7. 行列式

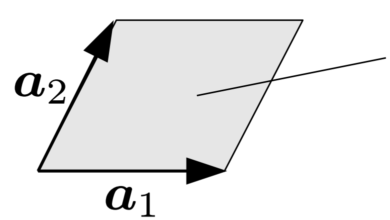
- 行列式

$$A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \boldsymbol{a}_n] = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_n^T \end{bmatrix}$$ を $n \times n$ 行列とする

行列 A の行列式 $\mathrm{det}A$ の意味

$|\mathrm{det}A|$ は, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ または $\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{a}}_n$ を稜とする n 次元超平行多面体の体積に等しい

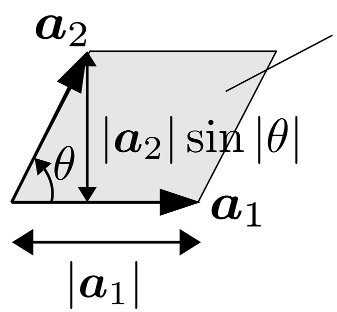
例 $n=2$ $\quad A = [\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2]$



平行四辺形の面積
$= |\mathrm{det}A|$

7. 行列式

$$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$



面積: $|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2| \sin|\theta| = |\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2||\sin\theta|$

$$= |\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$= |\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\sqrt{1 - \left(\frac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}\right)^2}$$

$$= \sqrt{|\boldsymbol{a}_1|^2|\boldsymbol{a}_2|^2 - (\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2)^2}$$

$$= \sqrt{({a_{11}}^2 + {a_{21}}^2)({a_{12}}^2 + {a_{22}}^2) - (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})^2}$$

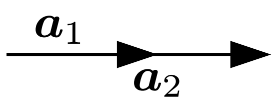
$$= \sqrt{{a_{11}}^2{a_{12}}^2 + {a_{11}}^2{a_{22}}^2 + {a_{21}}^2{a_{12}}^2 + {a_{21}}^2{a_{22}}^2 - ({a_{11}}^2{a_{12}}^2 + 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + {a_{21}}^2{a_{22}}^2)}$$

$$= \sqrt{{a_{11}}^2{a_{22}}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + {a_{21}}^2{a_{12}}^2}$$

$$= \sqrt{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2} = |a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}|$$

7. 行列式

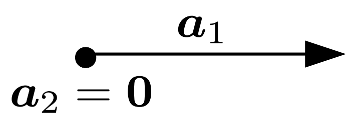
$\det A\!=\!0$ となるのはどのような時？



$\boldsymbol{a}_2 = k\boldsymbol{a}_1$

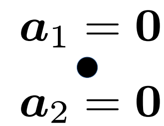
$k\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$

ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は
線形独立では<u>ない</u>



$0 \cdot \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$

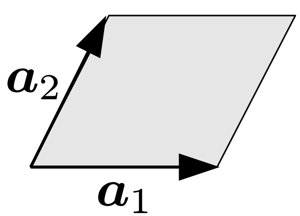
ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は
線形独立では<u>ない</u>



$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$

ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は
線形独立では<u>ない</u>

$\det A \neq 0$ となるのはどのような時？



$\boldsymbol{a}_1$ も $\boldsymbol{a}_2$ も零ベクトルではない．かつ，これらは異なる方向を持つ

$\boldsymbol{a}_1 = k\boldsymbol{a}_2$ を満たす k は存在しない

ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は線形独立で<u>ある</u>

7. 行列式

一般に

$\mathrm{det}A \neq 0 \ \Leftrightarrow \{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}, \{\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{a}}_n\}$は線形独立である

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}A = n$

$\mathrm{det}A = 0 \ \Leftrightarrow \{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}, \{\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{a}}_n\}$ は線形独立では<u>ない</u>

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}A < n$

しかし $\mathrm{det}A \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$ は $\mathrm{rank}A \begin{cases} < n \\ = n \end{cases}$ しか示さない

それでも，階数と異なり，行列式は実数値をとる
また，それゆえに，二つの行列 A と B のうち，どちらが非最大階数の状況に近いかを，行列式を見ることによって知ることができる
例 $\mathrm{det}A{=}10$ $\mathrm{det}B{=}0.1$.

7. 行列式

2×2 行列 A によって表現される写像 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ を考える.

ベクトル$\boldsymbol{x}_1$ がベクトル$\boldsymbol{y}_1$ に，また，ベクトル$\boldsymbol{x}_2$ がベクトル$\boldsymbol{y}_2$ に写像されるとしよう. すなわち，$\boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{y}_2 = A\boldsymbol{x}_2$.

これらは行列を用いて次のように表現できる

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}.$$

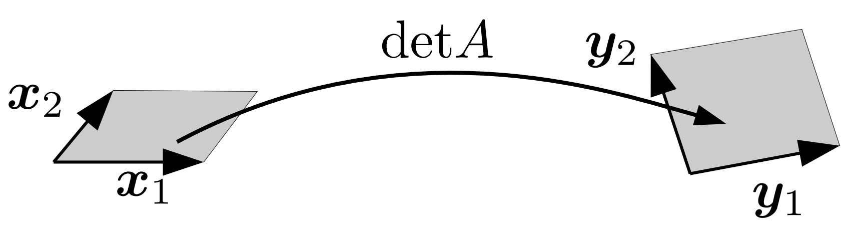
ここで，すべての行列 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix}$, A, $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}$ は正方である.

したがって，次の関係が得られる.

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix} = \det\left(A\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}\right) = \det A \cdot \det\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix},$$

$$\det A = \frac{\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}}.$$

すなわち，行列の行列式は，写像されたベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$で張られる面積が，元の面積の何倍になるかを表している.



7. 行列式

行列の階数と行列式の関係

$\mathrm{rank}A$ は A の小行列式のうち値が零でないものの最大のサイズ（行数，列数）

直感的理解のための例：対角行列

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}
$$

小行列式（サイズは $(n–2)\times(n–2)$）

$$= a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_n \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{rank}A = n - 2$$

$$
A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 x_3 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{bmatrix}
$$

行列 A はベクトル $\boldsymbol{x}$ 中の n 個の成分のうち $x_3, \cdots, x_n$ の $n–2$ 個しか移せない