高微第三次习题课材料部分题目提示与解答

2020 年 10 月 19 日

1. 注意到对给定 $r>0$, $\{f(x), x\in(x_0-r,x_0)\}$ 有界，从而有有限的上确界，根据上确界的定义验证其等于 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$。从而 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)\le f(x_0)$。

2.(1)A. 由于 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内不为零，因此极限可拆成

$$\lim_{x\to x_0}\frac{sinf(x)}{f(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

(2).e^A. 原式可写成

$$\lim_{x\to x_0} exp(\frac{ln(1+f(x))}{g(x)})=\lim_{x\to x_0} exp(\frac{ln(1+f)}{f}\frac{f}{g})=e^A$$

(3).2. 原式可写成 $\lim_{x\to 0}(1+2sinx+cosx-1)^{\frac{1}{x}}$ 用 (2)。

3.(1).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(cosx)^{\frac{1}{k}}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}\frac{1}{(1+...cosx^{(\frac{k-1}{k})})}=\frac{k}{2}$$

(2).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2-f-g-(1-f)(1-g)}{x^2}=A+B$$

(3). $\sum_{k=1}^{n} A_k$.

(4). $\frac{n(n+1)}{4}$.

4. 先证明对有理数成立，对无理数的情况用有理数列逼近，用一下连续性得证。

5. 我们证明 Riemann 函数在任一点的极限都是 0. 取 $x_0 \in [0,1]$，$\forall \epsilon > 0$ 令 $k = [\frac{1}{\epsilon}]$，则 $[0,1]$ 上既约分母小于 k 的有理数只有有限个，不妨记为 $r_1, ...r_n$，记 $\delta = min_{i,r_i \neq x_0}|r_i - x_0|$. $|x - x_0| < \delta$ 时，若 x 是无理数则有 $R(x) = 0$ (记 Riemann 函数为 R(x))，x 是有理数时则有 $|R(x)| \leq \frac{1}{k}$，从而 $R(x) \to 0$.

6.(1). 由数列的单调收敛定理显然。

(2). 不妨 $x > 1$，若 $\lim_n x^{a_n} > \lim_n x^{b_n}$ 则 $\exists N$ 使得 $x^{a_N} > \lim_n x^{b_n}$，从而 $a_N > b_n$ 对所有 n 成立。则 $\exists \epsilon > 0$ 使得 $b_n < a_N - \epsilon \leq \lim_n a_n - \epsilon$，令 $n \to \infty$ 得到 $\lim_n b_n \leq \lim_n a_n - \epsilon$，这是矛盾的。

(3). 取有理数列 a_n 单调上升收敛到 α 由 $y > x$，当 $n > 1$ 时 $(\frac{y}{x})^{a_n} > (\frac{y}{x})^{a_1} > 1$，取 $n \to \infty$。

(4). 分别取有理数列 a_n, b_n 严格单调上升到 α, β，由 $\alpha < \beta$，$\exists N$ 使得 $b_N > a_n$，对所有 n 成立。因此 $x^\beta > x^{b_N} \geq x^{\lim_n a_n} = x^\alpha$ 。

(5). 只对 α 不为 0 的情况证明

证明：. $\alpha > 0$ 时：首先证明 $f(x)$ 在 1 处连续。事实上注意到当 $|x-1| \leq 1$ 时

$$\begin{aligned}
x^\alpha - 1 &\leq (1 + |x-1|)^\alpha - 1 \leq (1 + |x-1|)^{[\alpha]+1} - 1 \\
&= |x-1|(1 + ... + (1 + |x-1|)^{[\alpha]}) \\
&\leq ([\alpha] + 1)(1 + 2^\alpha)|x-1|
\end{aligned}$$

而另一方面

$$\begin{aligned}
1 - x^\alpha &\leq 1 - (1 - |1-x|)^\alpha \leq 1 - (1 - |1-x|)^{[\alpha]+1} \\
&\leq |1-x|([\alpha] + 1)
\end{aligned}$$

从而当 $x \to 1$ 时 $f(x) \to 1$，即在 1 处连续。一般情形时注意到

$$\lim_{x \to x_0} |x^\alpha - x_0^\alpha| = \lim_{x \to x_0} |x_0^\alpha||\frac{x^\alpha}{x_0^\alpha} - 1|$$

即得到在 x_0 处的连续性 $(x_0 > 0)$。
$\alpha < 0$ 时：由 $0 < x^\alpha = 1/x^{-\alpha}$，连续性得证。 □

7. 略

8. 首先证明 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的双射，由第 7 题知道 $f(x)$ 必定严格单增，用反证法。

9. 分 $f(a) > a$ 和 $f(a) < a$ 的情况讨论，用数列的单调收敛定理。