13. 固有値とその他の性質

- 正方行列 A のいくつかの性質は, $A = T\Lambda T^{-1}$, $T^{-1}AT = \Lambda$ または $A = TJT^{-1}$, $T^{-1}AT = J$ の関係から知ることができる

13. 固有値とその他の性質

$$
\det A = \det J = \begin{bmatrix}
\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{matrix}} \; n_{11} \times n_{11} & & & \\
& \ddots & & \\
& & \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{matrix}} \; n_{1,\alpha_1} \times n_{1,\alpha_1} & \\
& & \ddots & \\
& & n_{\sigma,\alpha_\sigma} \times n_{\sigma,\alpha_\sigma} \; & \boxed{\begin{matrix} \lambda_\sigma & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_\sigma \end{matrix}}
\end{bmatrix}
$$

$$
= {\lambda_1}^{(n_{11}+\cdots+n_{1,\alpha_1})} \cdot {\lambda_2}^{(n_{21}+\cdots+n_{2,\alpha_2})} \cdot \cdots \cdot {\lambda_\sigma}^{(n_{\sigma 1}+\cdots+n_{\sigma,\alpha_\sigma})}
$$

$$
= {\lambda_1}^{m_1} \cdot {\lambda_2}^{m_2} \cdots {\lambda_\sigma}^{m_\sigma}
$$

A の行列式 ＝ A の n 個の固有値の積

$\det A = 0 \Leftrightarrow A$ の固有値のうち少なくとも1個はゼロ

13. 固有値とその他の性質

- 正方行列 A のトレース

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$ ：A の対角成分の和

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(TJT^{-1}) = \mathrm{tr}(T^{-1}TJ) = \mathrm{tr}J$$
$$= m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_\sigma\lambda_\sigma$$

A のトレースは n 個の固有値の和

13. 固有値とその他の性質

- 対称行列の定値性
  - $A = A^T$ がなりたつとき A は対称行列
  - 対称行列 A は次のように対角化することができる

    $$T^T A T = \Lambda, \quad A = T \Lambda T^T,$$

    ここで, 固有値はすべて実数である
    $T^{-1} = T^T$ であることに注意
  - 対称行列 A の2次形式

    $$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T T \Lambda T^T \boldsymbol{x} = (T^T \boldsymbol{x})^T \Lambda (T^T \boldsymbol{x})$$

    $\boldsymbol{y} = T^T \boldsymbol{x}$ と定義すると, A の2次形式は Λ の2次形式

    $$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T \Lambda \boldsymbol{y}$$

    として表現される

13. 固有値とその他の性質

- 対称行列の定値性

$\boldsymbol{y} = T^T \boldsymbol{x}$ と定義すると対称行列 A の2次形式は

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T \Lambda \boldsymbol{y}$$

と表される

T は正則行列であるので，T も T^T も全単射を表す

したがって，$\boldsymbol{x}$ が $\mathbb{R}^n$ の中の任意の値をとるとき，$\boldsymbol{y}$ も $\mathbb{R}^n$ の中の任意の値をとる

このことから，A と Λ は同じ定値性を持つ
さらに，次がなりたつ

$$\boldsymbol{y}^T \Lambda \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda_1 {y_1}^2 + \cdots + \lambda_n {y_n}^2.$$

13. 固有値とその他の性質

前ページの議論から，以下を結論づけることができる

A が正定値である

$$\Leftrightarrow \Lambda \text{ が正定値である} \Leftrightarrow \ \lambda_i > 0,\ \ i = 1, \cdots, n.$$

A が準正定値である

$$\Leftrightarrow \Lambda \text{ が準正定値である} \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0,\ \ i = 1, \cdots, n.$$

A が負定値である

$$\Leftrightarrow \Lambda \text{ が負定値である} \Leftrightarrow \ \lambda_i < 0,\ \ i = 1, \cdots, n.$$

A が準負定値である

$$\Leftrightarrow \Lambda \text{ が準負定値である} \Leftrightarrow \ \lambda_i \leq 0,\ \ i = 1, \cdots, n.$$

14. ノルムと特異値

- ベクトルのノルム
  - ベクトル $\boldsymbol{x}$ の関数 $\|\boldsymbol{x}\|$ が次の条件を満たすとき, これをベクトル $\boldsymbol{x}$ のノルムと呼ぶ. ノルムはベクトルの大きさあるいは長さを表す
    - $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\|\boldsymbol{x}\| > 0$ であり, $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときのみになりたつ
    - 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー α について, $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$
    - 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ について, $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$（三角不等式）
- 実数値 $p(\geq 1)$ について, 以下で定義される $\|\boldsymbol{x}\|_p$ はベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ のノルムである

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

例

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

14. ノルムと特異値

- 行列のノルム
  - 行列のノルムもベクトルのノルムと同様に定義することができる. しかし, 行列は写像を表現するものだとしてノルムを定義した方が便利である.

$m \times n$ 行列 A は n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を m 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ に, $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ によって写像する

A のノルムは, その写像によってどの程度ベクトルのノルムが大きく(小さく)なるか, すなわち, ベクトルのノルムの比 $\dfrac{\|\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ によって定義することができる

ただ, この比は一定ではなく $\boldsymbol{x}$ によって変化する. そこで, A のノルムを次のように定義する

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\| \leq 1} \|\boldsymbol{y}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\| = 1} \|\boldsymbol{y}\| = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|},$$

これは行列 A の誘導ノルムと呼ばれる

14. ノルムと特異値

– 誘導ノルムの例

ベクトルのノルム		行列の誘導ノルム
$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$	⇨	$\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^{m} \|a_{ij}\|$
$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}$	⇨	$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$
		$\lambda_{\max}$ は最大の固有値
$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i \|x_i\|$	⇨	$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|$

14. ノルムと特異値

- 固有値は正方行列について定義される

  非正方行列（長方形の行列）について，同じような値を定義することができるであろうか？
  できる. 非正方行列について特異値を定義することができる

14. ノルムと特異値

- 行列 A^TA と特異値
  - A を $m \times n$ 行列とする

A^TA は対称行列で準正定値行列である

$$\left(\begin{array}{l} (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA \\ \text{任意の } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \text{ について } \boldsymbol{x}^T(A^TA)\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x})^T(A\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x}\|_2{}^2 \geq 0 \end{array} \right)$$

したがって, すべての固有値は非負である

$$\lambda_i(A^TA) \geq 0, \ \ i = 1, \cdots, n,$$

そのため

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}, \ i = 1, \ldots, n,$$

を定義することができる. これは行列 A の特異値と呼ばれる

14. ノルムと特異値

$\|\boldsymbol{x}\|_2$から誘導された行列ノルムは

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)},$$

と定義されたが，これを次のように表すこともできる

$$\|A\| = \sigma_{\max}(A).$$

14. ノルムと特異値

- 特異値
  - 次の行列を定義しよう

$$
\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} (m \geq n) \text{ or } \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} (m \leq n).
$$

$\sigma_{m+1} = \cdots = \sigma_n = 0 \ (m \leq n)$ に注意

すると, 直交行列 U と V が存在し

$$A = U\Sigma V,$$

がなりたつ. ここで $U \in \mathbb{R}^{m\times m}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ であり

$$U^TU = UU^T = I, \ V^TV = VV^T = I$$

がなりたつ

14. ノルムと特異値

$A = U\Sigma V$ は A の特異値分解と呼ばれる

$\mathrm{rank} A = r$ のとき, $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ のうちの $n - r$ 個はゼロである