大学院システム情報科学府 基礎共通科目 2014 年 7 月 30 日

確率・統計特論 期末試験

担当: 来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

注意事項

・書籍，ノート，メモ，演習解答持ち込み可．電子機器 (電子書籍，電卓を含む) 使用不可．
・解答欄が足りない場合は，解答用紙裏面を使用して良い．
・問題は全部で 3 問ある．合計点が 100 点を超える場合でも 100 点満点とする．
・問題 1 (50 点) は期末レポート (7/9 出題) をもって代替できる．期末レポートを提出する場合は，答案用紙に「問題 1 ：期末レポート提出」と記述のこと．期末レポートを提出した場合は，問題 1 を解答しても採点しない．

※問題 1 (50 点) は期末レポート (7/9 出題) をもって代替できる．期末レポートを提出する場合は，答案用紙に「問題 1：期末レポート提出」と記述のこと．期末レポートを提出した場合は，問題 1 を解答しても採点しない．

問題 1　[50 点]

I. 中心極限定理を記述せよ．[5]

II. いま，n 対の実数 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ が与えられたとし，実変数 a, b の関数

$$L(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

の最小化を考える．記法の便利のため，

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \overline{x^2} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \overline{x \cdot y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,$$

とする．

(II-1) 関数 $L(a,b)$ の導関数 $\frac{\partial}{\partial a}L(a,b)$ と $\frac{\partial}{\partial b}L(a,b)$ を求めよ．[10]

(II-2) 関数 $L(a,b)$ を最小とする a, b を $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{x \cdot y}$ を用いて答えよ．[10]

III. 負荷 x $(50 \leq x \leq 250)$ が与えられた時の応答値 y を知りたい．7 回の試行を行ったところ，下記のデータを得た．

試行番号	1	2	3	4	5	6	7
負荷 x	97.6	186.5	153.2	224.8	209.4	111.5	67.0
応答値 y	57.9	47.0	38.5	33.6	28.5	33.2	41.3

(III-1) いま，$y = ax + b + \mathcal{E}$ が成り立つと仮定する．ただし，誤差項 $\mathcal{E}$ は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数を表す．このとき a と b に対する最小二乗推定量を求めよ．ただし，以下の数値を用いてよい．[10]

$$\overline{x} \simeq 150.0, \quad \overline{y} \simeq 40.0, \quad \overline{x^2} \simeq 25583, \quad \overline{x \cdot y} \simeq 5758.$$

(III-2) 負荷と応答値に相関はないという帰無仮説について，有意水準 5%で議論せよ．ただし誤差項 $\mathcal{E}$ の分散は $\sigma^2 = 100$ と仮定できるものとする．[15]

t 分布表

自由度	1	2	3	4	5	6	7	8	∞
両側 5%点	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	1.960

問題 2　[50 点]

I. 非負の値をとる連続確率変数 X はパラメータ v $(v > 0)$ に対して確率密度関数

$$f(x) = \frac{x}{v^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2v^2}\right) \qquad (x \geq 0)$$

で与えられる．

(I-1) X の期待値 $\mathrm{E}[X]$，分散 $\mathrm{Var}[X]$ をそれぞれ求めよ．[20]

(I-2) 確率変数 $X_1, \ldots, X_m$ は独立に分布 f に従うものとする．$(X_1, \ldots, X_m)$ の従う同時分布の確率関数 $g(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} f(x_i)$ を求めよ．[5]

II. 確率変数 $X_1, \ldots, X_m$ は独立に布 f に従うものとし，v は未知パラメータとする．いま，$X_1 = a_1, \ldots, X_m = a_m$ の標本を得た．

(II-1) パラメータ v に対する対数尤度関数 $\log L(v)$ を求めよ．ただし，対数の底は e とする．[5]

(II-2) v の最尤推定量を求めよ．[10]

(II-3) II-2 で求めた推定量は v の不偏推定量といえるか？ [10]

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2v^2}}\right)'$$
$$= e^{-\frac{x^2}{2v^2}} \cdot \left(-\frac{x^2}{2v^2}\right)'$$

$$\mathrm{E}[e^{\theta X}] = \sum^{+\infty} \theta^{x} f(x)$$
$$= \sum_{x=0}^{+\infty} e^{\theta x} \frac{x}{v^2} e^{-\frac{x^2}{2v^2}}$$
$$= \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{x}{v^2} e^{-\frac{x^2}{2v^2}+\theta x}$$

$$\int f'(x) g(x)\, dx$$

$$\frac{x^2}{v^2}$$

$$(v^{-2})'$$
$$= -2v^{-3}$$

問題 3　[40 点]

I. いま, Ω を可算集合とし, 確率空間 $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ を考える. 事象 $A_i \in 2^{\Omega}$ $(i = 1, \ldots, n)$ は $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ を満たし, かつ $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$ を満たすものとする. また事象 $B \in 2^{\Omega}$ とする.

(I-1) 条件付き確率

$$\Pr[B \mid A_i]$$

の定義を書け. [5]

(I-2) 条件付き確率の和

$$\sum_{j=1}^{n} \Pr[B \mid A_j] \cdot \Pr[A_j]$$

を $\Pr[B]$ を用いて表せ. 証明を記述すること. [10]

(I-3) 次の式を示せ. [5]

$$\Pr[A_i \mid B] = \frac{\Pr[B \mid A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B \mid A_j] \cdot \Pr[A_j]}$$

II. ある工場で作るコインは (とても) 歪んでいる. この工場で作るコインの表の出る確率 P はベータ分布 $\mathrm{B}(3, 7)$ に従うものとする. ただし, ベータ分布 $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ の密度関数は

$$f(x) := \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha - 1} (1 - x)^{\beta - 1} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

で与えられ, $B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \mathrm{d}t$ は正規化定数である.

(II-1) コインを 1 枚抽出し, そのコインを n 回投げたところ, 表が k 回出た. 選んだコインの表の出る確率 P の事後分布を求めよ. [10]

(II-2) (II-1) において, $n = 10$, $k = 3$ であった場合, 選んだコインの表が出る確率はいくつと推定されるか? 最大事後確率推定量 (maximum a posteriori: 事後分布の最頻値) を求めよ. [10]

$(xy)'$
$= x'y + xy'$