离散数学 第三次作业

1. (1) $P \vee \neg P$ 合取范式 $P \vee \neg P$

析取范式 $P \vee \neg P$

主析取范式 $\vee_{0,1}$

主合取范式 空公式

在任何解释下均为真

(3) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow \neg Q)$

$= \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q))$

$= \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \vee Q)$

$= P \wedge Q \vee P \vee Q$

$= (P \wedge Q) \vee P \wedge (Q \vee \neg Q) \vee Q \wedge (P \vee \neg P)$

$= (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$= \vee_{1,2,3}$

$= \wedge_3$

$= P \vee Q$

合取范式 $P \vee Q$

析取范式 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

主合取范式 $\wedge_3$

主析取范式 $\vee_{1,2,3}$

在 $\begin{cases} P=T \\ Q=T \end{cases}$ $\begin{cases} P=T \\ Q=F \end{cases}$ $\begin{cases} P=F \\ Q=T \end{cases}$ 解释下为真

(5) $P \wedge (Q \vee (\neg P \wedge R)) = (P \wedge Q) + (P \wedge \neg P \wedge R) = P \wedge Q$

$= P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)$

$= (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

$= \vee_{6,7}$

$= \wedge_{2,3,4,5,6,7}$

$= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

$\wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

析取范式 $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

合取范式 $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge$

$(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

主合取范式 $\wedge_{2,3,4,5,6,7}$

主析取范式 $\vee_{6,7}$

在 $\begin{cases} P=T \\ Q=T \\ R=T \end{cases}$ $\begin{cases} P=T \\ Q=T \\ R=F \end{cases}$ 解释下为真

2. (1) $A \to B$ 永真法：$(P \wedge Q) \to (P \to Q) = \neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q)$

$= \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee Q$

$= (\neg Q \vee Q) \vee \neg P = T \vee \neg P = T$

$A \wedge \neg B$ 永假法：$(P \wedge Q) \wedge \neg (P \to Q) = P \wedge Q \wedge \neg(\neg P \vee Q)$

$= P \wedge Q \wedge P \wedge \neg Q$

$= (Q \wedge \neg Q) \wedge P = F \wedge P = F$

解释法：若 $P \wedge Q = T$ 则有 $P = T$ 且 $Q = T$. 于是 $P \to Q$ 必为真，

故重言蕴涵式成立

(2) $A\to B$ 永真法 $(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$

$= (\neg P\vee(\neg Q\vee R))\to(\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee R))$

$= (\neg P\vee\neg Q\vee R)\to((P\wedge\neg Q)\vee\neg P\vee R)$

$= (\neg P\vee\neg Q\vee R)\to((P\vee\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg P\vee R))$

$= (\neg P\vee\neg Q\vee R)\to(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$= T$

$A\wedge\neg B$ 永假法 $(P\to(Q\to R))\wedge\neg((P\to Q)\to(P\to R))$

$= (\neg P\vee(\neg Q\vee R))\wedge\neg(\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee R))$

$= (\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge\neg((P\wedge\neg Q)\vee\neg P\vee R)$

$= (\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge\neg(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$= F$

解释法：若 $P\to(Q\to R)$ 为真

① 设P为真，则 $Q\to R$ 必为真

i) 若Q为真则R必为真，由此 $P\to Q$ 与 $P\to R$ 均为真

由此 $(P\to Q)\to(P\to R)$ 为真

ii) 若Q为假则 $P\to Q$ 为假，由此 $(P\to Q)\to(P\to R)$ 为假

② 设P为假，则 $P\to Q$、$P\to R$ 均为真，由此 $(P\to Q)\to(P\to R)$ 为真

综合以上，$P\to(Q\to R)$ 为真则 $(P\to Q)\to(P\to R)$ 为真

这就证明了重言蕴涵式

3、(1) $(P\to Q)\to((P\wedge R)\to Q)$

$= (\neg P\vee Q)\to(\neg(P\wedge R)\vee Q)$

$= \neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee\neg R\vee Q)$

$= (P\wedge\neg Q)\vee\neg P\vee\neg R\vee Q$

$= (P\vee\neg P\vee\neg R\vee Q)\wedge(\neg Q\vee Q\vee\neg R\vee\neg P) = T\wedge T = T$

故推理式正确

(2) $(P\to Q)\to(P\to(Q\vee R))$

$= (\neg P\vee Q)\to(\neg P\vee Q\vee R)$

$= \neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee Q\vee R)$

$= \neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee Q)\vee R = T\vee R = T$

故推理式正确

(3) $P\to(\neg P\vee Q)$

$= \neg P\vee\neg P\vee Q$

$= \neg P\vee Q$

发现 $P\to(\neg P\vee Q)$ 的取值与P、Q变量有关，我们取 $P=T$，$Q=F$，

则左端为真，右端 $=\neg P\vee Q$ 为假，这说明推理式不正确

(4) $((P\vee Q)\wedge(P\to Q))\to(Q\to P)$

$= \neg((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q))\vee(\neg Q\vee P)$

$= \neg(P\vee Q)\vee\neg(\neg P\vee Q)\vee(P\vee\neg Q)$

$= (\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee P\vee\neg Q = P\vee\neg Q$

发现 $((P\vee Q)\wedge(P\to Q))\to(Q\to P)$ 取值与P、Q变量有关，我们取 $P=F$，$Q=T$

则左端 $P\vee Q=T$，$P\to Q=T$，整体为真，而右端 $=Q\to P=F$，这说明推理式不正确

4、(1) $P \vee Q,\ P \to S,\ Q \to R \Rightarrow S \vee R$

证明：

(1)	$P \vee Q$	前提引入
(2)	$\neg P \to Q$	(1) 置换
(3)	$Q \to R$	前提引入
(4)	$\neg P \to R$	(2)(3) 三段论
(5)	$P \to S$	前提引入
(6)	$\neg S \to \neg P$	(5) 置换
(7)	$\neg S \to R$	(4)(6) 三段论
(8)	$S \vee R$	(7) 置换

(2) $\neg P \vee Q,\ \neg Q \vee R,\ R \to S \Rightarrow P \to S$

证明：

(1)	$\neg P \vee Q$	前提引入
(2)	$P \to Q$	(1) 置换
(3)	$\neg Q \vee R$	前提引入
(4)	$Q \to R$	(3) 置换
(5)	$P \to R$	(2)(4) 三段论
(6)	$R \to S$	前提引入
(7)	$P \to S$	(5)(6) 三段论