概率统计第十讲：特征函数

史灵生　清华数学系

1、本讲提要

1. 一元特征函数
   - 特征函数定义
   - 特征函数性质
   - 矩和（极限）分布
2. 多元特征函数
   - 多元特征函数定义
   - 特征函数和独立性

2、特征函数

- 概率母函数 $E\left(z^X\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) z^n$是研究取非负整数值的随机变量$X$的重要工具，但它对随机变量的取值有限制。
- 在概率母函数中取$z = e^t$，就得到矩母函数$E\left(e^{tX}\right)$。
  - 它继承了概率母函数的所有重要性质，而且突破了概率母函数对随机变量取值的限制，
  - 特别是在计算X的矩EX^n时它比概率母函数更方便，
  - 但它带来一个新问题，就是e^{tX}可能没有收敛的数学期望。
- 在概率母函数中取z为单位复数e^{it}，得到特征函数$E\left(e^{itX}\right)$。
  - 这时它对一切随机变量有定义，而且继承了概率母函数和矩母函数的所有重要性质，
  - 但是我们为此付出的代价是我们不得不面对取复数值的随机变量e^{itX}，特别是要计算复值函数的积分。

3、$i = \sqrt{-1}$

- 第一名将负数的平方根这个“显然”没有意义的东西写到公式里的勇士，是十六世纪的Italy数学家Cardan。
- 既然有人敢把它写下来，并且，尽管这有点想入非非，却把解方程的事办成了；这样有人开了头，负数的平方根–Cardan给它起了个大号叫“虚数”–就越来越被科学家们所使用了，虽则总是伴有很大保留，还提出种种借口。
- 在著名Swiss科学家Euler1770年发表的Algebra著作中，有许多地方用到了虚数。然而，对这种数，他又加上了这样一个掣肘的评语：“一切形如$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$的数学式，都是没有的，想象的数，因为它们所表示的是负数的平方根。对于这类数，我们只能断言，它们既不是什么都不是，也不比什么都不是多些什么，更不比什么都不是少些什么。它们纯属虚幻。”…

4、特征函数

定义

称函数$\varphi_X(t)=E\left(e^{itX}\right)$，$(i^2=-1)$ 为随机变量X的特征函数。

注：

1. 若X为离散型随机变量,则X的特征函数为$\varphi(t)=\sum\limits_k e^{itx_k}p_k$.
2. 若X为连续型随机变量，其概率密度函数为$p(x)$，则X的特征函数为
$$\varphi_X(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{itx}p(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\cos(tx)p(x)\mathrm{d}x+i\int_{\mathbb{R}}\sin(tx)p(x)\mathrm{d}x$$
即φ_X为p的*Fourier*变换。
3. 分布函数$F(x)$和特征函数$\varphi(t)$相互唯一决定（唯一性定理）

5、离散型的特征函数

1. 若X服从单点分布$P(X=a)=1$，则$\varphi_X(t)=e^{iat}$。
2. 若X服从二点分布$b(1,p)$，则

$$\varphi_X(t)=e^{it0}q+e^{it1}p=q+pe^{it}.$$

3. 若X服从几何分布$G(p)$，则

$$\varphi_X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itk}pq^{k-1}=pe^{it}\sum_{k=0}^{\infty}\left(qe^{it}\right)^k=\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}.$$

4. 若X服从参数为λ的Poisson分布，则

$$\varphi_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

6、连续型的特征函数

1. 若X服从$(-1,1)$上的均匀分布，则

$$\varphi_X(t)=\int_{-1}^{1}e^{itx}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\cos(tx)\mathrm{d}x=\frac{\sin t}{t}\text{。}$$

2. 若X服从参数为λ的指数分布，则

$$\varphi_X(t)=\int_{0}^{\infty}e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\lambda\int_{0}^{\infty}e^{(it-\lambda)x}\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\lambda-it}=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}.$$

3. 若X服从一维标准正态分布$N(0,1)$，则

$$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\infty}\cos(tx)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\text{。}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_X(t)=-2\int_{0}^{\infty}x\sin(tx)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\infty}\sin(tx)\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$=-2t\int_{0}^{\infty}\cos(tx)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=-t\varphi_X(t),$$

又$\varphi_X(0)=1$，因此$\varphi_X(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$。

7、特征函数性质

1. $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1$。
2. $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$。
3. $\varphi_X(t)$是实偶函数当且仅当X具有对称分布$F_X(x) = F_{-X}(x)$（即F_X的图形关于$(0, 1/2)$中心对称，若X为连续型）。
4. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$。
5. 若X与Y相互独立，则$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$。
6. $\varphi_X(t)$关于t在$\mathbb{R}$上一致连续。
7. 对任意自然数n，任意实数$t_1, \ldots, t_n$，n阶复数矩阵$(\varphi_X(t_j - t_k))_{j,k}$是一个非负定Hermite矩阵：对任意复数$z_1, \ldots, z_n$，$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi_X(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} \geq 0$。

Bochner-Khinchin定理

如果连续函数$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$满足$\varphi(0) = 1$，那么它是特征函数当且仅当它满足上面的非负定条件（7）。

8、特征函数性质的证明

1. $|\varphi_X(t)| = \left|Ee^{itX}\right| \le E\left|e^{itX}\right| = E1 = 1 = \varphi_X(0)$。
2. $\overline{\varphi_X(t)} = \overline{Ee^{itX}} = E\overline{e^{itX}} = Ee^{-itX} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$，
3. $\varphi_X(t)$是实偶函数$\Leftrightarrow \varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$
$\Leftrightarrow F_X(x) = F_{-X}(x)$，即$X$具有对称分布$\Leftrightarrow$
$F_X(x) = F_{-X}(x) = P(-X \le x) = P(X \ge -x) = 1 - F_X(-x)$,
即F_X的图形关于$(0, 1/2)$中心对称。
4. $\varphi_{aX+b}(t) = Ee^{it(aX+b)} = e^{ibt}\varphi_X(at)$。
5. 若X与Y相互独立，则
$\varphi_{X+Y}(t) = Ee^{it(X+Y)} = Ee^{itX}Ee^{itY} = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$。
6. $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| = \left|E\left[e^{i(t+h)X} - e^{itX}\right]\right|$
$\le E\left|e^{itX}\left(e^{ihX} - 1\right)\right| = E\left|e^{ihX} - 1\right| \to 0$，当$h \to 0$。
（由控制收敛定理并注意到$\left|e^{ihX} - 1\right| \le 2$且
当$h \to 0$时，$\left|e^{ihX} - 1\right| \to 0$。）

9、非负定性的证明

证明（7）：

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{n} \varphi_X(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} &= \sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z_k} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t_j - t_k)x} p(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z_k} e^{i(t_j - t_k)x} p(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} z_j e^{it_j x} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} e^{-it_k x} \right) p(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^{n} z_j e^{it_j x} \right|^2 p(x) \mathrm{d}x \geq 0.
\end{aligned}$$

10、特征函数性质应用

1. X服从二项分布$b(n,p)$，则存在$X_1,\ldots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} b(1,p)$使得$X=X_1+\cdots+X_n$，于是
$$\varphi_X(t)=\prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t)=(q+pe^{it})^n。$$
2. $X\sim U(a,b)$，则$Y=(X-\frac{a+b}{2})/[(b-a)/2]\sim U(-1,1)$。
   - $\varphi_X(t)=\varphi_{\frac{b-a}{2}Y+\frac{a+b}{2}}(t)=e^{i\frac{a+b}{2}t}\varphi_Y\left(\frac{b-a}{2}t\right)=e^{i\frac{a+b}{2}t}\frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}t\right)}{\frac{b-a}{2}t}$.
   - 当$b=-a$时，X具有对称分布，$\varphi_X(t)$是实偶函数。
3. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Y=(X-\mu)/\sigma\sim N(0,1)$，
   - 于是，$\varphi_X(t)=\varphi_{\sigma Y+\mu}(t)=e^{i\mu t}\varphi_Y(\sigma t)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$。
   - 当$\mu=0$时，X具有对称分布，$\varphi_X(t)$是实偶函数。
4. $X\sim\Gamma(n,\lambda)$，则存在$X_1,\ldots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} Exp(\lambda)$使得$X=\sum_{k=1}^n X_k$，
$$\varphi_X(t)=\prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t)=\varphi_{X_1}^n(t)=(1-it/\lambda)^{-n}。$$
5. $X\sim\chi^2(n)=\Gamma(n/2,1/2)$，故$\varphi_X(t)=(1-2it)^{-n/2}$。

11、特征函数性质应用

- 设$X_1,\ldots,X_n$相互独立，$X_k\sim P(\lambda_k)$，$\lambda_k>0$，则

$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}e^{\lambda_k(e^{it}-1)}=\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(e^{it}-1)\right),$$

故$\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$服从参数为$\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$的Poisson分布。

- 设$X_1,\ldots,X_n$相互独立，$X_k\sim N(\mu_k,\sigma_k^2)$，

则$X=b+\sum\limits_{k=1}^{n}a_kX_k$（$a_1,\ldots,a_n$不全为零）的特征函数为

$$\varphi_X(t)=e^{ibt}\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(a_kt)=e^{ibt}\prod_{k=1}^{n}e^{i\mu_ka_kt-\frac{1}{2}\sigma_k^2a_k^2t^2}=\exp\left(i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right),$$

其中$\mu=b+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\mu_k$，$\sigma^2=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\sigma_k^2$。

故$X=b+\sum\limits_{k=1}^{n}a_kX_k\sim N(\mu,\sigma^2)$。

12、特征函数和各阶矩

- 利用特征函数在$t=0$处的Taylor展开式求得X的各阶矩：

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E\left(e^{itX}\right) = E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(itX)^n}{n!}\right] \text{“=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n E(X^n)}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n E(X^n)}{n!}t^n, \\ &\text{“=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n。\end{aligned}$$

- 从而通过比较系数得到：$E(X^n)=i^{-n}\varphi_X^{(n)}(0)$。
- 另一方面，如果$\varphi_X(t)$可导，则

$$\varphi'_X(t) = \frac{\mathrm{d}E\left(e^{itX}\right)}{\mathrm{d}t} \text{“}=\text{”} E\left(\frac{\mathrm{d}e^{itX}}{\mathrm{d}t}\right) = E\left(iXe^{itX}\right), \quad \text{（若}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\text{与}E\text{可交换）}$$

- 一般地，若$\varphi_X(t)$有n阶导函数，则$\varphi_X^{(n)}(t)$“$=$”$E[(iX)^n e^{itX}]$.

13、特征函数和各阶矩

定理

1. 若$E|X^k| < +\infty$，则对$j = 1, 2, ..., k$，有
$$\varphi_X^{(j)}(t) = E\left[(iX)^j e^{itX}\right],$$
并且
$$\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(it)^j}{j!} EX^j + o(t^k).$$
2. 若$\varphi_X^{(2n)}(0)$存在，则EX^{2n}存在。

14、特征函数和各阶矩

例

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$。用特征函数计算$EX, Var(X)$。

解：

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \exp\left(i\mu t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \\
&= 1 + \left(i\mu t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) + \tfrac{1}{2!}\left(i\mu t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)^2 + \tfrac{1}{3!}\left(i\mu t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)^3 \\
&\quad + o(t^3) \\
&= 1 + i\mu t - \tfrac{1}{2}(\sigma^2 + \mu^2)t^2 - \tfrac{i}{6}(3\mu\sigma^2 + \mu^3)t^3 + o(t^3),
\end{aligned}
$$

- 故 $iEX = i\mu$, $\frac{i^2 EX^2}{2!} = -\frac{1}{2}(\sigma^2 + \mu^2)$, $\frac{i^3 EX^3}{3!} = -\frac{i}{6}(3\mu\sigma^2 + \mu^3)$.
- 从而 $EX = \mu$, $EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$, $EX^3 = \mu(3\sigma^2 + \mu^2)$, $Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \sigma^2$。

15、特征函数和分布

特征函数的另一个重要性质是，分布函数由特征函数唯一确定。

唯一性定理

- 逆转公式：设$F(x)$和$\varphi(x)$分别为随机变量X的分布函数和特征函数，则对分布函数$F(x)$的任意连续点x, y有

$$F(x) - F(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) \mathrm{d}t.$$

- Fourier逆变换：如果连续型随机变量X的特征函数$\varphi(t)$绝对可积，则X的密度函数p是特征函数φ的Fourier逆变换：

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) \mathrm{d}t.$$

16、特征函数和分布

例

判断$\varphi(t) = \frac{1}{1+it}$是否是特征函数，若是则求其相应的随机变量。

解：

法1: 判断$\varphi(t)$是否满足Bochner-Khinchin定理中的非负定条件(7).

法2: 对$\varphi(t)$作Fourier逆变换，判断其是否为密度函数。

法3: 我们已经知道对$X \sim Exp(1)$，$\varphi_X(t) = \frac{1}{1-it}$。

故 $\varphi(t) = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$是$-X$的特征函数。

17、特征函数和极限分布

连续性定理

设F_n, F是概率分布函数，φ_n, φ是相应的特征函数。则

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \qquad \forall F\text{的连续点}x \in \mathbb{R}.$$

Poisson定理

设X_n服从二项分布$b(n, p_n)$，其中$\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$。则当$n$充分大时，$X_n$近似服从参数为$\lambda$的Poisson分布。

18、特征函数和极限分布

证明：

$$\varphi_{X_n}(t) = \left(p_n e^{it} + q_n\right)^n = \left[1 + p_n\left(e^{it} - 1\right)\right]^n = \left[1 + \frac{np_n}{n}\left(e^{it} - 1\right)\right]^n$$
$$= \left[1 + \frac{\lambda + o(1)}{n}(e^{it} - 1)\right]^n = \left[1 + \frac{\lambda(e^{it}-1)}{n} + o(\tfrac{1}{n})\right]^n$$
$$\to e^{\lambda(e^{it}-1)}, \quad n \to \infty,$$

- 即X_n的特征函数以参数为λ的Poisson分布特征函数为极限，
  故X_n的分布函数在“好的”x（即使得参数为λ的Poisson分布函数F连续的x，即非负整数以外的所有x）处的值$F_n(x)$收敛到$F(x)$。
- 而对所有非负整数k，取$a \in (k-1, k), b \in (k, k+1)$，则当$n \to \infty$时，有

$$P(X_n = k) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) \to F(b) - F(a) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}。$$

19、多元特征函数

定义

对随机向量$X=(X_1,\ldots,X_n)^T$，$t=(t_1,\ldots,t_n)^T\in\mathbb{R}^n$，称

$$\varphi_X(t)=E\left(e^{it^TX}\right)=E\left[e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right]$$

为X的特征函数（也称为$X_1,\ldots,X_n$的联合特征函数）。

多元特征函数性质：

1. $\varphi_X(t)=\varphi_{t^TX}(1)$。
2. 线性函数的特征函数：$\varphi_{AX+b}(t)=e^{it^Tb}\varphi_X\left(A^Tt\right)$。
3. 独立和的特征函数定理。
4. 唯一性定理。
5. 连续性定理。
6. 求混合矩的公式：$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi_X}{\partial t_1^{\alpha_1}\cdots\partial t_n^{\alpha_n}}(0)=i^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}E(X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n})$.

20、特征函数和独立性

定理　随机变量$X_1,\ldots,X_n$相互独立当且仅当

$$\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t_k),\quad \forall t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{R}。$$

证明：$\Rightarrow$

$$\varphi(t_1,\ldots,t_n)=Ee^{it^TX}=E\left(\prod_{j=1}^{n}e^{it_jX_j}\right)=\prod_{j=1}^{n}Ee^{it_jX_j}=\prod_{j=1}^{n}\varphi_{X_j}(t_j).$$

$\Leftarrow$ 设$Y_1,\ldots,Y_n$是相互独立的随机变量，Y_k与X_k同分布，则$\varphi_{X_k}=\varphi_{Y_k}$，并且由必要性知

$$\varphi_{(Y_1,\ldots,Y_n)}(t_1,\ldots,t_n)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_{Y_j}(t_j)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_{X_j}(t_j)=\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n).$$

再由唯一性知，$(Y_1,\ldots,Y_n)$与$(X_1,\ldots,X_n)$分布相同，从而$X_1,\ldots,X_n$相互独立。