1 复线性空间

1. 考虑厄米矩阵$A^H = A$.
   (a) 证明: 厄米矩阵的特征值都是实数.
   (b) 证明: 对应不同特征值的特征向量都是正交的.
   (c) 证明: 厄米矩阵都可以相似正交化.
   (d) 证明: 厄米矩阵可以用酉矩阵正交化.
2. 考虑一个厄米二次型，$f = x^H Ax$, A是厄米矩阵. f称为正定的，如果$f \geq 0$, 且等于0的时候当且仅当$x = 0$.
   (a) 证明: A的特征值都是正的.
   (b) 证明: A可以写成$A = Q^H Q$, 这里Q是可逆的.
   (c) 证明: A的主元都是正的.
   (d) 证明: A的左上行列式都是正的.
3. 考虑一个$m \times n$的复矩阵A, 证明： 存在A的奇异值分解: $A = U\Sigma V^H$.
4. 证明: 如果一个复矩阵满足$T^r = I$, 这里r是一个正整数，那么T是可以对角化的.

2 群，环，域

1. 计算S_4(4阶置换群)这个群的乘法表。
2. 考虑所有的3×3的行列式为1的正交实矩阵，证明上述矩阵构成一个群。
3. 考虑实线性空间中的一个非退化对称二次型g. 考虑所有的保持内积的线性变换$g(Tv, Tw) = g(v, w)$，证明这些线性变换构成一个群。