1 正定矩阵

1. 证明: 正定矩阵都是可逆的。
2. 已知A是一个$m\times n$的矩阵，并且它的秩为n, 证明: A^TA是个正定矩阵 (提示: 利用判据 $x^TSx>0$).
3. 已知A可逆，且A和$I-A$都是正定矩阵, 证明: $A^{-1}-I$也是正定矩阵.
4. 我们课程中讲到正定矩阵的三个判据。这里我们证明正定矩阵的第四个判据: 正定矩阵S的主元都是正的(做消元操作中用到的矩阵元素). 下面我们来证明:
   (a) 证明: $S_{11}>0$ (提示: 利用判据 $x^TSx>0$, 取一个特殊向量x).
   (b) 我们可以做消元变换，使得矩阵第一列的除了第一个元素都是0，我们得到 $S=E_{n1}(-a_n)\dots E_{21}(-a_1)S'$, 这里$S'$的第一列为 $\begin{bmatrix}1\\0\\ \cdot\\ \cdot\\0\end{bmatrix}$. 证明: $S'_{22}>0$ (提示: 利用判据 $x^TSx>0$, 取一个特殊向量x).
   (c) 类似的， 证明: S的所有主元都是正的.
   (d) 证明: S有LDU分解.
   (e) 我们之前证明了一个正定矩阵的主元都是正的, 证明: 如果一个矩阵的主元都是正的, 那么它一定是正定的.
5. 证明: 正定矩阵的第五个判据(充要条件): n个左上行列式都是正的 (分别考虑左上角的方矩阵，大小从1到n) (提示: 利用上题结论).
6. 把下列二次型对应的矩阵S写出来，并给出所有λ的值使得二次型是正定的:
   (a) $f=5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.
   (b) $f=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$.
   (c) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.
   (d) $f=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.
   (e) $f=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$.
7. 给定一个正定矩阵:
   (a) 求 $\frac{x^TSx}{x^Tx}$ 的最大值 ($x\neq 0$)，并给出x_1的形式，答案用 S 的特征值来表示。(提示: 利用S可以正交对角化)
   (b) 如果我们现在现在 x 正交于 x_1, 那么 $\frac{x^TSx}{x^Tx}$ 的最大值是多少? 求出所对应的向量 x_2.

2 特征值，特征向量的一个应用

测不准原理。在量子力学的框架里面，物理系统被一个波函数Ψ来描述， 而物理观测量f是被一个算子来描述。一个重要的特征是，对应于一个给定的物理量H (比如能量)， 对于一个一般量子系统的观测不会给我们确定的观测量。但是有 一些特殊的波函数 Φ_n，我们的观测会给出确定的物理量E_n。 这样的波函数称之为本征态(Eigenstate)， 而这样的确定的物 理量称之为本征值(Eigenvalue)。 数学的描述就是

$$H\Phi_n = E_n\Phi_n \tag{1}$$

这个方程称之为本征方程。我们可以把上述框架用我们学习的线性代数 来描述. 用我们矩阵的语言就是说: 一个物理量对应于一个矩阵A, 一个 一般的系统态被一个向量x描述。 它的本征态对应于一个特征向量 x_n， 它的本征值对应于特征值 λ_n。 本征方程就是我们的特征方程:

$$Ax_n = \lambda_n x_n \tag{2}$$

我们现在就用矩阵的语言(量子力学也称之为矩阵力学)来做一些量子力学性质的模拟。

1. 我们的物理观测量是实数，但是一个一般实矩阵的特征值可能是复 数。我们其实需要考虑对称矩阵。证明： 对于一个对称矩阵，它的 特征值都是实数。我们接下来考虑的都是对称矩阵。

2. 考虑一个物理量A, 它有n个线性独立的特征向量: 证明： 我们通过这 些向量可以构造一组正交归一基 $x_1, \ldots, x_n$.

3. 一个任意的量子力学系统x(被一个向量描述), 我们把这个向量的长度定为一: $x^Tx = 1$. 那么任何一个x都可以由 上述正交归一基来展开

$$x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \tag{3}$$

证明: $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1$.

4. 如果一个态不是关于M的本征态，那么物理量M就没有确定的值。但是我们可以得到一个期望值

$$\overline{M} = x^TMx \tag{4}$$

这个物理量对应的对应的方差为$\sigma_M^2 = (M - \bar{M}I)^2$. 证明:

$$\overline{\sigma_M^2} = \overline{M^2} - \overline{M}^2. \tag{5}$$

误差定义为$\sigma_M = \sqrt{\overline{\sigma_M^2}}$. 问题: $\sigma_M = 0$时候对M和态x的条件是?

5. 量子力学里面很重要的一个现象是测不准原理。假设有两个物理 量p和q, 它们满足一个矩阵方程$PQ + QP = I$. 假设P和Q的期望值 都是0, 证明:

$$\sigma_P\sigma_Q \geq \frac{1}{2} \tag{6}$$

这意味着对于这两个物理量，我们不能使得两个物理量的误差都非常小。一个例子是位置和动量，这两个 物理量在量子力学里面满足上面这个不等式，所以我们不能同时精确的测量位置和动量。如果位置是确定的($\sigma_x = 0$), 那么位置就完全不能确定。 提示：考虑不等式$|(aQ+P)x|2 \geq 0$，这里a是任意实数。

3 奇异值分解

求下列矩阵的奇异值分解：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$