2017 年秋季《高等微积分 1》期末考试参考解答

本试卷分两页, 共七道题, 各题的分值如下: 第 1, 2, 5, 6 题每小问 5 分; 第 3, 7 题第一小问 10 分, 第二小问 5 分; 第 4 题 15 分. 注意, 对于解答题, 不能只写答案, 需要给出推导过程.

1 计算极限.

(1) 给定正数 α, 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$.

(2) 给定 $a>0$, 求极限 $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$.

解. (1) 利用 $\frac{?}{\infty}$ 型洛必达法则, 可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

共 5 分, 不设中间分.

(2) 利用 Heine 定理以及导数的定义, 可得

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=(a^x)'|_{x=0}=\ln a.$$

共 5 分, 计算过程 3 分, 答案 2 分. □

2 (1) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha+\ln n}$ 的收敛性, 其中 α 是给定的正数.

(2) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ 的收敛性, 其中 $a>1$ 是给定的实数.

(3) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 的收敛发散性.

解. (1) 由第 1 题第 (1) 小问的结论, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^\alpha+\ln n}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\ln n}{n^\alpha}}=1,$$

由比较定理可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha+\ln n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 的收敛发散性相同: 当 $\alpha>1$ 时收敛; 当 $0<\alpha\le 1$ 时发散.

共 5 分, 用比较定理得出与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 的收敛性相同 3 分, 答案 2 分.

(2) 由第 1 题第 (2) 小问的结论, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a>0,$$

由比较定理可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 一样, 是发散的.

共 5 分, 用比较定理得出与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的收敛性相同 3 分, 答案 2 分.

(3) 由二倍角公式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1-\cos 2n}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{2n}.\quad (1\text{ 分})$$

首先, 正项数列 $\{\frac{1}{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 递减且收敛到零, 则由 Leibniz 法则, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$ 收敛(1 分). 其次, 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{2n},$$

其中 $\theta=\pi+2$. 数列 $\{\cos n\theta\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列满足

$$|\cos\theta+\ldots+\cos n\theta|=\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta-\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right|\le\frac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|},\quad \forall n\in\mathbf{Z}_+,$$

是有界的; 数列 $\{\frac{1}{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且趋于零. 这样, 由 Dirichlet 判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{2n}$ 是收敛的(2 分).

结合这两方面, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛(1 分). □

3 (1) 计算不定积分

$$\int \frac{x^2}{x^4+5x^2+4}dx.$$

(2) 计算无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+4}dx.$$

解. (1)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^4+5x^2+4}dx =&\frac{1}{3}\int\left(\frac{4}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx \quad \text{(4 分)}\\ =&\frac{2}{3}\int\frac{d(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+1}dx\\ =&\frac{2}{3}\arctan\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\arctan x+C \quad \text{(每个不定积分3 分)}.\end{aligned}$$

共 10 分, 化成两个有理式的代数和 4 分; 这两个有理式的不定积分每个 3 分.

(2) 利用无穷积分的定义, 以及 Newton-Leibniz 公式, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+5x^2+4}dx &= \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{x^2}{x^4+5x^2+4}dx\\ &=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\arctan\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\arctan x\right)\Big|_0^A \quad \text{(2 分)}\\ &=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\arctan\frac{A}{2}-\frac{1}{3}\arctan A\right)\\ &=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6} \quad \text{(3 分)}.\end{aligned}$$

□

4 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 满足

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}, \quad \forall x\neq 0.$$

求 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近展开至二阶的带皮亚诺余项的泰勒公式, 即要求余项是 $o(x^2)$.

解. 由 f 在 $x=0$ 处连续, 有

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x}=1, \quad \text{(3 分)}.$$

由此可知

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}\cdot\frac{x}{e^x-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\\
&=(-\frac{1}{2})\cdot 1 = -\frac{1}{2},\quad \text{(3 分)}.
\end{aligned}
$$

下面来计算 $f''(0)$. 首先, 有

$$
f'(x) = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2},\quad \forall x\neq 0,\quad \text{(3 分)}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
f''(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}+\frac{1}{2}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x+\frac{1}{2}(e^x-1)^2}{x^3}\cdot\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^2\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x+\frac{1}{2}(e^x-1)^2}{x^3}.
\end{aligned}
$$

利用带 Peano 余项的 Taylor 公式, 有

$$
\begin{aligned}
&e^x-1-xe^x+\frac{1}{2}(e^x-1)^2\\
=&x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2\\
=&\frac{1}{6}x^3+o(x^3),
\end{aligned}
$$

代入 $f''(0)$ 的表达式, 即得 $f''(0)=\frac{1}{6}$, ($f''(0)$ 的计算共 5 分).

这样, f 在 $x=0$ 处有二阶导数, 由带 Peano 余项的 Taylor 公式, 当 $x\to 0$ 时有

$$
\begin{aligned}
f(x) =&f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\\
=&1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+o(x^2),\quad \text{(1 分)}.
\end{aligned}
$$

□

5 设 $f(x)$ 是多项式, 即 $f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$, 其中 n 是正整数, $a_0,...,a_n$ 是实数.

(1) 证明: 无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx$$

收敛.

(2) 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-x^2}dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-x^2}dx.$$

(3) 假设已证明了 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$, 对正整数 m, 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2}dx$ 的值.

解. (1) 由于 $f(x)$ 是多项式, 则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)e^{-x^2}|}{e^{-|x|}}=\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{e^{x^2-|x|}}=0.$$

注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}dx = 2\lim_{A\to+\infty}(1-e^{-A})=2$$

是收敛的, 由比较定理的极限形式可知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)e^{-x^2}|dx$ 收敛, 即 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx$ 绝对收敛, 特别的, 该无穷积分收敛.

共 5 分, 不设中间分.

(2) 利用分部积分公式, 可得

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} f'(x)e^{-x^2}dx &= \left(f(x)e^{-x^2}\right)\Big|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} f(x)e^{-x^2}(-2x)dx\\ &=\frac{f(A)-f(-A)}{e^{A^2}}+2\int_{-A}^{A} xf(x)e^{-x^2}dx, \quad (3\text{ 分})\end{aligned}$$

对 $A\to+\infty$ 取极限, 即得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-x^2}dx &= \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f'(x)e^{-x^2}dx\\ &= \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{f(A)-f(-A)}{e^{A^2}}+2\int_{-A}^{A} xf(x)e^{-x^2}dx\right)\\ &=2\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-x^2}dx, \quad (2\text{ 分}).\end{aligned}$$

(3) 取 $f(x)=x^k(k\in\mathbf{Z}_+)$, 利用 (2) 的结论可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} kx^{k-1}e^{-x^2}dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1}e^{-x^2}dx,$$

即有递推式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-x^2}dx = \frac{k-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2}e^{-x^2}dx, \quad \forall k\ge 2, \quad (3\text{ 分}).$$

由此可得, 当 m 为正偶数时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2}dx = \frac{m-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{m-2}e^{-x^2}dx = \ldots = \frac{(m-1)!!}{2^{m/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{(m-1)!!}{2^{m/2}}\sqrt{\pi}; (1\text{ 分})$$

当 m 为正奇数时, 注意到 $x^m e^{-x^2}$ 是奇函数, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} x^m e^{-x^2}dx = 0, \quad (1\text{ 分}).$$

综上所述, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2}dx = \begin{cases}\frac{(m-1)!!}{2^{m/2}}\sqrt{\pi}, & \text{如果} m \text{ 是正偶数},\\ 0, & \text{如果} m \text{ 是正奇数}.\end{cases}$$

$\square$

6 (1) 给定实数 $a>1$, 计算不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{a+\sin x}$.

(2) 给定实数 $a>1$, 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\sin x}$.

(3) 给定实数 $b>\sqrt{2}$, 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{b+\cos x+\sin x}$.

解. (1) 利用万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$, 可得

$$\begin{aligned}
&\int\frac{dx}{a+\sin x}=\int\frac{2\frac{dt}{1+t^2}}{a+\frac{2t}{1+t^2}} \quad \textcolor{red}{(1\ 分)}\\
=&\frac{2}{a}\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{a})^2+(1-\frac{1}{a^2})}\\
=&\frac{2}{a}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}{1-\frac{1}{a^2}}\int\frac{d\frac{t+1/a}{\sqrt{1-1/a^2}}}{(\frac{t+1/a}{\sqrt{1-1/a^2}})^2+1} \quad \textcolor{red}{(2\ 分)}\\
=&\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{t+1/a}{\sqrt{1-1/a^2}}+C\\
=&\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{a\cdot\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{a^2-1}}+C. \quad \textcolor{red}{(2\ 分)}
\end{aligned}$$

(2) 令 $F(x)=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{a\cdot\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{a^2-1}}$, 它是 $\frac{1}{a+\sin x}$ 在区间 $[0,\pi)$ 上的原函数. 注意到

$$\lim_{x\to\pi-}F(x)=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

定义函数 $\widetilde{F}:[0,\pi]\to\mathbf{R}$ 为

$$\widetilde{F}(x)=\begin{cases}F(x), & 如果 x\in[0,\pi)\\ \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}, & 如果 x=\pi\end{cases}$$

则 $\widetilde{F}\in C([0,\pi])$ 且是 $\frac{1}{a+\sin x}$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的原函数(1 分). 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^\pi\frac{dx}{a+\sin x}=\widetilde{F}(x)|_0^\pi=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}-\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}. \quad \textcolor{red}{(1\ 分)}$$

类似的, 有

$$\begin{aligned}
&\int\frac{dx}{a-\sin x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{a\cdot\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{a^2-1}}+C, \quad \textcolor{red}{(1\ 分)}\\
&\int_0^\pi\frac{dx}{a-\sin x}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}-\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{-1}{\sqrt{a^2-1}}. \quad \textcolor{red}{(1\ 分)}
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\sin x}&=\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\sin x}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{a+\sin x}\\&=\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\sin x}+\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\sin(x+\pi)}\\&=\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\sin x}+\int_0^{\pi}\frac{dx}{a-\sin x}\\&=\left(\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}-\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right)+\left(\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}-\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{-1}{\sqrt{a^2-1}}\right)\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\quad \text{(1 分)}\end{aligned}$$

(3) 利用第 (2) 问的结果, 有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{b+\cos x+\sin x}&=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{b+\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}\quad \text{(1 分)}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\frac{b}{\sqrt{2}}+\sin(x+\frac{\pi}{4})}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{9}{4}\pi}\frac{dx}{\frac{b}{\sqrt{2}}+\sin x}\quad \text{(1 分)}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\frac{b}{\sqrt{2}}+\sin x}\quad \text{(1 分)}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{(\frac{b}{\sqrt{2}})^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{b^2-2}}\quad \text{(2 分)}.\end{aligned}$$

□

7 (1) 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是连续映射, 且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ 存在. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx.$$

(2) 设 $g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 都是连续映射, 且 h 是周期为 $T>0$ 的周期函数, 即对任何 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $h(x+T)=h(x)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T g(x)h(nx)dx=\frac{1}{T}\left(\int_0^T g(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^T h(x)dx\right).$$

解. (1) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是 f 的变上限积分, 由于 f 连续, 对任何 $x\geq 0$ 有 $F'(x)=f(x)$. 利用定积分的换元公式, 以及 $\frac{?}{\infty}$ 型洛必达法则, 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(t)\frac{dt}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{F(n)}{n} \quad (5\text{ 分})\\ =&\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{1} \quad (2\text{ 分})\\ =&\lim_{x\to+\infty}f(x)=L. \quad (3\text{ 分})\end{aligned}$$

(2) 定义 $A_n=\int_0^T g(x)h(nx)dx$, 则

$$\begin{aligned}A_n=&\sum_{i=1}^n\int_{\frac{(i-1)T}{n}}^{\frac{iT}{n}} g(x)h(nx)dx \quad (1\text{ 分})\\ =&\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT} g(\frac{t}{n})h(t)\frac{dt}{n}\\ =&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT} g(\frac{t}{n})h(t)dt \quad (1\text{ 分}).\end{aligned}$$

定义

$$B_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT} g(\frac{iT}{n})h(t)dt,$$

我们先来证明 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}B_n$. 由于 $g\in C([0,T])$, 则 g 在 $[0,T]$ 上一致连续, 即对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任何 $x_1,x_2\in[0,T]$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 则有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\epsilon$. 这样, 对任何 $n>\frac{T}{\delta}$, 有

$$|g(\frac{t}{n})-g(\frac{iT}{n})|<\epsilon,\quad \forall t\in[(i-1)T,iT],$$

由此可得

$$\begin{aligned}&|A_n-B_n|=|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}\left(g(\frac{t}{n})-g(\frac{iT}{n})\right)h(t)dt|\\ \leq&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}|g(\frac{t}{n})-g(\frac{iT}{n})|\cdot|h(t)|dt<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}\epsilon\cdot|h(t)|dt\\ =&\frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^n\int_{(i-1)T}^{iT}|h(t)|dt=\frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^n\int_0^T|h(t)|dt=\left(\int_0^T|h(t)|dt\right)\cdot\epsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n$,(1 分).

其次, 利用 g 在 $[0,T]$ 上 Riemann 积分的定义, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(\frac{iT}{n})\cdot\frac{T}{n} = \int_0^T g(x)dx, \quad \text{(1 分)}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} B_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\frac{iT}{n})\int_{(i-1)T}^{iT} h(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\frac{iT}{n})\int_0^T h(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\frac{iT}{n})\right)\cdot\left(\int_0^T h(t)dt\right) \\
&=\frac{1}{T}\left(\int_0^T g(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^T h(t)dt\right). \quad \text{(1 分)}
\end{aligned}$$

结合这两部分的结论, 即有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T g(x)h(nx)dx = \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^T h(x)dx\right).$$

□