高代选讲　第九周作业

1. (a) pf: 设 $v_1, v_2 \in U_\lambda$，且 $(\sigma-\mu I)v_1=(\sigma-\mu I)v_2$，下利用反证法证 $v_1=v_2$.

假设 $v_1 \neq v_2$，由 $v_1, v_2 \in U_\lambda \Rightarrow v_1 - v_2 \in U_\lambda$

$$(\sigma-\mu I)v_1=(\sigma-\mu I)v_2 \Rightarrow (\sigma-\mu I)(v_1-v_2)=0 \quad ①$$

由 $v_1-v_2\in U_\lambda$，设 k 是使 $(\sigma-\lambda I)^k(v_1-v_2)=0$ 的最小整数 $(k\geq 1)$

即 $(\sigma-\lambda I)^k(v_1-v_2)=0$ 且 $(\sigma-\lambda I)^{k-1}(v_1-v_2)\neq 0$.

则由①式 $(\sigma-\lambda I)^{k-1}(\sigma-\mu I)(v_1-v_2)=0$

$$\Rightarrow (\sigma-\lambda I)^k(v_1-v_2)-(\sigma-\lambda I)^{k-1}(\sigma-\mu I)(v_1-v_2)=0$$

$$\Rightarrow (\sigma-\lambda I)^{k-1}(\mu-\lambda)I(v_1-v_2)=0$$

$$\Rightarrow (\mu-\lambda)(\sigma-\lambda I)^{k-1}(v_1-v_2)=0.$$

而 $\mu-\lambda\neq 0$，$(\sigma-\lambda I)^{k-1}(v_1-v_2)\neq 0$，显然矛盾

因此有 $v_1-v_2=0$，即 $v_1=v_2$

则 $(\sigma-\mu I)|_{U_\lambda}$ 是单射

(b) pf:

我们考虑建立一个序列 $\{0\}=V_0\subseteq V_1\subseteq\cdots\subseteq V_n=U$，其中 V_i 是 σ 不变子空间

对于 V_0，取 σ 一个特征值 μ_1 s.t. $\exists\alpha_1\in U$ 使 $\sigma(\alpha_1)=\mu_1\alpha_1$

因此 $V_1=\{\alpha_1\}$ 是 σ 不变子空间 且满足 $V_0\subseteq V_1$

以归纳法，设 $V_0\subseteq\ldots\subseteq V_k$ 均已建立好，

因为 V_k 是 σ 不变的，故存在诱导变换 $\bar\sigma: U/V_k\to U/V_k$

取 $\bar\sigma$ 的一个特征值 μ_{k+1} s.t $\exists\,\overline{\alpha_{k+1}}\in U/V_k$ 使 $\bar\sigma(\overline{\alpha_{k+1}})=\mu_{k+1}\overline{\alpha_{k+1}}$

$$\Rightarrow \overline{\sigma(\alpha_{k+1})}=\overline{\mu_{k+1}\alpha_{k+1}}$$

$$\Rightarrow \sigma(\alpha_{k+1})-\mu_{k+1}\alpha_{k+1}\in V_k.$$

设 $\sigma(\alpha_{k+1})-\mu_{k+1}\alpha_{k+1}=v_k$，其中 $v_k\in V_k$

那么 $\sigma(\alpha_{k+1})=v_k+\mu_{k+1}\alpha_{k+1}\in \operatorname{span}\{V_k,\alpha_{k+1}\}$ $(\alpha_{k+1}\neq 0)$

设 $V_{k+1}=\operatorname{span}\{\alpha_{k+1}, V_k\}$，它是 σ 不变子空间

由此，我们得到序列 $V_0,\ldots V_n$，

以及建立它们时对应的特征值 $\mu_1\ldots\mu_n$，特征根 $\alpha_1\ldots\alpha_n$

$$\sigma(\alpha_1\ldots\alpha_n)=(\alpha_1\ldots\alpha_n)\begin{pmatrix}\mu_1 & & *\\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots\ \mu_n\end{pmatrix}$$，其中 $C=\begin{pmatrix}\mu_1 & \cdots & *\\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix}$ 是上三角

那么 σ 的特征值 λ 代数重数即为 $\mu_1\ldots\mu_n$ 中出现 λ 的次数

$$\left(\det(\lambda I-A)=\det(\lambda PP^{-1}-PCP^{-1})=\det(P)\det(\lambda I-C)\det(P^{-1})=\det(\lambda I-C)=(\lambda-\mu_1)\cdots(\lambda-\mu_n)\right)$$

设 λ 代数重数为 m，μ_i 序列中出现 λ 的是 $\mu_{i_1}\ldots\mu_{i_m}$

它们对应 $\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_m}$，我们试图将 $i_1\ldots i_m$ 重排到 $1\ldots m$ 的位置.

我们仍建立上述序列，但采取方式是取 $\bar\sigma$ 特征值时优先选取 λ 作为特征值

设以此建立的序列是 $\{0\}=V_0'\subseteq V_1'\ldots\subseteq V_n'=U$

对应特征值 $\mu_1'\cdots\mu_k'\mu_{k+1}'\cdots\mu_l'\ldots\mu_n'$ 和特征根 $\alpha_1'\ldots\alpha_n'$

下证若 $\mu_1'=\ldots=\mu_k'=\lambda$，$\mu_{k+1}'\neq\lambda$，则 $\mu_{k+1}'\neq\lambda\cdots\mu_n'\neq\lambda$

用反证法，假设 $\mu_l'=\lambda$ 且 $l\geq k+2$，l 是满足条件的最小整数.

构造时有 $\sigma(\alpha_l)-\lambda\alpha_l = c_1\alpha_1+\cdots+c_{l-1}\alpha_{l-1}\in V_{l-1}$

$$\Rightarrow\quad (\sigma-\lambda I)\alpha_l = c_1\alpha_1+\cdots+c_{l-1}\alpha_{l-1}$$

$$\Rightarrow\quad (\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-1})(\sigma-\lambda I)\alpha_l$$

$$=(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-1})(c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k)+(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-1})c_{k+1}\alpha_{k+1}$$
$$+\cdots+(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-1})c_{l-1}\alpha_{l-1}$$

设 $(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-1})c_i\alpha_i=\beta_i$

即 $(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-1})(\sigma-\lambda I)\alpha_l=\beta_1+\cdots+\beta_k+\beta_{k+1}+\cdots+\beta_{l-1}$

其中 $i=1\sim k$ 时，$\beta_i=(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-1})c_i\alpha_i$

$$=c_i(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-2})(\sigma(\alpha_i)-\mu_{l-1}\alpha_i)$$
$$=c_i(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-2})(\lambda-\mu_{l-1})\alpha_i$$
$$=\cdots$$
$$=c_i(\lambda-\mu_{k+1})\cdots(\lambda-\mu_{l-1})\alpha_i\quad\in V_k$$

$i\geq k+1$ 时

$$\beta_i=(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-1})c_i\alpha_i$$
$$=c_i(\sigma-\mu_{k+1})\cdots\widehat{(\sigma-\mu_i)}\cdots(\sigma-\mu_{l-1})(\sigma-\mu_i)\alpha_i$$
$$=c_i(\sigma-\mu_{k+1})\cdots\widehat{(\sigma-\mu_i)}\cdots(\sigma-\mu_{l-1})(\sigma\alpha_i-\mu_i\alpha_i)$$
$$=c_i(\sigma-\mu_{k+1})\cdots\widehat{(\sigma-\mu_i)}\cdots(\sigma-\mu_{l-1})\,0=0.$$

故 $(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-1})(\sigma-\lambda I)\alpha_l\in V_k$

另一方面 $(\sigma-\mu_{k+1})\cdots(\sigma-\mu_{l-1})(\sigma-\lambda I)\alpha_l$

$$=(\sigma-\lambda I)(\sigma-\mu_{k+1}I)\cdots(\sigma-\mu_{l-1}I)\alpha_l$$
$$=(\sigma-\lambda I)(\sigma-\mu_{k+1}I)\cdots(\lambda-\mu_{l-1})\alpha_l$$
$$=\cdots=(\lambda-\mu_{k+1})\cdots(\lambda-\mu_{l-1})(\sigma-\lambda I)\alpha_l\in V_k$$

也即 $(\sigma-\lambda I)\alpha_l\in V_k$，这与我们假设不符.

故我们可以取到 $\{0\}=V_0'\subseteq\cdots\subseteq V_n'=U$，

其中对应前 m 个特征值均为 λ（λ 的特征~~重数~~是 m）.

下考察 $\alpha_i\ (1\leq i\leq m)$

α_1 满足 $\sigma\alpha_1=\lambda\alpha_1\Rightarrow(\sigma-\lambda I)\alpha_1=0\Rightarrow\alpha_1\in U_\lambda$

设 α_{k-1} 也有 $\alpha_{k-1}\in U_\lambda\quad(1<k\leq m)$

则 $\sigma\alpha_k-\lambda\alpha_k\in V_{k-1}\subseteq U_\lambda$

$$\Rightarrow\quad(\sigma-\lambda I)\alpha_k\in U_\lambda$$
$$\Rightarrow\quad\alpha_k\in U_\lambda\ (\text{由 } U_\lambda \text{ 定义})$$

也即 $\mathrm{span}\{\alpha_1\ldots\alpha_m\}\subseteq U_\lambda$.

则 $\dim U_\lambda\geq\lambda$ 的代数重数 ①

考虑到 $U_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus U_{\lambda_s}\subseteq\lambda$（课上已证）

则有 $\dim U_{\lambda_1}+\cdots+\dim U_{\lambda_s}\leq n$.

另一方面 由①

$\dim U_{\lambda_1}+\cdots+\dim U_{\lambda_s}\geq\sum\lambda_i$ 的代数重数 $=n$

则 $\dim U_{\lambda_1}+\cdots+\dim U_{\lambda_s}=n$

且对于每一个 U_λ 有 $\dim U_\lambda=\lambda$ 的代数重数.

2. pf: $\forall i \geq 1$ $cA^i = c\begin{pmatrix} A_1^i & & 0 \\ & A_2^i & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_s^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cA_1^i & & 0 \\ & cA_2^i & \\ & & \ddots \\ 0 & & & cA_s^i \end{pmatrix}$

则 $f(A) = A^p + c_{p-1}A^{p-1} + \cdots + c_0$

$= \begin{pmatrix} A_1^p & & 0 \\ & A_2^p & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_s^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{p-1}A_1^{p-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{p-1}A_s^{p-1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} c_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} A_1^p + c_{p-1}A_1^{p-1} + \cdots + c_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s^p + c_{p-1}A_s^{p-1} + \cdots + c_0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} f(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(A_s) \end{pmatrix}$

因此 $m_A(A) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} m_A(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & m_A(A_s) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow m_A(A_i) = 0,\ \forall i$

因此 $m_{A_i}(x) \mid m_A(x),\ \forall i$

所以 $m_A(x)$ 是 $m_{A_i}(x)$ 的公倍式

$\forall m(x)$，若有 $m_{A_i}(x) \mid m(x)$ 则必有 $m(A_i) = 0$ $\forall A_i$

因此 $\begin{pmatrix} m(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & m(A_s) \end{pmatrix} = m(A) = 0$

所以 $m(x)$ 也是 A 的零化多项式，下证 极小多项式必是任何零化多项式的因式

设 $m(x) = m_A(x)q(x) + r(x)$（带余除法）

则 $r(x) = m(x) - m_A(x)q(x)$

有 $r(A) = m(A) - m_A(A)q(A) = 0$

且 $\deg r(x) < \deg m_A(x)$

因此只能有 $r(x) = 0$，$m(x) = m_A(x)q(x)$，

即 $m_A(x) \mid m(x)$

因此 $m_A(x)$ 是 $m_{A_i}(x)$ 的最小公倍式

3. (a) 2. 中已证极小多项式是任何零化多项式的因式

而 J 的特征多项式 $f(x) = (x-\lambda)^m$ 是一个零化多项式

即 极小多项式必是 $m(x) = (x-\lambda)^i$ $(1 \leq i \leq m)$ 的形式

下讨论 $(J-\lambda I)^i$ 的形状，证 $(J-\lambda I)^i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ $\}$ i 个

$i=1$ 时 $J - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ 显然成立

设 $i = k-1$ 也成立

$(J-\lambda I)^k = (J-\lambda I)^{k-1}(J-\lambda I) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k-1} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

则由归纳法，假设成立，有 $(J-\lambda I)^m = 0$ 且 $(J-\lambda I)^{m-1} \neq 0$

故 $m(x) = (x-\lambda)^m$

(b) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -8 \\ -3 & \lambda+1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -8 \\ +2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3$

同(a) $m(x)$ 必是 $(x+1)^3$ 的因式

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

即 $m(x) = (x+1)^2$.

4. pf: (1) $\sigma(e_1 \dots e_n) = (e_1 \dots e_n)\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma(e_1) = \lambda e_1 \\ \sigma(e_2) = e_1 + \lambda e_2 \\ \sigma(e_3) = e_2 + \lambda e_3 \\ \vdots \\ \sigma(e_n) = e_{n-1} + \lambda e_n \end{cases}$$

设 U 是 V 的一个包含 e_n 的 σ 不变子空间

则 $\sigma(e_n) = e_{n-1} + \lambda e_n \in U \Rightarrow e_{n-1} \in U$

$\sigma(e_{n-1}) = e_{n-2} + \lambda e_{n-1} \in U \Rightarrow e_{n-2} \in U$

$\vdots$

$\sigma(e_2) = e_1 + \lambda e_2 \in U \Rightarrow e_1 \in U$

因此 $e_1, \dots, e_n \in U \Rightarrow U$

而 $\mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\} = V \subseteq U \subseteq V$

则 $U = V$，V 中包含 e_n 的 σ 不变子空间只有 V.

(2) 设 U 是 V 的 σ 不变子空间且 $U \neq \{0\}$

则 $\exists\, u \neq 0$ 且 $u \in U$

设 $u = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$，$c_i$ 中不全为 0，不妨设 $c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$ $(1 \leq k \leq n)$

则 $u = c_k e_k + \dots + c_n e_n$

$\sigma(u) = \sigma(c_k e_k + \dots + c_n e_n)$

$= c_k \sigma(e_k) + \dots + c_n \sigma(e_n)$

$= c_k e_{k-1} + (\lambda c_k + c_{k+1}) e_k + (\lambda c_{k+1} + c_{k+2}) e_{k+1} + \dots + \lambda e_n \in U$

则 $\sigma(u) - \lambda u = c_k e_{k-1} + c_{k+1} e_k + \dots + c_n e_{n-1} \in U$

设 $u' = c_k e_{k-1} + c_{k+1} e_k + \dots + c_n e_{n-1}$

类似地 $\sigma(u') - \lambda u' = c_k e_{k-2} + c_{k+1} e_k + \dots + c_n e_{n-2} \in U$

以此进行 $(k-1)$ 次，得

$\alpha = c_k e_1 + \dots + c_n e_{n-k+1} \in U$

$\sigma(\alpha) = (\lambda c_k + c_{k+1}) e_1 + \dots + (\lambda c_{n-k} + c_n) e_{n-k} + \lambda c_n e_{n-k+1} \in U$

$\Rightarrow \sigma(\alpha) - \lambda\alpha = c_{k+1} e_1 + \dots + c_n e_{n-k} \in U$

设 $\alpha' = c_{k+1} e_1 + \dots + c_n e_{n-k} \in U$

类似地 $\sigma(\alpha') - \lambda\alpha' = c_{k+2} e_1 + \dots + c_n e_{n-k-1} \in U$

（设 c_l 为 $c_k \dots c_n$ 中最后一个不为 0 的数）

则进行 $(l-k)$ 次，

得：$c_l e_1 \in U$

$\Rightarrow e_1 \in U$ □

(3) 设 $V_1 \oplus V_2 = V$，且 V_1、V_2 非平凡，均为 σ 的不变子空间

由(2) $e_1 \in V_1$，$e_1 \in V_2$

则：

$\{e_1\} \subseteq V_1 \cap V_2$，$V_1$, V_2 交非空，与 $V_1 \oplus V_2$ 矛盾

故不存在 $V = V_1 \oplus V_2$ 且 V_1、V_2 为非平凡的 σ 不变子空间 □