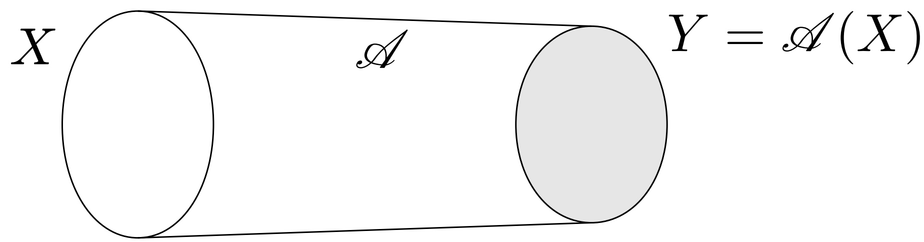
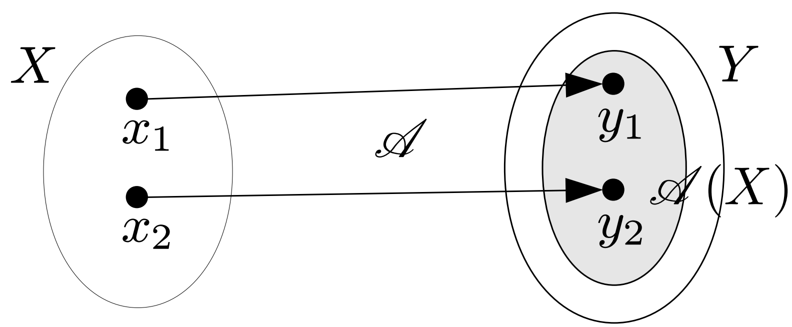
3.1 写像

- 全射, 単射, 全単射
  - $\mathscr{A}(X) = Y$ がなりたつとき, 写像 $\mathscr{A}$ は**全射**または上への写像であるという



  - $\forall x_1, x_2 \in X$ について $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \mathscr{A}x_1 \neq \mathscr{A}x_2$ がなりたつとき, すなわち, $\forall y \in \mathscr{A}(X) \subset Y$ について, $y = \mathscr{A}x$ となる x がただ一つだけ存在するとき, $\mathscr{A}$ は**単射**または1対1写像であるという



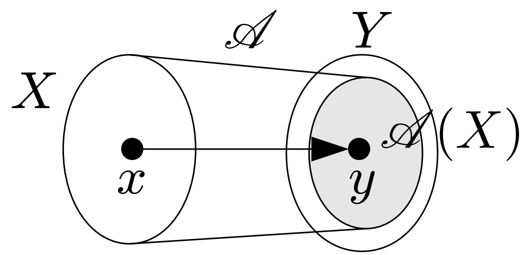
  - $\mathscr{A}$ が全射でありかつ単射であるとき, $\mathscr{A}$ は**全単射**であるという

3.2 写像によって移される情報の量

- 写像によってどれだけの情報が移されるか
  - 写像 $\mathscr{A} : X \to Y$ は, 集合 X が持つ情報を集合 Y に移す.
    外部に情報の源は無い.
    したがって, 写像によって情報の量が増えることはない（情報の量は減るか変わらないかのいずれかである）

3.2 写像によって移される情報の量

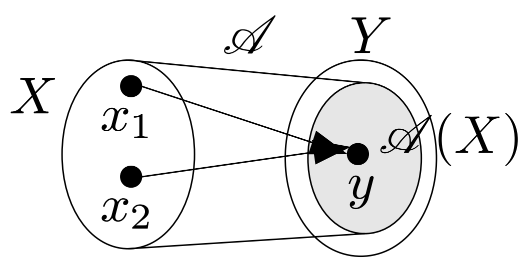
- 単射



X に含まれる情報の量
= $\mathscr{A}(X)$に含まれる情報の量
≤ Y に含まれる情報の量

おのおのの $y \in \mathscr{A}(X)$に対して,
$y = \mathscr{A}x$によって対応づけられる x がただ一つ存在する.

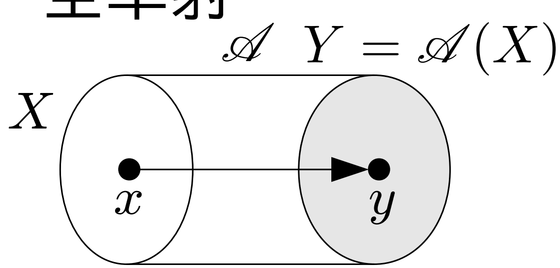
- 非単射



X に含まれる情報の量
>$\mathscr{A}(X)$ に含まれる情報の量

異なる x_1 と x_2 が同一の y に写像される.
差 $x_1 - x_2$ に関する情報が写像 $\mathscr{A}$ によって失われる.

- 全単射



X に含まれる情報の量
= $\mathscr{A}(X)$に含まれる情報の量
= Y に含まれる情報の量

4. 線形空間に含まれる情報の量

- 前のスライドで, 写像 $\mathscr{A}$ が X から Y に情報をもれなく移すことができるかどうかを見た
- ここでは，そもそも X の中にどれだけの量の情報が含まれているのかを見てみる

- 手短かに言うと, 線形空間に含まれている情報の量は, この線形空間に属する線形独立なベクトルの最大本数によって表される

4.1 線形独立なベクトル

- 線形独立なベクトル
  - ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ が線形独立な集合である

$\Longleftrightarrow$ ベクトルの線形結合

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n,\ c_i \in F,\ \boldsymbol{x}_i \in X$$

は

$$c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$$

が成り立つときに限って $\mathbf{0}$（零ベクトル）になる

4.1 線形独立なベクトル

- 複数ベクトルの線形結合によるベクトルの表現

$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ は線形独立とする

どのベクトル $\boldsymbol{x}_j, 1 \leq j \leq n$ も，残りの他のベクトル
$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{j-1}, \boldsymbol{x}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ の$\boxed{\text{線形結合}}$によって表すことはできない．

線形空間で定義されているすべての演算（加算およびスカラー倍）を最大限利用している．

ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ が線形結合で表されると仮定する．すると

$$\boldsymbol{x}_j = d_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + d_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1} + d_{j+1}\boldsymbol{x}_{j+1} + \cdots + d_n\boldsymbol{x}_n$$

がなりたち，これは次と等価である．

$$d_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + d_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1} + (-1)\boldsymbol{x}_j + d_{j+1}\boldsymbol{x}_{j+1} + \cdots + d_n\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}.$$

この式の中で，$\boldsymbol{x}_j$ の係数は -1であってゼロではないので，これは，ベクトルの集合が線形独立であることに矛盾する．

4.2 線形空間が持つ情報の量

- $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ が線形独立のとき, この集合に属する n 本のベクトルのいずれもが, どんな演算を用いても残りのベクトルでは表せない**固有の**情報を持っている. したがって, 線形独立なベクトルの本数は, 情報の量に対応している

この固有の情報は，他の演算，たとえば2乗や平方根など線形空間では定義されていない演算を用いれば表現可能かもしれないことに注意.

ある与えられた線形空間において，線形独立なベクトルの部分集合は多数あり，部分集合に含まれるベクトルの本数も異なる.

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\},\ \{\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_6\},\ \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4\},\ \{\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_6, \boldsymbol{x}_7\}, \cdots$$

線形空間に含まれる線形独立なベクトルの**最大**本数が，この線形空間に含まれる情報の量に対応する.

4.2 線形空間が持つ情報の量

- 基底

線形空間 X に含まれる線形独立なベクトルの最大本数は n であり, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ は線形独立であるとする.

⇩

任意の $\boldsymbol{x} \in X$は, $\underbrace{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}}_{\text{基底}}$ 中のベクトルの線形結合で表される.

n は X 中の線形独立なベクトルの最大本数である.

$\Leftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{x} \in X$ について, $n+1$ 本のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}\}$ は線形独立ではない.

$\Leftrightarrow$ $c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n + c\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ c \neq 0$ となる $c_1, \cdots, c_n, c$ が存在する.

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = -\dfrac{c_1}{c}\boldsymbol{x}_1 - \cdots - \dfrac{c_n}{c}\boldsymbol{x}_n$ と表される.

4.2 線形空間が持つ情報の量

- 基底の例

$$\forall \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$ は $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ によって

$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ と表される.

したがって $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である.

4.2 線形空間が持つ情報の量

- 次元

$\boldsymbol{x}$ が基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ によって次のように表されるとしよう

$$\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n = [\boldsymbol{x}_1 \ \cdots \boldsymbol{x}_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix},$$

$\xi_1, \cdots, \xi_n$ は基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ に関する $\boldsymbol{x}$ の座標または成分と呼ばれる

X の基底に含まれるベクトルの本数を X の次元 $\mathrm{dim}X$ と呼ぶ.

$\mathrm{dim}X$ は線形空間 X に含まれる情報の量を表しているとみなすことができる

5. 線形写像

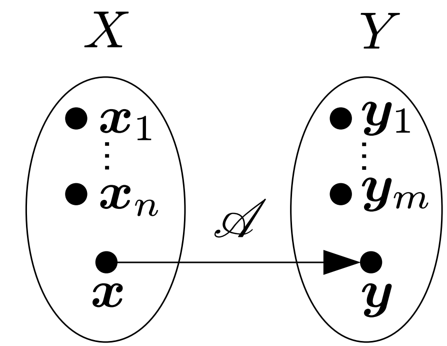
- 行列が線形性と写像に密接に関連していることを見てきた. また, 線形空間についても復習した
- 行列と線形写像の関係を見ていくことにしよう

5.1 線形写像と行列

X, Yを線形空間とする

$\mathrm{dim}X{=}n$, X の基底は $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, \ldots, n$.

$\mathrm{dim}Y{=}m$, Y の基底は$\{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m\}$, $\boldsymbol{y}_i \in \mathbb{R}^m,\ i = 1, \ldots, m$.



$\mathscr{A} : X \to Y$ を線形写像とする

$\forall \boldsymbol{x} \in X$ は X の基底を用いて次のように表される

$$\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n = [\boldsymbol{x}_1\ \cdots \boldsymbol{x}_n] \boxed{\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}}$$

$\boldsymbol{x}$ の座標

$\boldsymbol{y} = \mathscr{A}\boldsymbol{x}$ とする. $\boldsymbol{y}$ は Y の基底によって次のように表される

$$\boldsymbol{y} = \eta_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \eta_m \boldsymbol{y}_m = [\boldsymbol{y}_1\ \cdots \boldsymbol{y}_m] \boxed{\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}}.$$

$\boldsymbol{y}$ の座標

5.1 線形写像と行列

重ねの理がなりたつので

$$\boldsymbol{y} = \mathscr{A}\boldsymbol{x} = \mathscr{A}\left(\xi_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \xi_n\boldsymbol{x}_n\right) = \mathscr{A}\xi_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \mathscr{A}\xi_n\boldsymbol{x}_n$$

$$= \xi_1\mathscr{A}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \xi_n\mathscr{A}\boldsymbol{x}_n$$

$\mathscr{A}\boldsymbol{x}_i \in Y$ は Y の基底 $\{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m\}$ を用いて次のように表される

$$\mathscr{A}\boldsymbol{x}_i = a_{1i}\boldsymbol{y}_1 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{y}_m = [\boldsymbol{y}_1 \ \cdots \boldsymbol{y}_m]\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}.$$

$m \times m$ 行列　　m ベクトル

$$\therefore \boldsymbol{y} = \xi_1[\boldsymbol{y}_1 \cdots \boldsymbol{y}_m]\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + \xi_n[\boldsymbol{y}_1 \cdots \boldsymbol{y}_m]\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

5.1 線形写像と行列

$$\boldsymbol{y} = \xi_1[\boldsymbol{y}_1 \cdots \boldsymbol{y}_m]\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + \xi_n[\boldsymbol{y}_1 \cdots \boldsymbol{y}_m]\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{y}_1 \ \cdots \boldsymbol{y}_m]\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} & \cdots & [\boldsymbol{y}_1 \ \cdots \boldsymbol{y}_m]\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$= [\boldsymbol{y}_1 \ \cdots \boldsymbol{y}_m] \boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}}.$$

等しいことがわかる

$\boldsymbol{y}$ は以下のようにも表すことができる

$$\boldsymbol{y} = \eta_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \eta_m \boldsymbol{y}_m = [\boldsymbol{y}_1 \ \cdots \boldsymbol{y}_m] \boxed{\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}}.$$

5.1 線形写像と行列

線形写像 $\boldsymbol{y} = \mathscr{A}\boldsymbol{x}$ は次のように表現される

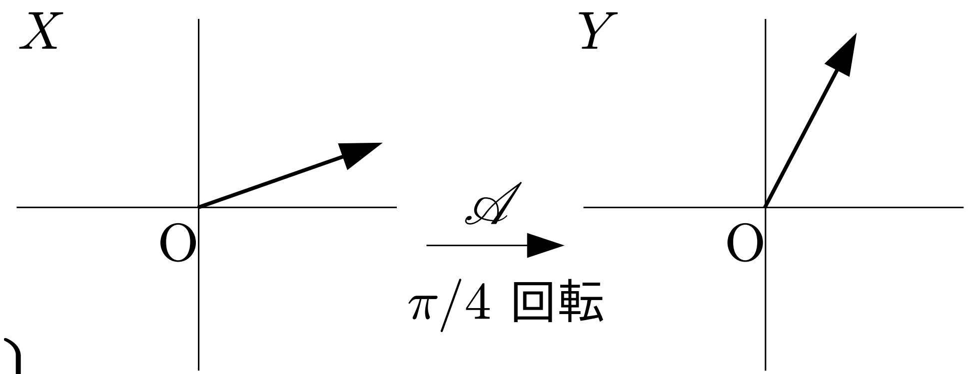
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}}_{Yの基底を用いた\boldsymbol{y}の座標} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{行列！} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}}_{Xの基底を用いた\boldsymbol{x}の座標} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

基底が与えられると
行列は線形写像を表現する

成分 a_{ij} は, $\mathscr{A}\boldsymbol{x}_j$ をYの基底を用いて表すことによって得られる

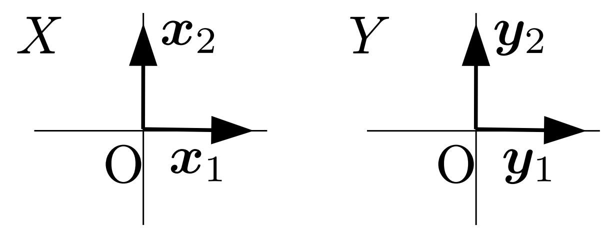
5.1 線形写像と行列

- 例
  - ベクトルの $\pi/4$ 回転



$$X \text{ の基底: } \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$Y \text{ の基底: } \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$



$$\mathscr{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{a_{11}}\boldsymbol{y}_1 + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{a_{21}}\boldsymbol{y}_2, \ \mathscr{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2}}_{a_{12}}\boldsymbol{y}_1 + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{a_{22}}\boldsymbol{y}_2$$

この写像は次の行列で表現される

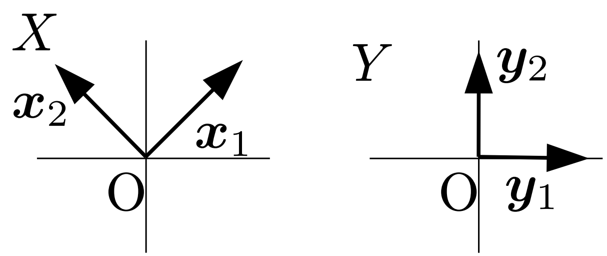
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

5.1 線形写像と行列

– ベクトルの $\pi/4$ 回転（Xの基底を変えた場合）

X の基底: $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Y の基底: $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$



$$\mathscr{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \underbrace{0}_{a_{11}} \cdot \boldsymbol{y}_1 + \underbrace{\sqrt{2}}_{a_{21}} \boldsymbol{y}_2, \ \mathscr{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{-\sqrt{2}}_{a_{12}} \boldsymbol{y}_1 + \underbrace{0}_{a_{22}} \cdot \boldsymbol{y}_2$$

写像は次の行列で表現される

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

5.1 線形写像と行列

- まとめ
  - 基底$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$が与えられると, ベクトル $\boldsymbol{x}$ は次のように表される

$$\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n = [\boldsymbol{x}_1 \ \cdots \boldsymbol{x}_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{x}_1 \ \cdots \boldsymbol{x}_n] \boldsymbol{\xi}.$$

  - 線形写像 $\mathscr{A} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ は, ベクトルの座標が次のように与えられると, 行列 A を用いて$\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi}$と表現される

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}.$$

⇩

基底が与えられると, ベクトル $\boldsymbol{x}$ は座標 $\boldsymbol{\xi}$ で表現され, 写像 $\mathscr{A}$ は, その行列表現 A で表される

5.1 線形写像と行列

- 6節以降では, ベクトルとその座標の両方に同じ記号 $\boldsymbol{x}$ を使い, 写像をその行列表現 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ を使って表す

5.2 合成写像と行列の積

- 二つの線形写像

  $$\mathscr{A} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y},\ \mathscr{B} : \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{z}$$

  を考える. ただし,

  $$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\ell},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{m},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n}.$$

  各写像の行列表現を以下の通りとする

  $$\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\zeta} = B\boldsymbol{\eta}$$

  ここで, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ および $\boldsymbol{\zeta}$ は, それぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ および $\boldsymbol{z}$ の座標である

  合成写像 $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$ は $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{z}$ に, $\boldsymbol{y}$ 経由で写像し, その行列表現は

  $$\boldsymbol{\zeta} = B\boldsymbol{\eta} = B(A\boldsymbol{\xi}) = BA\boldsymbol{\xi}$$

  となる. したがって, 行列の積 BA が合成写像 $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$ を表現することがわかる

5.2 合成写像と行列の積

- 積 BA を自然に定義するとしたらどうすべきだろうか?

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\ell \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix}$$ および

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m\ell} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$ とする

ことのき $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1\ell}\xi_\ell \\ \vdots \\ a_{m1}\xi_1 + \cdots + a_{m\ell}\xi_\ell \end{bmatrix}$ となり, したがって

$$\boldsymbol{\zeta} = B\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} b_{11}(a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1\ell}\xi_\ell) + \cdots + b_{1m}(a_{m1}\xi_1 + \cdots + a_{m\ell}\xi_\ell) \\ \vdots \\ b_{n1}(a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1\ell}\xi_\ell) + \cdots + b_{nm}(a_{m1}\xi_1 + \cdots + a_{m\ell}\xi_\ell) \end{bmatrix}.$$

5.2 合成写像と行列の積

$$\boldsymbol{\zeta} = B\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} b_{11}(a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1\ell}\xi_\ell) + \cdots + b_{1m}(a_{m1}\xi_1 + \cdots + a_{m\ell}\xi_\ell) \\ \vdots \\ b_{n1}(a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1\ell}\xi_\ell) + \cdots + b_{nm}(a_{m1}\xi_1 + \cdots + a_{m\ell}\xi_\ell) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (b_{11}a_{11} + \cdots + b_{1m}a_{m1})\xi_1 + \cdots + (b_{11}a_{1\ell} + \cdots + b_{1m}a_{m\ell})\xi_\ell \\ \vdots \\ (b_{n1}a_{11} + \cdots + b_{nm}a_{m1})\xi_1 + \cdots + (b_{n1}a_{1\ell} + \cdots + b_{nm}a_{m\ell})\xi_\ell \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + \cdots + b_{1m}a_{m1} & \ldots & b_{11}a_{1\ell} + \cdots + b_{1m}a_{m\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + \cdots + b_{nm}a_{m1} & \ldots & b_{n1}a_{1\ell} + \cdots + b_{nm}a_{m\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\ell \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m b_{1j}a_{j1} & \ldots & \sum_{j=1}^m b_{1j}a_{j\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^m b_{nj}a_{j1} & \ldots & \sum_{j=1}^m b_{nj}a_{j\ell} \end{bmatrix}}_{\text{行列 } B \text{ と } A \text{ の積}} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\ell \end{bmatrix} = BA \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\ell \end{bmatrix}.$$

6. 行列の階数
6.1 階数

- 行列の階数（ランク）
  - 列階数

$m \times n$ 行列 A を次のように表現する

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \boldsymbol{a}_n],$$

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$: A の第 j 列ベクトル

行列Aの**列階数** : $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ 中の線形独立なベクトルの最大本数
$\leq n$

行列Aの列階数がnに等しいとき，A は**最大列階数**を持つという.

6.1 階数

- 行階数

$m \times n$ 行列 A を次のように表現する

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad \cdots \quad a_{mn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \end{bmatrix},$$

$\tilde{\boldsymbol{a}}_i^T = [a_{i1} \ \cdots \ a_{in}]$: Aの第i行ベクトル

行列 A の**行階数** : $\{\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{a}}_m\}$ 中の線形独立なベクトルの最大本数
$\leq m$

行列Aの列階数がmに等しいとき, A は**最大行階数**を持つという.

6.1 階数

– 階数

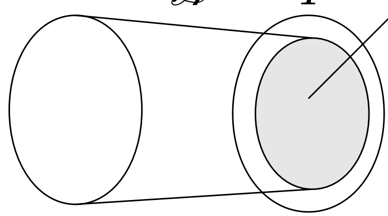
行列の列階数と行階数は同じ値をとる. この値を行列の階数と呼び, $\mathrm{rank}A$ と表す

$$\mathrm{rank}A \leq \min(m, n)$$

6.2 写像が移すことができる情報の量

- 行列は線形写像を表現する

$$\mathscr{A} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$$



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

定義域 X は $\mathrm{dim}X$ の量の情報を持っている

線形写像 $\mathscr{A}$ は定義域 X が持っている情報を値域 $\mathscr{A}(X)$ に移す.

このとき, 線形写像$\mathscr{A}$ はどれだけの情報を値域 $\mathscr{A}(X)$ に移すことができるだろうか？　言い換えると, $\mathrm{dim}(\mathscr{A}(X))$ はいくらになるであろうか？

答えは$\mathrm{dim}(\mathscr{A}(X)) = \mathrm{rank}A$.

6.2 写像が移すことができる情報の量

$\dim(\mathscr{A}(X)) = \mathrm{rank}A$

$\mathrm{rank}A = r$ とし，列ベクトルのうち $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が線形独立であるとする.
（$A = [\boldsymbol{a}_1 \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{a}_n]$）

行列Aの他の列ベクトル $\boldsymbol{a}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は，いずれも $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の線形結合により次のように表すことができる.

$$\boldsymbol{a}_k = c_{k1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{kr}\boldsymbol{a}_r,\ k = r+1, \cdots, n.$$

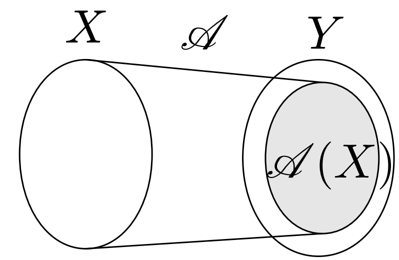
このとき

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}_1 \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\
&= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r \\
&\quad + x_{r+1}\{c_{r+1,1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{r+1,r}\boldsymbol{a}_r\} + \cdots + x_n\{c_{n1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{nr}\boldsymbol{a}_r\} \\
&= (x_1 + x_{r+1}c_{r+1,1} + \cdots + x_n c_{n1})\boldsymbol{a}_1 + \cdots \\
&\quad + (x_r + x_{r+1}c_{r+1,r} + \cdots + x_n c_{nr})\boldsymbol{a}_r.
\end{aligned}$$

したがって，任意の$\boldsymbol{y} \in \mathscr{A}(X)$ は，r本のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の線形結合で表される.

6.2 写像が移すことができる情報の量

以上で見てきたように，線形写像$\mathscr{A}$ が値域$\mathscr{A}(X)$に移すことができる情報の量は$\mathrm{rank}\ A$に等しい．



$\mathrm{dim}(\mathscr{A}(X)) = \mathrm{rank}A = n = \mathrm{dim}X$ のとき
写像$\mathscr{A}$ はXに含まれている情報の量すべてを移すことができることになる

これに対して, $\mathrm{dim}(\mathscr{A}(X)) = \mathrm{rank}A < n = \mathrm{dimX}$ のとき, $\mathscr{A}$ はすべての量の情報を移すことはできない．では，このときに失われる情報はどこに行くのであろうか？

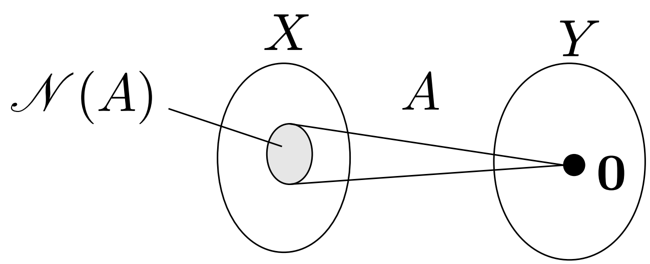
各$\boldsymbol{x} \in X$ に対して，必ず対応する$\boldsymbol{y} \in \mathscr{A}(X)$ が存在する．にもかかわらず$\mathscr{A}(X)$は X よりも低い次元を持つ．

ここで起こっているのは，相異なる$\boldsymbol{x}_i$と$\boldsymbol{x}_j$ について $A\boldsymbol{x}_i = A\boldsymbol{x}_j$となっている，ということである．

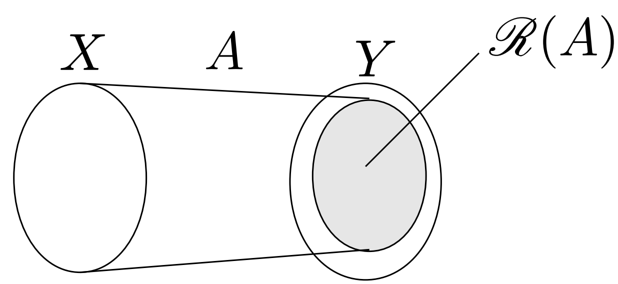
6.3 零空間と値域

行列 A は線形写像を表現しているとする

Aの**零空間**，$\mathscr{N}(A)$: $\{\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$　　Aの核，$\mathrm{Ker}\ A$とも呼ばれる



Aの**値域**，$\mathscr{R}(A)$: $\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in X\}$　Aの像，$\mathrm{Im}\ A$とも呼ばれる



$\mathscr{R}(A)$ と$\mathscr{A}(X)$ は同じものを表していることに注意

零空間も値域もいずれも線形空間である

6.3 零空間と値域

$m \times n$ 行列Aの零空間と値域について，以下がなりたつ

$$\boxed{\dim\mathscr{N}(A) + \dim\mathscr{R}(A) = n = \dim X.}$$

$\dim\mathscr{N}(A) = l < n$ であり，$\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_l\}$ が$\mathscr{N}(A)$の基底であるとする.

これに$n - l$ 本のベクトル$\boldsymbol{x}_{l+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$を加えて，$n$次元線形空間 X の基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{x}_{l+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$を構成する.

$\{A\boldsymbol{x}_{l+1}, \ldots, A\boldsymbol{x}_n\}$ が $\mathscr{R}(A)$ の基底であることを示せばよい.

任意の$\boldsymbol{y} \in \mathscr{R}(A)$ に対して，$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ を満たす$\boldsymbol{x} \in X$が存在する.

ベクトル $\boldsymbol{x}$ は X の基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ を用いて以下のように表される

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_l\boldsymbol{x}_l + c_{l+1}\boldsymbol{x}_{l+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n.$$

すると，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_l \in \mathscr{N}(A)$ つまり $A\boldsymbol{x}_1 = \cdots = A\boldsymbol{x}_l = \boldsymbol{0}$であるため，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} &= c_1A\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_lA\boldsymbol{x}_l + c_{l+1}A\boldsymbol{x}_{l+1} + \cdots + c_nA\boldsymbol{x}_n \\ &= c_{l+1}A\boldsymbol{x}_{l+1} + \cdots + c_nA\boldsymbol{x}_n,\end{aligned}$$

がなりたち，これは $\boldsymbol{y}$ が$A\boldsymbol{x}_{l+1}, \ldots, A\boldsymbol{x}_n$の線形結合で表されることを示している.

次ページでは，$A\boldsymbol{x}_{l+1}, \ldots, A\boldsymbol{x}_n$ が線形独立であることを示す.

6.3 零空間と値域

$\alpha_{l+1}(A\boldsymbol{x}_{l+1})+\cdots+\alpha_n(A\boldsymbol{x}_n)=\mathbf{0}$ とおく.

このとき $A(\alpha_{l+1}\boldsymbol{x}_{l+1}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n)=\mathbf{0}$ であり，これは次を意味する.

$$\alpha_{l+1}\boldsymbol{x}_{l+1}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n\in\mathscr{N}(A).$$

したがって，このベクトルは $\mathscr{N}(A)$ の基底 $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_l\}$ を用いて次のように表される

$$\alpha_{l+1}\boldsymbol{x}_{l+1}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=\beta_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\beta_l\boldsymbol{x}_l.$$

これは次式を意味する.

$$-\beta_1\boldsymbol{x}_1-\cdots-\beta_l\boldsymbol{x}_l+\alpha_{l+1}\boldsymbol{x}_{l+1}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=\mathbf{0}.$$

$\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\}$ は X の基底であるので，これらのベクトルは線形独立であり，
したがって次が成り立たなければならない

$$\alpha_{l+1}=\cdots=\alpha_n=\beta_1=\cdots=\beta_l=0,$$

これは $A\boldsymbol{x}_{l+1},\ldots,A\boldsymbol{x}_n$ が線形独立であることを意味する.

6.3 零空間と値域

$$\boxed{\mathrm{dim}\mathscr{N}(A) + \mathrm{dim}\mathscr{R}(A) = n = \mathrm{dim}X.}$$

ここで, $\mathrm{dim}X$: X がもともと持っていた情報の量,

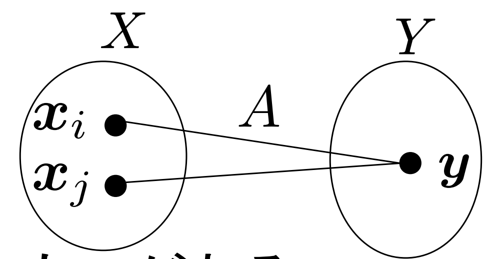
$\mathrm{dim}\mathscr{R}(A)$: 写像 A が $\mathscr{R}(A) \subseteq Y$ に移すことができる情報の量.

$\Downarrow$

$\mathrm{dim}\mathscr{N}(X) = \mathrm{dim}X - \mathrm{dim}\mathscr{R}(A)$ は A が移すことができない情報の量

言い換えると, 写像 A で移すことができない情報は零空間 $\mathscr{N}(A)$ に含まれている

6.3 零空間と値域



64ページで議論したように

$$\dim\mathscr{R}(A) = \dim(\mathscr{A}(X)) = \mathrm{rank}A < n = \dim X,$$

のとき，相異なる$\boldsymbol{x}_i$と$\boldsymbol{x}_j$で，$A\boldsymbol{x}_i = A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{y}$.がなりたつものがある

$\boldsymbol{x}_i$ と$\boldsymbol{x}_j$ は互いに異なっているのに，写像 A によって同じ $\boldsymbol{y}$ に移される
つまり, $\boldsymbol{x}_i$と$\boldsymbol{x}_j$の違い，$\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j$ はYに伝えられていない.

では，これはどこに行ったのだろうか？　そもそも，これはどこから来たのだろうか？

次の2式について辺々引くと

$$A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}, \quad A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{y}$$

次式を得る

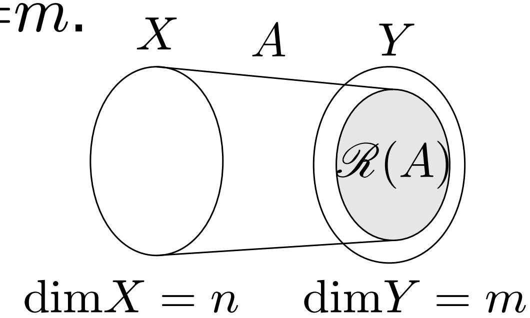
$$A\boldsymbol{x}_i - A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{0}$$

すなわち $A(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{0}$．これは $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j \in \mathscr{N}(A)$ を意味する

したがって$\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j$ は$\mathscr{N}(A) \subseteq X$ が源であり，写像によって Y の中の $\boldsymbol{0}$ に行く

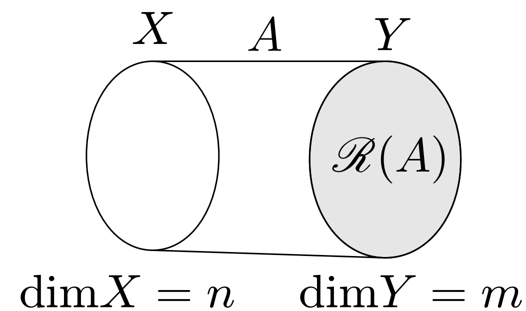
6.4 全射･単射と階数

A を $m\times n$ 行列とする. このとき $\mathrm{dim}X{=}n$, $\mathrm{dim}Y{=}m$.



Aによって表現される線形写像 $\mathscr{A}$ が<u>全射</u>のとき,
$\mathscr{A}(X) = \mathscr{R}(A) = Y$ であり, したがって

$$\mathrm{dim}\mathscr{A}(X) = \mathrm{dim}\mathscr{R}(A) = \mathrm{dim}Y = m.$$



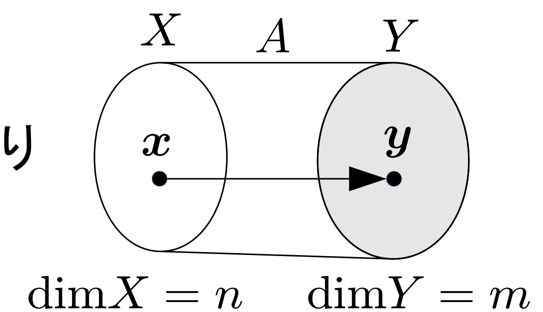
ところで, $\mathrm{dim}\mathscr{A}(X) = \mathrm{rank}A$ であった

これは$\mathrm{rank}A = m$を意味する, すなわち, A は最大行階数を持ち,
したがって, m 本すべての行ベクトルは線形独立である

6.4 全射・単射と階数

$\mathscr{A}$ が全射である

$\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{y} \in Y$ は, $\boldsymbol{x} \in X$ を適切に選ぶことにより $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ と表される



Y は目的地の世界を, X は出発地の世界を表すとしよう

たとえば, Y は月面, X は地球表面であると考えてみよう. さらに, 写像 A はロケットが地表から月面まで飛ぶ様子を表すものとしよう. $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は, ロケットが $\boldsymbol{x}$ を出発して $\boldsymbol{y}$ に到達することを表す.

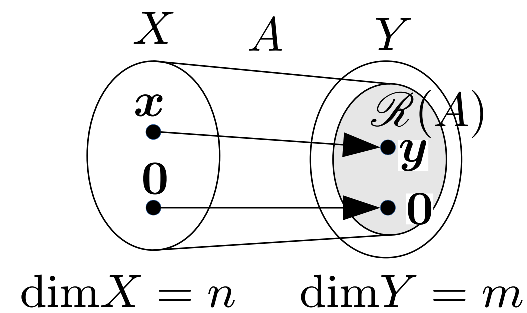
A が全射であれば, 月面 Y 上の任意の点 $\boldsymbol{y}$ について, 地表 X 上の打ち上げ点 $\boldsymbol{x}$ を適切に選ぶことにより, ロケットを $\boldsymbol{y}$ に到達させることができる

全射あるいは最大行階数は, 制御の問題に密接に関係している

6.4 全射･単射と階数

- 例
  - AさんとB君がデートをするとき, 食事代はAさんが三分の二を支払いB君が残りを支払い. それ以外の費用は割り勘にする
    - Aさんの支払いが5,000円, B君の支払いが3,000円になるような, 食事代 x_1 円とその他の費用 x_2 円はあるだろうか？
    - 任意の y_1 と y_2 について, Aさんの支払いが y_1 円, B君の支払いが y_2 円になるような, 食事代 x_1 円とその他の費用 x_2 円はあるだろうか？
    - 食事代もその他の費用も合わせて, Aさんが三分の二を支払い, B君が残りを支払う場合はどうだろうか？
    - Aさんが, 食事代は三分の二, 交通費は五分の三, そのたの費用は半分を出し, B君が残りを出す場合はどうだろうか？

6.4 全射･単射と階数



- A によって表現される線形写像 $\mathscr{A}$ が単射のとき,
  任意の $\boldsymbol{y} \in \mathscr{R}(A)$ に対して, $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x} \in X$ がただ一つ存在する.
  これは $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ に対してもなりたち, この場合の唯一の $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
  これは $\mathscr{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$ を意味し, したがって $\mathrm{dim}\mathscr{N}(A) = 0$.

  ところで $\mathrm{dim}\mathscr{N}(A) + \mathrm{dim}\mathscr{R}(A) = n = \mathrm{dim}X$ であった.

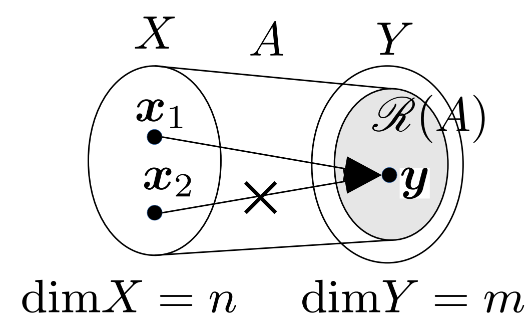
  以上のことは次を意味する

  $$\mathrm{rank}A = \mathrm{dim}\mathscr{A}(X) = \mathrm{dim}\mathscr{R}(A) = n - \mathrm{dim}\mathscr{N}(A) = n - 0 = n,$$

  すなわち A は最大列階数を持ち, その n 本すべての列ベクトルは線形独立である.

6.4 全射･単射と階数

$\mathscr{A}$ は単射である



$\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{y} \in Y$ に対して, $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ となる$\boldsymbol{x} \in X$ がただ一つ存在する

X は原信号の集合, Y はノイズを含めて観測された信号の集合としよう

写像 A は原信号 $\boldsymbol{x}$ がどのように変換されて(さらにノイズに汚されて)観測信号 $\boldsymbol{y}$ になるかを表す

A が単射であれば, 任意のノイズ付き観測信号 $\boldsymbol{y}$ に対して, ノイズを含まない原信号 $\boldsymbol{x}$ をただ一つ求めることができる

単射または最大列回数は推定の問題に密接に関係している

6.4 全射･単射と階数

- 例
  - AさんとB君がデートをするとき, 食事代はAさんが三分の二を支払いB君が残りを支払う. その他の費用については割り勘にする
    - あるデートで, Aさんは合計3,000円を, B君は合計2,000円を支払った. このときの食事代とその他の費用はいくらだっただろうか？
    - Aさんが食事代の三分の二, 交通費の三分の五, その他の費用の半分を支払い, B君が残りを支払う場合はどうだろうか？

6.4 全射･単射と階数

- A によって表現された線形写像 $\mathscr{A}$ が全単射の場合,
  $\mathrm{rank}A = m$ であり A は最大行階数を持つ(全射), かつ,
  $\mathrm{rank}A = n$ であり A は最大列回数を持つ(単射)

  上記は $\mathrm{rank}A = m = n$ を意味し, したがって, A は正方行列である.
  さらに, すべての行ベクトルは線形独立であり, すべての列ベクトルも線形独立である