

□ 以下の  $n$  次元ベクトルの集合を考える. ただし  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  である.  
また  $\mathbb{R}$  の実数からなる集合を  $\mathbb{R}$  とする.

$$X_1 = \left\{ x \mid a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} = 0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \neq 0 \right\}$$

$$X_2 = \left\{ x \mid b_1 x_1 + \dots + b_{n-1} x_{n-1} + b_n = 0, b_1, \dots, b_n \neq 0 \right\}$$

$X_1$  と  $X_2$  が  $\mathbb{R}$  上の線形空間か否かを理由とともに述べよ. また.  
線形空間である場合はその次元を示せ.

□ 次の行列が全射, 単射, 全単射, これらのいずれでもない写像のうちどの種類か?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□  $Hx = d$  を満たす  $x$  の中で  $x^T A x + b^T x + C$  を最大にする  $x$  を  $x_0$  とする.  $x_0$  が満たすべき必要十分条件を記せ. ただし  $x$  と  $b$  は  $n$  次元ベクトル,  $A$  は  $n \times n$  行列,  $C$  はスカラー,  $H$  は  $m \times n$  行列,  $d$  は  $m$  次元ベクトルである.  
また条件  $Hx = d$  が課せられていないとしても  $x^T A x + b^T x + C$  の最大値が存在する条件を示せ.