Date

概统第三次习题课参考答案

1. 回顾：若 X 连续型随机变量，$y=g(x)$ 单调连续，反函数 $x=g^{-1}(y)=h(y)$ 连续可微，则 $Y=g(X)$ 为连续型随机变量，且密度函数为：

$$p_Y(y)=p_X(h(y))|h'(y)|, \quad y\in g(\mathbb{R}).$$

这是由于 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\begin{cases} P(X\le h(y))=F_X(h(y)), & g\text{ 单增} \\ P(X\ge h(y))=1-F_X(h(y)), & g\text{ 单减} \end{cases}$

注意到 $p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 为 $(0,1)$ 上均匀分布的密度函数。

(1) $y=g(x)=-2\ln x$，$x=h(y)=e^{-\frac{y}{2}}$，$h'(y)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$

故 $p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(2) $y=g(x)=3x+1$，$x=h(y)=\frac{1}{3}(y-1)$，$h'(y)=\frac{1}{3}$

故 $p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 1<y<4 \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

(3) $y=g(x)=e^x$，$x=h(y)=\ln y$，$h'(y)=\frac{1}{y}$

故 $p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1<y<e \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

(4) 注意 $X\in(0,1) \Rightarrow y=g(x)=|\ln x|=-\ln x$，$x=h(y)=e^{-y}$，$h'(y)=-e^{-y}$

故 $p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}$

2. (1) $X\sim Exp(\lambda)$，则其密度函数 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0\end{cases}$

$$\mu_k=E[X^k]=\int_0^\infty x^k\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$=\lambda(-\tfrac{1}{\lambda})\int_0^\infty x^k d e^{-\lambda x}$$
$$=-x^k\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\int_0^{+\infty}k\cdot x^{k-1}\cdot e^{-\lambda x}dx$$
$$=k\int_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-\lambda x}dx=\cdots=\frac{k!}{\lambda^k}$$ （重复分部积分即可）

故 $\mu_1=\frac{1}{\lambda}$，$\mu_2=\frac{2}{\lambda^2}$，$\mu_3=\frac{6}{\lambda^3}$，$\mu_4=\frac{24}{\lambda^4}$

(2) $\nu_k=E[(X-EX)^k]=E[(X-\mu_1)^k]=E[\sum_{i=0}^{k}C_k^i X^i(-\mu_1)^{k-i}]$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\mu_i(-\mu_1)^{k-i}$$，其中 $\mu_0=1$

No.

Date

故 $\upsilon_1=0,\ \upsilon_2=\frac{1}{\lambda^2},\ \upsilon_3=\frac{2}{\lambda^3},\ \upsilon_4=\frac{9}{\lambda^4}$

(3) 变异系数 $C_v(X)=\frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}=\frac{\sqrt{1/\lambda^2}}{1/\lambda}=1$ ：无量纲"波动大小"

(4) ~~峰~~偏度系数 $\beta_s=\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2^{3/2}}=\frac{\frac{2}{\lambda^3}}{(1/\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}=2$ ：偏离对称性的

(5) 峰度系数 $\beta_k=\frac{\upsilon_4}{\upsilon_2^2}-3=\frac{9/\lambda^4}{(1/\lambda^2)^2}-3=6$ ：与标准正态相比的峰值大小

3. (1) $p(x)$ 关于直线 $x=c \Leftrightarrow p(c+x)=p(c-x),\ -\infty<x<+\infty$

故 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+c)p(c+x)d(x+c)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+c)p(c-x)dx$ ← 令 $t=c-x$

$=-\int_{+\infty}^{-\infty}(2c-t)p(t)dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(2c-t)p(t)dt=E[2c-X] \Rightarrow EX=c$

由 $\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{x_{0.5}}p(x)dx=\int_{x_{0.5}}^{+\infty}p(x)dx$ 知：

$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{x_{0.5}}p(x)dx=\int_{-\infty}^{x_{0.5}-c}p(c+t)dt=\int_{-\infty}^{x_{0.5}-c}p(c-x)dx$

$=\int_{-\infty}^{2c-x_{0.5}}p(t)dt \Rightarrow \int_{2c-x_{0.5}}^{+\infty}p(t)dt=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (*)

故 $x_{0.5}=2c-x_{0.5}$ ((*)式说明 $2c-x_{0.5}$ 也是中位数) $\Rightarrow x_{0.5}=c$

~~(2) $c=0$ 时, $p=\int_{-\infty}^{x_p}p(x)dx=\int_{-\infty}^{x_p}p(-y)dy=\int_{x_p}^{\infty}$~~

~~$=\int_{-x_p}^{+\infty}p(-y)dy=$~~

(2) $c=0$ 时, $p=\int_{-\infty}^{x_p}p(x)dx=\int_{-\infty}^{x_p}p(-x)dx=\int_{-x_p}^{+\infty}p(x)dx=1-F(-x_p)$

故 $F(-x_p)=1-p$，根据分位数定义有 $-x_p=x_{1-p}$

4. 由 $Y=a+bX$ 可得 $EY=a+bEX$ $(b\neq 0)$.

偏度系数 $\beta_s=\dfrac{E(Y-EY)^3}{(E(Y-EY)^2)^{3/2}}=\dfrac{E(a+bX-(a+bEX))^3}{(E(a+bX-(a+bEX))^2)^{3/2}}=\dfrac{b^3E(X-EX)^3}{b^3(E(X-EX)^2)^{3/2}}$

峰度系数 $\beta_k=\dfrac{E(Y-EY)^4}{(E(Y-EY)^2)^2}-3=\dfrac{b^4E(X-EX)^4}{b^4(E(X-EX)^2)^2}-3$ (同理)

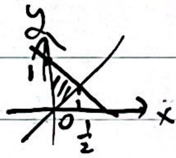
5. (1) $\int_0^1\int_{x^2}^{x}k\,dy\,dx=\int_0^1 k(x-x^2)\,dx=\frac{k}{6}=1 \Rightarrow k=6$

(2) $P(X>0.5)=6\int_{0.5}^{1}\int_{x^2}^{x}dy\,dx=6\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\,dx=\frac{1}{2}$

$P(Y<0.5)=6\int_0^{0.5}\int_y^{\sqrt{y}}dx\,dy=6\int_0^{0.5}(\sqrt{y}-y)\,dy=\sqrt{2}-\frac{3}{4}$

6. $P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}\,dy\,dx=-2e^{-\frac{1}{2}}+1+e^{-1}$

积分区域可由右图得知:



7. (1) 由于 $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$, 故: $P(a<X\le b, c<Y\le d)=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)$

由此思路同理可得以下题.

(2) 记 $F(b-0,\cdot)$ 为 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}F(b-\varepsilon,\cdot)$, $F(\cdot,d-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}F(\cdot,d-\varepsilon)$,

则 $P(a\le X<b, c\le Y\le d)=F(b-0,d)-F(b-0,c-0)-F(a-0,d)+F(a-0,c-0)$

(3) $P(a\le X<b, Y<c)=F(b,c-0)-F(a-0,c-0)$

(4) $P(X=a, Y>b)=F(a,\infty)-F(a,b)-F(a-0,\infty)+F(a-0,b)$

(5) 由于 $P(X<-\infty)=0$, 故 $P(X<-\infty, Y<\infty)=0$.

8. 密度函数 $p(x,y)=\begin{cases}1/(b-a)(d-c), & a\le x\le b, c\le y\le d\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

故边缘分布 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dy=\frac{1}{b-a}$, $a\le x\le b$ $\Rightarrow p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$.

$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dx=\frac{1}{d-c}$, $c\le y\le d$ 故 X与Y相互独立.

Date

9. "$\Rightarrow$": X与Y相互独立，则 $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=h(x)g(y)$

"$\Leftarrow$": 若 $p(x,y)=h(x)g(y)$. 则:

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)g(y)dy=h(x)\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=g(y)\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)dx$$

又由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)dx$ 可知

$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$ $\Rightarrow$ X与Y独立.