大学院システム情報科学府 基礎共通科目　　　　　　　　　　　　　　　　　　2015年7月22日

確率・統計特論 期末試験

担当: 来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

注意事項

・書籍，ノート，メモ，演習解答持ち込み可．電子機器 (電子書籍，電卓を含む) 使用不可．
・解答欄が足りない場合は，解答用紙裏面を使用して良い．
・問題は全部で3問ある．合計点が100点を超える場合でも100点満点とする．
・持ち込み資料，筆記用具等の試験中の貸し借りを一切禁ず．

問題 1 [50 点]

I. 中心極限定理を記述せよ．[5]

II. n 個の標本 $a_1, \ldots, a_n$ は，期待値 μ 分散 σ^2 の独立同一分布に従うものとする．ただし，μ および σ^2 の値は未知とする．以下の各問いに答えよ．
(II-1) 標本平均 $\overline{a} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ は期待値 μ の不偏推定量といえるか？[10]
(II-2) 不偏分散 $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \overline{a})^2$ が分散 σ^2 の不偏推定量であることを示せ．[10]

III. A 社ではボールを作成している．このボールを使う協会の規定では，ボールの重さは 450[g]，分散は 100.0[g^2] 以下と規格が定められている．A 社の製品 50 個を抜き取り検査を行ったところ，標本平均 434.3[g]，不偏分散 183.6[g^2] であった．以下の各問いに答えよ．
(III-1) A 社のボールの重さの母平均と母分散を推定せよ．[5]
(III-2) A 社のボールの重さの平均は規格から外れているか? 有意水準 5%で議論せよ．ただし，自由度 50 の t 分布の両側 5%点が 2.01，標準正規分布の両側 5%点が 1.96 であることを用いてよい．[10]
(III-3) A 社のボールの重さの分散は規格から外れているか? 有意水準 5%で議論せよ．下記のカイ二乗分布表を用いて良い．[10]

χ^2 分布表

自由度	40	45	50	60
右側 5%点	55.8	61.7	67.5	79.1

問題 2　[60 点]

I. 確率変数 X は二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0},\ 0 < p < 1)$ に従うとする．ただし，二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ の確率関数は

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \ldots, n)$$

で与えられる．

(I-1) X の期待値 $\mathrm{E}[X]$，分散 $\mathrm{Var}[X]$ をそれぞれ求めよ．[10]

(I-2) 確率変数 $X_1, \ldots, X_m$ は独立に同一の分布 $\mathrm{B}(n,p)$ に従うものとする．$(X_1, \ldots, X_m)$ の従う同時分布の確率関数 $f(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} f(x_i)$ を記述せよ．[5]

II. 確率変数 $X_1, \ldots, X_{10}$ は独立に同一の二項分布 $\mathrm{B}(144,p)$ に従うものとし，p は未知パラメータとする．いま，以下の 10 個の標本を得た．

試行番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標本値 x	89	75	73	64	74	76	88	67	73	78

(II-1) パラメータ p に対する対数尤度関数 $\log L(p)$ を求めよ．ただし，対数の底は e とする．[5]

(II-2) パラメータ p の最尤推定量を求めよ．[10]

(II-3) (II-2) で求めた推定量はパラメータ p の不偏推定量といえるか？ [10]

III. ベイズの定理を記述せよ．[10]

IV. 確率変数 X は二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ に従うものとし，パラメータ p の値は未知とする．いま，$n = 82$ に対して $X = 51$ の標本を得た．事前分布を $\mathrm{Be}(758, 684)$ として，事後分布を最大にする p を求めよ．ただし，ベータ分布 $\mathrm{Be}(\alpha,\beta)$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ の密度関数は

$$f(x) := \frac{1}{C(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad (0 \le x \le 1)$$

で与えられ，$C(\alpha,\beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t$ は正規化定数である．[10]

問題 3　[20 点]

ある構造に，負荷 x $(50 \leq x \leq 150)$ が与えられた時の応答値 y を知りたい．8 回の試行を行ったところ，下記のデータを得た．

試行番号	1	2	3	4	5	6	7	8
負荷 x	56	78	94	86	123	146	113	104
応答値 y	197.2	209.6	180.8	202.3	133.4	111.8	175.5	152.4

(1) いま，$y = ax + b + \mathcal{E}$ が成り立つと仮定する．ただし，誤差項 $\mathcal{E}$ は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数を表す．このとき a と b に対する最小二乗推定量を求めよ．ただし，以下の数値を用いてよい．[10]

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 100, \qquad \overline{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 170,$$

$$\overline{x^2} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 10700, \qquad \overline{x \cdot y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = 16300,$$

(2) 負荷 $x = 100$ をかけたときの応答値 y の推定値について，95%信頼区間を求めよ．ただし誤差項 $\mathcal{E}$ の分散は $\sigma^2 = 400$ と仮定できるものとする．必要であれば，以下の t 分布表を用いてよい．[10]

t 分布表

自由度	1	2	3	4	5	6	7	8	∞
両側 5%点	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	1.960