10. 固有値

- 固有値の重複度と固有ベクトルの線形独立性
  - 特性多項式, 特性方程式

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, どのような時に $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ すなわち $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は成り立つだろうか？

$\det(\lambda I - A) = 0$ すなわち $\mathrm{rank}(\lambda I - A) < n$ が満たされる時

$$\left(\begin{array}{ll} \because & \text{もし } \det(\lambda I - A) \neq 0 \text{ がなりたつと, } (\lambda I - A)^{-1} \text{が存在し} \\ & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ となってしまう} \end{array} \right)$$

10. 固有値

λ を変数とみなして s と表すことにしよう

$$\psi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s - a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= s^n + \rho_1 s^{n-1} + \cdots + \rho_{n-1} s + \rho_n$$

. . . 特性多項式

$$\psi(s) = 0$$

. . . 特性方程式

これは n 次方程式であり，したがって，重複を含めて n 個の解をもつ．解は複素数かもしれない．

$\Downarrow$

A は n 個の固有値を持つ

10. 固有値

- 重複度

A の相異なる固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_\sigma, \sigma \leq n$ としよう

すると，特性多項式 $\psi(s)$ は次のように因数分解される

$$\psi(s) = (s-\lambda_1)^{m_1}(s-\lambda_2)^{m_2}\cdots(s-\lambda_\sigma)^{m_\sigma}.$$

m_i は λ_i の代数的重複度と呼ばれ，次の関係を満たす

$$\sum_{i=1}^{\sigma} m_i = n.$$

代数的重複度は，与えられた固有値の値 λ_i が，何個存在するかを表す

10. 固有値

$r_i = \mathrm{rank}(\lambda_i I - A)$ を定義しよう. このとき,$r_i < n$ であり, また

$$\alpha_i = n - r_i > 0.$$

α_i は λ_i の幾何学的重複度と呼ばれる

代数的重複度 m_i の場合と異なり, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i$ は n とは特別の関係をもたない. しかし $\alpha_i \leq m_i$ はなりたつ

$\boldsymbol{x}_i$: λ_i に対応する固有ベクトル

$$\Leftrightarrow (\lambda_i I - A)\boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_i \in \mathscr{N}(\lambda_i I - A)$$

$$\begin{aligned}\dim \mathscr{N}(\lambda_i I - A) &= n - \dim \mathscr{R}(\lambda_i I - A) = n - \mathrm{rank}(\lambda_i I - A)\\ &= n - r_i = \alpha_i\end{aligned}$$

したがって, 同一の固有値 λ_i に対応して α_i 本の線形独立な固有ベクトルが存在する

幾何学的重複度は固有値 λ_i に対応する線形独立な固有ベクトルが何本存在するかを表す

10. 固有値

例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ n = 3$$

$$\psi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \end{bmatrix} = (s-1)^2(s-2)$$

固有値: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
相異なる固有値の個数 $\sigma = 2$

代数的重複度

$$m_1 = 2,\ m_2 = 1$$

幾何学的重複度

$$\mathrm{rank}(\lambda_1 I - A) = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 3 - 1 = 2$$

$$\mathrm{rank}(\lambda_2 I - A) = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 3 - 2 = 1$$

10. 固有値

λ_1 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ ？

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}$$ とおく．これは次を満たさなければならない

$$(\lambda_1 I - A)\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_{13} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

これから $x_{13} = 0$ と $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$ が導かれる

ここで, x_{11} と x_{12} は任意の値をとる

上記は，固有値 λ_1 に対応する固有ベクトルは無限個存在し，その中から線形独立なものを2($= \alpha_2$)本，次のように選ぶことができることを示している

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, x_{11} \neq 0, x_{12} \neq 0.$$

10. 固有値

λ_2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ ？

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}$$ とおく. これは次を満たさなければならない

$$(\lambda_2 I - A)\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

これから $x_{21} = x_{22} = 0$ と $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{23} \end{bmatrix}$ が導かれる

λ_2 に対応する線形独立な固有ベクトルは1 $(= \alpha_2)$ 本,

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{23} \end{bmatrix}, x_{23} \neq 0$ が存在する

$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{23} \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$ と線形独立であることに注意

10. 固有値

– 固有ベクトルの線形独立性

相異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに線形独立である

相異なる固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_\sigma$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1. \cdots, \boldsymbol{x}_\sigma$ について $c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_\sigma \boldsymbol{x}_\sigma = \mathbf{0}$ が成り立っているとする

次が成り立つので

$$(\lambda_j I - A)\boldsymbol{x}_i = \lambda_j \boldsymbol{x}_i - \lambda_i \boldsymbol{x}_i = \begin{cases} \mathbf{0}, & j = i, \\ (\lambda_j - \lambda_i)\boldsymbol{x}_i \neq \mathbf{0}, & j \neq i \end{cases}$$

$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_\sigma \boldsymbol{x}_\sigma = \mathbf{0}$ の両辺に左から

$$(\lambda_1 I - A)\cdots(\lambda_{i-1} I - A)(\lambda_{i+1} I - A)\cdots(\lambda_\sigma I - A)$$

をかけると，次式が得られる

$$c_i \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_i)\cdots(\lambda_\sigma - \lambda_i)}_{\neq 0} \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}.$$

$\boldsymbol{x}_i \neq \mathbf{0}$ であるから，上式は $c_i = 0$ を意味する

上の議論は任意の$i = 1, \cdots, \sigma$ について成り立つので，

$$c_1 = \cdots = c_\sigma = 0$$

が得られ，$\{\boldsymbol{x}_1. \cdots, \boldsymbol{x}_\sigma\}$ は線形独立であることが示された

10. 固有値

λ_i に対応して α_i 本の線形独立な固有ベクトルが存在する

したがって，次の固有ベクトルはすべて互いに線形独立である

$$\{\underbrace{\boldsymbol{x}_{11},\cdots,\boldsymbol{x}_{1,\alpha_1}}_{\substack{\lambda_1\text{に対応した}\\ \alpha_1\text{本の固有ベクトル}}},\underbrace{\boldsymbol{x}_{21},\cdots,\boldsymbol{x}_{2,\alpha_2}}_{\substack{\lambda_2\text{に対応した}\\ \alpha_2\text{本の固有ベクトル}}},\cdots,\underbrace{\boldsymbol{x}_{\sigma,1},\cdots,\boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}}_{\substack{\lambda_\sigma\text{に対応した}\\ \alpha_\sigma\text{本の固有ベクトル}}}\}$$

合計で $\sum_{i=1}^{\sigma}\alpha_i\ (\leq n)$ 本の線形独立な固有ベクトルがある

11. 行列の対角化

- 単純行列

行列の代数的重複度m_i と幾何学的重複度 α_i が $i=1,\ldots,\sigma$ について等しいとき，単純行列であるという

単純行列では

$$\sum_{i=1}^{\sigma}\alpha_i=\sum_{i=1}^{\sigma}m_i=n$$

がなりたつ

したがって， $\sum_{i=1}^{\sigma}\alpha_i=n$ 本の線形独立な固有ベクトル

$$\{\boldsymbol{x}_{11},\cdots,\boldsymbol{x}_{1,\alpha_1},\boldsymbol{x}_{21},\cdots,\boldsymbol{x}_{2,\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{x}_{\sigma,1},\cdots,\boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}\}$$

を持つ

すなわち，これら固有ベクトルの集合は n 次元空間の基底となることができる（固有ベクトルが n 次元空間を張る）

11. 行列の対角化

- 単純行列の対角化

単純行列 A の n 本の線形独立な固有ベクトルを並べて$n \times n$ 行列 Tを次のように定義する

$$T = [\boldsymbol{x}_{11} \cdots \boldsymbol{x}_{1,\alpha_1} \cdots \boldsymbol{x}_{\sigma,1} \cdots \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}].$$

T は最大階数 n を持ち，したがって $\det T \neq 0$ である

このとき，以下が成り立つ

$$\begin{aligned} AT &= [A\boldsymbol{x}_{11} \cdots A\boldsymbol{x}_{1,\alpha_1} \cdots A\boldsymbol{x}_{\sigma,1} \cdots A\boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}] \\ &= [\lambda_1\boldsymbol{x}_{11} \cdots \lambda_1\boldsymbol{x}_{1,\alpha_1} \cdots \lambda_\sigma\boldsymbol{x}_{\sigma,1} \cdots \lambda_\sigma\boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}] \\ &= [\boldsymbol{x}_{11} \cdots \boldsymbol{x}_{1,\alpha_1} \cdots \boldsymbol{x}_{\sigma,1} \cdots \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_\sigma & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_\sigma \end{bmatrix} \\ &= T\mathit{\Lambda}, \end{aligned}$$

$\mathit{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots \lambda_1, \cdots, \lambda_\sigma, \cdots, \lambda_\sigma)$: 対角行列

11. 行列の対角化

$\det T \neq 0$ であるから，T の逆行列 T^{-1} が存在し，次が成り立つ

$$AT = T\Lambda, \quad T^{-1}AT = \Lambda.$$

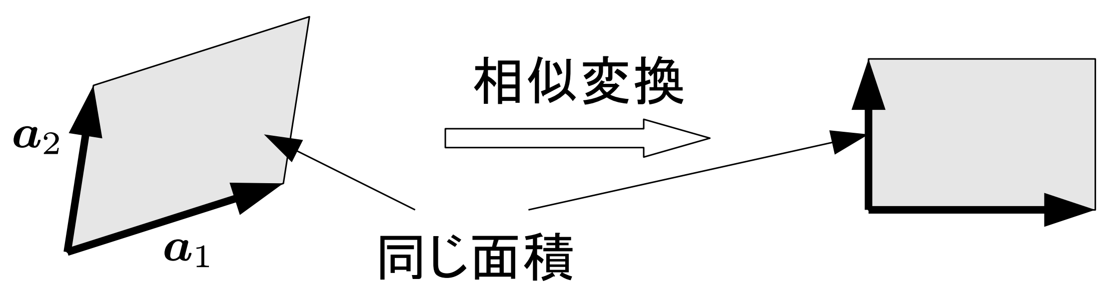
このようにして，単純行列は対角行列に変換することができる，言い換えると，対角化することができる

11. 行列の対角化

- 相似変換

行列 A に対する操作 $T^{-1}AT$，すなわち，右から正則行列 T を，左からその逆行列をかける操作，は相似変換と呼ばれる.
また A は行列 $T^{-1}AT$ に相似であると言う

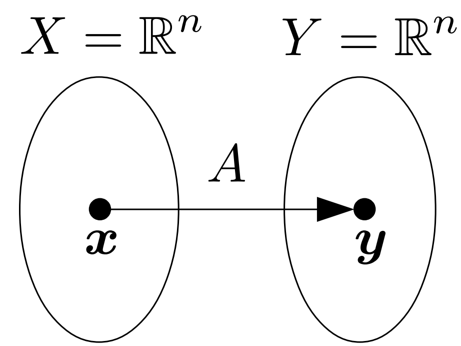
$$\det(T^{-1}AT) = \det(T^{-1}) \cdot \det A \cdot \det T = \frac{1}{\det T} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$$



11. 行列の対角化

– 写像表現としての行列と相似変換

二つの n 次元線形空間 $X=\mathbb{R}^n$ および $Y=\mathbb{R}^n$ と $n\times n$ 正方行列 A で表される写像 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ を考える. ここで, $\boldsymbol{x}\in X$, $\boldsymbol{y}\in Y$ である.



$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ を用いて表現されているとする. ここで,

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ldots,\boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

すなわち

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \ldots & \boldsymbol{e}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=I\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{e}_n=I\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$$

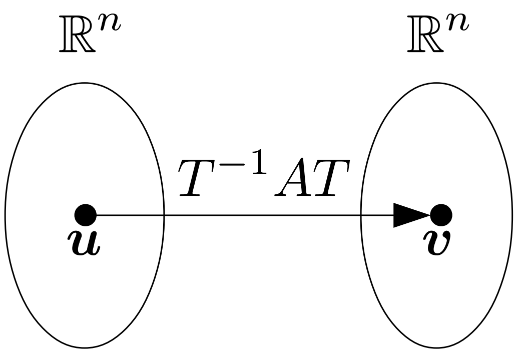
11. 行列の対角化

$\boldsymbol{u} = T^{-1}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{v} = T^{-1}\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と定義すると, $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} = T\boldsymbol{v}$ であり,

したがって,

$$(T\boldsymbol{v}) = A(T\boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{v} = T^{-1}AT\boldsymbol{u}.$$



行列 $T^{-1}AT$ は $\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ への写像
$\boldsymbol{v} = (T^{-1}AT)\boldsymbol{u}$ を表す

11. 行列の対角化

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, A と $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $T^{-1}AT$ の間の関係

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \ldots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = T\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \ldots & \boldsymbol{t}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$は $\mathbb{R}^n$ の基底であり，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の座標
$\{\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n\}$は$\mathbb{R}^n$ のもう一つの基底であり，$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{x}$ のもう一つの座標

$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{u}$ と同じベクトルを違う基底を用いて表したもの（座標）

同様に，$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{v}$ も同じベクトルを違う基底を用いて表したもの

また，A と $T^{-1}AT$ は，線形空間の対の間の写像を表す．線形空間も写像も変わらない．ただし，線形空間の基底だけが異なっている

11. 行列の対角化

$$\boldsymbol{x} \xleftrightarrow{\ \boldsymbol{x} = T\boldsymbol{u}\ } \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} \xleftrightarrow{\ \boldsymbol{y} = T\boldsymbol{v}\ } \boldsymbol{v}$$

$$A \xleftrightarrow{\ \text{相似変換}\ } T^{-1}AT$$

同じもの

基底: $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ 基底: $\{\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n\}$

行列 A の対角化は，A に応じた基底 T を用いて同じ写像をより簡潔な形（対角行列）で表す

12. ジョルダン標準形

- A が単純行列ではないとき, 対角化することはできない
  - 非単純行列が対角化できない理由の一つは, 行列 T を構成するのに必要な本数の線形独立な固有ベクトルを持たないことである
    - $n \times n$ 行列 T を構成するには n 本の線形独立な固有ベクトルが必要
    - 非単純行列は $\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i$ 本の線形独立な固有ベクトルを持つ

    しかし, $\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i < \sum_{i=1}^{\sigma} m_i = n$ であるので, iに対して, さらに

    $m_i - \alpha_i$ 本の線形独立な固有ベクトル（または代用ベクトル）が必要である

12. ジョルダン標準形

- 一般化固有ベクトル

行列 A とその固有値λ_i に対して次がなりたつベクトル$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ を一般化固有ベクトルと呼ぶ

$$(\lambda_i I - A)^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \text{ for some integer } k \geq 2$$

$k=1$ とすれば，$\boldsymbol{x}$ は通常の固有ベクトルになることに注意

12. ジョルダン標準形

- 一般化固有ベクトルの作り方

固有値 λ_i に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i,\alpha_i}$ 中の $\boldsymbol{x}_{i1}$ に着目する

最初の一般化固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{i1}^1$ ： $\boldsymbol{x}_{i1}^1 = \boldsymbol{x}_{i1}$（固有ベクトルそのもの）

このとき $(\lambda_i I - A)\boldsymbol{x}_{i1}^1 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}_{i1}^1 \neq \boldsymbol{0}$ はなりたつ

２番目の一般化固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{i1}^2$ ： $(\lambda_i I - A)\boldsymbol{x}_{i1}^2 = -\boldsymbol{x}_{i1}^1$, $\boldsymbol{x}_{i1}^2 \neq \boldsymbol{0}$

このとき $(\lambda_i I - A)^2\boldsymbol{x}_{i1}^2 = -(\lambda_i I - A)\boldsymbol{x}_{i1}^1 = \boldsymbol{0}$ がなりたち，これは$\boldsymbol{x}_{i1}^2$が確かに一般化固有ベクトルであることを意味する

３番目の一般化固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{i1}^3$ ： $(\lambda_i I - A)\boldsymbol{x}_{i1}^3 = -\boldsymbol{x}_{i1}^2$, $\boldsymbol{x}_{i1}^3 \neq \boldsymbol{0}$

このとき $(\lambda_i I - A)^3\boldsymbol{x}_{i1}^3 = -(\lambda_i I - A)^2\boldsymbol{x}_{i1}^2 = \boldsymbol{0}$ がなりたち，これは$\boldsymbol{x}_{i1}^3$が確かに一般化固有ベクトルであることを意味する

$\vdots$

12. ジョルダン標準形

n_{i1}番目の一般化固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{i1}^{n_{i1}}$ ： $(\lambda_i I - A)\boldsymbol{x}_{i1}^{n_{i1}} = -\boldsymbol{x}_{i1}^{n_{i1}-1}, \boldsymbol{x}_{i1}^{n_{i1}} \neq \mathbf{0}$

このとき $(\lambda_i I - A)^{n_{i1}}\boldsymbol{x}_{i1}^{n_{i1}} = \mathbf{0}$ がなりたち，これは $\boldsymbol{x}_{i1}^{n_{i1}}$ が確かに一般化固有ベクトルであることを意味する

ここで，n_{i1} は，$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{x}_{i1}^{k+1} = -\boldsymbol{x}_{i1}^{k}$ によって作成した $\boldsymbol{x}_{i1}^{k+1}$ が，既に作成済のベクトル $\boldsymbol{x}_{i1}^{1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i1}^{k}$ と線形独立でなくなる最小の k の値

以上により，固有値 λ_i に対応した通常の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{i1}^{1} = \boldsymbol{x}_{i1}$ から始めて，n_{i1} 本の線形独立な一般化固有ベクトルを作成することができる

12. ジョルダン標準形

同様に，同じ固有値 λ_i に対応する他の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i,\alpha_i}$ のそれぞれから始めて，一般化固有ベクトルを作成することができる

作成できる一般化固有ベクトルの本数は，それぞれ,$n_{i2}, \cdots, n_{i,\alpha_i}$であり，合計で $\displaystyle\sum_{j=1}^{\alpha_i} n_{ij} = m_i$ となる

加えて，m_i 本の一般化固有ベクトル

$$\{\boldsymbol{x}_{i1}^1, \cdots, \boldsymbol{x}_{i1}^{n_{i1}}, . \cdots, \boldsymbol{x}_{i,\alpha_i}^1, \cdots, \boldsymbol{x}_{i,\alpha_i}^{n_{i,\alpha_i}}\}$$

は互いに線形独立である．上記には通常の固有ベクトルも含まれていることに注意．

12. ジョルダン標準形

上記の議論は，相異なる固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_\sigma$ のそれぞれに当てはまる

結局，全部で n 本の一般化固有ベクトルからなる集合

$$\{\boldsymbol{x}_{11}^1, \cdots, \boldsymbol{x}_{1,\alpha_1}^{n_{1,\alpha_1}}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma 1}^1, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{n_{\sigma,\alpha_\sigma}}\}$$

が得られ，かつ，これらベクトルは互いに線形独立である

12. ジョルダン標準形

- ジョルダン標準形

n 本の線形独立な一般化固有ベクトルがそろったので，これを並べて行列 T を以下のように構成する

$$T = [\boldsymbol{x}_{11}^{1} \cdots \boldsymbol{x}_{1,\alpha_1}^{n_{1,\alpha_1}} \cdots \boldsymbol{x}_{\sigma 1}^{1} \cdots \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{n_{\sigma,\alpha_\sigma}}].$$

一般化固有ベクトルを作成する時に

$$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{x}_{ij}^{k} = -\boldsymbol{x}_{ij}^{k-1},\ k = 2, 3, \cdots$$

の関係を利用したので

$$A\boldsymbol{x}_{ij}^{k} = \lambda_i \boldsymbol{x}_{ij}^{k} + \boldsymbol{x}_{ij}^{k-1}$$

がなりたつ

したがって，次が得られる

$$\begin{aligned} AT &= [A\boldsymbol{x}_{11}^{1} A\boldsymbol{x}_{11}^{2} \cdots A\boldsymbol{x}_{11}^{n_{11}} \cdots A\boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{1} A\boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{2} \cdots A\boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{n_{\sigma,\alpha_\sigma}}] \\ &= [\lambda_1 \boldsymbol{x}_{11}^{1}\ \lambda_1 \boldsymbol{x}_{11}^{2} + \boldsymbol{x}_{11}^{1}\ \cdots\ \lambda_1 \boldsymbol{x}_{11}^{n_{11}} + \boldsymbol{x}_{11}^{n_{11}-1}\ \cdots \\ &\qquad \lambda_\sigma \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{1}\ \lambda_\sigma \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{2} + \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{1} \cdots\ \lambda_\sigma \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{n_{\sigma,\alpha_\sigma}} + \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{n_{\sigma,\alpha_\sigma}-1}]. \end{aligned}$$

12. ジョルダン標準形

$$\therefore\ AT = [\boldsymbol{x}_{11}^{1}\ \boldsymbol{x}_{11}^{2}\ \cdots\ \boldsymbol{x}_{11}^{n_{11}}\ \cdots\ \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{1}\ \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{2}\ \cdots\ \boldsymbol{x}_{\sigma,\alpha_\sigma}^{n_{\sigma,\alpha_\sigma}}]$$

$$\times\begin{bmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_1\end{matrix}}}_{n_{11}\times n_{11}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \underbrace{\boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_1\end{matrix}}}_{n_{1,\alpha_1}\times n_{1,\alpha_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \underbrace{\boxed{\begin{matrix}\lambda_\sigma & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_\sigma\end{matrix}}}_{n_{\sigma,\alpha_\sigma}\times n_{\sigma,\alpha_\sigma}} \end{bmatrix}$$

$$= TJ$$

$\therefore T^{-1}AT = J$ ，J は行列 A のジョルダン標準形

12. ジョルダン標準形

A が単純行列であるとき

A は対角行列 Λ に相似である．すなわち

$$A = T\Lambda T^{-1},\ T^{-1}AT = \Lambda.$$

A が持つ性質は Λ を調べることによって得ることができる

A が単純行列では**ない**とき

A はジョルダン標準形 J に相似である．すなわち

$$A = TJT^{-1},\ T^{-1}AT = J.$$

A が持つ正式は J を調べることによって得ることができる

ジョルダン標準形は値が1の成分を持つ
これは，一般化固有ベクトルを作成する際に，次の関係を用いたためである

$$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{x}_{ij}^{k} = -\boldsymbol{x}_{ij}^{k-1} = (-1)\cdot\boldsymbol{x}_{ij}^{k-1}.$$

この "-1" はどんな定数でもよい．したがって，ジョルダン標準形に現れる "1" も，どんな定数であってもよい