times \frac{b}{b+r} + P(A_{k,b,r+c}) \times \frac{r}{b+r}$$

根据归纳假设 $P(A_{k,b+c,r}) = \frac{b+c}{b+c+r}$, $P(A_{k,b,r+c}) = \frac{b}{b+c+r}$

$$\text{则 } P(A_{k+1,b,r}) = \frac{b+c}{b+c+r}\frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+c+r}\frac{r}{b+r}$$

$$= \frac{b(b+c+r)}{(b+r)(b+c+r)} = \frac{b}{b+r}$$

即 $n=k+1$ 也成立

综上：第 k 次取到黑球的概率是 $\frac{b}{b+r}$

27. 设 $A_{a,b,n}$ 为罐中 a 个白，b 个黑，n 个红时取球，白球比黑球出现得早

B_1、B_2、B_3 为第一次取取出白、黑、红

$$\text{则 } P(A_{a,b,n}) = P(A_{a,b,n}|B_1)P(B_1) + P(A_{a,b,n}|B_2)P(B_2) + P(A_{a,b,n}|B_3)P(B_3)$$

$$= 1 \times \frac{a}{a+b+n} + 0 \times \frac{b}{a+b+n} + P(A_{a,b,n-1}) \times \frac{n}{a+b+n}$$

$$= \frac{1}{a+b+n}\left(a + nP(A_{a,b,n-1})\right)$$

而 $P(A_{a,b,0}) = \frac{a}{a+b}$，假设 $\forall k \leq n-1$ 有 $P(A_{a,b,i}) = \frac{a}{a+b}$

则 $k=n$ 时 $P(A_{a,b,n}) = \frac{1}{a+b+n}(a + nP(A_{a,b,n-1})) = \frac{1}{a+b+n}\left(a + \frac{an}{a+b}\right) = \frac{a}{a+b}$

即 $\forall n \geq 0$ $P(A_{a,b,n}) = \frac{a}{a+b}$，所以白球比黑球出现得早的概率为 $\frac{a}{a+b}$，与 n 无关