1. 设随机变量 X, Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1, λ_2 的泊松分布. 求 $E(X|X+Y=n)$.

$P(AB)=P(A)P(B)$ 两事件独立

$P(x_1,\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n} P_i(x_i)$ 分布独立

泊松分布 $P_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1\cdots$

$$E(X|X+Y=n)=\frac{\sum_{l=0}^{n} l \frac{\lambda_1^l}{l!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-l}}{(n-l)!}e^{-\lambda_2}}{\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}e^{-\lambda_2}}$$

$\overset{定义展开}{=} \sum_{l=0}^{n} l\, P(X=l|X+Y=n)$ # $=\sum_{l=0}^{n} l \frac{\frac{\lambda_1^l}{l!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-l}}{(n-l)!}e^{-\lambda_2}}{\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}e^{-\lambda_2}}$

$\cancel{e^{-\lambda_1+\lambda_2}}$

C_n^m

$(\lambda_1+\lambda_2)^n=\sum_{m=0}^{n}\lambda_1^m\lambda_2^{n-m} \neq \frac{n!}{\cancel{m!(n-m)!}}$ $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

$$=\frac{\sum_{l=0}^{n} l \frac{\lambda_1^l}{l!}\frac{\lambda_2^{n-l}}{(n-l)!}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}$$

教材84页. $E(X)=np$
$X\sim b(n,p)$

$$=\frac{\sum_{l=0}^{n} l\, C_n^l \lambda_1^l \lambda_2^{n-l}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$=\sum_{l=0}^{n} l\, C_n^l \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^l \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-l}$

二项分布期望

$p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

$$=n\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

3. 即 $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

$\Downarrow$

$$P(|X_n| \geq \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx$$

$\parallel$

$$P(X_n \geq \varepsilon) + P(X_n \leq -\varepsilon) = \frac{n}{\pi} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dx}{1+n^2x^2} + \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{(1+n^2x^2)} dx$$

偶函数

$$= \frac{\cancel{n}\,2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{d(nx)}{1+(nx)^2} \qquad \frac{n}{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(nx) \Big|_{\varepsilon}^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n\varepsilon) \right)$$

$n \to \infty \quad \operatorname{Arctan}(n\varepsilon) \to \frac{\pi}{2}$

$\therefore P(|X_n| \geq \varepsilon) \to 0$

since $n\varepsilon \to \infty$

---

3. 设随机变量 X_n 服从柯西分布，密度函数为

$$p_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad -\infty < x < \infty. \quad 证: X_n \xrightarrow{P} 0$$

4: 正态分布可加：$Y_1 \sim N(\sum_k a_k\mu_k, \sum_k a_k^2)$ $\mu_k=0$

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立，均服从 $N(0,1)$，而 $Y_1=\sum_{k=1}^n a_kx_k$，$Y_2=\sum_{k=1}^n b_kx_k$

$= N(0, \sum_k a_k^2)$

$Y_2 \sim N(0, \sum_k b_k^2)$

~~$p(Y_1,Y_2)=p$~~ 证 Y_1 与 Y_2 独立 $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_kb_k=0$

课件定理：n维随机 X 服从正态分布 $\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，$a^TX$ 为一维正态变量

∴ Y_1, Y_2 服从二维正态分布：$c^T\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} = c_1Y_1+c_2Y_2=\sum_k(c_1a_k+c_2b_k)X_k \sim N(\mu_0,\sigma_0^2)$

$c(c_1,c_2)$

$\mu_0=\sum_i d_i\mu_i$

$\sigma_0^2=\sum_i d_i^2\sigma_i^2$

$d_i = c_1a_i+c_2b_i$

对于二维正态分布，

Y_1, Y_2 独立 $\Leftrightarrow$ $Y_1\ Y_2$ 不相关

$\Leftrightarrow Cov(Y_1,Y_2)=0$

$Cov = E((X-E(X))(Y-E(Y)))$

$= E(XY-E(X)Y-XE(Y)-E(X)E(Y))$

$Y_1\sim(0,\sigma_1^2)$

$Y_2\sim(0,\sigma_2^2)$

$Cov(Y_1,Y_2)= E(Y_1Y_2-E(Y_1)Y_2-Y_1E(Y_2)-E(Y_1)E(Y_2))$

$Y_1\sim(0,\sum a_k^2)$

$Y_2\sim(0,\sum b_k^2)$

$= E(Y_1Y_2)$

$E(Y_1)=0$

$E(Y_2)=0$

$= E\left(\sum_{k=1}^n a_kX_k \sum_{k=1}^n b_kX_k\right)$

$= E\left(\sum_{k=1}^n a_kb_kX_k^2\right) + \underbrace{E\left(\sum_{j\neq k} a_jb_kX_jX_k\right)}_{0}$

$E(X_k^2)=1$

$E(X_k)=0$

$= \sum_{k=1}^n a_kb_k$ □

这道第四题也可以用特征函数法，但只能证明一个方向。X，Y 独立一定有 X+Y 的特征函数为两者特殊函数的积，但反过来，X+Y 的特征函数是两者的和，XY 不一定独立。举一个极端反例：取 Y=X。

5. 特征函数证明伽马分布可加性！ X,Y 独立，

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$X\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$

$Y\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$

$$\varphi_X(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha_1},\quad \varphi_Y(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha_2}$$

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-(\alpha_1+\alpha_2)}$$

是 $Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$

① 先求出的特征函数 ② 独立性 可以 特征相乘 ☐

证 $X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$

③唯一性！

独立随机变量和的特征函数为特征函数的积

$$E\left(e^{it(X+Y)}\right)=E\left(e^{itX}e^{itY}\right)=\sum_{(m,n)}e^{itX}e^{itY}\cdot \underset{=(m,n)}{P(X,Y)}$$

$$=\sum_m e^{itm}p(X=m)\sum_n e^{itY}P_{(Y=n)}$$

6. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 试用特征函数求 $E[(X-\mu)^n]$

$Y = X-\mu \sim N(0, \sigma^2)$, $E((X-\mu)^n) = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^{(n)}}$, $\varphi_Y(t) = e^{(-\frac{\sigma^2 t^2}{2})}$

奇数次：0

$\varphi^{(n)}(0) = 0$

偶数次：$n = 2k$

$\varphi^{(n)}(0) = (-1)^k (n-1)!! (\sigma^2)^k$

奇数相乘

$= (-1)^k (n-1)!! \sigma^n$

$E = \frac{\varphi^n(0)}{i^n} = \sigma^n (n-1)!!$

7. $1 - f(2t) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(2t)x} p(x) d(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dF(x)}_{=1} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2tx} dF(x)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{i2tx}) dF(x)$，$f(t)$ 是实的. 所以 $f(2t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2tx) p(x) dx$ 是偶的.

$= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos 2tx) dF = 2\int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos tx)\underbrace{(1+\cos tx)}_{\leq 2} dF(x)$

$\leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) dF(x)$

$= 4 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \, dF(x) \right)$

$= 4(1 - f(t))$

求证：对于任何实值特征函数，以下两个不等式成立：

$1 - f(2t) \leq 4(1 - f(t))$

$1 + f(2t) \geq 2(f(t))^2$

用到性质：特征函数 $f(t)$ 一定对应一个分布 $F(x)$.

$1+f(2t)=\int_{-\infty}^{\infty}(1+\cos 2tx)\,dF(x)$

$=2\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2 tx\ dF(x)\geq 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,dF(x)\right)^2$

Cauchy-schwartz不等式：

$=2(f(t))^2$

$$\left|\int f(x)\cdot g(x)\,dx\right|^2\leq\int|f(x)|^2dx\int|g(x)|^2dx$$

离散？可以 模仿证明

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itx_k}p_k=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itx_k}\underbrace{[F(x_k)-F(x_{k-1})]}_{\Delta F_k}$$

8. 若 $Y=aX+b$，则 $\varphi_Y(t)=e^{ibt}\varphi_X(at)$

设 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$ 证 $\alpha\to\infty$ 时 $\lambda X-\alpha/\sqrt{\alpha}$ 按分布收敛于 $N(0,1)$.

$\therefore Y_\alpha=\lambda X-\alpha/\sqrt{\alpha}$，$\varphi_X(t)=(1-it/\lambda)^{-\alpha}$

$$\varphi_{Y_\alpha}(t)=e^{-it\sqrt{\alpha}}\left(1-\frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-\alpha}$$

特征函数法

定理：$F_n(x)\xrightarrow{W}F(x)\iff\varphi_n(t)\longrightarrow\varphi(t)$

4.2.6 $X_n\xrightarrow{L}X$

F_n的特征函数序列φ_n收敛于F的特征函数φ

验证 $\lim_{\alpha\to\infty}\varphi_{Y_\alpha}(t)=e^{-it\sqrt{\alpha}}\left(1-\frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-\alpha}\Rightarrow e^{-t^2/2}$

$N(0,1)$

取对数：$\ln\varphi_{Y_\alpha}(t)=-it\sqrt{\alpha}-\alpha\ln\left(1-\frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)$

$$=-it\sqrt{\alpha}-\alpha\left(-\frac{it}{\sqrt{\alpha}}+\frac{t^2}{2\alpha}-\frac{it^3}{3\alpha\sqrt{\alpha}}+o\left(\frac{t^3}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)\right)$$

$$=-t^2/2+\frac{it^3}{\alpha\sqrt{\alpha}}+\alpha o\left(\frac{t^3}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)\to-t^2/2\ (\alpha\to\infty)$$

$\therefore\varphi_{Y_\alpha}(t)\to e^{-t^2/2}$.