2018 年春季《高微 2》期中考试

2018 年 4 月 21 日 $8:00-10:00$

本试卷分两页, 共七道试题.

1 (每小问 5 分) 定义函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{如果}(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{如果}(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

设 $\mathbf{q}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 是单位长度的向量.

(1) 对每点 $(x,y)\neq(0,0)$, 计算方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{(x,y)}$.

(2) 判断方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{(0,0)}$ 是否存在? 请说明理由.

(3) 判断 f 在点 $(0,0)$ 处是否连续, 请说明理由.

2 设 $F\in C^2(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, $F(0,0)=0$ 且 $F_y(0,0)\neq 0$. 由隐函数定理可知, 在 $(0,0)$ 附近, 由方程 $F(x,y)=0$ 可把 y 表示成 x 的隐函数 $y=y(x)$.

(1)(10 分) 求 $y''(x)$, 要求把答案用 F 的偏导函数与高阶偏导函数表示.

(2)(5 分) 设 F 在 $(0,0)$ 处的泰勒公式为

$$F(x,y)=2x+y+x^2-xy+3y^2+o(x^2+y^2),$$

求上述隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺余项的泰勒公式, 要求展开至二阶, 即余项形如 $o(x^2)$.

3 (每小问 5 分) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 处处有各个偏导, 正数 M 满足如下条件:

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\leq M,\quad \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\leq M,\quad \forall (x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

(1) 证明: 对任何两点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2), 有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \le M\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right).$$

(2) 证明: f 是连续函数.

4 设 $f(x, y) = (2 + \sin x) \cdot \sin y$, 令 $D = \{(x, y) | 0 < x, y < 2\pi\}$.

(1)(5 分) 求出 f 在 D 上的所有临界点.

(2)(10 分) 判断上述每个临界点是否为 f 的极值点. 如果是的话, 请指出它是极大值点还是极小值点.

5 (1)(7 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 的收敛半径, 其中 $(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1$ 表示双阶乘.

(2)(8 分) 证明: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数.

6 设 $f(x, y, z) = x + y + z + xyz$, 令 $B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

(1)(3 分) 证明: f 在 B 上有最大值.

(2)(12 分) 利用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法求出 f 在 B 上的最大值.

7 (1)(7 分) 把上半平面记作 $\mathbf{R}^2_+ = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \ge 0\}$. 设 $h \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, 且对任何 $(x, y) \in \mathbf{R}^2_+$ 有 $h(x_0, 0) \le h(x, y)$. 证明:

$$\frac{\partial h(x_0, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h(x_0, 0)}{\partial y} \ge 0.$$

(2)(8 分) 设 $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, 令 $D = \{(x, y) | g(x, y) \ge 0\}$. 设 $g(x_0, y_0) = 0$, $g_y(x_0, y_0) \ne 0$, 且对任何 $(x, y) \in D$ 有 $f(x_0, y_0) \le f(x, y)$. 证明: 存在非负实数 λ, 使得

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) - \lambda g_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) - \lambda g_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$