高代选讲 第四次作业

练习 8.2.10

证明：1. P是向span(q)上的正交投影

故 $P(a)=\frac{\langle a,q\rangle}{\langle q,q\rangle}\vec{q}$

$\vec{q}$是单位向量，$\langle q,q\rangle=1 \Rightarrow P(a)=\langle a,q\rangle q$

2. 先证Q是正交变换，$\forall x,y\in V$

$$\langle Qx,Qy\rangle=\langle(I-2P)x,(I-2P)y\rangle=\langle x-2Px,y-2Py\rangle$$
$$=\langle x-2\langle x,q\rangle q,\ y-2\langle y,q\rangle q\rangle$$
$$=\langle x,y\rangle-2\langle x,q\rangle\langle y,q\rangle-2\langle y,q\rangle\langle x,q\rangle+4\langle x,q\rangle\langle y,q\rangle\langle q,q\rangle$$
$$=\langle x,y\rangle$$

故Q是正交变换

再证Q正交相似标准形是 diag$(-1,1\ldots1)$

① $Qq=(I-2P)q=q-2Pq=q-2\langle q,q\rangle q=-q$

故q是Q的一个特征向量，对应特征值为-1

② 将q扩充为V的一组标准正交基 $q,e_2,e_3\ldots e_n$

$\forall e_i\,(2\leq i\leq n)$ 有 $Qe_i=(I-2P)e_i=e_i-2Pe_i=e_i-2\langle e_i,q\rangle e_i=e_i$

故$e_2\ldots e_n$是Q的特征向量，对应特征值为1

③
$$Q[q\ \ e_2\ldots e_n]=[q\ \ e_2\ldots e_n]\begin{bmatrix}-1&&&0\\&1&&\\&&\ddots&\\0&&&1\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow [q\ \ e_2\ldots e_n]^T Q[q\ \ e_2\ldots e_n]=\begin{bmatrix}-1&&&0\\&1&&\\&&\ddots&\\0&&&1\end{bmatrix}$$

其中$[q\ \ e_2\ldots e_n]$是正交矩阵，即Q在正交相似变换下标准形为 diag$(-1,1\ldots1)$ □.

练习 8.3.1

1. 证明：① 共轭对称性 $\langle f,g\rangle=\sum_{k=1}^n f(k)\overline{g(k)}=\overline{\left(\sum_{k=1}^n\overline{f(k)}g(k)\right)}=\overline{\left(\sum_{k=1}^n g(k)\overline{f(k)}\right)}=\overline{\langle g,f\rangle}$.

② 线性性 $\langle c_1f_1+c_2f_2,g\rangle=\sum_{k=1}^n(c_1f_1+c_2f_2)(k)\overline{g(k)}$
$$=c_1\sum_{k=1}^n f_1(k)\overline{g(k)}+c_2\sum_{k=1}^n f_2(k)\overline{g(k)}=c_1\langle f_1,g\rangle+c_2\langle f_2,g\rangle$$

共轭线性性 $\langle f,c_1g_1+c_2g_2\rangle=\sum_{k=1}^n f(k)\overline{(c_1g_1+c_2g_2)(k)}$
$$=\overline{c_1}\sum_{k=1}^n f(k)\overline{g_1(k)}+\overline{c_2}\sum_{k=1}^n f(k)\overline{g_2(k)}=\overline{c_1}\langle f,g_1\rangle+\overline{c_2}\langle f,g_2\rangle$$

③ 正定性 $\langle f,f\rangle=\sum_{k=1}^n f(k)\overline{f(k)}=\sum_{k=1}^n|f(k)|^2\geq0$.

$\langle f,f\rangle=0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n|f(k)|^2 \Leftrightarrow f(k)=0\ \forall 1\leq k\leq n \Leftrightarrow f(z)=0\ \forall z\in\mathbb{C}^n$

以上说明$\langle\cdot,\cdot\rangle$是$\mathbb{C}[x]_n$上一个内积.

2. 它的一组基为 $\{1,z,z^2\}$.

$e_1'=q_1=1$

$e_2'=q_2-\frac{\langle q_2,e_1'\rangle}{\langle e_1',e_1'\rangle}e_1'=z-\frac{\sum_{k=1}^3 k}{\sum_{k=1}^3 1}1=z-2$

$e_3'=q_3-\frac{\langle q_3,e_1'\rangle}{\langle e_1',e_1'\rangle}e_1'-\frac{\langle q_3,e_2'\rangle}{\langle e_2',e_2'\rangle}e_2'=z^2-\frac{\sum k^2}{\sum 1}-\frac{\sum k^2(k-2)}{\sum(k-2)^2}(z-2)=z^2-4z+\frac{10}{3}$

归一化 $e_1=\frac{e_1'}{\langle e_1',e_1'\rangle}=\frac{1}{3}$ $e_2=\frac{e_2'}{\langle e_2',e_2'\rangle}=\frac{z}{2}-1$ $e_3=\frac{e_3'}{\langle e_3',e_3'\rangle}=\frac{3}{2}z^2-6z+5$

故 $\{\frac{1}{3},\frac{z}{2}-1,\frac{3}{2}z^2-6z+5\}$ 是一组标准正交基

练习 8.3.2

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} - \frac{\overline{a_2}^T e_1}{e_1^T e_1} e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} - \frac{1-i}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2-i}{3} \\ \frac{1+i}{3} \\ \frac{-1+2i}{3} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} \frac{2-i}{3} \\ \frac{1+i}{3} \\ \frac{-1+2i}{3} \end{bmatrix}$ 是一个与之等价的正交向量组

练习 8.3.6

证明：设 α 是酉矩阵 U 的特征向量，$\alpha \neq 0$

$U\alpha = \lambda\alpha$ ①

$\Rightarrow \overline{\alpha}^T U^H = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T$ ②

①②相乘 $\overline{\alpha}^T U^H U \alpha = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T \lambda \alpha$

$\Rightarrow \overline{\alpha}^T \alpha = |\lambda|^2 \overline{\alpha}^T \alpha \Rightarrow |\alpha|^2 = |\lambda|^2 |\alpha|^2$

考虑到 $\alpha \neq 0$ $|\alpha| \neq 0$

故 $|\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$

即 U 的特征值绝对值均是 1 □

而 $U^H U = I$

$\Rightarrow \det U^H \cdot \det U = \det I$

$\Rightarrow \det U^H \cdot \det U = 1$

$\det U^H = \overline{\det U}$ （可由数学归纳法证，后附）

则 $\overline{\det U}\ \det U = 1 \Rightarrow |\det U|^2 = 1 \Rightarrow |\det U| = 1$ □

补证引理：$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，有 $\det A^H = \overline{\det A}$

证：对于 $n=1$ 时 $\det A^H = \det \overline{A} = \overline{\det A}$ 显然成立

设 $n=k-1$ 时也成立

$n=k$ 时 $\forall A \in \mathbb{C}^{k\times k}$

$$\overline{\det A} = \overline{\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}} \quad \text{（对第 i 行展开）}$$

$$= \sum_j (-1)^{i+j} \overline{a_{ij}}\ \overline{\det A_{ij}}$$

$$= \sum_j (-1)^{i+j} \overline{a_{ij}} \det A^H \quad \text{（归纳假设）}$$

$$= \sum_j (-1)^{i+j} \overline{a_{ij}} \det \overline{A} \quad \text{（对 } A^H \text{ 转置）}$$

$$= \det \overline{A} = \det A^H \quad \square$$

练习 8.3.7 $\forall a \in V$ $\langle f(a), a \rangle = \langle a, f(a) \rangle$

$\Rightarrow \overline{f(a)}^T a = \overline{a}^T f(a) = \overline{(\overline{a^T f(a)})} = \overline{(\overline{f(a)}^T a)}$

$\Rightarrow \overline{f(a)}^T a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \langle f(a), a \rangle \in \mathbb{R}$ □

练习8.3.8

证明: $\forall A$ 是反 Hermite 矩阵

$$A^H A = -AA = A(-A) = AA^H$$

故 A是正规矩阵.

$\forall$ A的特征向量 x, 有 $Ax = \lambda x$

$$\Rightarrow \bar{x}^T A^H = \bar{\lambda}\bar{x}^T$$

$$\Rightarrow -\bar{x}^T A = \bar{\lambda}\bar{x}^T$$

$$\Rightarrow -\bar{x}^T A x = \bar{\lambda}\bar{x}^T x$$

$$\Rightarrow -\bar{x}^T \lambda x = \bar{\lambda}\bar{x}^T x$$

$$\Rightarrow -\lambda \bar{x}^T x = \bar{\lambda}\bar{x}^T x$$

x不为$\vec{0}$ 故 $\bar{x}^T x \neq 0$ 则 $-\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda + \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow Re(\lambda) = 0$.

即 A的特征值均是纯虚数.