《高等微积分 2》第十三周作业

1 定义曲面 S 为

$$S = \{(x,y,z)|x^2+y^2 \le 1, x+y+z=1\},$$

取指向 z 轴正方向的定向 (或者用课本上的术语, 选定了曲面的上侧).

(1) 计算第二型曲面积分

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy.$$

(2) 设 S 的边界为 ∂S, 赋予边界的正定向. 计算第二型曲线积分

$$\int_{\partial S} z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz.$$

2 设 $C \subset \mathbf{R}^2$ 是光滑的闭曲线, 取逆时针方向 (定向). 假设 $(0,0) \notin C$, 计算第二型曲线积分

$$\oint_C \frac{-(x^2y+y^3)dx + (x^3+xy^2)dy}{(x^2+y^2)^2}.$$

第 3 题需要用到如下事实: 设 f 在矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 且有连续的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}$. 对每个 $x \in [a,b]$, 定义函数 $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$, 则有 $g'(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy$.

3 给定 $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$. 对于正数 r, 令 $C(r) = \{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2\}$. 设 f 在区域 $D(R) = \{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le R^2\}$ 上是光滑函数, 定义函数 $g(r)$ 为如下的第一型曲线积分

$$g(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{C(r)} f(x,y)ds, \quad \forall 0 < r \le R,$$

其中 ds 表示弧长微元.

(1) 利用前述事实, 证明: 对任何 $0 < r \le R$, 有

$$g'(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{C(r)} -f_y(x,y)dx + f_x(x,y)dy,$$

其中 $C(r)$ 取逆时针定向.

(2) 设 $x_0^2 + y_0^2 > R^2$. 计算 $\frac{1}{2\pi R}\int_{C(R)} \ln(x^2+y^2)ds$.

4 设 $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$ 是单位球面, 取指向外面的定向. 对给定的非负整数 k, 计算第二型曲面积分

$$\iint_S z^k(xdydz + ydzdx + zdxdy) \text{ 或等价的 } \iint_S z^k(xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy)$$

5 设 S 为曲面

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2,$$

取指向外面的定向. 计算第二型曲面积分

$$\iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

6 设 $S \subseteq \mathbf{R}^3$ 是 C^1 光滑的闭曲面, 取指向外面的定向 (或用课本上的术语, S 是它所围成区域的外侧面), $(0,0,0) \notin S$. 计算第二型曲面积分

$$\iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{3/2}},$$

其中 a, b, c 是给定的正数.

7 设 $S \subset \mathbf{R}^3$ 是封闭的光滑曲面, V 是由 S 围成的三维有界闭区域 (称之为 S 的内部). 设 $f(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 都是 V 上的 C^1 光滑函数, 且 P, Q, R 在 S 上恒等于 0. 证明:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) e^{f(x,y,z)}dxdydz = -\iiint_V \left(P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z}\right) e^{f(x,y,z)}dxdydz.$$

8 对于函数 $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, 如果极限

$$\lim_{M\to\infty} \iiint_{x^2+y^2+z^2\le M^2} f(x,y,z)dxdydz$$

存在, 则把上述极限记作 $\iiint_{\mathbf{R}^3} f(x,y,z)dxdydz$, 称为 f 在 $\mathbf{R}^3$ 上的无穷积分.

(1) 设 $P, Q: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ 是 C^1 光滑函数. 证明: 对正数 M, 有

$$\iint_{\partial B} P(x,y,z)e^{Q(x,y,z)}dy \wedge dz = \iiint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)e^{Q(x,y,z)}dV,$$

其中 $B = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq M^2\}$, ∂B 是 B 的边界, 取指向外面的定向.

(2) 证明: 对于三元多项式 $P(x,y,z)$, 有

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial P}{\partial x}e^{-x^2-y^2-z^2}dxdydz = 2\iiint_{\mathbf{R}^3} xP(x,y,z)e^{-x^2-y^2-z^2}dxdydz.$$