大学院システム情報科学府 基礎共通科目

2012 年 7 月 11 日

確率・統計特論 期末試験

担当: 来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

注意事項

・書籍，ノート，メモ，演習解答持ち込み可．電子機器 (電子書籍，電卓を含む) **使用不可**.
・解答欄が足りない場合は，解答用紙裏面を使用して良い．
・問題は全部で 3 問ある．合計点が 100 点を超える場合でも 100 点満点とする．

$\frac{\partial}{\partial a}L(a,b) = \sum_{i=1} 2x_i(ax_i + b - \log y_i)$

$= 2n(a\overline{x^2} + b\overline{x} - \overline{x\log y})$

$\frac{\partial}{\partial b}L(a,b) = 2n(a\overline{x} + b - \overline{\log y})$

問題 1　[50 点]

I. 中心極限定理を記述せよ. [5]

II. いま, n 対の実数 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ が与えられたとし, 実変数 a, b の関数

$a\overline{x^2} + b\overline{x} - \overline{x\log y} = 0$

$a\overline{x} + b - \overline{\log y} = 0$

$a\overline{x}^2 + b\overline{x} - \overline{x}\overline{\log y} = 0$

$(\overline{x^2} - \overline{x}^2)a - \overline{x\log y} - \ldots$

$$L(a,b) := \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - \log y_i)^2$$

の最小化を考える. 記法の便利のため,

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{\log y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log y_i, \quad \overline{x\cdot\log y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\log y_i, \quad \overline{x^2} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

とする.

(II-1) 関数 $L(a,b)$ の導関数 $\frac{\partial}{\partial a}L(a,b)$ と $\frac{\partial}{\partial b}L(a,b)$ を求めよ. [10]

(II-2) 関数 $L(a,b)$ を最小とする a, b を $\overline{x}$, $\overline{\log y}$, $\overline{x\cdot\log y}$, $\overline{x^2}$ を用いて答えよ. [10]

III. あるシステムにおいて, 負荷 x $(10 \leq x \leq 100)$ が加えられた時の応答値 y を知りたい. 6 回の試行を行ったところ, 下記のデータを得た.

試行番号	1	2	3	4	5	6
負荷 x	16.4	27.7	71.3	81.9	59.6	43.1
応答値 $\log y$	24.6	64.3	161.8	194.6	91.1	63.6

(III-1) このシステムでは, $\log y = ax + b + \mathcal{E}$ が成り立つと仮定される. ただし, 誤差項 $\mathcal{E}$ は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数である. このとき a と b に対する最小二乗推定量をそれぞれ求めよ. ただし, 以下の数値を用いてよい. [10]

$$\overline{x} \simeq 50.0, \quad \overline{\log y} \simeq 100.0, \quad \overline{x\cdot\log y} \simeq \overset{6305}{\cancel{3040}}, \quad \overline{x^2} \simeq \overset{3040}{\cancel{6305}}.$$

(III-2) 規格では $a = 2.0$ とされている. このシステムは規格を満たしていると言えるか? 有意水準 5%で議論せよ. ただし誤差項 $\mathcal{E}$ の分散は $\sigma^2 = 600$ と仮定できるものとする. [15]

t 分布表

自由度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
両側 5%点	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

問題 2　[60 点]

I. いま, Ω を可算集合とし, 確率空間 $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ を考える. 事象 $A_i \in 2^{\Omega}$ $(i = 1, \ldots, n)$ は $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ を満たし, かつ $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$ を満たすものとする. また事象 $B \in 2^{\Omega}$ とする.

(I-1) 条件付き確率

$$\Pr[B \mid A_i]$$

の定義を書け. [5]

(I-2) 条件付き確率の和

$$\sum_{j=1}^{n} \Pr[B \mid A_j] \cdot \Pr[A_j]$$

を $\Pr[B]$ を用いて表せ. 証明を記述すること. [10]

(I-3) 次の式を示せ. [5]

$$\Pr[A_i \mid B] = \frac{\Pr[B \mid A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B \mid A_j] \cdot \Pr[A_j]}$$

ヒント: (I-1), (I-2) を利用せよ.

II. コインが 100 枚ある. 内, 50 枚のコイン (type A) は表の出る確率が 3%, 30 枚のコイン (type B) は表の出る確率が 4%, 残りの 20 枚のコイン (type C) は表の出る確率が 5%とする. 100 枚のコインは見分けがつかないものとする.

(II-1) コインをランダムに 1 枚選んでトスを行った. 表が出る確率を求めよ. [10]

(II-2) コインをランダムに 1 枚選んでトスを行ったところ, 表がでた. 選んだコインが type C である確率を求めよ. [10]

III. ある工場で作るコインは (とても) 歪んでいる. この工場で作るコインの表の出る確率 P はベータ分布 $\mathrm{B}(2, 6)$ に従うものとする. ただし, ベータ分布 $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ の密度関数は

$$f(x) := \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

で与えられ, $B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t$ は正規化定数である.

(III-1) コインを 1 枚抽出し, そのコインを n 回投げたところ, 表が k 回出た. 選んだコインの表の出る確率 P の事後分布を求めよ. [10]

(III-2) (III-1) において, $n = 29$, $k = 6$ であった場合, 選んだコインの表が出る確率はいくつと推定されるか? 最大事後確率推定量 (maximum a posteriori: 事後分布の最頻値) を求めよ. [10]

$w(\theta \mid 2) =$

問題 3 [50 点]

I. 表が出る確率 p のコインを n 回投げた時, 表が 2 回連続しては現れない確率を q_n とする.

(I-1) q_2, q_3, q_4 を求めよ. [10]

(I-2) q_n に関する漸化式を求めよ. [10]

(I-3) $p = 2/3$ のとき, q_n を n の関数として求めよ. [10]

II. あるシステムの時刻 t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ の状態は, 3 次元の確率変数 $X^{(t)} := (X_1^{(t)}, X_2^{(t)}, X_3^{(t)}) \in \{0, 1\}^3$ で表現されるものとする. 時刻 0 の状態は $X^{(0)} := (0, 0, 0)$ とする. 時刻 t の状態 $X^{(t)}$ から時刻 $t+1$ の状態 $X^{(t+1)}$ への推移は次のように与えられる.

(i) 添え字 $i \in \{1, 2, 3\}$ が一様ランダムに一つ選ばれ,

(ii) 確率 1/4 で $X_i^{(t+1)}$ の値が反転する.

例えば時刻 0 の状態 $(0, 0, 0)$ から 1/3 の確率で添え字 2 が選ばれ, 1/4 の確率で反転したとき, 時刻 1 の状態 $X^{(1)} = (0, 1, 0)$ となる. その後, 1/3 の確率で添え字 3 が選ばれ, 3/4 の確率で反転しなかったとき, 時刻 2 の状態 $X^{(2)} = (0, 1, 0)$ となる.

(II-1) 時刻 1 のとき, $X_1^{(1)} + X_2^{(1)} + X_3^{(1)} = 1$ となる確率を求めよ. [10]

(II-2) 時刻 $t > 0$ のとき, $X_1^{(t)} + X_2^{(t)} + X_3^{(t)} = 3$ となる確率を求めよ. [10]