概统第四次习题课材料

习题 1 设连续型随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布. 试证:

$$P\left(X_n > \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}\}\right) = \frac{1}{n}$$

习题 2 设 X 与 Y 独立同分布于标准正态分布 $\mathcal{N}(0,1)$，求 $\mathbb{E}[\max\{X,Y\}]$.

习题 3 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

求 X 与 Y 的协方差及相关系数.

习题 4 设随机向量 (X_1, X_2, X_3) 的相关系数分别为 $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{13}$，且

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_3] = 0, \quad \text{Var}[X_1] = \text{Var}[X_2] = \text{Var}[X_3] = \sigma^2$$

令

$$Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_2 + X_3, \quad Y_3 = X_3 + X_1$$

证明：Y_1, Y_2, Y_3 两两不相关的充要条件是 $\rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{13} = -1$.

习题 5 设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 中任意两个的相关系数都是 ρ，试证：$\rho \geq -\frac{1}{n-1}$.

习题 6 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变量，证明：

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_k}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}\right] = \frac{k}{n} \quad (k \leq n)$$

习题 7 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是 n 维随机变量，其协方差矩阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 存在，其行列式 $\det(\boldsymbol{B}) = 0$. 证明：各分量之间以概率 1 存在线性关系，即存在一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$，使得

$$P(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n = \text{常数}) = 1$$

习题 8 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

当 $0<y<1$ 时，求 $\mathbb{E}[X|Y=y]$

习题 9 设随机变量 $X\sim\mathcal{N}(\mu,1)$，$Y\sim\mathcal{N}(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立。令

$$I=\begin{cases}1, & Y<X\\ 0, & Y\geq X\end{cases}$$

试证明：

1) $\mathbb{E}[I|X=x]=\Phi(x)$;

2) $\mathbb{E}[\Phi(X)]=P(Y<X)$;

3) $\mathbb{E}[\Phi(X)]=\Phi(\mu/\sqrt{2})$;.