《高等微积分 1》第十次习题课材料

1 计算不定积分.

(1) $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.

(2) $\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

(3) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

2 设 $f \in R([a,b])$, $F \in C([a,b])$ 且对任何 $x \in (a,b)$ 都有 $F'(x) = f(x)$. 证明:

$$\int_a^b f(x)dx = F|_a^b$$

3 设 $f \in C^{(n)}(I)$, $a, b \in I$. 请确定

$$\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^n dx$$

与

$$\int_a^b f(x)dx$$

的关系.

4 设 f, g 是连续函数. 证明:

$$\int_0^\pi g(x)f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x)+g(\pi-x))\cdot f(\sin x)dx.$$

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.$$

由此计算积分

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

5 (1) 计算不定积分

$$\int \frac{t^2+1}{t^4+1}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t-1)+C.$$

(2) 计算不定积分

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x-1)+C.$$

(3) 计算积分

$$\int_0^{2m\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = 2\sqrt{2}m\pi.$$

其中 m 是正整数.

(4) 计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{dy}{2-\sin^2 y}.$$

6 设 f 是以 T 为周期的连续函数. 已知 $f(x_0)\neq 0$, 且 $\int_0^T f(x)dx = 0$. 证明: f 在区间 (x_0, x_0+T) 中至少有两个根.

7 设 $a<b\in\mathbf{R}$, 计算积分

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx.$$

8 设 f 在区间 $[a,b]$ 上连续且严格单调递增. 证明:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = bf(b)-af(a).$$

9 给定正数 $a\neq 1$, 计算定积分

$$\int_0^{\pi} \frac{(\cos x-a)\sin x}{(1+a^2-2a\cos x)^{3/2}}dx.$$

10 设 f 是连续函数. 证明:

(1) 对正整数 n, 有

$$\int_0^{\sqrt[n]{a}} x^{n-1}f(x^n)dx = \frac{1}{n}\int_0^a f(x)dx.$$

(2)

$$\int_0^a \left(\int_0^x f(t)dt\right) dx = \int_0^a f(x)(a-x)dx.$$

(3)

$$\int_0^a \left(\int_0^x f(x)f(y)dy\right) dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2.$$

11 计算定积分

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

12 给定正实数 $l < h$. 在坐标平面上画出一族平行线

$$y = nh, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

将一根长度为 l 的针随机的扔到平面上, 它与上述那一族平行线中至少一条线相交的概率是多少?