清华大学试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　考试时间：2020 年 1 月 5 日 8：00—10：00

姓名______________学号 **20** ______________班级________.

一 填空题（每空 3 分，共 30 分；答案均写在试卷上，注意标清题号）

1. 设 X 服从几何分布，$E(X|X>2)=5$，则 $P(X=3)=$____________，$Var(X|1<X<4)=$____________。

2. (X,Y) 的联合密度函数 $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<x,y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$Z=\begin{cases}Y, & \text{若 } X\geq Y\\ X, & \text{若 } X<Y\end{cases}$，则 $E(Z^2)=$________________。

3. 随机变量 X 服从二项分布 $b(n,0.8)$，c 为任意实数，若 $E\left((X-c)^2\right)$ 的最小值为 12，则 $n=$__________。

4. 如果 $0<Var(X)<+\infty$，则 $\mathrm{Var}\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)=$____。

5. 已知随机变量 $X\sim U(0,2)$，则 $Var\left(\min\left\{X^2,1\right\}\right)=$ ____。

6. 设随机变量 X 的密度函数为 $p(x)=3e^{-3x}I_{x\geq0}$，则 $E\left(X^2\cdot e^{\frac{X}{3E(X)}}\right)=$ ________________________。

7. 将一枚均匀的硬币独立地抛掷 100 次，用中心极限定理和切比雪夫不等式估计正面次数在 45 至 55 之间的概率，结果分别为__________________________；______________________________。

8. 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}1, & 0<|x|<y<1\\ 0, & ohterwise\end{cases}$，则 $E\left(X^2|Y\right)=$______________。

二.（10 分）某厂有甲、乙、丙三车间生产同一种产品，产量分别占总产量的 60%，30%和 10%。各车间的次品率分别是 2%，5%，6%。试求

（1）在该厂产品中任取一件，恰为次品的概率；

（2）若发现一件产品为次品，该次品来自甲车间的概率？

三.（8 分）设随机变量 $X\sim U(0,2)$，$Y=X^3$，求随机变量 Y 的分布函数、密度函数、期望和方差。

四．(12 分)随机变量 (X_1, X_2) 的密度函数为 $p(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{3}\,\pi}e^{\frac{-2}{3}\left[(x-1)^2-\frac{(x-1)(y-2)}{2}+\frac{(y-2)^2}{4}\right]}$， $Y=2X_1+X_2$。

（1）求 Y 的分布；（2）计算 X_1 和 Y 的相关系数 $Corr(X_1,Y)$；（3）计算 $E(X_1|Y=1)$。

五．(8 分)抛掷一枚 6 面的色子，出现 1 点至 6 点的概率均为 $1/6$，抛掷过程是相互独立的。直至首次连续出现 1 点 6 点停止。例如：3, 2, 3, 5, 1, 1, 6 停止，抛掷 7 次。试求抛掷次数的期望。

六．(6 分）样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自总体 X， $E(X)=\mu$， $Var(X)=\sigma^2$，证明 $E(S^2)=\sigma^2$。

七．(10 分） $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim Exp(\lambda)$ 的样本。

（1）指定常数 $T>0$，设样本中取值小于 T 的样品数为 r，利用比例 $\frac{r}{n}$ 给出参数 λ 的估计量；

（2）求参数 $\frac{1}{\lambda}$ 的极大似然估计量。

八．(16 分）设某工厂生产一种产品，它的一个指标参数服从正态分布 $N(\mu, 3^2)$， $\mu \le 10$ 为优级。做假设检验， $H_0: \mu \le 10$ VS $H_1: \mu > 10$，显著性水平 $\alpha = 0.1$。

（1）样本容量 $n=36$，写出的拒绝域的范围；　（2）样本容量 $n=36$，计算 $\bar{x}=11$ 的 p 值；

（3）样本容量 $n=36$， $\mu=11.5$ 时，若出错是第几类错误，并计算发生这类错误的概率；

（4）样本容量增大到多少时能够保证当 $\mu>10.1$ 时，第二类错误不超过 0.001。

备注 1. 本考卷样本均为简单随机样本，样本均值 $\bar{X}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$，样本方差为 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$

备注 2. 参数为 λ 的指数分布随机变量，期望为 $\frac{1}{\lambda}$，方差为 $\frac{1}{\lambda^2}$

备注 3. 解答中标准正态随机变量的分布函数和密度函数分别可用 $\Phi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 表示

备注 4. $\Phi(1.28)=0.9$, $\Phi(1.65)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1)=0.841$, $\Phi(2)=0.977$, $\Phi(3)=0.999$

备注 5. 正态、χ^2、t 等分布所需取值，均用（下侧）分位数表示，例如 $X\sim\chi^2(n)$，则 $P(X<\chi_\alpha^2(n))=\alpha$

备注 6. $t_{0.75}(1)=1, t_{0.75}(2)=0.79, t_{0.8}(1)=1.38, t_{0.8}(2)=1.06, F_{0.5}(1,1)=1, F_{0.5}(1,2)=0.67, F_{0.75}(1,1)=5.83$