確率・統計特論 期末試験

担当: 来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

注意事項

- ・書籍,ノート,メモ,演習解答持ち込み可.電子機器(電子書籍,電卓を含む)使用不可.
- ・解答欄が足りない場合は、解答用紙裏面を使用して良い.
- ・問題は全部で3問ある. 合計点が100点を超える場合でも100点満点とする.

問題1 [50点]

I. 中心極限定理を記述せよ. [5]

II. いま, n 対の実数 $(x_1, \log y_1), \ldots, (x_n, \log y_n)$ が与えられたとし, 実変数 a, b の関数

$$L(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - \log y_i)^2$$

の最小化を考える. 記法の便利のため、

$$\overline{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \overline{\log y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log y_i, \quad \overline{x \cdot \log y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \log y_i, \quad \overline{x^2} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

とする.

(II-1) 関数 L(a,b) の導関数 $\frac{\partial}{\partial a}L(a,b)$ と $\frac{\partial}{\partial b}L(a,b)$ を求めよ. [10]

(II-2) 関数 L(a,b) を最小とする a,b を $\overline{x},\overline{\log y},\overline{x\cdot\log y},\overline{x^2}$ を用いて答えよ. [10]

III. 負荷 x ($10 \le x \le 100$) が与えられた時の応答値 $\log y$ を知りたい. 6 回の試行を行ったところ、下記のデータを得た.

試行番号	1	2	3	4	5	6
負荷 <i>x</i>	89.6	71.6	42.1	13.7	26.7	56.3
応答値 log y	32.6	97.7	141.4	164.9	91.1	72.3

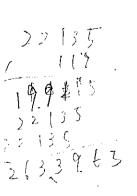
(III-1) いま, $\log y = ax + b + \mathcal{E}$ が成り立つと仮定する. ただし, 誤差項 \mathcal{E} は正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に 従う確率変数を表す. このとき a と b に対する最小二乗推定量を求めよ. ただし, 以下の数値を用いてよい. [10]

$$\overline{x} \simeq 50.0$$
, $\overline{\log y} \simeq 100.0$, $\overline{x \cdot \log y} \simeq 3166$, $\overline{x^2} \simeq 4105$,

(III-2) 負荷と応答値に相関はないという帰無仮説について、有意水準 5%で議論せよ、ただし誤差項 \mathcal{E} の分散は $\sigma^2=1000$ と仮定できるものとする、 [15]

t 分布表

/	11/12/			_ :							
	自由度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
_	両側 5%点	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228



問題 2 [50 点]

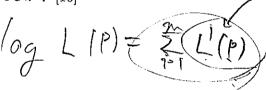
I. 確率変数 X は二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ $(n\in\mathbb{Z}_{>0},\,0< p<1)$ に従うとする. ただし, 二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ の確率関数は

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
 $(x = 0, 1, ..., n)$

で与えられる.

- (I-1) X の積率母関数 $M(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}]$ を求めよ. [10]
- (I-2) X の期待値 $\mathrm{E}[X]$, 分散 $\mathrm{Var}[X]$, k 次の積率 $\mathrm{E}[X^k]$ をそれぞれ求めよ. [15]
- (I-2) 確率変数 X_1,\ldots,X_m は独立に同一の分布 B(n,p) に従うものとする. (X_1,\ldots,X_m) の従う同時分布の確率関数 $f(x_1,\ldots,x_m)=\prod_{i=1}^m f(x_i)$ を求めよ. [5]
- II. 確率変数 X_1,\ldots,X_m は独立に同一の二項分布 B(n,p) に従うものとし, n は既知のパラメータ, p は未知パラメータとする. いま, $X_1=a_1,\ldots,X_m=a_m$ の標本を得た.
- (II-1) パラメータpに対する対数尤度関数 $\log L(p)$ を求めよ. ただし、対数の底はeとする. [5]
- (II-2) p の最尤推定量を求めよ. [5]

(II-3) II-2 で求めた推定量はpの不偏推定量といえるか? [10]



Y MP+hp-hp

問題 3 [40 点]

I. ある工場で作るコインは (とても) 歪んでいる. この工場で作るコインの表の出る確率 P はベータ分布 B(3,7) に従うものとする. ただし, ベータ分布 $B(\alpha,\beta)$ $(\alpha>0,\beta>0)$ の密度関数は

$$f(x) := \underbrace{\widehat{B(\alpha, \beta)}}_{x} x^{\alpha - 1} (1 - x)^{\beta - 1} \qquad (0 \le x \le 1)$$

で与えられ, $B(\alpha,\beta):=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t$ は正規化定数である.

(I-1) コインを 1 枚抽出し、そのコインを n 回投げたところ、表が k 回出た、選んだコインの表の出る確率 P の事後分布を求めよ. [10]

(I-2) (I-1) において, n=50, k=10 であった場合, 選んだコインの表が出る確率はいくつと推定されるか? 最大事後確率推定量 (maximum a posteriori: 事後分布の最頻値) を求めよ. [10]

II. コインが 10 枚ある. 内, 9 枚のコイン (type A) は表の出る確率が 2/3 (= 66.6%), 残りの 1 枚のコイン (type B) は表の出る確率が 1 (= 100%) とする. 10 枚のコインは見分けがつかないものとする. (II-1) コインをランダムに 1 枚選び,そのコインで 3 回コイントスを行った. 3 回とも表が出る確率を求めよ. [5]

(II-2) コインをランダムに 1 枚選び、そのコインで 3 回コイントスを行ったところ、3 回とも表が出た. 選んだコインが type B である確率を求めよ. [5]

(II-3) コインをランダムに 1 枚選び、そのコインで 6 回コイントスを行ったところ、6 回とも表が出た. 選んだコインが type B である確率を求めよ. [5]

(II-4) コインをランダムに 1 枚選び,そのコインで 10 回コイントスを行ったところ,内 9 回が表で 1 回が裏であった.選んだコインが type B である確率を求めよ.[5]

