1、证明：(1) 必要性　先证f是满射　$\forall y\in Y$均有$f^{-1}(y)\in X$ 且 $f\circ f^{-1}=id_Y$

则 $\forall y\in Y$ 均有 $f(f^{-1}(y))=y$，即 $\forall y\in Y$ 在f下均有原象，f是满射得证。

再证f是单射　假设f不是单射

则 $\exists x_1\neq x_2$ 使 $f(x_1)=f(x_2)$

而 $f^{-1}\circ f=id_X$ 则 $f^{-1}(f(x_1))=x_1$，$f^{-1}(f(x_2))=x_2$

则 $f^{-1}(f(x_1))\neq f^{-1}(f(x_2))$ 与f^{-1}是映射矛盾

即f是单射，命题必要性得证。

充分性　设 $x\in X$　$y=f(x)\in Y$

因为f是单射，则y在f下的原象唯一，为x

因为f是满射　$\forall y\in Y$ 均能在f下找到唯一原象

不妨建立一种对映关系 g 使 $\forall y\in Y$　$g(y)=x\in X$（其中x为y在f下的原象）

则g满足：① $g(Y)=X$

② $\forall x\in X$　$g(f(x))=x$ 即 $g\circ f=id_X$

③ $\forall y\in Y$　$f(g(y))=y$ 即 $f\circ g=id_Y$。

将以上g记作f^{-1}，则$\exists f^{-1}$满足条件

综上：$f: X\to Y$是双射充要条件是存在$f^{-1}: Y\to X$ 使 $f^{-1}\circ f=id_X$，$f\circ f^{-1}=id_Y$ 得证。

(2) ① 先证 $g\circ f: X\to Z$是双射

因为f是满射，则 $f(X)=Y$，因为g是满射，则 $g(Y)=Z$

$\therefore g(f(X))=Z$ 即 $g\circ f(X)=Z$，$g\circ f$是满射

因为f、g均为单射

$\forall x\neq x'$ 有 $f(x)\neq f(x')$，$\therefore$ 有 $g(f(x))\neq g(f(x'))$

即 $g\circ f(x)\neq g\circ f(x')$，$g\circ f$是单射

综上：$g\circ f: X\to Z$是双射

② $\forall z\in Z$　设z在g下原象为$y\in Y$，y在f下原象为$x\in X$。

则 $f(x)=y$，$g(y)=z$，$f^{-1}(y)=x$，$g^{-1}(z)=y$

$g\circ f(x)=z$，$(g\circ f)^{-1}(z)=x$

则 $f^{-1}\circ g^{-1}(z)=f^{-1}(g^{-1}(z))=f^{-1}(y)=x$

$\therefore \forall z\in Z$有$(g\circ f)^{-1}(z)=f^{-1}\circ g^{-1}(z)$

即 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ 得证。

2、证明 (1) 先证 $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$

不妨设 $\inf A\le\inf B$

则只需证 $\inf(A\cup B)=\inf A$ ——

$\forall x\in A$ $\inf A\le x$；$\forall x\in B$ $\inf B\le x$

则 $\forall x\in(A\cup B)$ $\underline{\min\{\inf A,\inf B\}\le x}$ ①

$\forall C>\inf A$ 有 $\exists x\in A$ $x<C$（下确界定义）

则有 $\underline{\exists x\in(A\cup B)\quad x<C}$ ②

由①②可推出 $A\cup B$ 下确界为 $\inf A$.

$\therefore \inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$

同理可证得 $\sup(A\cap B)=\max\{\sup A,\sup B\}$

(2) 先证 $\inf(A\cap B)\ge\min\{\inf A,\inf B\}$

不妨设 $\inf A\le\inf B$

利用反证法，假设 $\inf(A\cap B)<\min\{\inf A,\inf B\}=\inf A$，

则 $\forall C\in(\inf(A\cap B),\inf A)$ $\exists x_1\in(A\cap B)$ $x_1<C$

而 $\forall x\in A$ $x\ge C$

已知 $x_1\in A$ 而 $x_1<C$，二者矛盾

$\therefore \inf(A\cap B)\ge\min\{\inf A,\inf B\}$ 成立.

同理可证得 $\sup(A\cap B)\le\max\{\sup A,\sup B\}$

3、证明：定义函数 $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$，$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

则 g,h 定义域均为R，且有：

$g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)$，$h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)$.

即g为偶函数，f为奇函数. 且 $g(x)+h(x)=f(x)$

$\therefore$ 每一个函数 $f:R\to R$ 都可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和 得证

4、解：①若 $\forall x\in R$ $f(x)=0$，则性质(1)可由 $M=0$ 验证，性质(2)也易验证 $f(2x)=2f(x)=0$.

②若 $\exists x\in R$ 且 $x\ne0$ 使 $f(x)\ne0$，下证这样函数f不存在.

假设f存在，且 $\forall x\in R$ $|f(x)|\le M$.

设 $\exists x_0\in R$ $(x_0\ne0)$ 使 $|f(x_0)|=C\le M$ $(C\ne0)$

$\underline{\text{下证引理：}\forall x\in R,\ \exists n\in Z\ \text{使}\ n>x}$

假设 $\forall x\in R$，$\forall n\in Z$ 使 $n\le x$，则Z存在上界，由确界定理，Z也存在上确界，记为M

则 $\exists m\in Z$ 使 $M-1<m$ 则 $m+1\in Z$ 且 $M<m+1$（矛盾）

$\therefore$ 引理得证.

则由引理 $\exists k\in Z$ 使 $k>\frac{M}{C}-1$

由f性质(2) $|f(2^k x_0)|=|2^k f(x_0)|>|(1+k)f(x_0)|=|\frac{M}{C}f(x_0)|=M$

即 $f(2^k x_0)>M$ 与假设矛盾

$\therefore$ 满足性质(1)(2)且存在非0像的f不存在

综上：$f(x)=0$

5. 证明： $x=0$ $y=0$ 时 $f(0)=2f(0) \Rightarrow f(0)=0$.

当 $x=n$, $y=1$ $(n\in Z)$ 时 $f(n+1)=f(n)+f(1)$.

则 $n\in Z_+$ 时 $\{f(n)\}$ 是一个等差数列，且 $f(0)=0$

于是有 $f(n)=f(0)+nf(1)$，不妨设 $a\in R$，$a=f(1)$，

则 $f(n)=f(0)+nf(1)=na$ 对于负整数 n $f(0)=f(n)+(-n)f(1) \Rightarrow f(n)=f(0)+nf(1)=na$

下推广到全体有理数，设 $x\in Q$ 且 $x=\frac{p}{q}$ $(p\in Z, q\in Z_+, (p,q)=1)$

设 $n\in Z$ 且有 $n\leqslant \frac{p}{q}<n+1$

$f(\frac{2}{q})=f(\frac{1}{q})+f(\frac{1}{q})$，$f(\frac{3}{q})=f(\frac{2}{q})+f(\frac{1}{q})$，……

则 $f(\frac{q}{q})=qf(\frac{1}{q})=f(1)=a$.

$\therefore f(\frac{1}{q})=\frac{a}{q}$

而 $f(x)=f(\frac{p}{q})=f(\frac{p}{q}-n+n)=f(\frac{p-nq}{q})+f(n)$ $(p-nq\geqslant 0$ 且 $(p-nq)\in Z)$

$=(p-nq)f(\frac{1}{q})+f(n)=(p-nq)\frac{a}{q}+na=\frac{p}{q}a=ax$

则 $\forall x\in Q$ 均有 $f(x)=ax$ 得证 .

6. 证明： (1) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ 则 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N\in Z_+$ 使 $\forall n>N$ 有 $|a_n-A|<\varepsilon$.

由绝对值不等式 $\big||a_n|-|A|\big|\leqslant |a_n-A|$

则 $\big||a_n|-|A|\big|<\varepsilon$

即 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N\in Z_+$ 使 $\forall n>N$ 有 $\big||a_n|-|A|\big|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$.

(2) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ 则 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N\in Z_+$ 使 $n>N$ 有 $|a_n-A|<\varepsilon^2$

由绝对值不等式 $|a_n-A|=|\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|\,|\sqrt{a_n}+\sqrt{A}|=$

而 $|\sqrt{a_n}+\sqrt{A}|\geqslant \big||\sqrt{a_n}|-|\sqrt{A}|\big|=|\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|$

则 $|a_n-A|\geqslant |\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|^2$

$\therefore$ $|\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|^2<\varepsilon^2$

即 $|\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|<\varepsilon$

即 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N\in Z_+$ 使 $n>N$ 有 $|\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{A}$