15. 関数のベクトルによる微分

- ベクトルの関数
  - 変数 $x_1, \dots, x_n$ の関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ は, ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ の関数 $f(\boldsymbol{x})$ とみなすことができる

    f の $\boldsymbol{x}$ に関する偏導関数は次のように定義できる

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

    これは f の勾配 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ に等しい

15. 関数のベクトルによる微分

- ベクトルのベクトル値関数
  - ベクトルのベクトル値関数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

  - $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{x}$ に関する導関数は次のように定義される

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{x}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

15. 関数のベクトルによる微分

- ベクトルの関数の2階導関数

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{bmatrix}$$

これはヘッセ行列と呼ばれる

もし $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ が連続ならば, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ がなりたち, ヘッセ行列は対称行列になる

15. 関数のベクトルによる微分

- 例
  - $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}$$

  - $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x})^T = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A^T$$

15. 関数のベクトルによる微分

- 例
  - $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{x}$$

$$\left(= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}^T \underbrace{(A\boldsymbol{x})}_{\text{固定}} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \underbrace{\left(\boldsymbol{x}^T A\right)}_{\text{固定}} \boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x}) + \left(\boldsymbol{x}^T A\right)^T = A\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{x} \right)$$

15. 関数のベクトルによる微分

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(A\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{x}\right)^T = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{x}^T A^T + \boldsymbol{x}^T A\right) = A^T + A$$

A が対称（$A^T = A$ ）のときは $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = 2A$

16. 線形システム制御

- システム制御において行列がどのように活用されるかを見てみる

16. 線形システム制御

- システムモデル
  - 物体の運動は次のニュートンの運動方程式で表現される

$$f = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ここで x は物体の位置, m は質量, f は物体に働く力, t は時間を表す

二つの変数を次のように定義する

$$x_1 = x,\ \ x_2 = \frac{dx}{dt}$$

すると, 上記の2階微分方程式は, 二つの1階微分方程式の組

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \ \frac{dx_2}{dt} = \frac{f}{m}$$

に変換することができる

16. 線形システム制御

方程式の組

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{f}{m}$$

は次のようにも表現できる

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} f$$

一般に，線形動的システムは次式で表すことができる

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{u}$ は入力ベクトルである．上の例では f に相当する
$\boldsymbol{x}$ は状態ベクトルと呼ばれる

16. 線形システム制御

– 離散時間モデル

- 離散時間 $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ を考えよう

  時刻 k と $k{+}1$ の間の実際の時間差 T はシステムによって異なる

  時刻 k における状態 $\boldsymbol{x}$ の値を $\boldsymbol{x}_k$と表すことにする

  すなわち, $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}(kT)$

  $\boldsymbol{x}(t)$ の t に関する微分は次のように近似できる

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) \simeq \frac{\boldsymbol{x}((k+1)T) - \boldsymbol{x}(kT)}{T} = \frac{\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k}{T}.$$

  これは前進オイラー近似と呼ばれる

16. 線形システム制御

- 離散時間システムを表現するモデル

前進オイラー近似を用いると, 方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$

を

$$\frac{\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k}{T} \simeq A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k$$

あるいは

$$\boldsymbol{x}_{k+1} \simeq (AT + I)\boldsymbol{x}_k + BT\boldsymbol{u}_k$$

と近似することができる

したがって, 離散時間では, 線形動的システムは次の形の式で表現できる

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = F\boldsymbol{x}_k + G\boldsymbol{u}_k$$

これは差分方程式である

16. 線形システム制御

– 上の議論は前進オイラー近似に基づいており, したがって, 正確ではない
線形動的システムの正確な離散時間表現を求めようとすると, 連続時間微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$

の解から始める必要がある

この解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

である. ここで

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots$$

16. 線形システム制御

これから次が得られる

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{x}((k+1)T) \\
&= e^{A(k+1)T}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\
&= e^{AT}e^{AkT}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^{kT} e^{AT}e^{A(kT-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\
&\qquad\qquad + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\
&= e^{AT}\left(e^{AkT}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\right) \\
&\qquad\qquad + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\
&= e^{AT}\boldsymbol{x}_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

16. 線形システム制御

$\boldsymbol{u}(t)$ が $kT \leq t \leq (k+1)T$ で一定値をとるならば，その値を$\boldsymbol{u}_k$ と表すと，次が得られる

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = e^{AT}\boldsymbol{x}_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B d\tau \boldsymbol{u}_k$$

$$= e^{AT}\boldsymbol{x}_k + \left(\int_0^T e^{As} B ds\right)\boldsymbol{u}_k$$

これから，$F = e^{AT}$ と $G = \displaystyle\int_0^T e^{As} B ds$ を得る

16. 線形システム制御

次式

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots.$$

から

$$F = e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2!}A^2T^2 + \frac{1}{3!}A^3T^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} G &= \int_0^T e^{As}Bds = \int_0^T \left(I + As + \frac{1}{2!}A^2s^2 + \frac{1}{3!}A^3s^3 + \dots \right) Bds \\ &= \left(IT + \frac{1}{2}AT^2 + \frac{1}{3!}A^2T^3 + \frac{1}{4!}A^3T^4 + \dots \right) B \end{aligned}$$

と表すことができる. これらの級数を T についての1次の項までで打ち切ると

$$F \simeq I + AT,\ G \simeq BT,$$

となり, 159ページで得たものと同じものが得られる.

16. 線形システム制御

- 可到達性
  - 離散時間線形動的システムを考えよう. もし, 任意の目標状態 $\boldsymbol{x}_D$ に対して, 状態が $\mathbf{0}$ から有限時間 N で $\boldsymbol{x}_D$ に遷移するような入力系列 $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N$ が存在するとき, システムは可到達であるという

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_0 &= \mathbf{0}, \\
\boldsymbol{x}_1 &= F\boldsymbol{x}_0 + G\boldsymbol{u}_0 = G\boldsymbol{u}_0, \\
\boldsymbol{x}_2 &= F\boldsymbol{x}_1 + G\boldsymbol{u}_1 = FG\boldsymbol{u}_0 + G\boldsymbol{u}_1, \\
\boldsymbol{x}_3 &= F\boldsymbol{x}_2 + G\boldsymbol{u}_2 = F(FG\boldsymbol{u}_0 + G\boldsymbol{u}_1) + G\boldsymbol{u}_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\;\; = F^2G\boldsymbol{u}_0 + FG\boldsymbol{u}_1 + G\boldsymbol{u}_2, \\
&\qquad\qquad\qquad\;\; \vdots \\
\boldsymbol{x}_{N+1} &= F^NG\boldsymbol{u}_0 + F^{N-1}G\boldsymbol{u}_1 + \cdots + G\boldsymbol{u}_N.
\end{aligned}
$$

16. 線形システム制御

したがって，問題は，任意の $\boldsymbol{x}_D$ に対して，有限の N とベクトル

$$\boldsymbol{U}_N = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_N \end{bmatrix}$$

が存在して

$$\boldsymbol{x}_D = \boldsymbol{x}_{N+1} = \begin{bmatrix} F^N G & F^{N-1} G & \cdots & G \end{bmatrix} \boldsymbol{U}_N,$$

とすることができるかどうかである

このような $\boldsymbol{U}_N$ は，行列 $\begin{bmatrix} F^N G & F^{N-1} G & \cdots & G \end{bmatrix}$ によって表現される写像が全射であれば，言い換えると，この行列が最大行階数を持てば，存在する

16. 線形システム制御

状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ の次元が n, 入力ベクトル $\boldsymbol{u}$ の次元が p であるとする. このとき, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ かつ $G \in \mathbb{R}^{n\times p}$ であり, したがって

$$\begin{bmatrix} F^N G & F^{N-1}G & \cdots & G \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(N+1)p}.$$

したがって, $\begin{bmatrix} F^N G & F^{N-1}G & \cdots & G \end{bmatrix}$ の n 本の行ベクトルがすべて線形独立であれば, システムは可到達である

行列 $\begin{bmatrix} F^N G & F^{N-1}G & \cdots & G \end{bmatrix}$ は可到達性行列と呼ばれる

$(N+1)p \geq n$ となる N を考えれば十分である

16. 線形システム制御

- 例
  - $\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ n = 2,\ p = 1$$

$(N+1)p \geq n$ を満たす最小の N は 1 である

可到達性行列は $\begin{bmatrix} FG & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ であり，これは最大行階数を持つ．したがって，システムは可到達である

$\boldsymbol{x}_D = \begin{bmatrix} x_{D,1} \\ x_{D,2} \end{bmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{x}_D = \begin{bmatrix} FG & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}$ の関係から適切な入力系列が次のように得られる

$$u_0 = x_{D,1},\ u_1 = x_{D,2} - x_{D,1}$$

16. 線形システム制御

- $$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

  $$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ n = 2,\ p = 1.$$

  $(N+1)p \geq n$ を満たす最小の N は 1 である

  可到達性行列は $\begin{bmatrix} FG & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ であり，これは最大行階数

  を持たない．したがって，システムは可到達ではない

16. 線形システム制御

- 出力方程式
  - $\boldsymbol{y}$ をシステムからの出力ベクトルとする
    出力は状態（状態を混合したもの）の観測値であり, 次式で表される

$$\boldsymbol{y}_k = H\boldsymbol{x}_k.$$

16. 線形システム制御

- 可観測性
  - 入力系列 $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}$と, これらの入力への応答として得られた出力系列$\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_N$があるとする
    入出力系列から, 初期状態 x_0を知ることはできるだろうか？
    これができるとき, システムは可観測であると言う

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0 = H\boldsymbol{x}_0, \\
&\boldsymbol{x}_1 = F\boldsymbol{x}_0 + G\boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{y}_1 = HF\boldsymbol{x}_0 + HG\boldsymbol{u}_0, \\
&\boldsymbol{x}_2 = F\boldsymbol{x}_1 + G\boldsymbol{u}_1 = F^2\boldsymbol{x}_0 + FG\boldsymbol{u}_0 + G\boldsymbol{u}_1, \\
&\qquad\quad \boldsymbol{y}_2 = HF^2\boldsymbol{x}_0 + HFG\boldsymbol{u}_0 + HG\boldsymbol{u}_1, \\
&\boldsymbol{x}_3 = F\boldsymbol{x}_2 + G\boldsymbol{u}_2 = F^3\boldsymbol{x}_0 + F^2G\boldsymbol{u}_0 + FG\boldsymbol{u}_1 + G\boldsymbol{u}_2, \\
&\qquad\quad \boldsymbol{y}_3 = HF^3\boldsymbol{x}_0 + HF^2G\boldsymbol{u}_0 + HFG\boldsymbol{u}_1 + HG\boldsymbol{u}_2, \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\boldsymbol{x}_N = F^N\boldsymbol{x}_0 + F^{N-1}G\boldsymbol{u}_0 + \cdots + G\boldsymbol{u}_{N-1}. \\
&\qquad\quad \boldsymbol{y}_N = HF^N\boldsymbol{x}_0 + HF^{N-1}G\boldsymbol{u}_0 + \cdots + HG\boldsymbol{u}_{N-1}.
\end{aligned}
$$

16. 線形システム制御

- 初期状態と入出力系列の関係は以下の通りである

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_0 &= H\boldsymbol{x}_0, \\
\boldsymbol{y}_1 - HG\boldsymbol{u}_0 &= HF\boldsymbol{x}_0, \\
\boldsymbol{y}_2 - HFG\boldsymbol{u}_0 - HG\boldsymbol{u}_1 &= HF^2\boldsymbol{x}_0, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{y}_N - HF^{N-1}G\boldsymbol{u}_0 - \cdots - HG\boldsymbol{u}_{N-1} &= HF^N\boldsymbol{x}_0.
\end{aligned}
$$

これらは次のように表現できる

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_0 \\ \boldsymbol{y}_1 - HG\boldsymbol{u}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_N - HF^{N-1}G\boldsymbol{u}_0 - \cdots - HG\boldsymbol{u}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^N \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0.
$$

16. 線形システム制御

- 関係式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_0 \\ \boldsymbol{y}_1 - HG\boldsymbol{u}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_N - HF^{N-1}G\boldsymbol{u}_0 - \cdots - HG\boldsymbol{u}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^N \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0$$

から, 行列

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^N \end{bmatrix}$$

が単射を表現する, すなわち, この行列が最大列階数を持つ, ときに $\boldsymbol{x}_0$ を一意に定めることができることがわかる

16. 線形システム制御

出力ベクトル $\boldsymbol{y}$ の次元を q とする. このとき $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$ であり,

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)q \times n}$$

となる

よって, $\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^N \end{bmatrix}$ の n 本の列ベクトルがすべて互いに線形独立のとき

システムは可観測となる

行列 $\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^N \end{bmatrix}$ は可観測性行列と呼ばれる

$(N+1)q \geq n$ となる N を考えれば十分である

16. 線形システム制御

– 例

- $$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k,\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ n = 2,\ q = 1.$$

$(N+1)q \geq n$ を満たす最小の N は 1

可観測性行列は $\begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ であり，これは最大列階数を

持つ．よってシステムは可観測である

16. 線形システム制御

- $\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k,\ y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

可観測性行列は$\begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$であり，これは最大列階数を

持たない．よってシステムは可観測ではない