9. 正定値行列, 負定値行列

- 二次形式

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ （$n \times n$ 行列）

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ （n ベクトル）

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$ は二次形式と呼ばれる

行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ を用いると, 二次形式は $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$と表せる

9. 正定値行列, 負定値行列

A を実対称行列とする，すなわち $A^T = A$

$\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ に対して

$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0$ であれば，A は正定値行列であると言い，しばしば $A > 0$ と表現される

$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \geq 0$ であれば，A は準正定値行列であると言い，しばしば $A \geq 0$ と表現される

$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} < 0$ であれば，A は負定値行列であると言い，しばしば $A < 0$ と表現される

$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \leq 0$ であれば，A は準負定値行列であると言い，しばしば $A \leq 0$ と表現される

9. 正定値行列, 負定値行列

スカラー a については

$$x^T ax = xax = ax^2 > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

$$x^T ax = ax^2 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$x^T ax = ax^2 < 0 \Leftrightarrow a < 0$$

$$x^T ax = ax^2 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$$

$$\forall x \neq 0$$

行列の正定値性，負定値性は，スカラーの正，負に対応している.
しかし，まったく同じではない

9. 正定値行列, 負定値行列

「$A > 0$ でないならば $A \leq 0$ である」は正しくない

あるベクトル $\boldsymbol{x}_1$については $\boldsymbol{x}_1^T A \boldsymbol{x}_1 \leq 0$ となり，別のベクトル $\boldsymbol{x}_2$ についてはは $\boldsymbol{x}_2^T A \boldsymbol{x}_2 > 0$ となるような対称行列 A が存在する

例

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

すべての対称行列が101ページに記した4グループのいずれかに所属するわけではない

10. 固有値

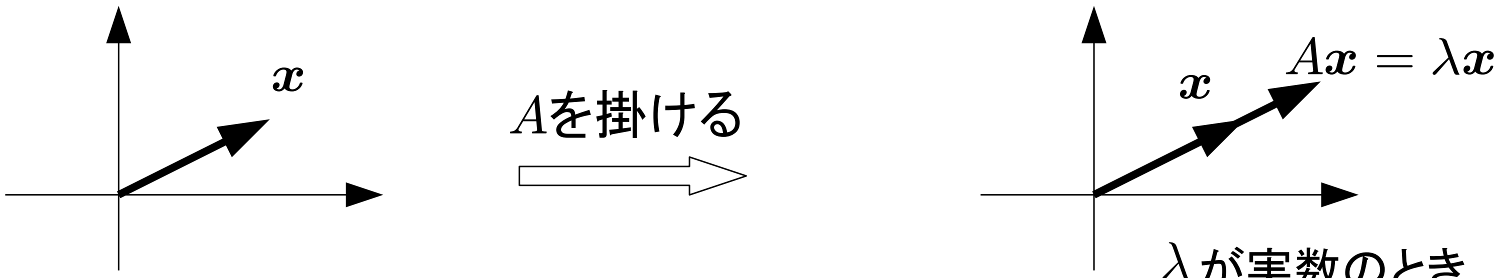
- これまでは，情報の量（線形空間の次元）に焦点をあて，以下のことを調べた
  - 写像（行列を掛ける操作）によって情報が失われるかどうか
  - $x \in X$ から $y \in Y$ に $y = Ax$ によって情報を移すことができるかどうか，言い換えると，x を適切に設定することによって任意の y を得ることができるかどうか
  - y の値から $y = Ax$ を満たす x の値を抽出することができるかどうか
  - 上記のことと行列が持つ特徴（階数や行列式）の間の関係
- 写像は（ベクトルの集合が持つ情報の量だけでなく）ベクトルの値も変える．以下では，これらの値の変化と，それと行列が持つ特徴（固有値，固有ベクトル）との関係を調べることにする

10. 固有値

この章を通して, A は $n \times n$ 行列であるとする

- 固有値と固有ベクトル

あるスカラー λ について, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき,
λ は A の固有値, $\boldsymbol{x}$ は固有値 λ に対応する固有ベクトルと呼ばれる



λ が実数のとき, $\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{x}$ は
同じ方向を向く

10. 固有値

例

行列$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$の固有値は $\lambda_1 = \dfrac{1}{2},\ \lambda_2 = \dfrac{3}{2}$

それぞれに対応する固有ベクトルの例は

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

確認

$$A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$$

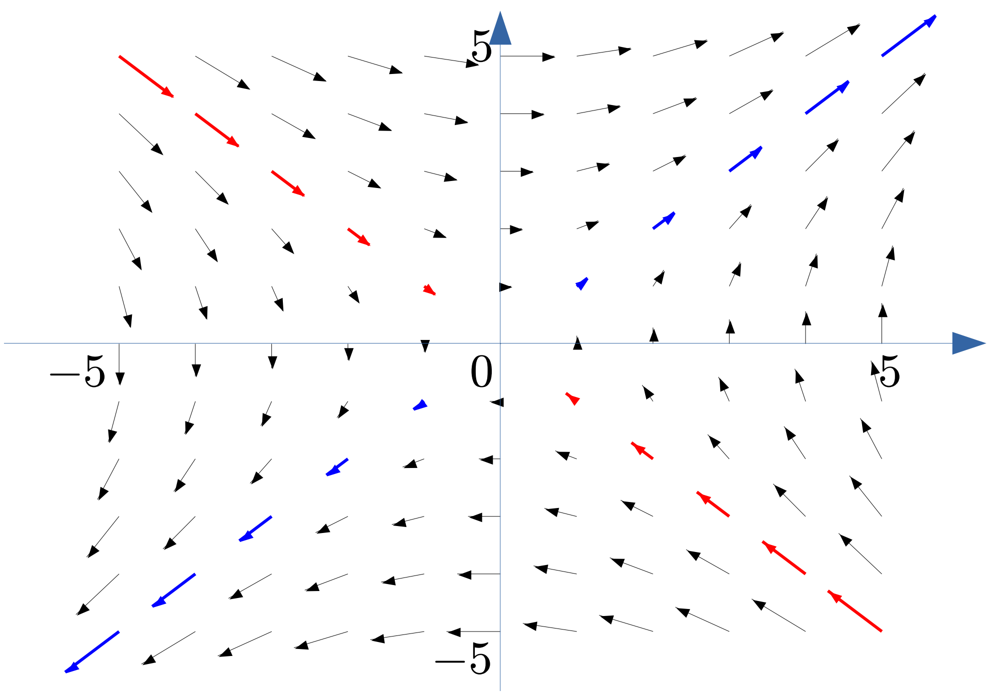
$$A\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$$

10. 固有値

行列 A で表現される写像はベクトルをどのように変えるだろうか？
言い換えると，ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $A\boldsymbol{x}$ によってどこに行くだろうか？

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{3}{2} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

実固有値をもつ行列



矢印の根元 : $\boldsymbol{x}$，矢印の頭 : $A\boldsymbol{x}$

ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ の向きのとき

すなわち $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}_1$ のとき，$A\boldsymbol{x}$ は原点から

遠ざかる $A(\alpha \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{3}{2}(\alpha \boldsymbol{x}_1)$.

ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の向きのとき

すなわち $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}_2$ のとき，$A\boldsymbol{x}$ は原点に

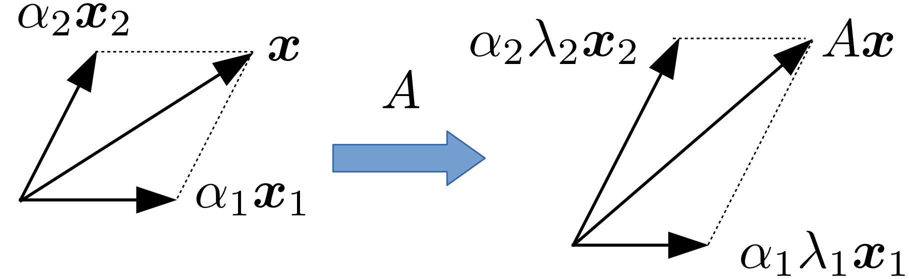
近づく $A(\alpha \boldsymbol{x}_2) = \dfrac{1}{2}(\alpha \boldsymbol{x}_2)$.

10. 固有値

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が互いに線形独立のとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n$ と表すことができる．このとき

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} &= A(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n) = \alpha_1 A\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n A\boldsymbol{x}_n \\
&= \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \boldsymbol{x}_n .
\end{aligned}
$$

もし $|\lambda_\ell| \geq |\lambda_i|,\ i = 1, \ldots, n,\ i \neq \ell$ であれば，$A^k \boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}_\ell$ と同じ向きのベクトルに近づく



$$
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{13}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 1.625 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{13}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{41}{16} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5625 \\ 2.5 \end{bmatrix}
$$

10. 固有値

固有値が複素数のとき，固有ベクトルも一般には複素ベクトルになる

例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \ \lambda_1 = 1 + i,\ \lambda_2 = 1 - i,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

107ページの図と同様の図を描くことはできない