考试课程　　概率论与数理统计　　2020 年 6 月 11 日

1. （10分）假设一年内人患感冒的次数服从参数为$\lambda = 5$的Poisson分布，某种新型药物经过市场验证仅对75%的人有效，并能将Poisson分布的参数减少为$\lambda = 3$. 如果某人服用了该药，这一年内患了两次感冒，那么该药对其有效的可能性有多大？

2. （10分）设a, b, c为常数且$a \neq 0$. 设随机变量X的概率密度函数为$p(x) = e^{ax^2+bx+c}$. 问X服从什么分布？并求其数学期望和方差.

3. （10分）设随机变量X, Y相互独立，且

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad Z = \min\{X, Y\}.$$

求Z的概率分布函数.

4. （20分）设X, Y相互独立均服从标准正态分布，记(X, Y)的联合密度函数为$\phi(x, y)$.

   (a) 构造函数 $p(x,y) = \begin{cases} \phi(x,y) + \frac{xy}{9}, & 若x^2+y^2 \le 1 \\ \phi(x,y), & 若x^2+y^2 > 1 \end{cases}$.
   证明函数$p(x, y)$为概率密度函数；若(U, V)的联合密度为$p(x, y)$，问U, V相互独立吗？

   (b) 已知Θ服从区间$(0, 2\pi)$上的均匀分布，设随机变量R满足

   $$X = R\cos\Theta, \quad Y = R\sin\Theta.$$

   求R, Θ的联合分布以及R的边际密度.

5. （20分）设随机变量X, Y具有联合密度函数

$$p(x,y) = \begin{cases} 21x^2y^3, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求条件密度函数$p_{X|Y}(x|y)$，$p_{Y|X}(y|x)$.

6. （10分）设二维随机变量$(X, Y) \sim N\left(0, 0, 1, 1, \frac{1}{2}\right)$，求$E(X^2|X+Y)$.

7. （20分）某电子元件的寿命X服从双参数指数分布，其概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{\frac{-(x-\mu)}{\theta}}, & x > \mu \\ 0, & 否则 \end{cases}$$

其中$\mu, \theta > 0$均为未知参数，从一批这种零件中随机抽取n件进行寿命试验，设他们的失效时间分别为$x_1, x_2, \ldots, x_n$.

   (a) 求μ, θ的矩估计量；

   (b) 求μ, θ的极大似然估计量；

   (c) 在已知$\theta = 1$的条件下求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.