

习题课材料（二）

1 随机变量

习题 1. C 应该取何值, 才能使下列数列成为概率分布: (1) $p_k = \frac{C}{N}$, $k = 1, 2, \dots, N$; (2) $p_k = C \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 1, 2, \dots, \lambda > 0$.

习题 2. (随机游走问题) 考虑 x 轴上的一个质点, 它只能位于整数点, 时刻 0 位于原点。每隔单位时间分别以概率 p 向正方向移动一个单位, 以概率 $q = 1 - p$ 向负方向移动一个位置。(1) 记 S_n 为它在时刻 $t = n$ 时的位置, 试求 S_n 的分布。(2) 假定质点在 $t = 0$ 时位于 $x = a$, 在 $x = 0$ 和 $x = a + b$ 处各有一个吸收壁, 求质点被 $x = 0$ 被吸收的概率。(a, b 都是正整数)

2 期望方差

习题 3. 一台设备由三大部件组成, 在设备运转中各部件需要调整的概率分别是 0.1, 0.2 和 0.3。假设各个部件的运转是相互独立的, 以 X 表示同时需要调整的部件数, 试求 X 的期望和方差。

习题 4. 一辆公共汽车上共有 25 名乘客, 每个乘客都等可能的在 9 个车站中的任一站下车, 并且他们下车与否相互独立, 又知公共汽车只有在有人下车时才停车, 求公共汽车停车次数的数学期望。

习题 5. 在一次集会上, n 个人把他们的帽子放到房间中央混合在一起, 然后没人随机的取一项, X 表示拿到自己帽子的人数, 求 X 的期望和方差。

习题 6. 某城市共有 N 辆汽车, 车牌号从 1 到 N , 若随机地记下 n 辆车的车牌号, 其最大号码为 ξ , 求 $E\xi$ 。当 $N \rightarrow \infty$ 时, $E\xi$ 是多少。

习题 7. 若 X_1, X_2, \dots, X_n 是正的独立的随机变量, 服从相同分布, 证明:

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}\right) = \frac{k}{n}.$$

习题 8. 设随机变量 X 在 $[a, b]$ 中取值, 证明:

$$\text{Var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4},$$

并说明等号何时成立。

习题 9. 袋中有 N 只球, 但其中白球的个数为随机变量, 只知道其数学期望为 n , 试求从袋中摸一球, 该球为白球的概率。

习题 10. 袋中装有 a 个白球, b 个黑球, 每次取出一球后, 总是放入一个白球, 这样进行了 m 次之后, 再从袋中取出一个球, 求它是白球的概率; 以及从开始进行 m 次之后, 袋中白球数的数学期望。