统计分析与建模

高珍

gaozhen@tongji.edu.cn

假设检验

- **假设检验的原理**
- 单个总体的均值检验
- 两个总体的均值检验
- 单个总体的方差检验
- 两个总体的方差检验

概念

假设检验的概念

假设检验(Hypothesis Test)：事先对总体参数或总体分布形式作出某种假设，然后利用样本信息来判断原假设是否成立。

原理

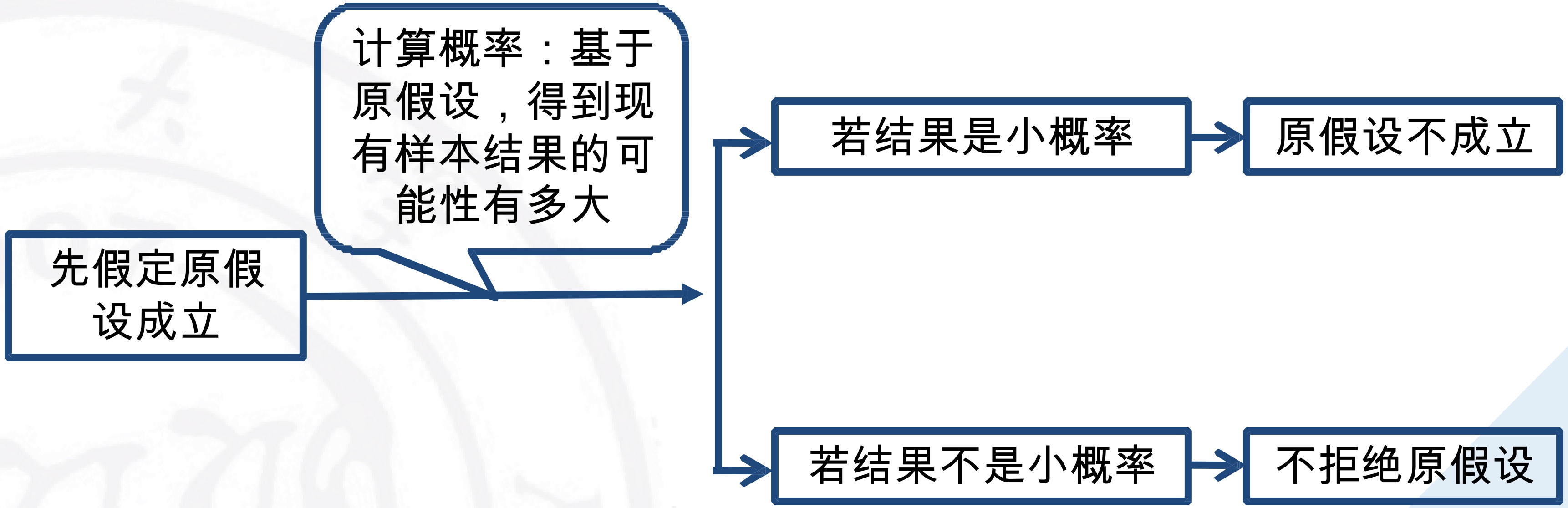
- 小概率原理

  小概率事件在一次事件中几乎不可能发生

  在一次试验中小概率事件一旦发生，我们就有理由拒绝原假设
- 显著性水平（significance level）

  a=0.05（小概率标准）

反证法



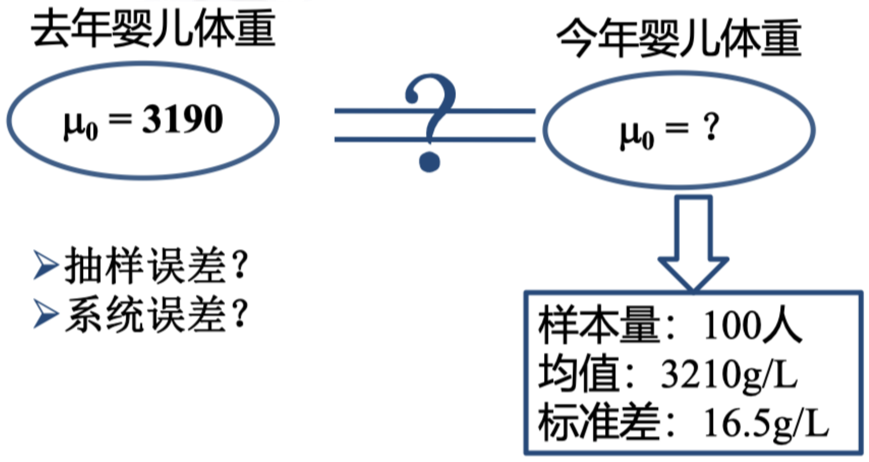
先假定原假设成立
计算概率：基于原假设，得到现有样本结果的可能性有多大
若结果是小概率
原假设不成立
若结果不是小概率
不拒绝原假设

步骤

提出原假设和备择假设 → 构建检验统计量 → 确定拒绝域 → 作出统计决策

实例分析

- 总体：已知去年新生婴儿的平均体重为3190g，标准差为 80。
- 问题：今年的新生婴儿与去年相比，体重有无显著差异？
- 样本：随机抽取100人，测得平均体重为3210g。



分析

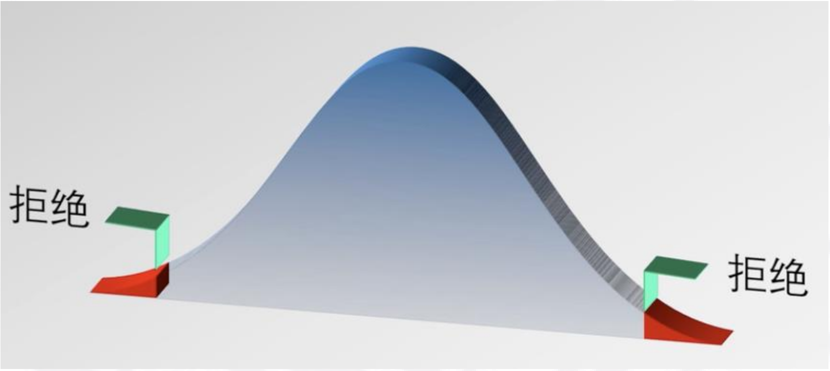
原假设（null hypothesis）

H_0: $\mu_0 = 3190$

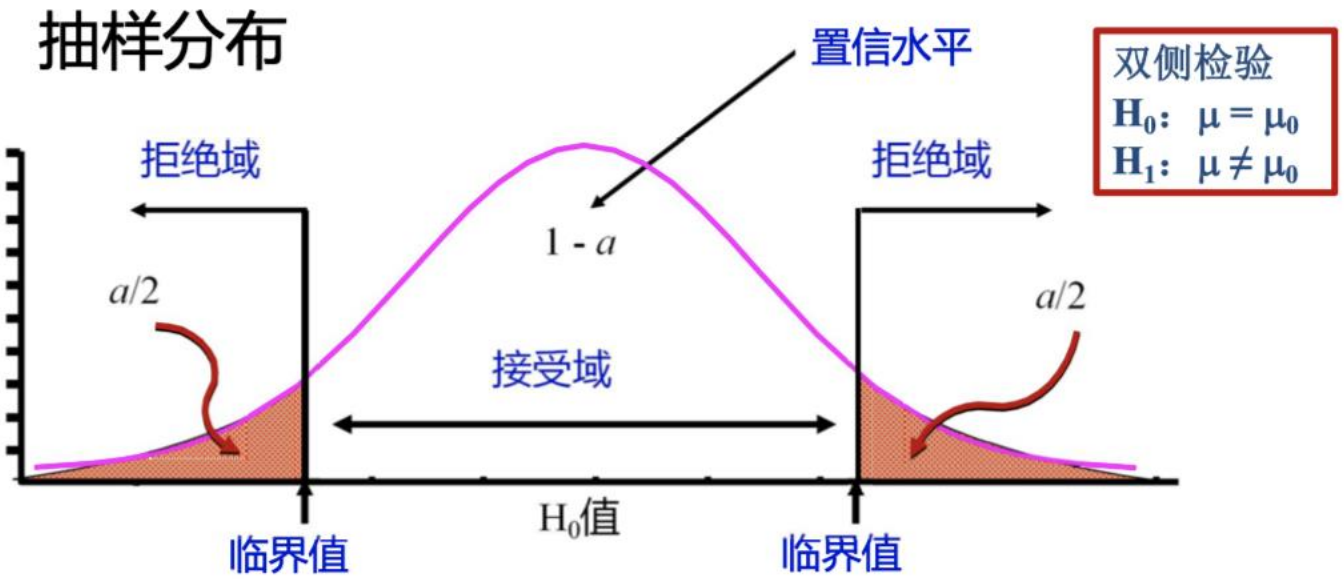
备择假设(alternative hypothesis)

H_1:$\mu_0 \neq 3190$

原假设和备择假设必须穷尽且互斥。



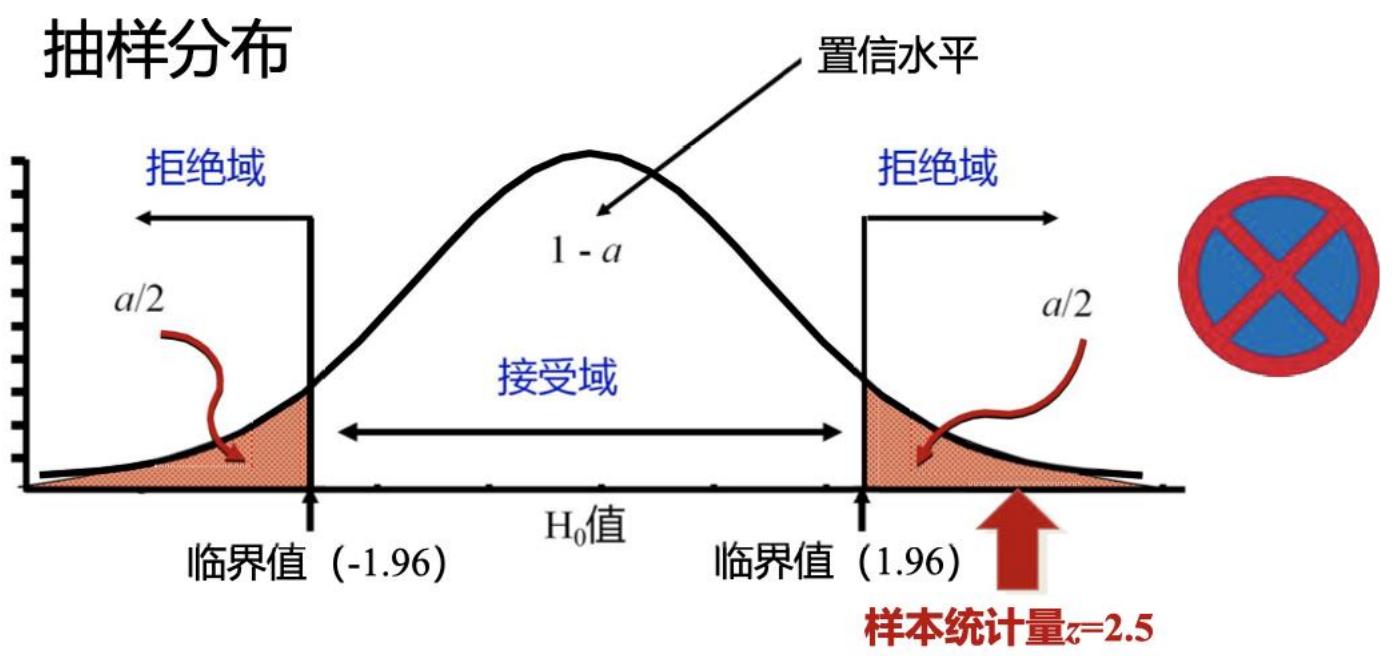
检验统计量的概率密度



构造检验统计量

- 标准离差 $z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{3210-3190}{80/\sqrt{100}}=2.5$

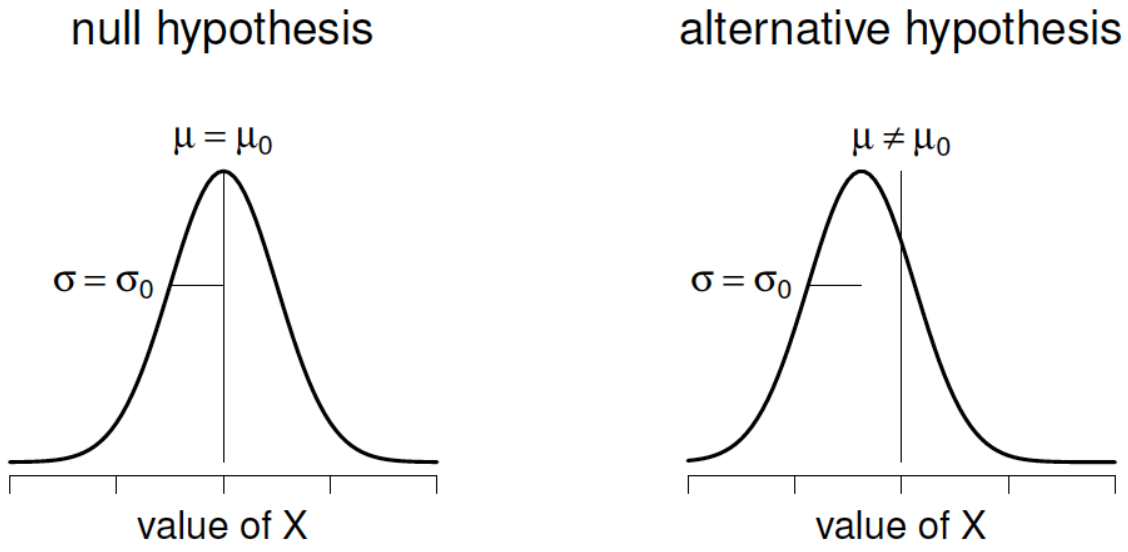
- $z\sim N(0,1)$



假设检验

- 假设检验的原理
- **单个总体的均值检验**
- 两个总体的均值检验
- 单个总体的方差检验
- 两个总体的方差检验

单个总体的均值检验



$$X \sim \mathrm{Normal}(\mu_0, \sigma^2)$$

$$\bar{X} \sim \mathrm{Normal}(\mu_0, \mathrm{SE}(\bar{X}))$$

$$z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{N}}$$

$$z_{\bar{X}} \sim \mathrm{Normal}(0, 1)$$

单个总体的均值检验

- 研究问题

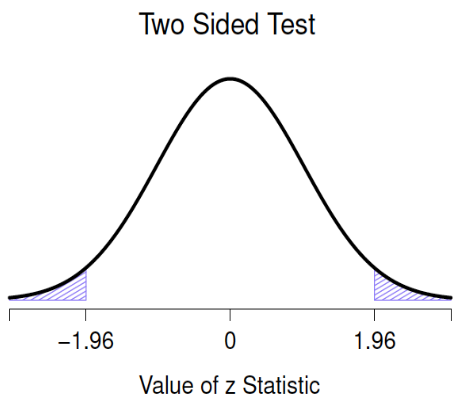
假设	研究的问题		
	双侧检验	左侧检验	右侧检验
原假设：H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$
备择假设：H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$

- 检验统计量的选择

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

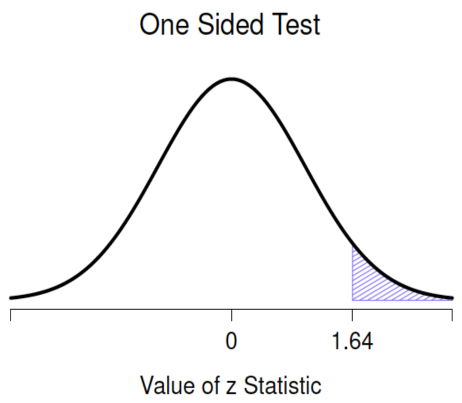
1. 情形1：方差σ^2已知
2. 情形2：方差σ^2未知，但为大样本
3. 情形3：方差σ^2未知，且为小样本

双侧检验



(a)

右侧检验



(b)

desired α level	critical z value: two-sided test	critical z value: one-sided test
.1	1.644854	1.281552
.05	1.959964	1.644854
.01	2.575829	2.326348
.001	3.290527	3.090232

情形1.1：方差σ²已知（双侧检验）

1.建立原假设和备择假设

$$H_0:\ \mu = \mu_0$$
$$H_1:\ \mu \neq \mu_0$$

2.构建检验统计量

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

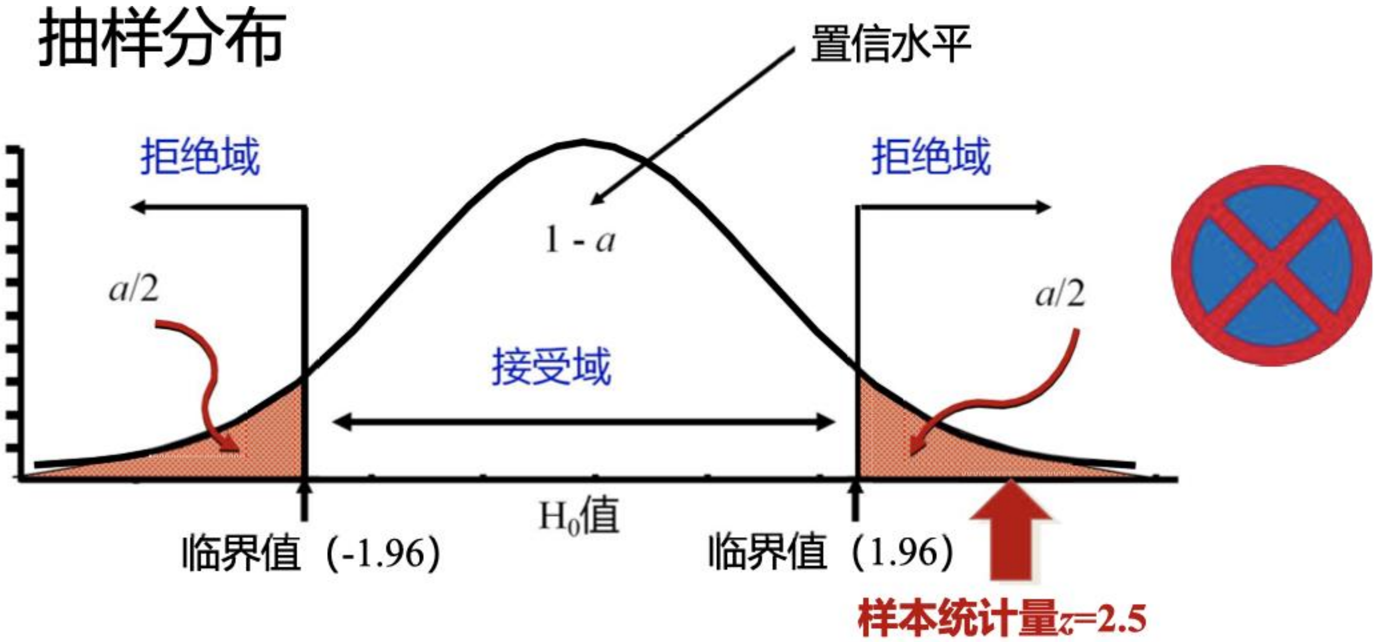
3. 确定拒绝域

$$P\{|z| \geq z_{\alpha/2}\} = \alpha$$

4. 作出统计决策

如果 $|z| \geq z_{\alpha/2}$，则拒绝原假设H_0；

如果 $|z| < z_{\alpha/2}$，则无法拒绝。



实例分析（双侧检验）

- 某切割机正常工作时,切割每段金属棒的平均长度为10.5cm,标准差是0.15cm。今从一批产品中随机的抽取15段进行测量,其结果如下：

  10.4，10.9，10.6，10.6，10.1，10.8，10.4，10.5

  10.5，10.7，10.3，10.2，10.3，10.7，10.2

- 假定切割的长度服从正态分布，且标准差没有变化，试问该机工作是否正常?(α =0.05)

解题思路

1.提出原假设与备择假设:

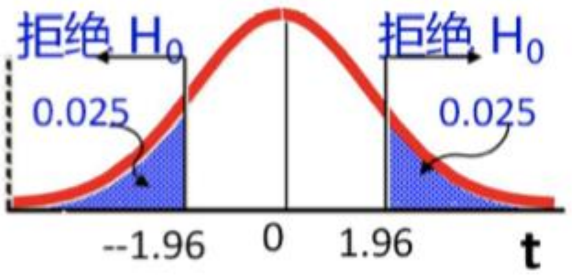
H_0: $\mu = 10.5$; H_1: $\mu \neq 10.5$

2.构建检验统计量:

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$=\frac{10.48-10.5}{0.15/\sqrt{15}}=-0.516$$

3.确定拒绝域（a=0.05）：



4.作出决策:

在 α= 0.05的水平上无法拒绝H_0, 说明该机器工作正常。

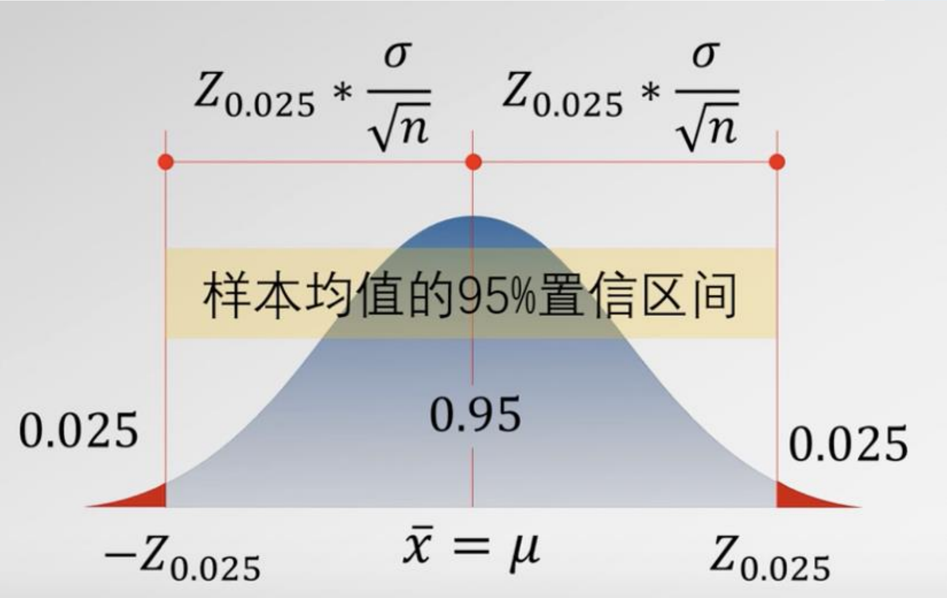
R代码

```
```{r z-test}
  #install.packages("BSDA")
  library(BSDA)
  #alternative=c("two.sided","less","greater")
  x=c(10.4,10.9,10.6,10.6,10.1,10.8,10.4,10.5,10.5,10.7,10.3,10.2,10.3,10.7,10.2)
  z.test(x,alternative="two.sided",mu=10.5,sigma.x=0.15,conf.level=0.95)

```
```

```
        One-sample z-Test

data:  x
z = -0.5164, p-value = 0.6056
alternative hypothesis: true mean is not equal to 10.5
95 percent confidence interval:
 10.40409 10.55591
sample estimates:
mean of x
    10.48
```



情形1：方差σ²已知（单侧检验）

- 实例分析：某批发商欲从厂家购进一批灯泡，根据合同规定，灯泡的使用寿命平均不能低于1000小时。已知灯泡使用寿命服从正态分布，标准差为20小时。在总体中随机抽取100只灯泡，测得样本均值为960小时。批发商是否应该购买这批灯泡？（$\alpha = 0.05$）

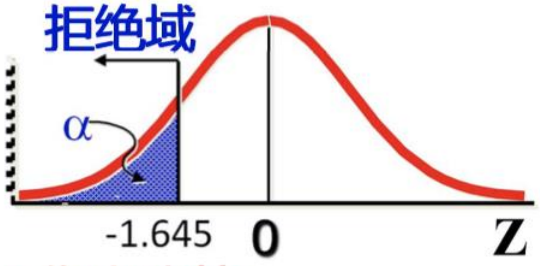
1.提出原假设与备择假设:

$H_0: \mu \geq 1000$；$H_1: \mu < 1000$

2.构建检验统计量:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{960 - 1000}{20/\sqrt{100}} = -2$$

3.确定拒绝域（a=0.05）：



4.作出决策:

在a= 0.05的水平上拒绝H_0，即有证据表明这批灯泡的使用寿命低于1000小时。

情形2：方差σ^2未知，但为大样本

- 解决方法

用s^2代替σ^2，使用z统计量：

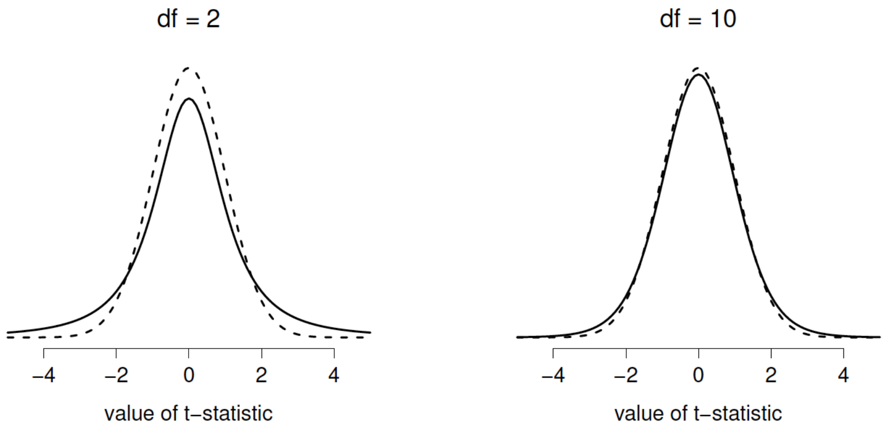
$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

情形3：方差σ²未知，且为小样本

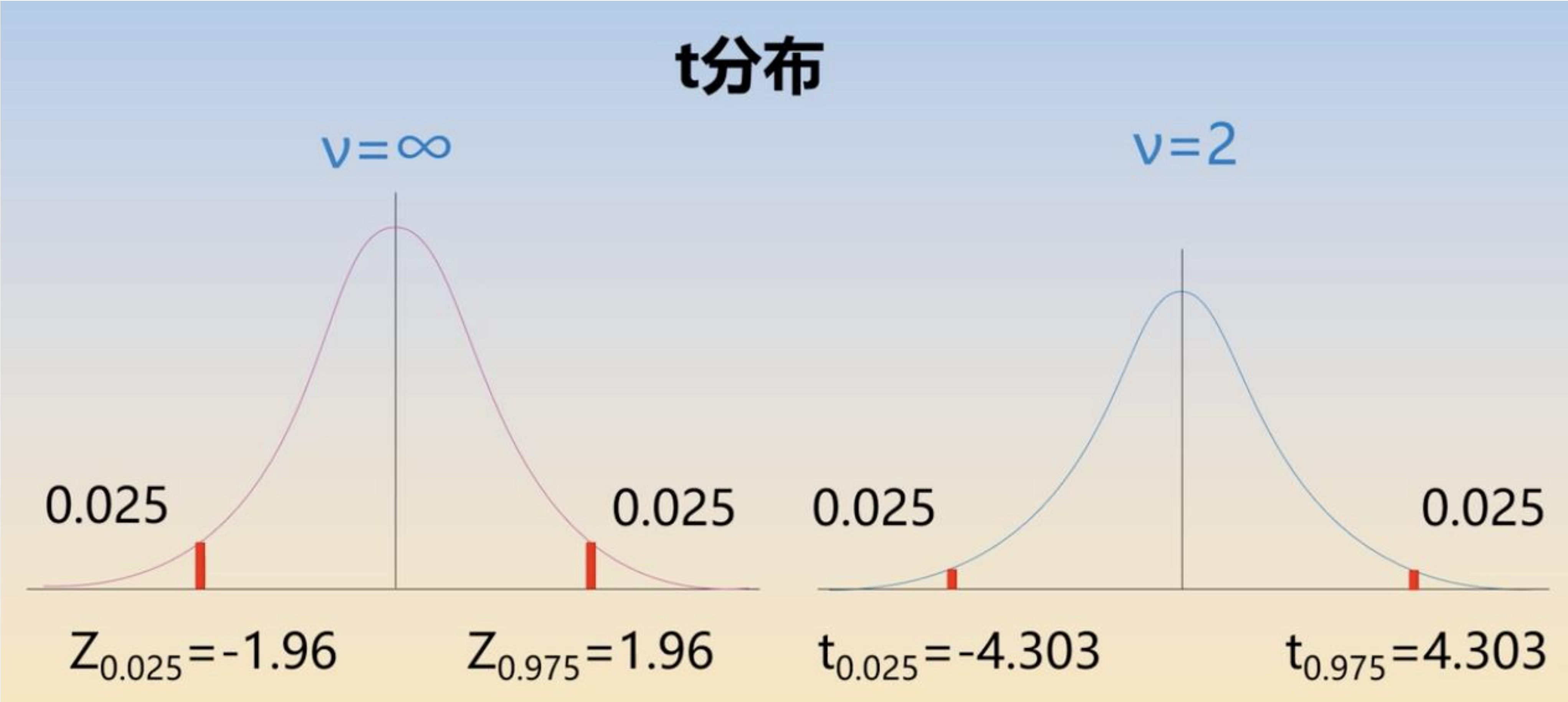
- 解决方法

用s^2代替σ²，使用t统计量：

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

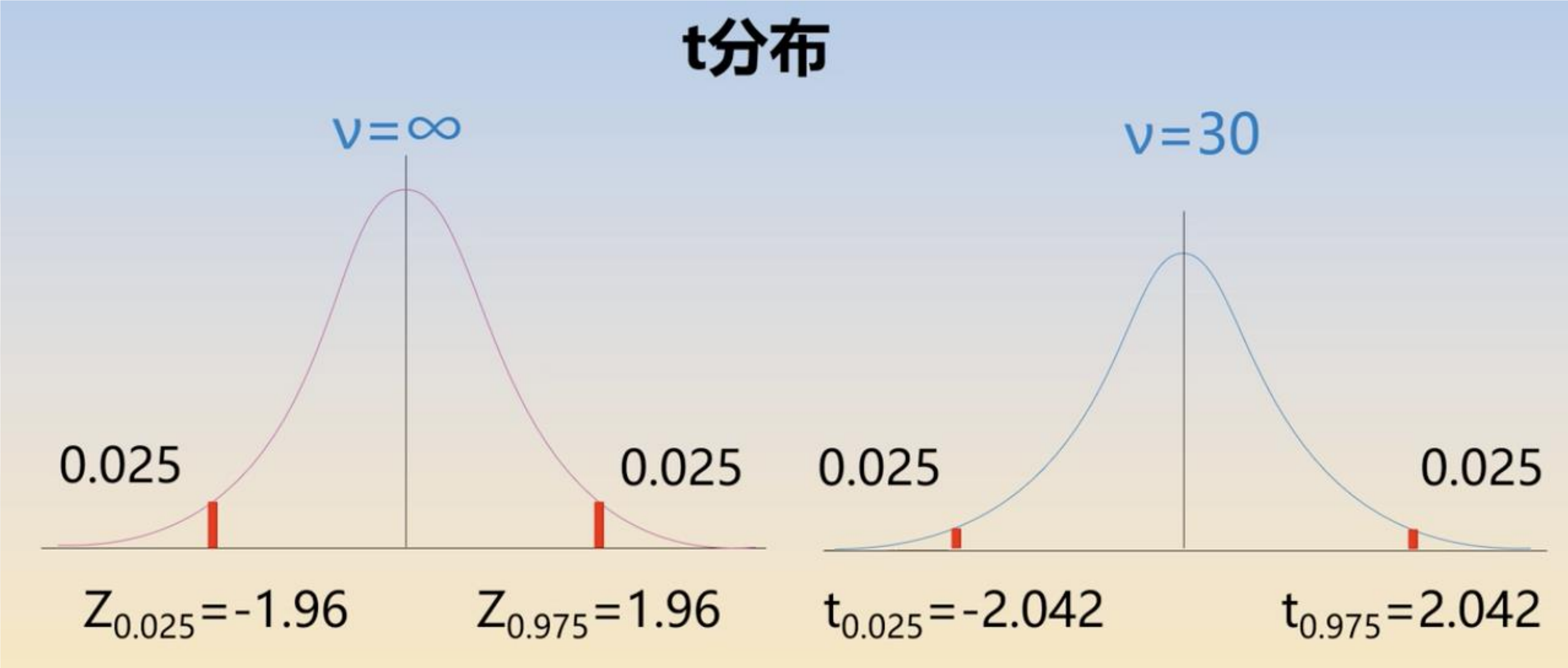


z分布与t分布比较



t分布
ν=∞
ν=2
0.025
0.025
0.025
0.025
Z0.025=-1.96
Z0.975=1.96
t0.025=-4.303
t0.975=4.303

z分布与t分布比较



t分布
ν=∞
ν=30
0.025
0.025
0.025
0.025
Z0.025=-1.96
Z0.975=1.96
t0.025=-2.042
t0.975=2.042

R代码

例1. 某种原件的寿命X（以小时计）服从正态分布N(μ, σ)其中μ, σ^2均未知。现测得16只元件的寿命如下：

159,280,101,212,224,379,179,264,222,362,168,250,149,260,485,170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225小时？

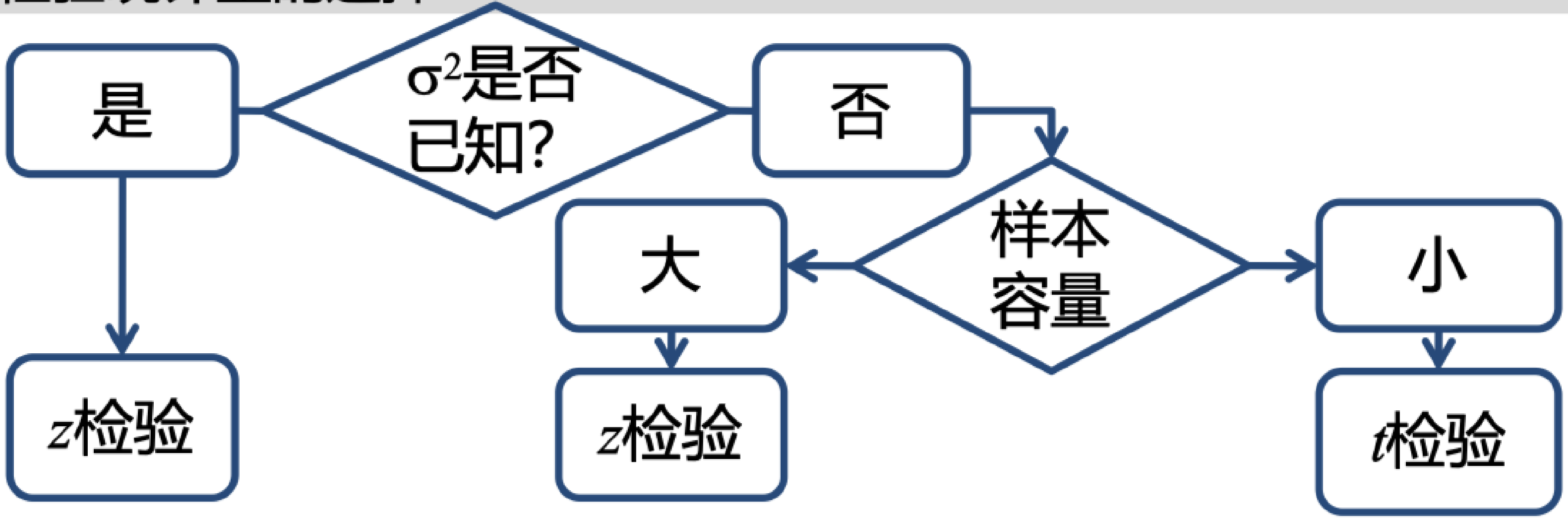
```
```{r r-test}
X<-c(159, 280, 101, 212, 224, 379, 179, 264,
        222, 362, 168, 250, 149, 260, 485, 170)
t.test(X,alternative = "greater",mu=225)
```
```

```
        One Sample t-test

data:  X
t = 0.66852, df = 15, p-value = 0.257
alternative hypothesis: true mean is greater than 225
95 percent confidence interval:
 198.2321      Inf
sample estimates:
mean of x
    241.5
```

单个总体的均值检验总结

检验统计量的选择



$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

情形1

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

情形2

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

情形3

假设检验

- 假设检验的原理
- 单个总体的均值检验
- 两个总体的均值检验
- 单个总体的方差检验
- 两个总体的方差检验

两个总体的均值(差)检验

假设	研究的问题		
	双侧检验	左侧检验	右侧检验
H_0	$\mu_1-\mu_2=0$	$\mu_1-\mu_2\geq 0$	$\mu_1-\mu_2\leq 0$
H_1	$\mu_1-\mu_2\neq 0$	$\mu_1-\mu_2<0$	$\mu_1-\mu_2>0$

三种情形

- **情形1**：σ_1^2 和σ_2^2 已知
- **情形2**： σ_1^2和σ_2^2未知， $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$， 且n较小
- **情形3**： σ_1^2和σ_2^2未知， $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$， 且n较小

情形1：σ_1^2 和σ_2^2 已知

- z检验

假定：

- ➢ 两个样本是独立随机样本；
- ➢ 两个总体都是正态分布或大样本 ($n_1 \geq 30$和$n_2 \geq 30$)；

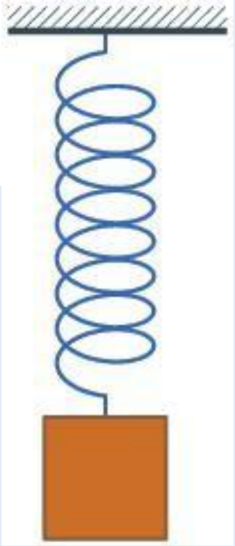
原假设： H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$; 备择假设： H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

检验统计量为：

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

实例分析

- 根据历史资料得知，A、B两种机器生产出的弹簧其抗拉强度的标准差分别为8公斤和10 公斤。从两种机器生产的产品中各抽取一个随机样本，样本容量分别为n_1=32，n_2=40，测得两个样本的均值分别为50和44公斤。问这两种机器生产的弹簧，平均抗拉强度是否有显著差别？ ($\alpha = 0.05$)



解题思路

1.提出原假设与备择假设:

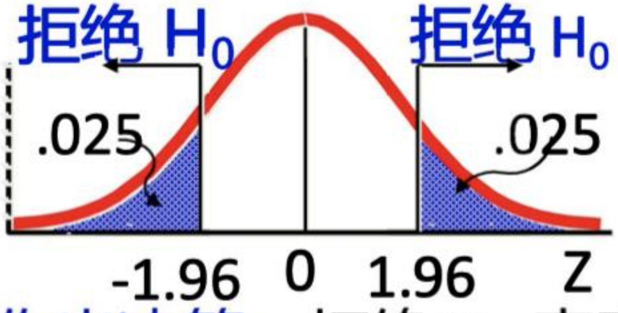
H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$; H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

2.构建检验统计量:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{50 - 44 - 0}{\sqrt{\frac{64}{32} + \frac{100}{40}}} = 2.83$$

3.确定拒绝域($\alpha = 0.05$):



4.作出决策: 拒绝H_0, 表明两种机器生产的弹簧，其抗拉强度有显著差异.

已知条件:

$\sigma_1 = 8$ $\sigma_2 = 10$

$\overline{x_1} = 50$ $\overline{x_2} = 44$

$n_1 = 32$ $n_2 = 40$

R代码

```
```{r z-test-2}
library(BSDA)
#alternative=c("two.sided","less","greater")
A=c(50+rnorm(32,0,8));mean(A)
B=c(44+rnorm(40,0,10));mean(B)
z.test(A,B,alternative="two.sided",sigma.x=8,sigma.y=10,conf.level=0.95)
```
```

```
        Two-sample z-Test

data:  A and B
z = 2.9601, p-value = 0.003076
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  2.121547 10.436970
sample estimates:
mean of x mean of y
 51.23790  44.95865
```

情形2： σ_1^2和σ_2^2未知， $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$， 且n较小

- t检验

检验统计量 $$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\boxed{s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

实例分析

- 欲研究A、B两种方法组装某种产品所用的时间是否相同。选取部分工人进行抽样分析。已知用两种工艺组装产品所用时间服从正态分布，且$\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2$。试问能否认为B方法比A方法组装更好？$(\alpha = 0.05)$

组装方法	**A**	**B**
工人数n	10	8
平均时间（分）	26.1	17.6
样本标准差	12	10.5

解决思路

1.提出原假设与备择假设：

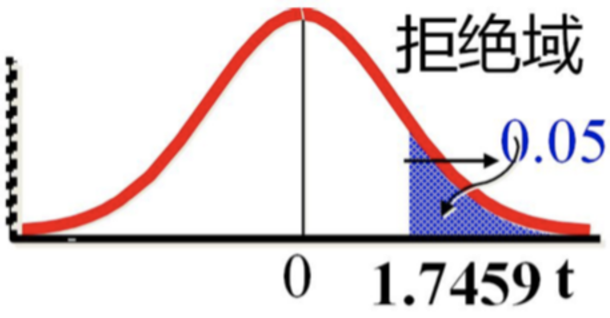
H_0:μ_1-μ_2≤ 0； H_1: μ_1- μ_2 > 0

2.构建检验统计量:

$$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$=\frac{26.1-17.6-0}{11.37\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}}=1.576$$

3.确定拒绝域:



4.作出决策：无法拒绝H_0, 没有证据表明用第二种方法组装更好。

组装方法	A	B
工人数n	10	8
平均时间（分）	26.1	17.6
样本标准差	12	10.5

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

R代码

例2. 在平炉上进行的一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加刚的得率，试验时在同一个平炉上进行的，每炼一炉刚时除操作方法外，其它条件都尽可能做到相同，先用标准方法炼一炉，然后用新方法炼一炉，以后交替进行，各炼了10炉，其得率分别为

标准方法	78.1 72.4 76.2 74.3 77.4 78.4 76.0 75.5 76.7 77.3
新方法	79.1 81.0 77.3 79.1 80.0 79.1 79.1 77.3 80.2 82.1

设这两个样本相互独立，且分别来自正态总体N（μ_1, σ^2)和N（μ_2, σ^2)，其中μ_1，μ_2和σ^2未知。问新的操作能否提高得率？（取α=0.05）

```
```{r t-test-4}
X<-c(78.1,72.4,76.2,74.3,77.4,78.4,76.0,75.5,76.7,77.3)
Y<-c(79.1,81.0,77.3,79.1,80.0,79.1,79.1,77.3,80.2,82.1)
t.test(X,Y,var.equal = TRUE,alternative = "less")
```
```

```
        Two Sample t-test

data:  X and Y
t = -4.2957, df = 18, p-value = 0.0002176
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
      -Inf -1.908255
sample estimates:
mean of x mean of y 
    76.23     79.43 
```

情形3：σ_1^2和σ_2^2未知，$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，且n较小

- t检验

检验统计量 $$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}} \sim t(df')$$

修正的自由度 $$df'=\frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1}+\dfrac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}}$$

假设检验

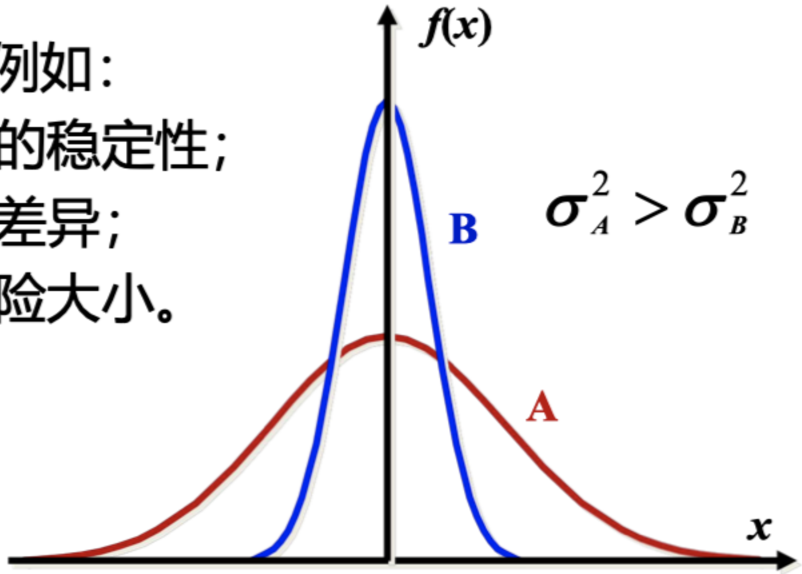
- 假设检验的原理
- 单个总体的均值检验
- 两个总体的均值检验
- **单个总体的方差检验**
- 两个总体的方差检验

方差的假设检验

- 方差

方差反映数据的离散程度。例如：

- 产品规格的方差反映产品的稳定性；
- 收入的方差反映收入分配差异；
- 收益率的方差反映投资风险大小。



$$\sigma_A^2 > \sigma_B^2$$

两类问题

- 单个总体的方差检验：判断方差是否等于给定值？
- 两个总体的方差检验：判断方差是否相等？

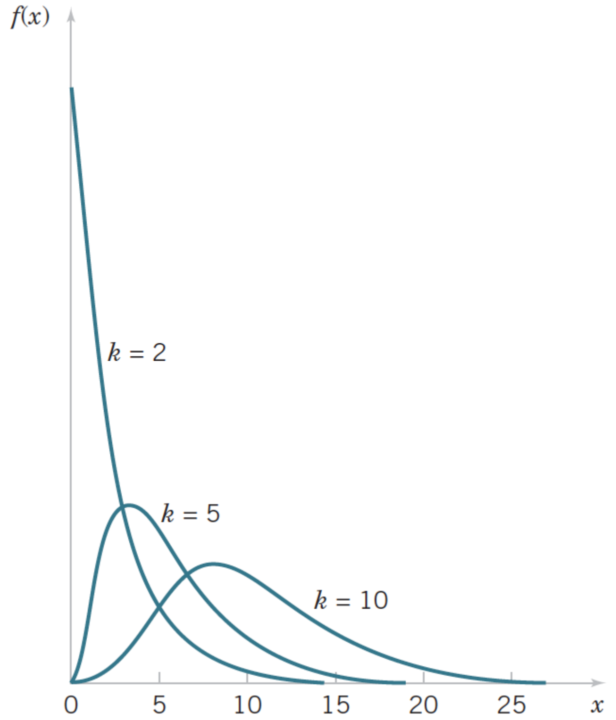
单个总体的方差检验

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

$$\sim \chi^2(n)$$

概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)}\, x^{(k/2)-1} e^{-x/2} \qquad x > 0$$



where k is the number of degrees of freedom

假设总体服从正态分布，即$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ, σ均未知。

欲检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$；

$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

当H_0成立时，可以证明统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

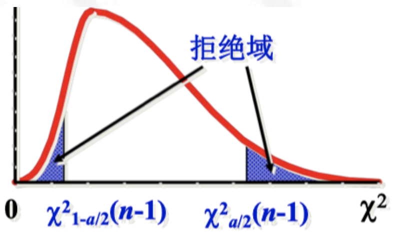
样本方差，可计算

假设的总体方差值，已知

临界值：

$$P\{\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\} = \frac{\alpha}{2},$$

$$P\{\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = \frac{\alpha}{2}.$$



拒绝域：

$$\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1).}$$

（证明）卡方统计量推导公式

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

$$\chi^2 = \frac{(x_1-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(x_2-\mu)^2}{\sigma^2} + \cdots + \frac{(x_n-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$$

$$S^2 = \sum \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

$$\sum (x_i-\bar{x})^2 = (n-1) * S^2$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1) * S^2}{\sigma^2}$$

实例分析

- 根据长期正常生产的资料可知，某厂所产导线的电阻 服从正态分布，其方差为0.0025。现从某日产品中随机抽取20 根，测得样本方差为0.0042。试判断该机工作是否正常？（$\alpha = 0.05$)

检验步骤:

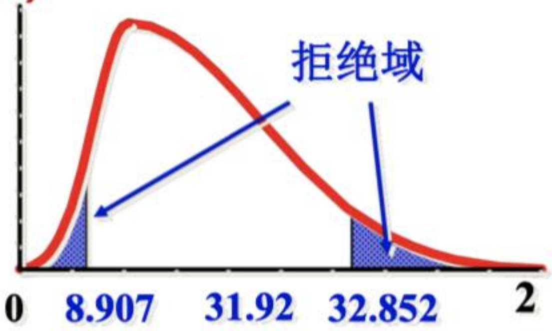
1.提出原假设与备择假设: H_0: $\sigma^2 = 0.0025$；

H_1: $\sigma^2 \neq 0.0025$

2.构建检验统计量:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)\times 0.0042}{0.0025} = 31.92$$

3.确定拒绝域 （a=0.05)



4.作出统计决策

在 α= 0.05的水平上无法拒绝H_0, 说明该机器工作正常。

假设检验

- 假设检验的原理
- 单个总体的均值检验
- 两个总体的均值检验
- 单个总体的方差检验
- 两个总体的方差检验

两个总体的方差检验

设两个样本分别来自正态总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，上述参数未知。

两个样本相互独立，样本方差分别为s_1^2和s_2^2。

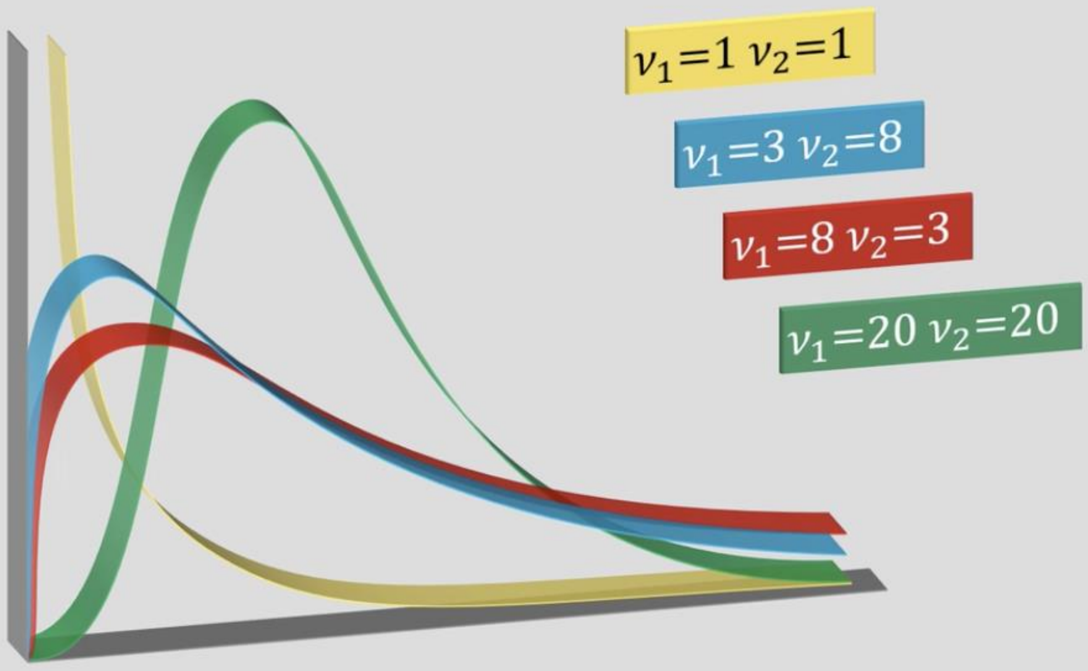
欲检验假设：H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，H_1：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

当H_0成立时，检验统计量：

$$F=\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}=\frac{s_1^2}{s_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

$$F=\frac{\frac{W_1}{v_1}}{\frac{W_2}{v_2}}=\frac{\left.\frac{(n_1-1)*S_1^2}{\sigma_1^2}\right/(n_1-1)}{\left.\frac{(n_2-1)*S_2^2}{\sigma_2^2}\right/(n_2-1)}=\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$$

F分布



F分布的PDF概率密度函数

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\frac{x^{\frac{(\nu_1-2)}{2}}}{\left[\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)x+1\right]^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}$$

$$\sim F_{\nu_1,\nu_2}$$

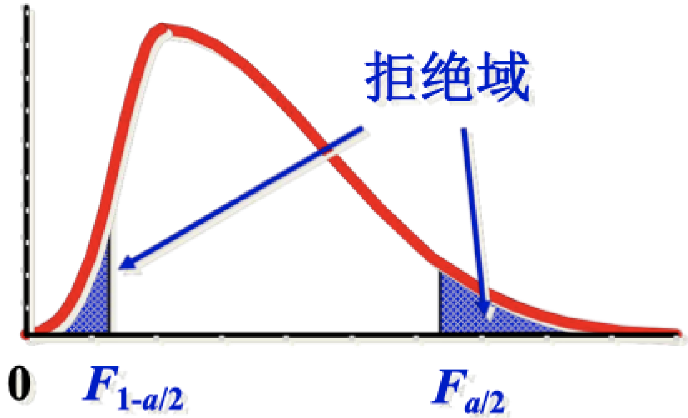
拒绝域

当原假设H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 成立时， s_1^2/s_2^2应该接近于1。

拒绝域

$$s_1^2/s_2^2 \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

$$\text{或}\, s_1^2/s_2^2 \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$



实例分析

- 两台车床加工同一零件，分别取6件和9件测量直径， 得s_1^2 = 0.345， s_2^2 = 0.357。假定零件的直径服从正态分布，能否据此断定两个总体的方差相等？（a=0.05）

检验步骤：

1.提出原假设与备择假设： H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$；

H_1：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2.构建检验统计量：

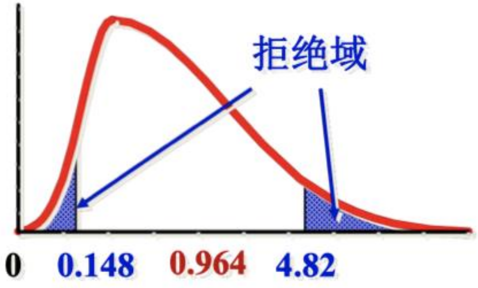
$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.345}{0.357} = 0.964$$

检验步骤：

3.确定拒绝域（a=0.05）

$$F_{1-a/2}(5, 8) = 0.148,$$

$$F_{a/2}(5, 8) = 4.82,$$



4.作出统计决策

在 α= 0.05的水平上无法拒绝$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。可以认为这两个总体的方差没有显著差异。

R代码

```
```{r f-test-5}
 set.seed(123)
 X<-rnorm(10,1,2)
 Y<-rnorm(10,2,4)
 print(paste("F=(sd(X)/sd(Y))^2=",(sd(X)/sd(Y))^2,sep=""))
 var.test(X,Y,alternative = "two.sided")
```
```

```
[1] "F=(sd(X)/sd(Y))^2=0.211049341451273"

	F test to compare two variances

data:  X and Y
F = 0.21105, num df = 9, denom df = 9, p-value = 0.02989
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.05242167 0.84968342
sample estimates:
ratio of variances
         0.2110493
```

方差检验总结

	原假设H_0	备择假设H_1	检验统计量	拒 绝 域
单个总体	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
两个总体	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$	$F \ge F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

总结

- 假设检验的原理
- 单个总体的均值检验
- 两个总体的均值检验
- 单个总体的方差检验
- 两个总体的方差检验

均值检验

- 单个总体的均值检验

$$z=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

均值检验

- 两个总体的均值检验

情况1，已知总体方差

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

情况2，未知总体方差，但两方差相同

$$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

情况3，未知总体方差，但两方差不同

$$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\sim t(df')$$

$$df'=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

方差检验

- 单总体方差检验

样本方差，可计算

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

假设的总体方差值，已知

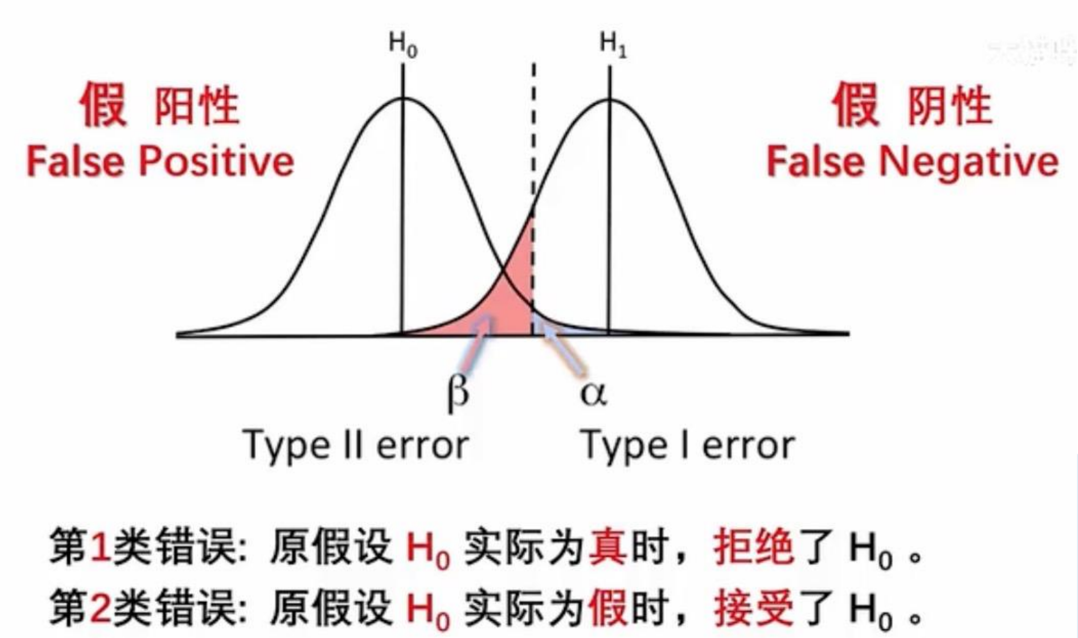
方差检验

- 两个总体的方差检验

$$F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

讨论

- P值的理解
- 显著水平/置信区间的理解
- 两类错误
  - Type I Error **弃真**
  - Type II Error **取伪**



Probability of Type I Error
α = P(type I error) = P(reject H_0 when H_0 is true)

Probability of Type II Error
β = P(type II error) = P(fail to reject H0 when H0 is false)

Thanks

高 珍
同济大学
计算机科学与技术学院
（gaozhen@tongji.edu.cn）