1 矩阵的秩

1. 把下列矩阵化成约化行阶梯形式，并且找到λ的值使得下列矩阵的秩 (rank) 最小：

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2. 把下列矩阵化成约化行阶梯形式，并且对于所有 λ的值, 找到矩阵的秩：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. A 是任意一个 $m \times n$ 的矩阵， B 是一个任意的 $m \times m$ 的矩阵，证明

$$rank(BA) \leq rank(A) \tag{3}$$

4. 证明: 一个矩阵的行约化阶梯形式是唯一的。

2 线性相关，线性无关, 基

1. 证明: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$是$R^3$的一组基。 写下一个任意向量$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$在这组基下的坐标。

2. 证明: 包含零向量的向量组是线性相关的。

3. 证明：如果向量$(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ 线性无关且能用向量 $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ 表示，那么$r \leq s$.

4. 证明：给定一个r维线性空间的线性无关的一个向量组 $(a_1, \ldots, a_s), s < r$, 我们总可以往上述向量组里面添加向量来构造一组基。

5. 一组向量 $(e_1, \ldots, e_n)$是R^m中的一组两两正交的向量，证明：$(e_1, \ldots, e_n)$是线性无关的。

6. e是一个R^n中的非0向量，A是一个$n \times n$的矩阵，存在一个k使得 $A^{k+1}e = 0$ 但是$A^k e \neq 0$, 证明: $(e, Ae, \ldots, A^k e)$ 是线性独立的。

3 线性方程的解

求方程 $Ax=b$的解:

1. $$A=\begin{bmatrix}2&7&3&1\\3&5&2&2\\9&4&1&7\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}\tag{4}$$

2. . $$A=\begin{bmatrix}3&-2&5&4\\6&-4&4&3\\9&-6&3&-2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\tag{5}$$

3. $$A=\begin{bmatrix}1&1&3&-2&3\\2&2&4&-1&3\\3&3&5&-2&3\\2&2&8&-3&9\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}\tag{6}$$

4. 这道题帮我们理解线性方程组的解可以写成$x=x_p+x_n$(假设方程组有解), 这里x_p是$Ax=b$的一个特解， x_n 是齐次线性方程组的所有解。A是一个$m\times n$的矩阵。

   (a) x_p+x_n 显然是方程的解，证明：方程的任何一个解都可以写成上面的分解的形式。

   (b) b等于什么时候，解空间构成一个线性子空间?

   (c) 如果方程组有解，存在唯一解的条件是?