大学院システム情報科学府 基礎共通科目　　2013 年 7 月 24 日

確率・統計特論 期末試験

担当: 来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

注意事項

・書籍，ノート，メモ，演習解答持ち込み可．電子機器 (電子書籍，電卓を含む) 使用不可．
・解答欄が足りない場合は，解答用紙裏面を使用して良い．
・問題は全部で 3 問ある．合計点が 100 点を超える場合でも 100 点満点とする．

問題1 [50点]

I. 中心極限定理を記述せよ．[5]

II. いま，n 対の実数 $(x_1, \log y_1), \ldots, (x_n, \log y_n)$ が与えられたとし，実変数 a, b の関数

$$L(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - \log y_i)^2$$

の最小化を考える．記法の便利のため，

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{\log y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log y_i, \quad \overline{x\cdot \log y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \log y_i, \quad \overline{x^2} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

とする．

(II-1) 関数 $L(a,b)$ の導関数 $\frac{\partial}{\partial a}L(a,b)$ と $\frac{\partial}{\partial b}L(a,b)$ を求めよ．[10]

(II-2) 関数 $L(a,b)$ を最小とする a, b を $\overline{x}$, $\overline{\log y}$, $\overline{x\cdot \log y}$, $\overline{x^2}$ を用いて答えよ．[10]

III. 負荷 x $(10 \le x \le 100)$ が与えられた時の応答値 $\log y$ を知りたい．6回の試行を行ったところ，下記のデータを得た．

試行番号	1	2	3	4	5	6
負荷 x	89.6	71.6	42.1	13.7	26.7	56.3
応答値 $\log y$	32.6	97.7	141.4	164.9	91.1	72.3

(III-1) いま，$\log y = ax + b + \mathcal{E}$ が成り立つと仮定する．ただし，誤差項 $\mathcal{E}$ は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数を表す．このとき a と b に対する最小二乗推定量を求めよ．ただし，以下の数値を用いてよい．[10]

$$\overline{x} \simeq 50.0, \quad \overline{\log y} \simeq 100.0, \quad \overline{x\cdot \log y} \simeq 3166, \quad \overline{x^2} \simeq 4105,$$

(III-2) 負荷と応答値に相関はないという帰無仮説について，有意水準5%で議論せよ．ただし誤差項 $\mathcal{E}$ の分散は $\sigma^2 = 1000$ と仮定できるものとする．[15]

t 分布表

自由度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
両側5%点	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

問題 2　[50 点]

I. 確率変数 X は二項分布 $\mathrm{B}(n, p)$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0}, 0 < p < 1)$ に従うとする．ただし，二項分布 $\mathrm{B}(n, p)$ の確率関数は

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \ldots, n)$$

で与えられる．

(I-1) X の積率母関数 $M(\theta) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta X}]$ を求めよ．[10]

(I-2) X の期待値 $\mathrm{E}[X]$，分散 $\mathrm{Var}[X]$，k 次の積率 $\mathrm{E}[X^k]$ をそれぞれ求めよ．[15]

(I-2) 確率変数 $X_1, \ldots, X_m$ は独立に同一の分布 $\mathrm{B}(n, p)$ に従うものとする．$(X_1, \ldots, X_m)$ の従う同時分布の確率関数 $f(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} f(x_i)$ を求めよ．[5]

II. 確率変数 $X_1, \ldots, X_m$ は独立に同一の二項分布 $\mathrm{B}(n, p)$ に従うものとし，n は既知のパラメータ，p は未知パラメータとする．いま，$X_1 = a_1, \ldots, X_m = a_m$ の標本を得た．

(II-1) パラメータ p に対する対数尤度関数 $\log L(p)$ を求めよ．ただし，対数の底は e とする．[5]

(II-2) p の最尤推定量を求めよ．[5]

(II-3) II-2 で求めた推定量は p の不偏推定量といえるか？ [10]

2項分布

X　np

$\log L(p) = \sum_{i=1}^{m} L^i(p)$

X　$np + n^2p^2 - np^2$

問題 3　[40 点]

I. ある工場で作るコインは (とても) 歪んでいる．この工場で作るコインの表の出る確率 P はベータ分布 B(3, 7) に従うものとする．ただし，ベータ分布 B(α, β) ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) の密度関数は

$$f(x) := \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

で与えられ，$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t$ は正規化定数である．

(I-1) コインを 1 枚抽出し，そのコインを n 回投げたところ，表が k 回出た．選んだコインの表の出る確率 P の事後分布を求めよ．[10]

(I-2) (I-1) において，$n = 50$, $k = 10$ であった場合，選んだコインの表が出る確率はいくつと推定されるか？ 最大事後確率推定量 (maximum a posteriori: 事後分布の最頻値) を求めよ．[10]

II. コインが 10 枚ある．内，9 枚のコイン (type A) は表の出る確率が 2/3 (= 66.$\dot{6}$%)，残りの 1 枚のコイン (type B) は表の出る確率が 1 (= 100%) とする．10 枚のコインは見分けがつかないものとする．

(II-1) コインをランダムに 1 枚選び，そのコインで 3 回コイントスを行った．3 回とも表が出る確率を求めよ．[5]

(II-2) コインをランダムに 1 枚選び，そのコインで 3 回コイントスを行ったところ，3 回とも表が出た．選んだコインが type B である確率を求めよ．[5]

(II-3) コインをランダムに 1 枚選び，そのコインで 6 回コイントスを行ったところ，6 回とも表が出た．選んだコインが type B である確率を求めよ．[5]

(II-4) コインをランダムに 1 枚選び，そのコインで 10 回コイントスを行ったところ，内 9 回が表で 1 回が裏であった．選んだコインが type B である確率を求めよ．[5]

	えらぶ	表く
A	$\frac{9}{10}$	$\frac{2}{3}$
B	$\frac{1}{10}$	1