

## 习题课材料（二）

### 1 随机变量

习题 1.  $C$  应该取何值, 才能使下列数列成为概率分布: (1)  $p_k = \frac{C}{N}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ; (2)  $p_k = C \frac{\lambda^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$ 。

习题 2. (随机游走问题) 考虑  $x$  轴上的一个质点, 它只能位于整数点, 时刻 0 位于原点。每隔单位时间分别以概率  $p$  向正方向移动一个单位, 以概率  $q = 1 - p$  向负方向移动一个位置。(1) 记  $S_n$  为它在时刻  $t = n$  时的位置, 试求  $S_n$  的分布。(2) 假定质点在  $t = 0$  时位于  $x = a$ , 在  $x = 0$  和  $x = a + b$  处各有一个吸收壁, 求质点被  $x = 0$  被吸收的概率。(a, b 都是正整数)

### 2 期望方差

习题 3. 一台设备由三大部件组成, 在设备运转中各部件需要调整的概率分别是 0.1, 0.2 和 0.3。假设各个部件的运转是相互独立的, 以  $X$  表示同时需要调整的部件数, 试求  $X$  的期望和方差。

习题 4. 一辆公共汽车上共有 25 名乘客, 每个乘客都等可能的在 9 个车站中的任一站下车, 并且他们下车与否相互独立, 又知公共汽车只有在有人下车时才停车, 求公共汽车停车次数的数学期望。

习题 5. 在一次集会上,  $n$  个人把他们的帽子放到房间中央混合在一起, 然后没人随机的取一项,  $X$  表示拿到自己帽子的人数, 求  $X$  的期望和方差。

习题 6. 某城市共有  $N$  辆汽车, 车牌号从 1 到  $N$ , 若随机地记下  $n$  辆车的车牌号 (可重复记载), 其最大号码为  $\xi$ , 求  $E\xi$ 。当  $N \rightarrow \infty$  时,  $E\xi$  是多少。

习题 7. 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是正的独立的随机变量, 服从相同分布, 证明:

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}\right) = \frac{k}{n}.$$

习题 8. 设随机变量  $X$  在  $[a, b]$  中取值, 证明:

$$\text{Var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4},$$

并说明等号何时成立。

习题 9. 袋中有  $N$  只球, 但其中白球的个数为随机变量, 只知道其数学期望为  $n$ , 试求从袋中摸一球, 该球为白球的概率。

习题 10. 袋中装有  $a$  个白球,  $b$  个黑球, 每次取出一球后, 总是放入一个白球, 这样进行了  $m$  次之后, 再从袋中取出一个球, 求它是白球的概率; 以及从开始进行  $m$  次之后, 袋中白球数的数学期望。