大学院システム情報科学府 基礎共通科目　　2018 年 1 月 26 日

確率・統計特論 期末試験

担当: 来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

注意事項

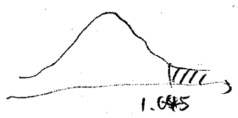
・書籍，ノート，メモ，演習解答持ち込み可．電子機器 (電子書籍，電卓を含む) 使用不可．
・解答欄が足りない場合は，解答用紙裏面を使用して良い．
・問題は全部で 3 問ある．合計点が 100 点を超える場合でも 100 点満点とする．
・持ち込み資料，筆記用具等の試験中の貸し借りを一切禁ず．

問題 1　[40 点]

I. 中心極限定理を記述せよ．[5]

II. n 個の標本 $a_1, \dots, a_n$ は，期待値 μ 分散 σ^2 の独立同一分布に従うものとする．ただし，μ および σ^2 の値は未知とする．以下の各問いに答えよ．
(II-1) 標本平均 $\overline{a} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ は期待値 μ の不偏推定量といえるか？[10]
(II-2) 不偏分散 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \overline{a})^2$ が分散 σ^2 の不偏推定量であることを示せ．[10]

III. A 社では新製品を開発している．従来製品の性能指数は 270 であった．ただし，性能指数は大きいほどよいものとする．試作品 267 個を作成し，その性能指数の平均値は 273.4，不偏分散は 35.9^2 であった．以下の各問いに答えよ．
(III-1) 試作品の母平均と母分散を推定せよ．[5]
(III-2) 試作品の性能は従来製品に比べて優れているといえるか?ただし，$\int_{1.645}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2}) \mathrm{d}t = 0.05$ としてよい．[10]



$\sigma^2 =$

問題 2　[45 点]

I. いま, n 対の実数 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ が与えられたとし, 実変数 a, b の関数

$$L(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

の最小化を考える. 記法の便利のため,

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \overline{x^2} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \overline{x \cdot y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,$$

とする.

(I-1) 関数 $L(a,b)$ の導関数 $\frac{\partial}{\partial a}L(a,b)$ と $\frac{\partial}{\partial b}L(a,b)$ を求めよ. [10]

(I-2) 関数 $L(a,b)$ を最小とする a, b を $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{x \cdot y}$ を用いて答えよ. [10]

II. 負荷 x $(100 \leq x \leq 500)$ が与えられた時の応答値 y を知りたい. 8 回の試行を行ったところ, 下記のデータを得た.

試行番号	1	2	3	4	5	6	7	8
負荷 x	230	163	490	401	134	268	497	217
応答値 y	514.4	346.9	693.4	626.5	150.9	396.0	826.6	336.8

(II-1) いま, $y = ax + b + \mathcal{E}$ が成り立つと仮定する. ただし, 誤差項 $\mathcal{E}$ は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数を表す. このとき a と b に対する最小二乗推定量を求めよ. ただし, 以下の数値を用いてよい. [10]

$$\overline{x} \simeq 300.0, \quad \overline{y} \simeq 468.4, \quad \overline{x^2} \simeq 108000, \quad \overline{x \cdot y} \simeq 172000.$$

(II-2) 負荷と応答値に相関はないという帰無仮説について, 有意水準 5%で議論せよ. ただし誤差項 $\mathcal{E}$ の分散は $\sigma^2 = 100^2$ と仮定できるものとする. [15]

t 分布表

自由度	1	2	3	4	5	6	7	8	∞
両側 5%点	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	1.960

問題 3　[45 点]

I. 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立に同一のポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ に従うものとし, λ は未知パラメータとする. ただし, ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ の確率関数は

$$f(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

で与えられる. いま, 以下の 10 個の標本を得た.

試行番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標本値 x	8	7	4	9	2	8	12	6	9	8

$\bar{x} = 7.3$

19 25 30 38 50 56 65 73

(I-1) パラメータ λ に対する対数尤度関数 $\log L(\lambda)$ を求めよ. ただし, 対数の底は e とする. [5]

(I-2) パラメータ λ の最尤推定量を求めよ. [10]

(I-3) I-2 で求めた推定量は λ の不偏推定量といえるか？ [10]

II. 今度は I のデータに対して，ベイズ推定を行う.

(II-1) 事前分布をガンマ分布 $\mathrm{Ga}(1, 1)$ として，事後分布を求めよ．ただし，ガンマ分布 $\mathrm{Ga}(\alpha, \nu)$ $(\alpha > 0,\ \nu > 0)$ の密度関数は

$$f(x) = \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp(-\alpha x) \qquad (x \geq 0)$$

で与えられる．また，$\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を用いてよい．[10]

(II-2) 事後分布を最大にする λ を求めよ．[10]

※ヒント: 事後分布の対数を考えよ．