1 习题

1. 考虑下列矩阵
$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&3&-1\\-2&0&2\end{bmatrix} \tag{1}$$
这里矩阵元素是域F_p里面的，求p使得矩阵A可逆.

2. 求下列矩阵的奇异值分解
$$A=\begin{bmatrix}-3&1\\6&-2\\6&-2\end{bmatrix} \tag{2}$$

3. 如果P是一个正交的$m\times m$的矩阵，证明：PA和A有同样的奇异值。

4. A是一个给定的$m\times m$的矩阵，B是一个给定的$n\times n$的矩阵，考虑复线性空间$V=M_{m\times n}(C)$. 考虑一个映射 $f:V\to V$, $f(M)=AMB$.
   (a) 证明：f是一个线性映射。
   (b) 找到M中的一组基，写下f对应的矩阵.
   (c) 求f的迹和行列式。

5. (a) 考虑所有的行列式为1的二阶幺正矩阵的集合(称为$SU(2)$群), 证明：任意的一个$SU(2)$矩阵可以写成下列的形式
$$P=\begin{bmatrix}a&-\bar{b}\\b&\bar{a}\end{bmatrix},\quad a\bar{a}+b\bar{b}=1 \tag{3}$$
   (b) 考虑所有的两个变量的n阶齐次复系数多项式
$$f(u,v)=c_0u^n+\dots c_iu^{n-i}v^i+\dots+c_nv^n \tag{4}$$
   构成的空间V. 证明：这个空间是复数域上的线性空间. 并找到一组基.
   (c) 给定一个$SU(2)$的矩阵 P, 定义空间V上的一个变换：
$$P(f)=f(ua+vb,-u\bar{b}+v\bar{a}) \tag{5}$$
   证明：P是一个线性映射.
   (d) 对于上题，如果P是一个对角矩阵，用第二题你找到的基，写下对应的线性映射的的矩阵.

6. 考虑复线性空间C^n, 给定一个正定厄米二次型$h:V\times V\to C$。考虑有限个线性变换构成的集合G, 并且我们要求这个集合构成一个群.
   (a) 定义一个二次型：$h'(v,w)=\frac{1}{|G|}\sum_g h(gv,gw)$. 证明：$h'$是一个正定厄米二次型。这里$|G|$代表$G$里面元素的个数.

(b) 证明： $h'(gv,gw)=h'(v,w)$, 这里g是集合G的任意一个元素.

(c) 如果W是线性变换集合G的不变子空间，那么利用h', 证明 $W^{\perp}$ (关于 h')也是G的不变子空间.

7. 考虑一个复线性空间上的线性映射$f: V \to V$， 考虑一个对偶映射$f^*: V^* \to V^*$, 这里V^*是对偶空间. 对偶映射的构造如下: 取V中一组基e_i, 可以构造对偶基 e^{*i}，f^*满足的条件是:

$$f^*(e^{*i})(fe_j)=e^{*i}(e_j) \tag{6}$$

求f^*对应的矩阵和f对应矩阵的关系. 如果f对应的矩阵是幺正的，那么f^*对应的矩阵和f对应的矩阵的关系是?

8. (a) 分别写成$(1,1),(2,0),(0,2)$ 张量的换基公式, 哪一种张量可以谈它的特征值?

(b) 一个线性变换$f: V \to V$可以看成那种张量? 给定一个线性变换，请构造出一个张量(作用在一个空间上的多线性函数).

9. 考虑所有$m \times n$实矩阵构成的实线性空间V,

(a) 证明:

$$f(A,B)=max_{x\neq 0}\frac{|(A+B)x|^2-|Ax|^2-|Bx|^2}{|x|^2} \tag{7}$$

是V上一个正定内积. 这里x是一个$n\times 1$的矩阵，$|\cdot|$为标准长度.

(b) 求A在上述内积下的长度。

10. 考虑线性空间V上一个线性变换$f: V \to V$, 选定V的一组基e_1,e_2之后所对应的矩阵为$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. 定义一个$V\otimes V$ 上的 映射为$g: V\otimes V \to V\otimes V$ 为 $g(e_i\otimes e_j)=f(e_i)\otimes f(e_j)$,

(a) 找出g对应的矩阵.