作业 1

Problem 1

1-1 正确

1-2 错误

反例：$F: T$，$G: p$，$\rho = \{p \mapsto true\}$

则 $[\![F \to G]\!]_\rho = true$

因此 $F \to G$ 是可满足的

1-3 正确

1-4 错误

原因：反证，假设一定可以在有限时间内判定一阶逻辑公式 φ 和 $\neg\varphi$ 是否可满足，则有以下情况

① φ 不可满足，则 φ 不是有效的

② φ 可满足而 $\neg\varphi$ 不可满足，则可推出 φ 是有效的

③ φ 可满足而 $\neg\varphi$ 也可满足，则在 $\neg\varphi$ 为真的条件下 φ 为假，因此 φ 不是有效的

因此一定可以在有限时间判定 φ 是否有效，这与一阶逻辑是半可判定的矛盾，故错误

Problem 2

2-1 真值表

P	Q	R	$Q\to R$	$P\to(Q\to R)$	$\neg P\vee Q$	$\neg P\vee R$	$(\neg P\vee Q)\to(\neg P\vee R)$	原式
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

则根据真值表，F有效. 下用 S_{PL} 证明

包含 $Q, P \vdash Q, R$　　包含 $Q, P, R \vdash R$

包含 $P\to(Q\to R), P \vdash P, R$　　包含 $Q, P \vdash P, R$　　左蕴涵 $Q, P, Q\to R \vdash R$

左否定 $P\to(Q\to R), \neg P, P \vdash R$　　左蕴涵 $P\to(Q\to R), Q, P \vdash R$

左析取 $P\to(Q\to R), \neg P\vee Q, P \vdash R$

右否定 $P\to(Q\to R), \neg P\vee Q \vdash \neg P, R$

右析取 $P\to(Q\to R), \neg P\vee Q \vdash \neg P\vee R$

右蕴涵 $P\to(Q\to R) \vdash (\neg P\vee Q)\to(\neg P\vee R)$

右蕴涵 $\vdash (P\to(Q\to R))\to((\neg P\vee Q)\to(\neg P\vee R))$

2-2

令 ρ 是 $\Gamma \vdash P \to Q, \Delta$ 的任何一个赋值

① 若 $[\![\Gamma]\!]_\rho = false$，则 $[\![\Gamma \vdash P \to Q, \Delta]\!]_\rho = true$

② 若 $[\![\Gamma]\!]_\rho = true$ 且 $[\![P]\!]_\rho = true$

则根据条件是有效式，$[\![Q]\!]_\rho = true$ 或 $[\![\Delta]\!]_\rho = true$，则 $[\![P \to Q]\!]_\rho = true$ 或 $[\![\Delta]\!]_\rho = true$

③ 若 $[\![\Gamma]\!]_\rho = true$ 且 $[\![P]\!]_\rho = false$

则 $[\![P \to Q]\!]_\rho = true$

综合以上 ①-③，均有结论为真，则结论为有效式，也即右蕴含规则是可靠的

2-3 ①考察 $x \mapsto \circ$

$[\![g(x)]\!]_{\mathcal{M},\rho} = \mathcal{I}(g)([\![x]\!]_{\mathcal{M},\rho}) = \mathcal{I}(g)(\circ) = \bullet$

$[\![f(g(x), x)]\!]_{\mathcal{M},\rho} = \mathcal{I}(f)([\![g(x)]\!]_{\mathcal{M},\rho}, [\![x]\!]_{\mathcal{M},\rho}) =$

$\mathcal{I}(f)(\bullet, \circ) = \bullet$

由 $(\bullet, \circ) \in \mathcal{I}(p)$ 知 $p(f(g(x), x), x) = true$

②考察 $x \mapsto \bullet$

$[\![g(x)]\!]_{\mathcal{M},\rho} = \mathcal{I}(g)([\![x]\!]_\rho) = \mathcal{I}(g)(\bullet) = \circ$

$[\![f(g(x), x)]\!]_{\mathcal{M},\rho} = \mathcal{I}(f)([\![g(x)]\!]_{\mathcal{M},\rho}, [\![x]\!]_{\mathcal{M},\rho})$

$= \mathcal{I}(f)(\circ, \bullet) = \bullet$

由 $(\bullet, \bullet) \in \mathcal{I}(p)$ 知 $p(f(g(x), x), x) = true$

综合 ①②　$\forall x.\ p(f(g(x), x), x) = true$

2-4

1. pf:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x.\,p(x)\to q(x),\ p(c)\vdash p(c)}\,\text{包含}}{\exists x.\,p(x)\to q(x),\ \forall y.\,p(y)\vdash p(c)}\,\text{左全称}}{\exists x.\,p(x)\to q(x),\ \forall y.\,p(y)\vdash \exists z.\,p(z)}\,\text{右存在}}{\exists x.\,p(x)\to q(x)\vdash (\forall y.\,p(y))\to \exists z.\,p(z)}\,\text{右蕴涵}$$

2. pf:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(c)\vdash p(c),\ q(c)}\,\text{包含}}{\top\vdash p(c),\ p(c)\to q(c)}\,\text{右蕴涵}}{\top\vdash p(c),\ \exists x.\,p(x)\to q(x)}\,\text{右存在}}{\top\vdash \forall y.\,p(y),\ \exists x.\,p(x)\to q(x)}\,\text{右全称}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q(c),\ p(c)\vdash q(c)}\,\text{包含}}{q(c)\vdash p(c)\to q(c)}\,\text{右蕴涵}}{q(c)\vdash \exists x.\,p(x)\to q(x)}\,\text{右存在}}{\exists z.\,q(z)\vdash \exists x.\,p(x)\to q(x)}\,\text{左存在}}{(\forall y.\,p(y))\to \exists z.\,q(z)\vdash \exists x.\,p(x)\to q(x)}\,\text{左蕴涵}$$