《高等微积分 2》第一周作业

1 考虑幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

(1) 确定上述幂级数的收敛域.

(2) 证明: 对任何 $|x|<1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x).$$

(3) 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$

2 (1) 将函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 附近表示成幂级数.

(2) 确定上述级数的收敛半径.

(3) 证明:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$$

3 考虑函数项级数 $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

(1) 求上述函数项级数的收敛域 X.

(2) $\zeta(x)$ 在 X 上是否连续? 请详细说明理由.

(3) $\zeta(x)$ 在 X 上是否可导, 求出其导函数 $\zeta'(x)$.

4 (1) 确定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$ 的收敛半径, 其中 $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}$.

(2) 将函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 在 $x=0$ 附近表示成幂级数, 只需叙述结果.

(3) 将函数 $g(x)=\arcsin x$ 在 $x=0$ 附近表示成幂级数, 需要说明理由.

5 对每个正整数 n, 设 M_n 是非负实数, 函数 f_n 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上处处可导, 满足如下条件:

(i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛.

(ii) 对任何正整数 n, 对任何 $x\in(a,b)$, 有 $|f_n'(x)|\le M_n$.

(iii) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(a)$ 收敛.

(1) 证明: 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上点点收敛到某个和函数 $S(x)$.

(2) 假设对每个正整数 n, f_n' 在 (a,b) 上连续. 证明: $S(x)$ 在区间 (a,b) 上处处可导.

6 (一致收敛的 Dirichlet 判别法) 设函数序列 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 I 上一致收敛到零函数, 且对每个 $x\in I$, $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 n 是单调的; 设 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列在区间 I 上一致有界, 即存在正数 M, 使得

$$|b_1(x)+...+b_n(x)|\le M,\quad \forall n\in\mathbf{Z}_+,\forall x\in I.$$

证明: 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

7 (一致收敛的 Abel 判别法) 设对每个 $x\in I$, $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 n 是单调的, 且函数序列 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 I 上一致有界, 即存在正数 K, 使得

$$|a_n(x)|\le K,\quad \forall n\in\mathbf{Z}_+,\forall x\in I;$$

设函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛. 证明: 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

8 (幂级数的 Abel 第二定理) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x_0>0$ 处收敛. 证明: 该幂级数在 $[0,x_0]$ 上一致收敛.