作业（平时成绩）
（下周作业选做，及时补交之前作业）
期末考试：闭卷形式（网络学堂＋腾讯）

在校：进入教室
离校：入群，双机位

V， V^*， $V\times V\to F$ 双线性型 （方阵）

$f: V^p \times (V^*)^q \to F$ 关于每个分量线性（多重线性）

V 上 (p,q) 型张量

$(1,0)$ $V\to F$ V^*

$(0,1)$ $V^*\to F$ $\mathrm{Hom}(V^*,F) = V^{**} = V$

$(2,0)$ $V\times V\to F$ 双线性型

$(1,1)$ $V\times V^* \to F$ $\longleftrightarrow$ $V\to V$

第10讲 张量初步（二）构造及其基本性质

符号：V 上 (p,q) 型张量构成的集合 $T^p_q(V)$

$T^p_q(V)$ 是一个线性空间？ （加法，数乘）

（线性） $V^p\times (V^*)^q \xrightarrow{f} F$ $f+g \overset{?}{=}$

$V^p\times (V^*)^q \xrightarrow{g} F$

$$(f+g)(v_1,\cdots v_p,w_1,\cdots w_q) =: f(v_1,\cdots v_p,w_1,\cdots w_q) + g(v_1,\cdots v_p,w_1\cdots w_q)$$

$f+g \in T^p_q(V)$?

基本构造：给定两个多重线性型，

$$f: V_1\times\cdots\times V_r \to F$$

$$g: W_1\times\cdots\times W_s \to F$$

定义 f 和 g 的"乘积"：

$$V_1\times\cdots\times V_r\times W_1\times\cdots W_s \longrightarrow F$$

$$f\cdot g \quad (v_1\cdots v_r, w_1\cdots w_s) \longrightarrow f(v_1,\cdots v_r)\cdot g(w_1\cdots w_s)$$

问：以上映射关于每个分量具有线性性？

$$(f\cdot g)(v_1+v_1',\cdots w_s)$$

$$= f(v_1+v_1',\cdots v_r)\,g(w_1\cdots w_s)$$

$$= [f(v_1,\cdots v_r)+f(v_1',\cdots)]\,g(w_1\cdots w_s)$$

$$= (f\cdot g)(v_1\cdots w_s) + (f\cdot g)(v_1',v_2,\cdots w_s)$$

注：$f\cdot g \overset{?}{=} g\cdot f \in W_1\times\cdots\times W_s\times V_1\times\cdots\times V_r\to F$

$f\cdot g \in V_1\times\cdots V_r\times W_1\times\cdots W_s\to F$

但 $(f\cdot g)\cdot h = f\cdot(g\cdot h)$

能否将这样的构造应用于张量？

f (p,q) 型张量　　g (r,s) 型张量.

$f: V^p \times (V^*)^q \to F \qquad g: V^r \times (V^*)^s \to F$

$$\underline{\underline{f \cdot g}}: \quad V^p \times \underline{(V^*)^q} \times \underline{\underline{V^r}} \times (V^*)^s \longrightarrow F$$

$$\uparrow S$$

$$V^p \times \underline{\underline{V^r}} \times \underline{(V^*)^q} \times (V^*)^s$$

$$\|$$

$V^p \times (V^*)^q$ $=$

$$\underbrace{V^{p+r} \times (V^*)^{q+s}}$$

$(p+r, q+s)$型张量

$\uparrow$

$\underline{\underline{f \otimes g}}$ $\otimes$

$$(f \otimes g)(\overset{V}{\Downarrow}\; v_1, \cdots v_{p+r}, \overset{V^*}{\Downarrow}\; w_1, \cdots w_{q+s})$$

$$= (f \cdot g)(v_1, \cdots v_p, w_1, \cdots w_q, v_{p+1}, \cdots v_{p+r}, w_{q+1}, \cdots w_{q+s})$$

$$= f(v_1, \cdots v_p, w_1, \cdots w_q)\, g(v_{p+1}, \cdots v_{p+r}, w_{q+1}, \cdots w_{q+s})$$

$f \otimes g$ 称为张量 f 与张量 g 的张量积.

注: 张量积不交换, 但满足结合律 $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$

问: 张量的坐标 ?

$V \quad (e_1, \cdots e_n) \qquad V^* \quad (e^1, \cdots e^n)$

$\underline{x} \in V \qquad x = \sum_i \alpha^i e_i = (e_1, \cdots e_n)\begin{pmatrix}\alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n\end{pmatrix}$

$\alpha^i \in F$

$\underline{f} \in V^* \qquad f = \sum_j \beta_j e^j \qquad \beta_j \in F$

$$\underline{\underline{f(x)}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j e^j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \beta_i$$

(f, x)

T (p,q) 型张量 $\quad T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} := T(e_{i_1}, \cdots e_{i_p}, e^{j_1} \cdots e^{j_q})$

张量T在基$(e_1, \cdots e_n)$下的坐标.

$n = \dim V$. p, q 任意整数 $p,q \geq 0$

① $T \in T^q_p(V) \quad T: V^p \times (V^*)^q \to F$

回顾一下我们之前如何研究双线性型

$$T: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \cdots V^*}_{q} \to F$$

$(v_1 \cdots v_p, w_1 \cdots w_q) \to$

$v_1 = (e_1 \cdots e_n)\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}$, $v_p = (e_1, \cdots e_n)\begin{pmatrix} x_{p1} \\ \vdots \\ x_{pn} \end{pmatrix}$, $w_1 = (e^1, \cdots e^n)\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{pmatrix}$, $w_q = (e^1, \cdots e^n)\begin{pmatrix} y_{q1} \\ \vdots \\ y_{qn} \end{pmatrix}$

$$T\left((e_1, \cdots e_n)\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, v_2, \cdots w_q \right)$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^n x_{1i} e_i, v_2, \cdots w_q \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_{1i} \, T(e_i, v_2, v_3, \cdots w_q)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_{1i} \underbrace{T\left(e_i, (e_1, \cdots e_n)\begin{pmatrix} x_{21} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}, v_3, \cdots \right)}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_{1i} \, T\left(e_i, \sum_{j=1}^n x_{2j} e_j, v_3, \cdots w_q\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{1i} x_{2j} \, T(\underline{e_i}, \underline{e_j}, \underline{v_3}, \cdots w_q)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} x_{1i_1} x_{2i_2} \; T(e_{i_1} \; e_{i_2}, \underline{\underline{v_3}}, \cdots w_q)$$

$$= \sum \; x_{1i_1} x_{2i_2} x_{3i_3} \; T(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, v_4, \cdots w_q)$$

$$= \sum_{\substack{i_1=1 \cdots i_p=1 \\ j^1=1 \cdots j^q=1}}^{n} T(e_{i_1}, \cdots e_{i_p}, e^{j_1} \cdots e^{j_q}) \; x_{1i_1} \cdots x_{pi_p} \; y_{1j_1} \cdots y_{qj_q}$$

问：$\dim T_p^q(V) = ?$

$$T_p^q(V) \longrightarrow F^{?}$$

$$T \longrightarrow \left(T(e_{i_1} \cdots e_{i_p}, e^{j_1} \cdots e^{j_q})\right)$$

（T 是不是完全由 $T(e_{i_1}, \cdots e_{i_p}, e^{j_1} \cdots e^{j_q})$ 所决定的）

$e_{i_1}, \cdots e_{i_p} \in \{e_1, \cdots e_n\}$

$e^{j_1} \cdots e^{j_q} \in \{e^1, \cdots e^n\}$

回顾 $f: V \times V \to F$ 　　选定 V 中基 $(e_1, \cdots e_n)$

$$\updownarrow$$

$$(f(e_i, e_j))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

② $f: V \to F$ 　　 $V \xrightarrow{\cong} F^n$

$\uparrow$ 　　 $f \longrightarrow \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix}$

$\dim V = n$

$V \; (e_1 \cdots e_n)$

$\operatorname{Hom}(V, F)$

$\parallel$

V^*

$$\underline{f} = (e^1, \cdots e^n)\begin{pmatrix} ? \\ \vdots \\ ? \end{pmatrix} = (e^1, \cdots e^n)\begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$f \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e^i$$

$$f(e_j) \qquad \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e^i(e_j) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\delta_{ij} = f(e_j)$$

$\Downarrow$ 推广

$$T_p^q(V) \longrightarrow F^{n^{p+q}}$$

$\{e_1 \cdots e_n\}$ $\{e^1, \cdots e^n\}$

$$T \longrightarrow \left(T(e_{i_1} \cdots e_{i_p}, e^{j_1} \cdots e^{j_q})\right)_{n^{p+q}}$$

定义 $e^{i_1} \otimes \cdots e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} \in \underset{\triangle}{T_q^p(V)}$ s.t

$$(e^{i_1} \otimes \cdots e^{i_p} \otimes e_{j_1} \cdots \otimes e_{j_q})(e_{i_1'} \cdots e_{i_p'}, e^{j_1'} \cdots e^{j_q'})$$

$$= \delta^{i_1}_{i_1'} \delta^{i_2}_{i_2'} \cdots \cdots \delta^{j_1'}_{j_1} \cdots \delta^{j_q'}_{j_q}$$

$$T = \sum T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}$$

$$\|$$

$$T(e_{i_1}, \cdots e_{i_p}, e^{j_1} \cdots e^{j_q})$$

$$T_q^p(V) \overset{\simeq}{\Rightarrow} F^{n^{p+q}}$$

$$\Nearrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

① T 由 n^{p+q} 值 $(T(e_{i_1}, \cdots e_{i_p}, e^{j_1}, \cdots e^{j_q}))$ 唯一确定

(类比, f, $(f(e_1), \cdots f(e_n))$)

$(1, 0, \cdots\cdots 0)$
$(0, 1, \cdots\cdots 0)$
$\vdots$
$F^{n^{p+q}}$

② $T^p_q(V)$ 中的哪一些元素

$\varphi(e_{i_1} \cdots e_{i_p}, e^{j_1} \cdots e^{j_q}) = 1$

$\varphi(e_{i_1'} \cdots e_{i_p'}, e^{j_1'} \cdots e^{j_q'}) = 0$

$(i_1' \cdots i_q', j_1' \cdots j_q')$ 与 $(i_1 \cdots i_p, j_1 \cdots j_q)$ 不同

③ $T = \sum T(e_{i_1} \cdots e_{i_p} e^{j_1} \cdots e^{j_q})\, e^{i_1} \otimes \cdots e^{i_p} \otimes e_{j_1} \cdots \otimes e_{j_q}$

结论 $T^p_q(V)$ n^{p+q} 维向量空间

$e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}$

构成一组基. $e^{i_1}, \cdots e^{i_p} \in \{e^1, \cdots e^n\}$

$e_{j_1}, \cdots e_{j_q} \in \{e_1, \cdots e_n\}$

问: 张量坐标在基变换下的改变?

V $(e_1 \cdots e_n)$ $(t_1 \cdots t_n)$ $t_k = \sum a_k^i e_i$

V^* $(e^1, \cdots e^n)$ $(t^1, \cdots t^n)$

$$T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \xleftrightarrow{?} T^{j_1' \cdots j_q'}_{i_1' \cdots i_p'}$$

注: 张量积的坐标

Q $(Q^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p})$ $\left(Q = \sum Q^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \otimes \cdots e^{i_p} \otimes e_{j_1} \cdots \otimes e_{j_q}\right)$

$R \quad (R^{l_1\cdots l_t}_{k_1\cdots k_s})$

$Q\otimes R = T \qquad T^{j_1\cdots j_q\, l_1\cdots l_t}_{i_1\cdots i_p\, k_1\cdots k_s}$

$$= Q^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}\, R^{l_1\cdots l_t}_{k_1\cdots k_s}$$

定理：设 $V, W/F$ 两个向量空间. $\exists\, T/F$

$\tau: V\times W \to T$ 双线性映射 s.t

$T1$. $v_1,\cdots v_k \in V$ 线性无关. 且 $w_1,\cdots w_k \in W$

那么 $\sum_{i=1}^{k} \tau(v_i, w_i) = 0 \Rightarrow w_1 = \cdots = w_k = 0$

$T2$ $w_1,\cdots w_k \in W$ 线性无关 $v_1,\cdots v_k \in V$

$\sum_{i=1}^{k} \tau(v_i, w_i) = 0 \Rightarrow v_1 = \cdots = v_k = 0$

$T3$, τ 是满射

此外，(T,τ) 满足泛性质，$\forall\, (T'/F,\ \tau': V\times W \to T')$

$\exists!\ \sigma: T \to T'$ s.t

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & T \arrow[d, "\sigma"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

证明： $V \quad (e_1,\cdots e_n)$

$W \quad (f_1,\cdots f_m)$

生成性

τ 是满射 $\Rightarrow \{\tau(e_i, f_j) \mid 1\le i\le n,\ 1\le j\le m\}$ 生成 T

$a_{11}\tau(e_1,f_1) + a_{12}\tau(e_1,f_2) + \cdots + a_{1m}\tau(e_1,f_m)$

$+ \cdots$

$$\underbrace{+a_{n1}\tau(e_n,f_1)}_{\parallel} + \underbrace{a_{n2}\tau(e_n,f_2)}_{\parallel} + \cdots \underbrace{+a_{nm}\tau(e_n,f_m)}_{\parallel} = 0$$

$\tau(a_{11}e_1+\cdots+a_{n1}e_n,f_1)$ $\tau(a_{12}e_1+\cdots+a_{n2}e_n,f_2)$ $\tau(a_{1m}e_1+\cdots+a_{nm}e_n,f_m)$

$=$

由于 $f_1,\cdots f_n$ 线性无关，(T_2) $\Rightarrow$

$a_{11}e_1+\cdots+a_{n1}e_n=\cdots$

$=a_{1m}e_1+\cdots+a_{nm}e_n=0$

且 $\dim T=mn$

由于 e_i 为基 $\Rightarrow$ $a_{ij}=0$ 线性无关 由此说明 T 以 $\tau(e_i,f_j)$ 为基

任取 mn 维 T/F，基 t_{ij} $1\leq i\leq n$ $1\leq j\leq m$

存在性 令 τ: $V\times W\longrightarrow T$

$$(\underset{\Sigma\alpha_i e_i}{\underset{\parallel}{v}},\ \underset{\Sigma\beta_j f_j}{\underset{\parallel}{w}})\longrightarrow\Sigma\alpha_i\beta_j t_{ij}$$

$\boxed{//}$

泛性质保证 (T,τ) 同构下唯一

定义：给定 V,W，(T,τ)（同构下唯一）

称为 V,W 的张量积