第二章：命题逻辑的等值和推理演算

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

主要内容

复习：常用的等值公式

- 蕴涵等值式 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- 等价等值式：$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- 假言易位：$P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- 等价否定等值式：$P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- 归谬论：$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$

复习：常用的等值公式

- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ 前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$ 前提析取合并

证明其他等值式

2.3 命题公式与真值表的关系

1. 从取1的行来列写

考查命题公式 A的真值表中取1的行，若取1的行数共有m行，则命题公式 A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m$$

其中 $Qi = (R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_n)$，

$R_i = P_i$ 或 $\neg P_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$

若该行的$P_i = 1$，则$R_i = P_i$;否则$R_i = \neg P_i$

2.3 命题公式与真值表的关系

例1：从取1的行来列写

$$A=(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$B=(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

P	Q	A	B
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

从取0的行来列写

- 从取1的行来列写

$$A = (\ \wedge\ )_1 \vee (\ \wedge\ )_2 \vee \ldots \vee (\ \wedge\ )_m$$

- 故从取0的行来列写

$$\neg A = (\ \wedge\ )_1 \vee (\ \wedge\ )_2 \vee \ldots \vee (\ \wedge\ )_l$$ 从而

$$A = (\ \vee\ )_1 \wedge (\ \vee\ )_2 \wedge \ldots \wedge (\ \vee\ )_l$$

其中$(\ \vee\ )_1$中每一项也相应取反，因此

若该行的 $P_i = 1$，则 $R_i = \neg P_i$

若该行的 $P_i = 0$，则 $R_i = P_i$.

例2：从取0的行来列写

P	Q	A	B
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

$A = (\neg P \vee Q)$

$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

2.4 联接词的完备集

2.4.2 联接词的完备集

C是一个联结词的集合，如果任何n元$(n\geq 1)$真值函项都可以由仅含C中的联结词构成的公式表示，则称C是完备的联结词集合，或说C是联结词的完备集。

联结词的完备集

定理2.4.1

{ ¬， ∨， ∧}是完备的联结词集合。

- 从前面介绍的由真值表列写命题公式的过程可知，任一公式都可由¬， ∨， ∧表示，从而{¬, ∨, ∧}是完备的。
- 一般情形下，该定理的证明应用数学归纳法，施归纳于联结词的个数来论证。

定理2.4.1 $\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备的联结词集合

另一证法，因为任何n（$n\geq1$）元真值函数都与唯一的一个主析取范式（后面介绍）等值，而在主析取范式中仅含联结词$\neg, \vee, \wedge$，所以$S = \{\neg, \vee, \wedge\}$是联结词的完备集。

Setting

以下哪些联结词集是完备集

A $S_1 = \{\neg, \wedge\}$

B $S_2 = \{\neg, \vee\}$

C $S_3 = \{\uparrow\}$

D $S_4 = \{\wedge, \vee\}$

Submit

联结词的完备集

推论： 以下联结词集都是完备集：

（1） $S_1 = \{\neg, \wedge\}$

（2） $S_2 = \{\neg, \vee\}$

（3） $S_3 = \{\neg, \rightarrow\}$

（4） $S_4 = \{\uparrow\}$

（5） $S_5 = \{\downarrow\}$

证明{↑}，{↓}都是联结词完备集

- 已知{¬, ∨, ∧}是完备集，证明其中每个联结词都可以由↑来表示

$$\neg P = \neg(P \wedge P)$$

$$= P \uparrow P$$

$$P \wedge Q = \neg\neg(P \wedge Q) = \neg(P \uparrow Q) = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

$$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q) = \neg P \uparrow \neg Q = (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$$

证毕

一些重要的全功能联结词集合

- {¬, ∧}, {¬, ∨}可以构成功能联结词集合。使用上述全功能联结词集合表达的命题公式类的系统常称为Boole代数系统。
- {¬, →}也可构成全功能联结词集合。该全功能联结词集合在研究逻辑系统的演绎与推理，以及在程序系统的研究中经常遇到。
- {↑}，{↓}是全功能联结词集合。在大规模集成电路中有广泛的应用。

2.5 对偶式

8. 同一律： $P \vee F = P$ $P \wedge T = P$

对偶式

将给定的命题公式 $\boldsymbol{A}$ 中出现的 $\vee, \wedge, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{F}$ 分别以 $\wedge, \vee, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{T}$ 代换，得到公式 $\boldsymbol{A}^*$，则称 $\boldsymbol{A}^*$ 是公式 $\boldsymbol{A}$ 的对偶式，或说 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$ 互为对偶式。

在以下定理2.5.1~定理2.5.6中，记

$$A = A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$$A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

有关对偶式的定理

- 定理2.5.1 数学归纳法

  $$\neg(A^*) = (\neg A)^*, \quad \neg(A^-) = (\neg A)^-$$

- 定理2.5.2

  $$(A^*)^* = A, \quad (A^-)^- = A$$

- 定理2.5.3 数学归纳法

  $$\neg A = A^{*-}$$

2.5 对偶式

证明定理2.5.3： $\neg A = A^{*-}$

用数学归纳法,施归纳于A中出现的联结词个数n。

基始: 设n = 0, A中无联结词,便有

$A = P$, 从而 $\neg A = \neg P$

但 $A^{*-} = \neg P$

$\therefore n = 0$时定理成立。

归纳：设n≤k时定理成立，

往证n = k+1时定理也成立。

$\because n = k+1 \geq 1$，A 中至少有一个联结词，可分为 三种情形：

$A = \neg A_1$，$A = A_1 \wedge A_2$，$A = A_1 \vee A_2$

其中A_1, A_2中联结词个数≤k。

定理2.5.1：$\neg(A^*) = (\neg A)^*$， $\neg(A^-) = (\neg A)^-$

2. 5 对偶式

依归纳法假设，$\neg A_1 = A_1{}^{*-}$, $\neg A_2 = A_2{}^{*-}$

当 $A = \neg A_1$时 $\neg A = \neg(\neg A_1)$

$= \neg(A_1{}^{*-})$ 归纳法假设

$= \neg((A_1{}^*)^-)$

$= (\neg(A_1{}^*))^-$ 定理 2.5.1 (2)

由定理2.5.1 (2)先取逆再取非 = 先取非再取逆

$= (\neg A_1)^{*-}$

由定理2.5.1 (1)先取对偶再取非 = 先取非再取对偶

$= A^{*-}$ 由条件$A = \neg A_1$

依归纳法假设，$\neg A_1 = A_1^{*-}$，$\neg A_2 = A_2^{*-}$

2.5 对偶式

当 $A = A_1 \wedge A_2$ 时

$$\begin{aligned}
\neg A &= \neg(A_1 \wedge A_2) \\
&= \neg A_1 \vee \neg A_2 && \text{摩根律} \\
&= A_1^{*-} \vee A_2^{*-} && \text{归纳法假设} \\
&= (A_1^{*} \vee A_2^{*})^{-} && A^{-}\text{定义} \\
&= (A_1 \wedge A_2)^{*-} && A^{*}\text{定义} \\
&= A^{*-} && \text{定理证毕}
\end{aligned}$$

类似可以证明 $A = A_1 \vee A_2$ 的情况

该定理实为摩根律的另一种形式。

它将 $\neg$、$*$、$^{-}$ 有机地联系起来。

有关对偶式的定理(续)

- 定理2.5.4
  若$A = B$，必有$A^* = B^*$（对偶原理）
- 定理2.5.5
  若$A \to B$永真，必有$B^* \to A^*$永真
- 定理2.5.6
  A与A^-同永真，同可满足；
  $\neg A$与A^*同永真，同可满足。

代入规则

- 定理2.5.3
  $\neg A = A^{*-}$

2. 5 对偶式

定理 2.5.4　若 $A = B$ 必有 $A^* = B^*$

证明: 因为 $A = B$ 等价于 $A \leftrightarrow B$ 永真。

从而 $\neg A \leftrightarrow \neg B$ 永真。

依定理2.5.3, $\neg A = A^{*-}$, $\neg B = B^{*-}$

于是 $A^{*-} \leftrightarrow B^{*-}$　永真

必有 $A^* \leftrightarrow B^*$　永真　代入规则

故　$A^* = B^*$

定理2. 5. 6
A与A^-同永真，同可满足；

2.5 对偶式

- 定理2.5.5 若A→B 永真，必有 $B^* \to A^*$ 永真
- 证

$$A \to B$$

$$= \neg B \to \neg A \qquad \text{命题与逆否命题等值}$$

$$= B^{*-} \to A^{*-} \qquad \text{定理2.5.3}$$

$$= B^* \to A^* \qquad \text{代入规则}$$

- 定理2. 5. 3

$$\neg A = A^{*-}$$

A为重言式 $\Rightarrow$ A*必为矛盾式

- 若A为重言式,则A*必为矛盾式.

  如果$A = \mathrm{T}$，由对偶原理可知：$A^* = (\mathrm{T})^* = \mathrm{F}$

- 例如,

  定理2.5.4
  若$A = B$，必有$A^* = B^*$（对偶原理）

设 $A = P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg \mathrm{Q}))$,

则 $A^* = P \wedge (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q))$

$$A \Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee 0) \Leftrightarrow P \vee \neg P \Leftrightarrow 1,$$

$$\boldsymbol{A^* \Leftrightarrow 0.}$$

2.6 范式

2.6.1 **文字与互补对**

命题变项及其否定式(如P与$\neg P$）统称**文字**。

且P与$\neg P$ 称为**互补对**。

2.6.2 合取式

由文字的合取所组成的公式称为**合取式**。由有限个文字构成的合取式称作简单合取式。

2.6.3 析取式

由文字的析取所组成的公式称为**析取式**。由有限个文字构成的析取式称作简单析取式。

补充：析取式与合取式

- 令$A_1,A_2,\ldots,A_s$表示s个简单析取式或s个简单合取式。
- 设A_i是含n个文字的简单析取式，若A_i中既含某个命题变项P_j，又含它的否定式$\neg P_j$， 即$P_j \vee \neg P_j$，则A_i为重言式。
- 反之，若A_i为重言式，则它必同时含某个命题变项和它的否定式，否则，若将A_i中的不带否定符号的命题变项都取0值，带否定号的命题变项都取1值，此赋值为A_i的成假赋值，这与A_i是重言式相矛盾。
- 类似的讨论可知，若A_i是含n个命题变项的**简单合取式**，且A_i为矛盾式，则A_i中必同时含某个命题变项及它的否定式，反之亦然。

补充：析取式与合取式

定理

(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式(一个互补对)。

$$A = P \vee \neg P \vee Q$$

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式(一个互补对)。

$$A = P \wedge \neg P \wedge Q$$

2.6 范式

2.6.4　析取范式

析取范式是形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

的公式，其中$A_i\,(i=1,\ldots,n)$为<u>合取式</u>。

2.6.5　合取范式

合取范式是形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

的公式，其中$A_i\,(i=1,\ldots,n)$为<u>析取式</u>。

求范式举例

- 例1 求$P\leftrightarrow Q$ 的析取范式与合取范式：

$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$----析取范式

$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$----合取范式

范式不唯一，例如

$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

例2 求 $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$的析取范式与合取范式

（1） 先求合取范式

$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\leftrightarrow R$ (消去$\rightarrow$)

$\Leftrightarrow ((\neg P\vee Q)\rightarrow R)\wedge(R\rightarrow(\neg P\vee Q))$ (消去$\leftrightarrow$)

$\Leftrightarrow (\neg(\neg P\vee Q)\vee R)\wedge(\neg R\vee(\neg P\vee Q))$ (消去$\rightarrow$)

$\Leftrightarrow ((P\wedge\neg Q)\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$ (否定符内移)

$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$ ($\vee$对$\wedge$的分配律)

例2：求析取范式

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$ （消去$\leftrightarrow$）

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)) \vee (R \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R))$

$\Leftrightarrow \cancel{(P \wedge \neg Q \wedge \neg P)} \vee \cancel{(P \wedge \neg Q \wedge Q)} \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee$

$(R \wedge \neg P) \vee (R \wedge Q) \vee \cancel{(R \wedge \neg R)}$ （$\wedge$对$\vee$的分配律）

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ （补余律和同一律）

$\boldsymbol{P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)}$ 从取假来描述双条件

2.6.6 范式存在定理

任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式。但命题公式的合取范式和析取范式并不唯一。

求范式的具体步骤

- 利用等值公式中的等值式和蕴涵等值式将公式中的→、↔用联结词¬、∧、∨来取代；

$$P \to Q = \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$ (多用于求析取范式)

$$P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$$ (多用于求合取范式)

- 利用摩根律将否定号¬移到各个命题变元的前端；
- 利用结合律、分配律、吸收律、等幂律、交换律等将公式化成其等值的析取范式和合取范式。

由于范式一般不唯一，所以有必要进一步研究主范式。

$$
\begin{aligned}
&(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R \\
\Leftrightarrow\ & ((P\wedge\neg Q)\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R) && \text{（消去}\leftrightarrow\text{）} \\
\Leftrightarrow\ & (P\wedge\neg Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee \\
& (R\wedge\neg P)\vee(R\wedge Q)\vee(R\wedge\neg R) && \text{（}\wedge\text{对}\vee\text{的分配律）} \\
\Leftrightarrow\ & (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R) && \text{（补余律和同一律）}
\end{aligned}
$$

缺点是什么？

命题变元出现次数无约束

命题变元顺序无约束

例1：从取1的行来列写

$A = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_2)$

$B = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2)$

P_1	P_2	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

真值表里的第*i*行

例2：从取0的行来列写

$A = (\neg P_1 \vee P_2)$

$B = (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$

P_1	P_2	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

主范式——极小项和极大项

2.6.7 极小项

n 个命题变项 $P_1, P_2,\ldots,P_n$ 组成的合取式：

$Q_1\land Q_2\land\ldots\land Q_n$

其中 $Q_i = P_i$，或$\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称合取式 $Q_1\land Q_2\land\ldots\land Q_n$为极小项，并以$m_i$表示。

2.6.8 极大项

n 个命题变项$P_1,P_2,\ldots,P_n$组成的析取式：

$Q_1\lor Q_2\lor\ldots\lor Q_n$

其中 $Q_i = P_i$，或$\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称析取式 $Q_1\lor Q_2\lor\ldots\lor Q_n$为极大项，并以$M_i$表示。

主析取范式与主合取范式

主析取范式

设由n 个命题变项构成的析取范式中所有的合取式都是极小项，则称该析取范式为主析取范式（仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式）。

主合取范式

设由n个命题变项构成的合取范式中所有的析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式（仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式）。

2.6.9 主析取范式定理

任一含有n个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这n个命题变项的主析取范式。

2.6.10 主合取范式定理

任一含有n个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这n个命题变项的主合取范式。

主范式——极小项的性质

（1）任一含有n 个命题变项的公式，所有可能的极小项的个数和该公式的解释个数相同，都是2^n。

（2）排列顺序与P_1，P_2，…，P_n一致；

（3）每个极小项只在一个解释下为真。

（4）极小项两两不等值，并且 $m_i \wedge m_j$ = F（$i \neq j$）。

（5）任一含有n 个命题变项的公式，都可由k 个($k \leqslant 2^n$)极小项的析取来表示。

A是由k个极小项的析取来表示，剩余2^n-k极小项的析取是$\neg A$

（6）恰由2^n个极小项的析取构成的公式必为重言式。即

$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = \mathrm{T}$

主范式——极大项的性质

(1) 任一含有n 个命题变项的公式，所有可能的极大项的个数与该公式的解释个数相同，都是2^n。

(2) 排列顺序与P_1，P_2，…，P_n一致；

(3) 每个极大项只在一个解释下为假。

(4) 极大项两两不等值，并且 $M_i \vee M_j = \mathrm{T}$ （$i \neq j$）。

(5) 任一含有n个命题变项的公式，都可由k个($k \leq 2^n$)极大项的合取来表示。

A是由k个极大项的合取来表示，剩余2^n-k极大项的合取是$\neg A$

(6) 恰由2^n个极大项的合取构成的公式必为矛盾式。即

$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = \mathrm{F}$

主析取范式与主合取范式的求法

求主析取范式的方法

1. 先求析取范式
2. 再填满变项

主析取范式与主合取范式的求法

1 $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$$\quad\quad m_3 \quad\quad\quad\quad m_0$$

$$= m_0 \vee m_3 = \vee_{0,3}$$

2　填满命题变项

$P \to Q = \neg P \vee Q$

因为 $\neg P = \neg P \wedge（Q \vee \neg Q）$

$= （\neg P \wedge Q） \vee （\neg P \wedge \neg Q)$

因为 $Q = Q \wedge (P \vee \neg P)$

$= （P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$P \to Q \ =(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

$m_1 \qquad m_0 \qquad m_3$

$= m_0 \vee m_1 \vee m_3$

$= \vee_{0,1,3}$

填满变项的简便方法

$$\neg P \vee Q$$

$$= m^{0x} \vee m^{x1}$$

$$= m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

0　0

0　1　　　**0　1**

0　1

1　1

极小项和极大项的关系

- $\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)补}$ $\quad\quad$ $\neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)补}$

公式	名称
$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0
$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1
$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2
$P_1 \wedge P_2$	m_3

公式	名称
$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0
$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
$P_1 \vee P_2$	M_3

P_1	P_2	极小项	名称	*极大项*	名称
0	0	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0	$P_1 \vee P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1	$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
1	0	$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2	$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
1	1	$P_1 \wedge P_2$	m_3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0

主析取范式与主合取范式转换

- 主范式之间的转换

令 $A = \vee m_{il}$ 则 $\neg A = \vee m_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})}$

$A = \wedge M_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})补} = \wedge_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\}补)}$

令 $A = \wedge M_{il}$ 则 $\neg A = \wedge M_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})}$

$A = \vee_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})补} = \vee_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\}补)}$

A是由k个极大项的合取来表示，剩余2^n-k极大项*的*合取是$\neg A$

$\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)补}$ $\neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)补}$

主范式的求法与举例

综合举例

$(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$ 求主析与主合取范式

原式 $=\neg(P\vee\neg Q)\vee((\neg P\wedge(Q\wedge\neg R))\vee(P\wedge(\neg Q\vee R)))$

$=(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge R)$

$=m^{01X}\vee m^{010}\vee m^{10X}\vee m^{1X1}$

$\therefore$ 主析范式 $=\vee_{2,3,4,5,7}$

主范式的求法与举例

主析范式 $= \bigvee_{2,3,4,5,7}$

主合范式 $= \bigwedge_{(\{0,1,\ldots 7\} - \{2,3,4,5,7\}\text{补})}$

$= \bigwedge_{(\{0,1,\ldots,7\} - \{5,4,3,2,0\})}$

$= \bigwedge_{1,6,7}$

$(P\vee\neg Q)\to(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$

列写真值表验算

P_1	P_2	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1\wedge\neg P_2$	m_0	$P_1\vee P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1\wedge P_2$	m_1	$P_1\vee\neg P_2$	M_2
1	0	$P_1\wedge\neg P_2$	m_2	$\neg P_1\vee P_2$	M_1
1	1	$P_1\wedge P_2$	m_3	$\neg P_1\vee\neg P_2$	M_0

P	Q	R	$P\vee\neg Q$	$Q\wedge\neg R$	$\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

$(P\lor\neg Q)\to(\neg P\leftrightarrow(Q\land\neg R))$

列写真值表验算

P_1	P_2	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1\land\neg P_2$	m_0	$P_1\lor P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1\land P_2$	m_1	$P_1\lor\neg P_2$	M_2
1	0	$P_1\land\neg P_2$	m_2	$\neg P_1\lor P_2$	M_1
1	1	$P_1\land P_2$	m_3	$\neg P_1\lor\neg P_2$	M_0

P	Q	R	$P\lor\neg Q$	$\underline{Q\land\neg R}$	$\neg P\leftrightarrow(Q\land\neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

$(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$

列写真值表验算

P_1	P_2	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1\wedge\neg P_2$	m_0	$P_1\vee P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1\wedge P_2$	m_1	$P_1\vee\neg P_2$	M_2
1	0	$P_1\wedge\neg P_2$	m_2	$\neg P_1\vee P_2$	M_1
1	1	$P_1\wedge P_2$	m_3	$\neg P_1\vee\neg P_2$	M_0

P	Q	R	$P\vee\neg Q$	$Q\wedge\neg R$	$\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

$(P\vee\neg Q)\to(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$

列写真值表验算

P_1	P_2	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1\wedge\neg P_2$	m_0	$P_1\vee P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1\wedge P_2$	m_1	$P_1\vee\neg P_2$	M_2
1	0	$P_1\wedge\neg P_2$	m_2	$\neg P_1\vee P_2$	M_1
1	1	$P_1\wedge P_2$	m_3	$\neg P_1\vee\neg P_2$	M_0

P	Q	R	$P\vee\neg Q$	$Q\wedge\neg R$	$\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

主析范式 $=\bigvee_{2,3,4,5,7}$

主合范式 $=\bigwedge_{1,6,7}$

主析与主合之间的转换(简化方法)

举例

$A = \bigvee_{0,1,4,5,7}$

$= \bigwedge_{(\{0,1,\ldots\ldots,7\}-\{0，1，4，5，7\}补)}$

$= \bigwedge_{(\{0,1,\ldots\ldots,7\}-\{7，6，3，2，0\})}$

$= \bigwedge_{1,4,5}$

主析与主合之间的转换(简化方法)

已知 $\mathbf{A} = \bigwedge_{1,4,5}$

$$= \bigvee_{(\{0,1,\ldots\ldots,7\}-\{1,4,5\}\text{补})}$$

$$= \bigvee_{(\{0,1,\ldots\ldots,7\}-\{6,3,2\})}$$

$$= \bigvee_{0,1,4,5,7}$$

例：求主范式

$P \rightarrow Q$

主合范式 $= \neg P \vee Q \qquad M_1$

$= \bigwedge_1$

主析范式 $= \bigvee_{(\{0,1,2,3\} - \{1\}补)}$

$= \bigvee_{(\{0,1,2,3\} - \{2\}}$

$= \bigvee_{0,1,3}$

2.6 空公式 （补充）

求$P \lor \neg P$的主析取和主合取范式

主析取范式： $P \lor \neg P$

主合取范式： **空公式**

结论：永真式的主合取范式为空公式

矛盾式的主析取范式为空公式

主(析取)范式的用途

- 求公式的成真赋值与成假赋值
- 判断公式的类型
- 判断两个命题公式是否等值
- 解决实际问题

求公式的成真(假)赋值

- 若公式A中含有n个命题变项
  - 若A的主析取范式含s个极小项，则A有s个成真赋值
  - 其余2^n-s个赋值都是成假赋值

$(P\lor\neg Q)\to(\neg P\leftrightarrow(Q\land\neg R))$

P	Q	R	$P\lor\neg Q$	$Q\land\neg R$	$\neg P\leftrightarrow(Q\land\neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

判断公式的类型

- A为重言式当且仅当A的主析取范式含全部2^n个极小项
- A为矛盾式当且仅当A的主析取范式不含任何极小项
- A为可满足式当且仅当A的主析取范式中至少含一个极小项

结论：永真式的主合取范式为空公式
矛盾式的主析取范式为空公式

判断公式的类型–例1

$$\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$$

$$= \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q$$

$$= (P \wedge \neg Q) \wedge Q$$

$$= \mathrm{F}$$

矛盾式

判断公式的类型–例2

$$P \rightarrow (P \vee Q)$$

$$= \neg P \vee (P \vee Q)$$

$$= (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee (P \wedge (\neg Q \vee Q)) \wedge$$

$$(Q \wedge (\neg P \vee P))$$

$$= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee$$

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$= \vee_{0,\ 1,\ 2,\ 3}$$

重言式

单选题 1分

Setting

判断公式的类型：$(P \vee Q) \to R$

A 矛盾式

B 重言式

C 可满足

D 都不是

Submit

判断公式的类型–例3

$$(P \vee Q) \to R$$

$$= \neg (P \vee Q) \vee R$$

$$= (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$$

$$= m^{00x} \vee m^{xy1}$$

$$= \bigvee_{0,\,1,\,3,\,5,\,7}$$

000
001
001
011
101
111

可满足

判断两个命题是否等值

- $(P \to Q) \to R$与$(P \land Q) \to R$

$$(P \to Q) \to R = \bigvee_{1,3,4,5,7}$$

$$(P \land Q) \to R = \bigvee_{0,1,2,3,4,5,7}$$

$$\boldsymbol{(P \to Q) \to R \neq (P \land Q) \to R}$$

解决实际问题:例1

范式在逻辑设计方面有广泛的应用.

- 例1.某科研所要从3名科研骨干A,B,C中挑选1~2名出国进修。由于工作需要，选派是要满足以下条件.

（1） 若A去，则C同去。

（2）若B去，则C不能去。

（3）若C不去，则A或B可以去。

解：令P、Q、R分别表示派A、B、或C去.

由已知条件可得公式

$$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \rightarrow (P \vee Q))$$

- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \rightarrow (P \vee Q))$

该公式的成真赋值就是可行的选派方案

$$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \rightarrow (P \vee Q))$$

$$= (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (R \vee P \vee Q))$$

$$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee$$

$$(P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$=\bigvee_{1, 2, 5}$ 因而有3种选派方案

(1) C去，A，B都不去

(1) B去，A，C都不去

(1) A，C同去，B不去

解决实际问题：例2

范式在逻辑设计方面有广泛的应用.

- 例2.　安排课表，教语言课的教师希望将课程安排在第一或第三节；教数学课的教师希望将课程安排在第二或第三节；教原理课的教师希望将课程安排在第一或第二节. 如何安排课表，使得三位教师都满意.

解：令l_1、l_2、l_3分别表示语言课排在第一、第二、第三节.

m_1、m_2、m_3分别表示数学课排在第一、第二、第三节.

p_1、p_2、p_3分别表示原理课排在第一、第二、第三节.

三位教师都满意的条件是：

$(l_1 \vee l_3) \wedge (m_2 \vee m_3) \wedge (p_1 \vee p_2)$ **为真.**

三位教师都满意的条件是：

$(l_1 \vee l_3) \wedge (m_2 \vee m_3) \wedge (p_1 \vee p_2)$ **为真.**

将上式写成析取范式（用分配律）得：

$((l_1 \wedge m_2) \vee (l_1 \wedge m_3) \vee (l_3 \wedge m_2) \vee (l_3 \wedge m_3)) \wedge (p_1 \vee p_2)$

$\Leftrightarrow \cancel{(l_1 \wedge m_2 \wedge p_1)} \vee \cancel{(l_1 \wedge m_3 \wedge p_1)} \vee$

$(l_3 \wedge m_2 \wedge p_1) \vee \cancel{(l_3 \wedge m_3 \wedge p_1)} \vee$

$\cancel{(l_1 \wedge m_2 \wedge p_2)} \vee (l_1 \wedge m_3 \wedge p_2) \vee$

$\cancel{(l_3 \wedge m_2 \wedge p_2)} \vee \cancel{(l_3 \wedge m_3 \wedge p_2)}$

$\Leftrightarrow (l_3 \wedge m_2 \wedge p_1) \vee (l_1 \wedge m_3 \wedge p_2)$

可以取$(l_3 \wedge m_2 \wedge p_1)$**、**$(l_1 \wedge m_3 \wedge p_2)$**为1，得到两种排法.**

练习1：谁是说谎者

张三说李四在说谎, 李四说王五在说谎, 王五说张三、李四都在说谎, 请问三人到底谁说真话, 谁说假话?

设P: 张三说真话; Q: 李四说真话; R: 王五说真话.

由题意有

$$E = (P\leftrightarrow\neg Q)\wedge(Q\leftrightarrow\neg R)\wedge(R\leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q))$$

$$= \neg P\wedge Q\wedge\neg R$$

即E的成真赋值为010, 故张三说假话, 李四说真话, 王五说假话.

选作题（程序设计）

1. 任给一命题公式，由命题公式列出真值表（通过键盘输入公式并进行适当的语法检查，然后根据公式列出（显示）相应的真值表。
2. 由已知的真值表列写命题公式。
3. 任给一命题公式，计算命题公式的主析取范式和主合取范式

提交日期：2021年11月30日

2.7 推理形式

主要内容：

- 介绍推理形式的结构以及重言蕴涵的概念；
- 给出基本推理公式以及证明推理公式的几种不同方法和途径；

2.7 推理形式

推理形式：

将以自然语句描述的推理关系引入符号，抽象化并以条件式的形式表示出来得到推理形式，推理形式由**前提**和**结论**部分组成。

前提真，结论必真的推理形式为正确的推理形式。

重言蕴含：

给定两个公式 A，B，如果当A取值为真时，B 就必取值为真，便称 **A重言（永真）蕴涵B**，或称B 是A的逻辑推论。并用符号$A \Rightarrow B$表示。

2.7 推理形式

2.7.1 重言蕴含：

需注意**重言蕴含⇒**与**普通蕴含→**的区别

A重言蕴含B记作，$A \Rightarrow B$

注意：“⇒ ”不是逻辑联接词

A ⇒ B 当然也不同于A→B ！

重言蕴含举例

例1. 如果今天是周五, 那么我来上课。

今天是周五，

所以我来上课。

设 P：今天是周五, Q：今天我来上课

$$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$$

前提真, 结论也为真, 是正确的推理。

重言蕴含举例

例2. 如果今天是五，那么我来上课

今天不是周五

所以我不来上课

$$(P\rightarrow Q)\wedge\neg P\Rightarrow\neg Q$$

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

前提真，结论假！

不是正确的推理！

2.7.3 重言蕴含几个结果

(1) 如果$A \Rightarrow B$成立，若A为重言式，则B也是重言式。

(2) 若 $A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$同时成立，必有$A = B$; 反之亦然。

(3) 若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow C$同时成立，则有$A \Rightarrow C$

(4) 若 $A \Rightarrow B$且$A \Rightarrow C$同时成立，则$A \Rightarrow B \wedge C$

(5) 若$A \Rightarrow C$且$B \Rightarrow C$同时成立，则$A \vee B \Rightarrow C$

- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$　前提析取合并

重言蕴含的充要条件

定理2.8.1

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是**$A \rightarrow B$为重言式**。

定理2.8.2

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是**$A \wedge \neg B$为矛盾式**。

定理2.8.2

$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是**$A \wedge \neg B$为矛盾式**。

证明:

由定理2.8.1和命题公式等值式

$A \to B = \neg A \vee B = \neg (A \wedge \neg B)$，因此，

“$A \to B$是重言式”即等价于“$A \wedge \neg B$是矛盾式”

注意：$A \Rightarrow B$ 中 A自身不能必假！

若A永假，则$A \to B$ 肯定永真，虽然$A \Rightarrow B$ 也成立，但已失去意义！

2.8 基本的推理公式

证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:

1. 证 $A \rightarrow B$ 是重言式
2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
3. 真值表法
4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
5. 解释法
6. ……

基本推理公式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$，但 $P \vee Q \not=> P$

2. $\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow P$ 1式的直接推论 $P\wedge \neg Q => P$

3. $\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$ 1式的直接推论 $P\wedge \neg Q => \neg Q$

4. $P \Rightarrow P\vee Q$

5. $\neg P \Rightarrow P\rightarrow Q$ 2式的逆否，4式的推论。

6. $Q \Rightarrow P\rightarrow Q$ 3式的逆否，4式的推论。

7. $\neg P\wedge(P\vee Q) \Rightarrow Q$ 非P，而P∨Q又成立，只有Q成立

8. $P\wedge(P\rightarrow Q) \Rightarrow Q$ *假言推理，分离规则，7式的变形

9. $\neg Q\wedge(P\rightarrow Q) => \neg P$ 7式的变形 $\dfrac{P}{Q}$ $\dfrac{Q}{\neg P}$

基本推理公式

10. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$ *三段论

11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$ 类似10式

12. $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$ 10式的推论

13. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$ 10式的推论

14. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee \neg S) \Rightarrow \neg P\vee \neg R$ 9式的推论

15. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$ P=F时左=右，P=T时右=T

16. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ P=T时左=右，P=F时右=T

证明： $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$

$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q)$ 前提析取合并

$= ((P\vee Q)\rightarrow R))\wedge(P\vee Q)$ 分离规则

$\Rightarrow R$

- $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)=(P\vee Q)\rightarrow R$ 前提析取合并

证明： $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$

$$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R)$$

$$= (P\rightarrow Q)\wedge \mathbf{(R\rightarrow S)\wedge(\neg P\rightarrow R)}$$

$$\boxed{\Rightarrow} (P\rightarrow Q)\wedge(\neg P\rightarrow S)$$

$$= (\neg Q\rightarrow \neg P)\wedge(\neg P\rightarrow S)$$

$$\Rightarrow \neg Q\rightarrow S$$

$$= Q\vee S$$

证明：$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee\neg S) \Rightarrow \neg P\vee\neg R$

$$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee\neg S)$$

$$= (P\rightarrow Q)\wedge\mathbf{(R\rightarrow S)}\wedge\mathbf{(S\rightarrow\neg Q)}$$

$$\boxed{\Rightarrow} (P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow\neg Q)$$

$$= (\neg Q\rightarrow\neg P)\wedge(R\rightarrow\neg Q)$$

$$\Rightarrow R\rightarrow\neg P$$

$$= \neg P\vee\neg R$$

2.9 推理演算

- 出发点：

  直观地看出由前提A到结论B 的推演过程，且便于在谓词逻辑中使用。

- 方法

  （1）引入几条推理规则

  （2）利用基本推理公式

从前提A_1，A_2，…，A_n 出发，配合使用推理规则和基本推理公式，逐步推演出结论B。

2.9 推理演算

主要的推理规则：

(1) 前提引入规则；推理过程中可随时引入前提

(2) 结论引入规则；中间结论可作为后续推理的前提

(3) 代入规则；仅限于重言式中的命题变项

(4) 置换规则；利用等值公式对部分公式进行置换

(5) 分离规则；由A及$A \to B$成立，可将B分离出来

(6) 条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \to B$等价

$$P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R$$

条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$等价

例1 证明P→R是P→Q，Q→R的逻辑推论。

证明:

1. P→Q 前提引入
2. P 附加前提引入（条件证明规则）
3. Q 1、2分离
4. Q→R 前提引入
5. R 3、4分离

注：此题可直接使用推理公式10（三段论），以简化证明步骤。

$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) => P\rightarrow$

教材 例3: 证明 $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \Rightarrow S \vee R$

证明：

1. $P \vee Q$ 前提引入
2. $\neg P \to Q$ 1 置换
3. $Q \to S$ 前提引入
4. $\neg P \to S$ 2、3 三段论
5. $\neg S \to P$ 4置换
6. $P \to R$ 前提引入
7. $\neg S \to R$ 5、6三段论
8. $S \vee R$ 7置换

由该例可见，将 $P \vee Q$ 置换成 $\neg P \to Q$ 更便于推理

推理演算举例：

$$(\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S))\wedge((Q\rightarrow P)\vee\neg R)\wedge R \Rightarrow (P\leftrightarrow Q)$$

1.	$(Q\rightarrow P)\vee\neg R$	**前提引入**
2.	$R\rightarrow(Q\rightarrow P)$	1**置换**
3.	R	**前提引入**
4.	$Q\rightarrow P$	2、3**分离**
5.	$\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S)$	**前提引入**
6.	$(R\vee S)\rightarrow(P\rightarrow Q)$	5**置换**
7.	$R\vee S$	3 + **基本公式4**
8.	$P\rightarrow Q$	6、7**分离**
9.	$P\leftrightarrow Q$	4、8

(注：教材中的证明用了15个步骤，这里用一种更为简洁的方法)

推理演算举例：条件证明规则

例题6: $P\rightarrow(Q\rightarrow S), \neg R\vee P, Q \Rightarrow R\rightarrow S$

证明	(1) R	附加前提引入
	(2) $\neg R\vee P \ = R\rightarrow P$	前提引入
	(3) P	(1)(2)分离规则
	(4) $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	前提引入
	(5) $Q\rightarrow S$	(3)(4)分离规则
	(6) Q	前提引入
	(7) S	(5)(6)分离规则
	(8) $R\rightarrow S$	条件证明规则

2.10 归结法

- 出发点：

  基于推理规则的方法，规则与公式较多，技巧较高。

  能否仅建立一条推理规则，便于机器证明与程序实现。

- 理论依据：定理2.8.2

  $A \Rightarrow B$ 成立当且仅当 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式。

2.10 归结法

- 归结法步骤：

1. 从$A\wedge\neg B$ 出发（欲证$A\Rightarrow B$，等价于证 $A\wedge\neg B$ 是矛盾式）

2. 建立子句集S，将$A\wedge\neg B$ 化成合取范式：

   $C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_n$

   其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

   $S = \{ C_1，C_2，\ldots，C_n \}$

3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。

4. 直至归结出矛盾式（□）。

2.10 归结法

- 归结法推理规则

设　子句1　$C1 = L \vee C1'$

子句2　$C2 = \neg L \vee C2'$

(其中L和¬L为互补对)

$C1 = \neg L \rightarrow C1'$

$C2 = \neg C2' \rightarrow \neg L$　因而

新子句　R（C1，C2）$= C1' \vee C2'$

2.10 归结法

- 归结法推理规则 (续)

$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1，C2)$需证明。

$C1 = L \vee C1'$

$C2 = \neg L \vee C2'$

证明:

$C1 \wedge C2 \rightarrow C1' \vee C2'$为永真式 （定理2.8.1）

设在任一解释下，C1和C2均为真

若$L = T$，则$\neg L = F$，从而必有$C2' = T$ （$\because$C2为真）

若$L = F$，则$\neg L = T$，从而必有$C1' = T$ （因为C1为真）

综合上述均有$C1' \vee C2'$为真

因此，$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1，C2)$

2.10 归结法 证明举例

例1：证明 $(P\rightarrow Q)\wedge P \Rightarrow Q$

证明：1. 先将$(P\rightarrow Q)\wedge P\wedge\neg Q$ 化成合取范式

$$(\neg P\vee Q)\wedge P\wedge\neg Q$$

2. 建立子句集 $S=\{\neg P\vee Q,\ P,\ \neg Q\}$

$S = \{\neg P \vee Q,\ P,\ \neg Q\}$

2.10 归结法 证明举例

归结过程:

(1) $\neg P \vee Q$

(2) P

(3) $\neg Q$

(4) Q (1) (2)归结

(5) $\square$ (3) (4)归结

归结出空子句□(矛盾式) 证明结束。

例2

例2: 用归结法证明 $((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)) \Rightarrow (P\rightarrow R)$

证明:

先将 $(P\rightarrow Q) \wedge (Q\rightarrow R) \wedge \neg(P\rightarrow R)$ 化成合取范式

$$(\neg P\vee Q) \wedge (\neg Q\vee R) \wedge P \wedge \neg R$$

建立子句集 $S = \{ \neg P\vee Q,\ \neg Q\vee R,\ P,\ \neg R \}$

$$S = \{ \neg P \vee Q,\ \neg Q \vee R,\ P,\ \neg R \}$$

归结过程:

(1) $\neg P \vee Q$

(2) $\neg Q \vee R$

(3) P

(4) $\neg R$

(5) $\neg P \vee R$　　(1) (2)归结

(6) R　　(3) (5)归结

(7) □　　(4) (6)归结

归结出空子句□(矛盾式)　证明结束。

例3 $(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(Q\rightarrow(R\rightarrow A))\Rightarrow P\rightarrow(Q\rightarrow A)$

证明：先将

$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(Q\rightarrow(R\rightarrow A))\wedge\neg(P\rightarrow(Q\rightarrow A))$化为合取范式。

$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(Q\rightarrow(R\rightarrow A))\wedge\neg(P\rightarrow(Q\rightarrow A))$

$=(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg R\vee A)\wedge P\wedge Q\wedge\neg A$。

建立子句集

$S=\{\neg P\vee\neg Q\vee R, \neg Q\vee\neg R\vee A, P, Q, \neg A\}$

S={¬P∨¬Q∨R, ¬Q∨¬R∨A，P，Q，¬A}

- 归结过程

（1） ¬P∨¬Q∨R

（2） ¬Q∨¬R∨A

（3） P

（4） Q

（5） ¬A

（6） ¬Q∨R　　　　（1）　（3）归结

（7） ¬R∨A　　　　（2）　（4）归结

（8） R　　　　　　（4）　（6）归结

（9） ¬R　　　　　（5）　（7）归结

（10） □　　　　　（8）　（9）归结

2.10 归结法 证明举例

补充：推理规则应用题，构造下面推理的证明：

例1：如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。

或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。

A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。

因此，小李没向B队投球。

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。

解：先将简单命题符号化。

P：小张守第一垒；

Q：小李向B队投球；

R：A队取胜；

S：A队成为联赛第一名。

前提：$(P \wedge Q) \rightarrow R$，$\neg R \vee S$，$\neg S$，$P$

结论：$\neg Q$

前提：$(P\wedge Q)\rightarrow R$ $(\neg(P\wedge Q)\vee R)$，$\neg R\vee S$，$\neg S$，P

结论：$\neg Q$

证明：

(1) Q	结论的否定引入
(2) $\neg R\vee S$	前提引入
(3) $\neg S$	前提引入
(4) $\neg R$	(2) (3)归结
(5) $\neg(P\wedge Q)\vee R$	前提引入
(6) $\neg(P\wedge Q)$	(4) (5)归结
(7) $\neg P\vee\neg Q$	(6)置换
(8) P	前提引入
(9) $\neg Q$	(7)(8)归结
(10) $Q\wedge\neg Q$	(1)(9)合取

例3：请根据下面事实，找出凶手：

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。
3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。
4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。
5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。
6. 经理有钱且清洁工不富裕。
7. 午夜时屋里灯灭了。

令 A:清洁工谋害了经理。 B:秘书谋害了经理。

C:谋害发生在午夜前。 D:秘书的证词是正确的.

E:午夜时屋里灯光灭了。H:清洁工富裕.

G:经理有钱.

命题符号为：

$A \vee B,\ A \rightarrow \neg C,\ D \rightarrow C,\ \neg D \rightarrow \neg E,\ H \rightarrow \neg A,\ G \wedge \neg H,\ E$

$\Rightarrow ?$

$A \vee B, A \to \neg C, B \to C, D \to C\ \neg D \to \neg E, H \to \neg A, G \wedge \neg H, E$
$\Rightarrow ?$

解: (1) E 前提引入

(2) $\neg D \to \neg E$ 前提引入

(3) D (2) 逆否之后和(1) 分离

(4) $D \to C$

结果是秘书谋害了经理

(5) C (3)(4)分离

(6) $A \to \neg C$ 前提引入

(7) $\neg A$ (6) 逆否之后和(5) 分离

(8) $A \vee B\ (\neg A \to B)$ 前提引入

(9) B (7)(8)分离

例4：判断下列推理是否正确。

若一个数是实数，则它是复数；若一个数是虚数，则它也是复数；一个数既不是实数，又不是虚数，所以它不是复数。

P：一个数是实数

R：一个数是虚数

Q：一个数是复数

则原题可符号化为：

$P \rightarrow Q$，$R \rightarrow Q$，$\neg P \wedge \neg R \Rightarrow \neg Q$

$$P\rightarrow Q,\ R\rightarrow Q,\ \neg P\wedge\neg R\Rightarrow\neg Q$$

证明：令

$S=(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)\wedge(\neg P\wedge\neg R)\rightarrow\neg Q$

则

$S=\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge(\neg P\wedge\neg R))\vee\neg Q$

$=(P\wedge\neg Q)\vee(R\wedge\neg Q)\vee P\vee R\vee\neg Q$

$= P\vee R\vee\neg Q$ 吸收律 $A\vee(A\wedge B) = A$

当Q取T，P、R取F时，S为F，即S不是重言式，

所以，推理不成立。

少了一个条件：一个复数不是实数就是虚数

第二章小结:主要内容

2.1 等值定理

2.2 等值公式

2.3 命题公式与真值表的关系

2.4 联接词的完备集

2.5 对偶式

2.6 范式

2.7 推理形式

2.8 基本的推理公式

2.9 推理演算

2.10 归结推理法

第二章小结

- 等值定理
  - 若在任一解释下，公式A和B的真值都相同，则称A和B是等值的
- 等值公式
  - 置换规则
  - 基本的等值公式
  - 常用等值公式
  - 等值演算及其应用
- 命题公式与真值表的关系
  - 从取T的行来写
  - 从取F的行来写

第二章小结

- 联结词的完备集
  - **可以证明，**{¬，∨}，{¬，∧}，{¬，→}，{↑}，{↓}**都是联结词功能完全组；**
  - **而**{¬，↔}，{¬}，{∧}，{∨}，{∧，∨}**都不是联结词功能完全组**；
  - **使用联结词集**{¬，∧，∨}.

第二章小结

- 对偶式
  - 定义：$\boldsymbol{A}$中出现的$\vee, \wedge, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{F}$ 分别以$\wedge, \vee, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{T}$ 代换
  - 6个定理
- 范式
  - 析取范式，合取范式
  - 极小项，主析取范式，极大项，主合取范式
  - 主范式的4个用途

第二章小结

- 推理形式
  - 自然语句描述的推理关系 – 引入符号，抽象化并以条件式表示出来
  - 重言蕴涵
  - 重言蕴涵的5个结果
- 基本推理公式
  - 16个？

    $P \wedge Q \Rightarrow P$　　　　$P \Rightarrow P \vee Q$

    $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$ （假言推理）

    $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$ (三段论)

第二章小结

- 基本推理公式
  - 2个定理

    $A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是**$A \to B$为重言式**。

    $A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是**$A \land \neg B$为矛盾式**。

推理演算

- <u>主要的推理规则</u>

（1）前提引入规则；*推理过程中可随时引入前提*

（2）结论引入规则；*中间结论可作为后续推理的前提*

（3）代入规则；*仅限于重言式中的命题变项*

（4） 置换规则；*利用等值公式对部分公式进行置换*

（5）分离规则；*由A及A→B成立， 可将B分离出来*

（6） 条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$等价

归纳法

- <u>归结法步骤</u>

1. 从$A\wedge\neg B$ 出发（欲证$A \Rightarrow B$，等价于证 $A\wedge\neg B$ 是矛盾式）

2. 建立子句集S，将$A\wedge\neg B$ 化成合取范式：

   $C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_n$

   其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

   $S = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}$

3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。

4. 直至归结出矛盾式（□）。

第二章小结与教学要求

1. 掌握和理解命题公式等值的概念，掌握命题公式等值的判别方法；
   – 列真值表
   – 公式的等价变换
   – 主范式
2. 熟悉基本的等值公式，能在理解的基础上熟记并能在等值演算中灵活使用；
3. 理解命题公式与真值表的关系，能够由给定的真值表写出相应的命题公式；

第二章小结与教学要求

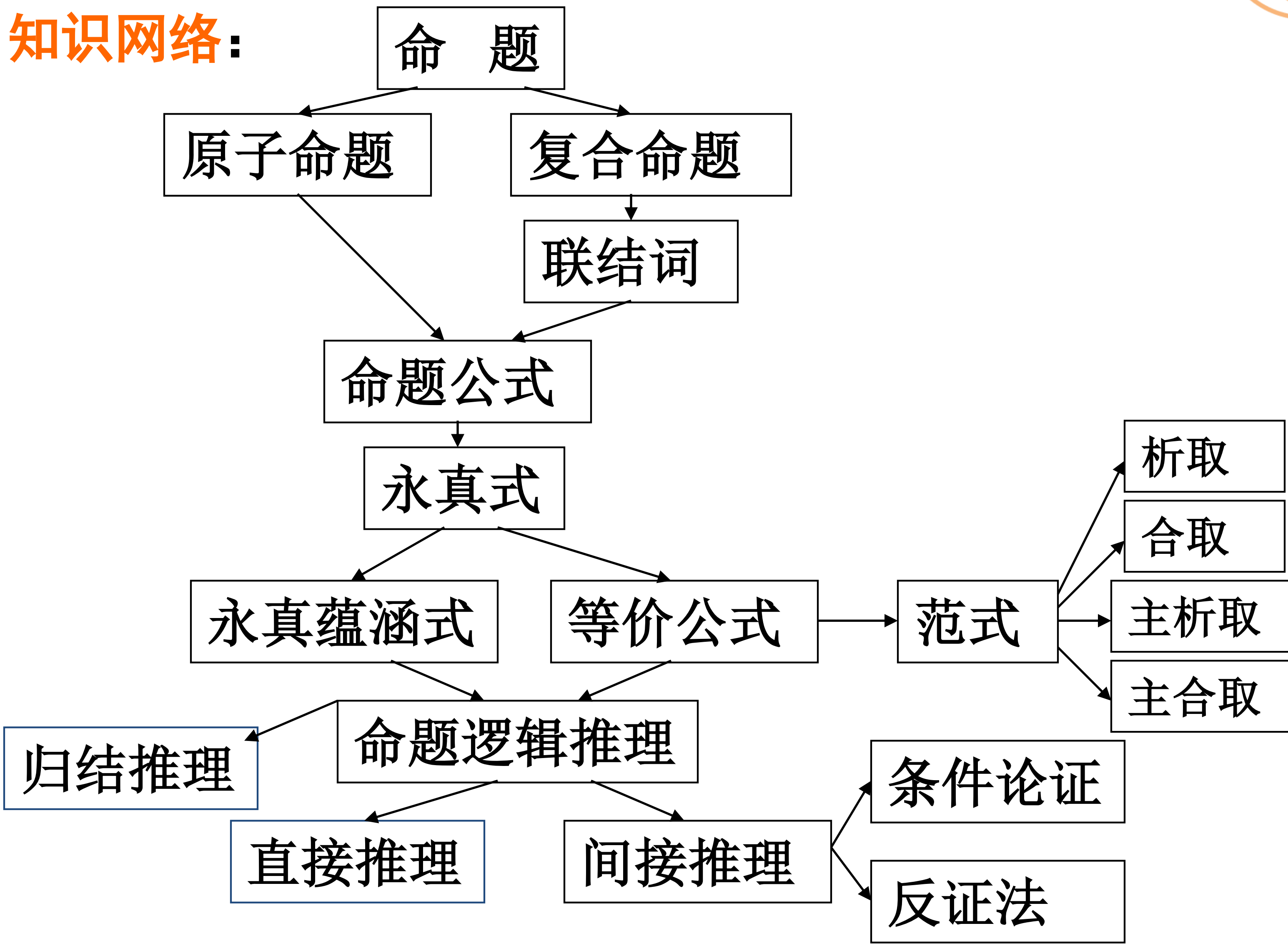
4. 了解联结词完备集的概念，掌握判别联结词完备集的方法；
5. 理解范式的概念和范式定理，能够将命题公式熟练地化成相应的主析取范式和主合取范式；
6. 理解推理形式的基本结构，掌握重言蕴涵的概念和主要结果；

第二章小结与教学要求

7. 熟悉基本的推理公式，掌握推理公式的不同证明方法；
   – $A \rightarrow B$ 是重言式、$A \wedge \neg B$ 为矛盾式、真值表法、$\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法、解释法
8. 理解基本的推理规则，掌握使用推理规则进行推理演算的方法；
9. 理解归结推理规则，掌握用归结推理法证明的方法。

第一章和第二章　小结

知识网络：



刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn