2019 年秋季《高等微积分 1》期末考试试题

2020 年 1 月 5 日 8 : 00-10 : 00

本试卷分两页, 共七道试题, 各题分值如下: 第 1 题 $5+5$; 第 2 题 $5+10$; 第 3,7 题每小问 5 分; 第 4 题 $7+8$; 第 5,6 题 $5+10$ 分.

1 设 $f(x)$ 是次数为 n 的多项式 $(n \geq 1)$. 令

$$F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + \ldots + f^{(n)}(x).$$

(1) 计算 $e^{-x}F(x)$ 的导函数.

(2) 证明: 对任何实数 x, 有

$$\int_0^x f(t)e^{-t}dt = F(0) - e^{-x}F(x).$$

2 (1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\tan x - x}$.

(2) 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是连续函数, 满足

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \quad \forall x \neq 0.$$

求 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近展开至二阶的带皮亚诺余项的泰勒公式, 即要求余项是 $o(x^2)$.

3 考虑如下反常积分

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(1) 对怎样的 x, 上述反常积分收敛? 请证明你的断言.

(2) 证明: 对 $x > 0$, 有 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(3) 证明: 对 $x>0$, 有

$$\Gamma(x)=2\int_0^{\infty} s^{2x-1}e^{-s^2}ds.$$

4 (1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 的收敛半径, 其中 $(2n+1)!!=(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1$ 表示双阶乘.

(2) 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数.

5 (1) 计算不定积分 $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

(2) 设 a,b 是给定的正数. 计算定积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}.$$

6 (1) 设 β 满足 $0<\beta<1$. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1-\frac{\beta}{n})$ 的收敛发散性, 请证明你的断言.

(2) 给定实数 α, 定义数列

$$x_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 的收敛发散性, 请证明你的断言.

7 设 n 是正整数.

(1) 计算定积分

$$K_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx.$$

(2) 对 n 用归纳法, 证明: $K_n\geq\frac{4}{3\sqrt{n}}$.

(3) 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 满足对任何 $x\notin[0,1]$ 都有 $f(x)=0$. 对每个正整数 n, 记 $Q_n(t)=(1-t^2)^n$, 定义函数

$$P_n(x)=\frac{1}{K_n}\int_0^1 f(t)Q_n(t-x)dt,\quad\forall x\in[0,1].$$

证明: 函数序列 $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $f(x)$.