离散数学第十三周作业

1 (1) 不是函数，$1f1$，$1f2$ 不满足函数的条件

(2) 不是函数，$1f{-1}$，$1f1$，不满足函数的条件

(3) 是函数 ① 对任意 x, y_1, y_2　$xfy_1 \wedge xfy_2$

$\Rightarrow y_1 = x^2 \wedge y_2 = x^2$

$\Rightarrow y_1 = y_2$

② $dom(f) = R$

故 f 是函数

2. (1) 是函数，$dom(f) = \{1,2,3\}$　$ran(f) = \{<2,3>, <3,2>, <4,1>\}$

(2) 不是函数，$1f<2,3>$，$1f<3,4>$ 不满足函数的条件

(3) 是函数，$dom(f) = \{1,2,3\}$　$ran(f) = \{<2,3>\}$

3. (1) $f \cap g$ 不是函数，$f = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>\}$　$g = \{<1,1>, <2,3>, <3,2>\}$

$f \cap g = \{<1,1>\}$，$dom(f \cap g) = \{1\}$ 不满足函数的条件

(2) $f \cup g$ 不是函数，$f = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>\}$　$g = \{<1,2>, <2,2>, <3,3>\}$

$f \cup g = \{<1,1>, <1,2>, <2,2>, <3,3>\}$

则 $1(f \cup g)2$，$1(f \cup g)1$ 不满足函数的条件

4. $f(0) = 0$

$f[\{0\}] = \{0\}$

$f[\{0,2,4,6\ldots\}] = \{f(0), f(2), \ldots\} = \{0,1,2\ldots\} = N$

$f[\{1,3,5\ldots\}] = \{1\}$

$f^{-1}[\{2\}] = \{4\}$

$f^{-1}[\{3,4\}] = \{6,8\}$

6. (1) 不是满射，因 $f(x) \geq -16$，故 $(-\infty, -16)$ 无原象

不是单射，如 $f(5) = f(-3) = 0$，因此不是双射

(2) 不是满射，如 $\log_2 \frac{1}{2}$ 无原象

是单射，对任意 x, y_1, y_2　$y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x) \Rightarrow \log_2 x = y_1 \wedge \log_2 x = y_2$

而 $\log_2 x$ 为严格单调递增函数，故 $y_1 = y_2$

不是双射

(3) 不是满射，如 2 无原象

不是单射，$f(2) = f(4) = 0$

不是双射

(4) 不是满射，如 4 无原象

不是单射　$f(0) = f(3) = 0$

不是双射

7、 R是恒等关系是g是双射的充要条件

① 若R是恒等关系，对任意x

$$x\in A \Rightarrow [x]_R=\{x\} \Rightarrow g(x)=\{x\}$$

则 i) g是单射，因为对任意 x_1, x_2

$$g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow \{x_1\}=\{x_2\} \Rightarrow x_1=x_2$$

ii) g是满射，因为对任意非空集合x，若有 $x\in A/R$

则一定有 $y\in A$ 使得 $\{y\}=x$，则 $g(y)=x$.

所以 g是双射

② 若 g是双射，对任意x，$x\in A$ 则有 $x\in[x]_R$

对任何y $y\in[x]_R$ 则 $x\,g\,[x]_R \wedge y\,g\,[x]_R$

故 $x=y$，也即 $[x]_R=\{x\}$，R为恒等关系.

9. (1) $m\le n$ 若 $m>n$ 则根据鸽巢原理，必有一个B集合元素y有两个A中元素与之对应，故$m\le n$.

对于$m\le n$，设 $A=\{x_1,\dots x_m\}$ $B=\{y_1,\dots y_n\}$

我们构造函数 $f(x_i)=y_i$ $(1\le i\le m)$ 则f是单射

(2) $m\ge n$ 若 $m<n$ 则 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 元素数目最多m，不可能有 $ran(f)=\{f(x)\mid x\in A\}=B$，故$m\ge n$

对于$m\ge n$，设 $A=\{x_1,\dots x_m\}$ $B=\{y_1,\dots y_n\}$

我们构造函数

$$f(x_i)=\begin{cases} y_i, & 1\le i\le n \\ y_1, & n<i\le m\end{cases}$$ 则f是满射

(3) $m=n$ 结合(1)(2)，则 $m=n$ 才可能存在f是双射的情况

我们构造 $f(x_i)=y_i$ $(1\le i\le n)$ 则f是双射

10. (1) $f=\{\langle 1,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,c\rangle\}$

(2) $f(x)=2x+1$

(3) $A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

$$\begin{aligned}Y=\{&\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}, \{\langle a,0\rangle\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\},\\ &\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}, \{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\},\\ &\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}, \{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\},\\ &\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}, \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f=\{&\langle\varnothing,\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}\rangle, \langle\{a\},\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}\rangle,\\ &\langle\{b\},\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}\rangle, \langle\{c\},\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}\rangle,\\ &\langle\{a,b\},\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}\rangle, \langle\{a,c\},\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}\rangle,\\ &\langle\{b,c\},\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}\rangle, \langle\{a,b,c\},\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}\rangle\}\end{aligned}$$