

形式语言与自动机 第八次作业

习题 5.3.3

设满足测试通过的字符串集为 L' ，题目即证 $L' = L$

① 首先 $L \subseteq L'$ ，这是因为 G 产生串时的三个规则均保证了每个 e 均唯一对应一个它之前的 i

因此规则消去 e 时可以保证前方 i 不会空，所以 $L \subseteq L'$

② 其次 $L' \subseteq L$ ，下证 $\forall w \in L'$ 有 $w \in L$ ，用归纳法，归纳 w 中 e 个数 n ，基础： $n=0$ ， $S \rightarrow IS \rightarrow \dots I^k = w$

归纳： $\forall w \in L'$ ，设 w 有 k 个 e ，在消去时，这 k 个 e 对应的 i 在 w 中的位置分别为 $p_1 \dots p_k$ ，

其中 p_i 为第 i 次消去的 e 对应的 i 在 w 中的位置，而 p'_i 为该 e 在 w 中的位置。

因此有 $p_k < p_{k-1} < \dots < p_1$

设 p_k 之前最末一位 e 在 p'_i ，根据测试过程， w 子串 w_1 (由 w 第 $1 \sim p'_i$ 位构成) 有 $w_1 \in L$

根据归纳假设， $w_1 \in L$ ，即 $S \xrightarrow{*} w_1$ ，特别地， p_k 前无 e ，则 $S \xrightarrow{*} w_1 = e$ 。

w 子串 w_2 (由 w 第 $p_k+1 \sim p_{k-1}$ 位构成)，根据测试过程，也有 $w_2 \in L$

根据归纳假设， $w_2 \in L$ ，即 $S \xrightarrow{*} w_2$ ，特别地， $p_{k+1} = p_k$ 时 $S \xrightarrow{*} w_2 = \epsilon$ 。

$$\begin{aligned} \text{则 } S &\rightarrow SS \xrightarrow{*} w_1 S \rightarrow w_1 SS \xrightarrow{*} w_1 i^{p_k-p_{k-1}} S \\ &\rightarrow w_1 i^{p_k-p_{k-1}} i S e S \\ &\xrightarrow{*} w_1 i^{p_k-p_{k-1}} i w_2 e S \\ &\xrightarrow{*} w_1 i^{p_k-p_{k-1}} e i^{n-p_k-1} = w \end{aligned}$$

综上：归纳假设成立， $L' \subseteq L$ ，结合 $L \subseteq L'$ 有 $L' = L$

因此此测试过程能正确识别 L 的串

习题 5.3.4

(b) 加入 $\text{Element} \rightarrow \langle UL \rangle \text{List} \langle /UL \rangle$ 。

(c) 加入如下：

$\text{Element} \rightarrow \langle \text{TABLE} \rangle \text{Table} \langle /TABLE \rangle$

$\text{Table} \rightarrow \text{Head Line}$

$\text{Head} \rightarrow \langle \text{TR} \rangle \text{Field_head} \langle /TR \rangle$

$\text{Field_head} \rightarrow \langle \text{TH} \rangle \text{Element} \text{Field_head} | \langle \text{TH} \rangle \text{Element}$

$\text{Line} \rightarrow \langle \text{TR} \rangle \text{Field_line} \langle /TR \rangle \text{Line} | \epsilon$

$\text{Field_line} \rightarrow \langle \text{TD} \rangle \text{Element} \text{Field_line} | \langle \text{TD} \rangle \text{Element}$

习题 5.3.5

$\text{COURSES} \rightarrow \text{COURSE COURSES} | \text{COURSE}$

$\text{COURSE} \rightarrow \text{CNAME PROF STUDENTS TAS}$

$\text{CNAME} \rightarrow \# \text{PCDATA}$

$\text{PROF} \rightarrow \# \text{PCDATA}$

$\text{STUDENTS} \rightarrow \text{STUDENT STUDENTS} | \epsilon$

$\text{STUDENT} \rightarrow \# \text{PCDATA}$

$\text{TAS} \rightarrow \text{TA} | \epsilon$

$\text{TA} \rightarrow \# \text{PCDATA}$

习题 5.4.2

设 $L' = \{w \mid w \text{ 任何前缀中 } a \text{ 个数大于等于 } b \text{ 的个数}\}$, 题目即证 $L(G) = L'$

① 先证 $L(G) \subseteq L'$

归纳法, 设 $S \xrightarrow{*} w$ (经过 k 步), 则 $w \in L'$

$k=1$ 只能有 $S \rightarrow \epsilon$, 则 $w = \epsilon \in L'$

设 $k \leq n$ 时成立, 则 $k=n+1$ 时

即 $S \xrightarrow{*} w$ 经过 $n+1$ 步推导

第步 有两种可能 i) $S \rightarrow aS$, 设 aS 经 n 步到 aw' , 即 $S \xrightarrow{*} w'$ 经 n 步, 根据假设 $w' \in L'$

即 w' 任何前缀中 a 个数 $\geq b$ 个数

那么 aw' 显然也成立

ii) $S \rightarrow aSbS$, 设 $aSbS$ 经 n 步到 aw_1bw_2 , 即 $S \xrightarrow{*} w_1, S \xrightarrow{*} w_2$ 经 n 步, 则 $w_1, w_2 \in L'$

即 w_1, w_2 任何前缀中 a 个数 $\geq b$ 个数

那么 $w = aw_1bw_2$ 显然也成立

综合以上 $\forall w \in L(G)$ 则 $S \xrightarrow{*} w$, 有 $w \in L'$, 因此 $L(G) \subseteq L'$

② 再证 $L' \subseteq L(G)$, 设 $w \in L'$, 只需证 $w \in L(G)$

归纳法, 对 $|w|$ 归纳

基础: $|w|=0, w=\epsilon$, 显然有 $S \rightarrow \epsilon, w \in L(G)$

归纳: $|w|=n$ 时,

① 设存在某位 k , 使 $1 \sim k$ 位的子串 w_1 有 $n_a(w_1) = n_b(w_1)$ 且 k 是满足要求中最小的

设 $w_1 = a \dots b = aw_1'b$, 则 $w_1' \in L'$, 因为反之则有 w_1' 前缀 w_1'' s.t. $n_a(w_1'') = n_b(w_1'') - 1$

此时 aw_1'' 有 $n_a(aw_1'') = n_b(aw_1'')$, 与 k 是满足要求中最小的矛盾

$w_1' \in L'$ 根据归纳假设, $S \xrightarrow{*} w_1'$

设 $k+1 \sim n$ 位子串为 w_2 , 则 $w_2 \in L'$, 根据归纳假设, $S \xrightarrow{*} w_2$

因此 $S \rightarrow aSbS \xrightarrow{*} aw_1'bS \rightarrow aw_1'bw_2 = w, w_2 = w$

则 $w \in L(G)$

② 设不存在某位 k , 使 $1 \sim k$ 位的子串 w_1 有 $n_a(w_1) = n_b(w_1)$

即 $\forall w$ 前缀 w' , 有 $n_a(w') \geq n_b(w') + 1$

因此设 $w = aw_1$, 有 $n_a(w_1) \geq n_b(w_1)$

根据归纳假设 $S \xrightarrow{*} w_1$

因此 $S \rightarrow aS \xrightarrow{*} aw_1 = w$

则 $w \in L(G)$

综合以上: $\forall w \in L', \text{ 有 } w \in L(G) \Rightarrow L' \subseteq L(G)$

再综合①②有 $L' = L(G)$

习题 5.4.3

$S \rightarrow \epsilon \mid aMbS \mid as$

$M \rightarrow aMbM \mid \epsilon$

习题 5.4.7

a) 最左: $E \Rightarrow +EE \Rightarrow +*EEE \Rightarrow +*-EEEE \Rightarrow +*-xEEE \Rightarrow +*-xyEE \Rightarrow +*-xyx$

$\Rightarrow +*-xyxy$

最右: $E \Rightarrow +EE \Rightarrow +Ey \Rightarrow +*EEy \Rightarrow +*Exy \Rightarrow +*-EExy \Rightarrow +*-Eyxxy \Rightarrow +*-xyxy$

