1 矩阵性质练习

1. 证明： A 是 $m \times n$的矩阵，那么矩阵A的秩为一的充分必要条件为: A 可以写成 $A = BC$, 这里B是$m \times 1$的非零矩阵，C是$1 \times n$的非零矩阵。

2. 证明： 任意一个方阵可以，并且唯一的表为形式, $A = B + C$. 这里B是对称矩阵，而C是反对称矩阵。这里对称矩阵的定义是 $A^T = A$, 反对称矩阵的定义是$A^T = -A$.

3. 矩阵乘法的练习：

a): 计算

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n \tag{1}$$

b): A是任意的一个2×2的矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，那么$A$满足下列矩阵方程

$$A^2 + a_1 A + a_2 I = 0 \tag{2}$$

这里I是一个2×2的单位矩阵。把a_1 和a_2用 矩阵A的分量表示。如果我们定义一个矩阵的操作叫做求迹 $Tr(A) = a + d$ （也就是把对角上的元素加起来）. 你能否把 a_1 和 a_2表示成 $Tr(A)$ 和 $Tr(A^2)$的函数?

c): A是任意的一个3×3的矩阵 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{bmatrix}$，那么$A$满足下列矩阵方程

$$A^3 + a_1 A^2 + a_2 A + a_3 I = 0 \tag{3}$$

这里I是3×3的单位矩阵。 请把a_1, a_2 和 a_3 用 矩阵A的分量表示。同样的，你能否把 a_i 用 $Tr(A)$, $Tr(A^2)$, 还有 $Tr(A^3)$ 表示出来?

d): (这是一个附加题) 对于任何一个 $n \times n$ 的矩阵 A，我们有

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \ldots + a_n I = 0 \tag{4}$$

你能否可以把a_i用矩阵A^m的迹来表示（提示：试一下用对角矩阵来猜一下结果）

4. 证明: R^n的任意子空间一定是某个矩阵的零空间。

5. 证明: A, B 都是$m \times n$矩阵，证明: $N(A) = N(B)$ 当且仅当存在可逆矩阵T, 使得 $B = TA$.

6. 对于$n \times n$的矩阵A, 求证

1. $A^2 = A$ 当且仅当 $rank(A) + rank(I - A) = n$.
2. $A^2 = I$ 当且仅当 $rank(I + A) + rank(I - A) = n$.

2 投影矩阵

7. 证明： A 是一个 $m \times n$的矩阵，那么$A^T A$ 可逆的充分必要条件是: a) $m \geq n$ 和 b): A 的秩等于n.

8. 我们考虑R^m中的一个线性子空间$C(A)$。 如果我们选取这个空间的一组基$(v_1, \ldots, v_n)$， 并且用来构造一个矩阵 $A = [v_1, \ldots, v_n]$, 那么关于$C(A)$的 投影矩阵是 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$, 证明 a): $P^2 = P$, $P = P^T$. b): 如果我们选取$C(A)$的另外一组基$(v_1^{'}, \ldots, v_n^{'})$, 那么 P怎么变化(利用题6)?

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, a)： 计算投影矩阵。b)： 计算一个向量 $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}$ 在$C(A)$(A的列向量子空间上)的投影.

10. 我们收集到一组数据 $(y_i, t_i), i = 1, \ldots, 4$, i.e $(5, 2), (7, 3), (11, 4), (12, 5)$. 假设$y$和$t$的 关系是线性的$y = C + Dt$. 根据我们的数据，用最小二乘法来决定系数C和D.

11. 给定R^m中的一组正交线性无关向量组$Q = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$。如果$b$是和上面的向量组是线性无关的，用投影矩阵的办法证明向量

$$B = b - \frac{A_1A_1^T}{A_1^TA_1}b - \frac{A_2A_2^T}{A_2^TA_2}b - \ldots - \frac{A_nA_n^T}{A_n^TA_n}b \tag{5}$$

是和向量组Q是正交的。

12. 给定下面一组向量

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{6}$$

用$Gram - Schmit$办法找出一组正交归一基。

13. 证明： 正交归一基之间的变换矩阵是一个正交矩阵。

14. 计算QR分解

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$