線形代数応用特論

村田純一

講義形式

- 英語スライドを使った日本語講義
  - スライドpdfファイルはMoodleで入手可能
    - moodle.s.kyushu-u.ac.jp にアクセスする
    - ページ右上の「ログイン」をクリックする
    - SSO-KIDとパスワードを入力してログインする
    - コースの検索機能を使って「2019年度前期・木3・線形代数応用特論（村田　純一）」を検索し, 表示されたコース名をクリックする
    - 「私を受講登録する」をクリックしてコースに登録する
    - 4月11日の項目にファイルが表示されている

講義形式

- 質問
  - 講義中でも講義後でも質問歓迎
  - 教員室（553号室）に来室しても, 以下のアドレスにメールを送ってもよい
    murata@ees.kyushu-u.ac.jp

成績評価

- 出席 – 20%
  - 学会で発表を行うために講義に出席できない場合は**事前に**連絡のこと. 出席率計算の対象から除外する
- 期末試験 – 80%
  - 期末試験は講義の最終週(2019年7月18日の予定)
  - スライド資料を印刷し綴じたもの(日本語版, 英語版いずれでも, 両方でも)を試験に持ち込んでよい
  - 試験問題は日本語と英語で記述する

成績評価

- 出席
  - Moodleを利用して出席をとる
    - 九大の教育用ネットワーク**edunetを使って**Moodleのコース「2019年度前期･木3･線形代数応用特論（村田　純一）」にアクセスする
    - コース内の画面の「出欠リンク」をクリック
    - その日の**出欠用キーワードを入力**してから「送信」ボタンをクリック
    - 以上を講義室内から**講義開始後15分以内**に行う

成績評価

- 期末試験
  - 公平な成績評価のために，全受講生が同じ日に同じ試験を受けることを重視する
    - 試験予定日（2019年7月18日）に他の予定を入れない
    - 以下のいずれかの理由で当日試験が受けられない場合は適切な日に追試験を行う：法定伝染病，近親者の死亡，裁判員としての職務，天災・交通機関停止
    - 他の理由（学会参加も含む）で試験が受けられない場合は，来年1月に実施する再試験を受ける必要がある

予定講義内容

- 線形代数再訪
  - 行列
  - 線形性と写像
  - 行列が移すことができる情報の量
  - 固有値と固有ベクトル
  - ジョルダン標準形
- 線形代数応用
  - 線形システム制御
  - 最適化
  - 分類

1. 行列再訪
1.1 行列

- 行列は, 行と列からなる長方形の形状に値を並べたもの

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

  - 個々の値 a_{ij} は要素あるいは成分と呼ばれる
  - この講義では要素はすべて実数であるとする. すなわち

    $$a_{ij} \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n,$$

    ただし, $\mathbb{R}$ は実数の集合を表す
  - 上記の行列Aはm行n列を持つ.
    このサイズを持つ行列は $m \times n$ 行列と呼ばれ, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ と表現されることも多い

1.2 行列の演算

- 次の二つの行列AとBを考える

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{k\ell} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$$

- 加算

$m = k$ かつ $n = \ell$ のとき,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

- 乗算

$n = k$ のとき,

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j\ell} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

1.3 行列とスカラー

- 行列とは何だろう？　何のために使うことができるのだろう？
- この疑問への答えを見つけるために, まず, 行列とスカラーを比べてみる

1.3 行列とスカラー

スカラー

$$a \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^{1\times 1}$$

1×1 行列

サイズを拡大

行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$m \times n$ 行列

行列はスカラーの拡張（サイズを拡大したもの）とみなすことができる.

行列とスカラーの間の類似点，相違点は何だろうか？

1.3 行列とスカラー

- 二つのスカラーa, bの加算, 乗算と, 二つの行列

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

の加算, 乗算

演算	スカラー	行列
加算	$a+b$	$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$
	自然な拡張	
乗算	ab	$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$
	自然でない拡張	

$$AB \neq \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

なぜ？

1.4 算数の問題

- 行列とその乗算の使い方について直観的に理解するために, いくつかの算数の問題を考えてみる

- 算数の問題
  - Q1: あなたは鉛筆を5本買います. 鉛筆は1本50円です. 全部でいくらになるでしょう?
  - A1: $50\ (\mathrm{yen}) \times 5\ (\mathrm{pencils}) = 250\ (\mathrm{yen})$

少し一般化

$y = ax$ ここで a: 鉛筆1本の値段
x: あなたが買う鉛筆の本数
y: 合計支払金額

スカラーxからスカラyへの**写像**

(数学では英語表記は通常mapであるが, 応用分野ではmapping が使われることが多い)

1.4 算数の問題

- 少し複雑にした問題（二人が二種類の商品を別の店で買う）
  - Q2: あなたとあなたの妹は, それぞれ鉛筆5本とノート2冊を買います.
    あなたはA店で買います. A店では鉛筆は1本50円, ノートは1冊200円です.
    妹はB店で買います. B店では鉛筆1本60円, ノート1冊180円で売っています.
    あなたと妹はそれぞれいくら払うでしょう？　また, 二人合計でいくら払うでしょう？

1.4 算数の問題

– A2: あなた: $50 \times 5 + 200 \times 2 = 650$
妹: $60 \times 5 + 180 \times 2 = 660$
合計: $650 + 660 = 1310$

少し一般化

$$y = y_1 + y_2$$
$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

ただし a_{11} : A店での鉛筆1本の値段
a_{12} : A店でのノート1冊の値段
a_{21} : B店での鉛筆1本の値段
a_{22} : B店でのノート1冊の値段
x_1 : 各自が買う鉛筆の本数
x_2 : 各自が買うノートの冊数
y_1 : あなたの支払い金額
y_2 : 妹の支払い金額
y : 二人の支払い総額

1.4 算数の問題

- 次の関係を

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Q1で使った

$$y = ax$$

と類似の形式で表すことができるだろうか？

以下のように可能

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

あるいは

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

ベクトル$\boldsymbol{x}$からベクトル$\boldsymbol{y}$への写像

行列とベクトルの**乗算**はベクトルからベクトルへの写像を簡潔かつ美しく表現することができる！

1.4 算数の問題

- さらに鉛筆とノートを買ったら...
  - 二人は既に $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ だけ買っていて, 以下の額を払っている

$$\boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 50 & 200 \\ 60 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 650 \\ 660 \end{bmatrix}$$

  - 上記に加えてさらに $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ だけ買ったら, 支払い金額は次のようになる

$$\boldsymbol{y}_2 = A\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 50 & 200 \\ 60 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \end{bmatrix}$$

  - 合計の支払い金額は以下の通り

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 &= A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 50 & 200 \\ 60 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & 200 \\ 60 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 200 \\ 60 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} 950 \\ 960 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

線形性（重ねの理）!

1.4 算数の問題

- 単一の行列とベクトルの乗算の定義は少し奇妙
  - でも写像を簡潔に美しく表現できる
- 複数の行列の乗算はどこに登場するだろうか？

1.4 算数の問題

- 別の算数の問題（割引）
  - Q1'': あなたは鉛筆を5本買います. 通常は1本50円ですが, 今日は20%引きです. いくらを払えばよいでしょうか？
  - A1'': $5 \text{ (pencils)} \times 50 \text{ (yen)} = 250 \text{ (yen)}$
    $250 \text{ (yen)} \times 0.8 = 200 \text{ (yen)}$
    あるいは, 等価な表現として
    $5 \text{ (pencils)} \times 50 \text{ (yen)} \times 0.8 = 200 \text{ (yen)}$

少し一般化

$$y = ba x \tag{1.1}$$

乗算!

ただし a: 鉛筆の値段
b: 割引価格率 = 1 – 割引率
x: 買う鉛筆の本数
y: 支払金額

1.4 算数の問題

- A店とB店で割引率が違う場合
  - Q2'': 状況は, あなたと妹がそれぞれ鉛筆5本とノート2冊を買ったQ2と似ています.
    ただ, あなたが買い物をするA店は10%引きなのに, 妹が買い物をするB店では20%引きになっています.
    あなたと妹それぞれいくら支払うことになるでしょうか. また二人の合計の支払い金額はいくらになるでしょうか？

1.4 算数の問題

– A2'': あなた: $50 \times 0.9 \times 5 + 200 \times 0.9 \times 2 = 585$
妹: $60 \times 0.8 \times 5 + 180 \times 0.8 \times 2 = 528$
合計: $585 + 528 = 1113$

⇩ 少し一般化

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 a_{11} & b_1 a_{12} \\ b_2 a_{21} & b_2 a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = BA\boldsymbol{x}$$

乗算!

ここで
a_{11}: A店での鉛筆通常価格
a_{12}: A店でのノート通常価格
a_{21}: B店での鉛筆通常価格
a_{22}: B店でのノート通常価格
b_1: A店での割引価格率
b_2: B店での割引価格率
x_1: 各人の鉛筆購入本数
x_2: 各人のノート購入冊数
y_1: あなたの支払金額
y_2: 妹の支払金額
y: 二人の合計支払金額

1.4 算数の問題

- A1'' と A2'' における乗算の役割

A1''

$y = bax$
乗算

$\Updownarrow$ 等価

η : 割引前の支払金額

$\eta = ax$: x から η への写像
と
$y = b\eta$: η から y への写像

スカラー x からスカラー y への合成写像

A2''

$\boldsymbol{y} = BA\boldsymbol{x}$
乗算

$\Updownarrow$ 等価

$\boldsymbol{\eta}$: 割引前の支払金額

$\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{\eta}$ への写像
と
$\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{\eta}$: $\boldsymbol{\eta}$ から $\boldsymbol{y}$ への写像

ベクトル $\boldsymbol{x}$ からベクトル $\boldsymbol{y}$ への合成写像

1.4 算数の問題

- 行列とベクトルの乗算は写像を表す.
  この写像は線形性を持つ
- 二つの行列の乗算は合成写像を表す

⇓

行列は写像および線形性と密接に関係している.

1.4 算数の問題

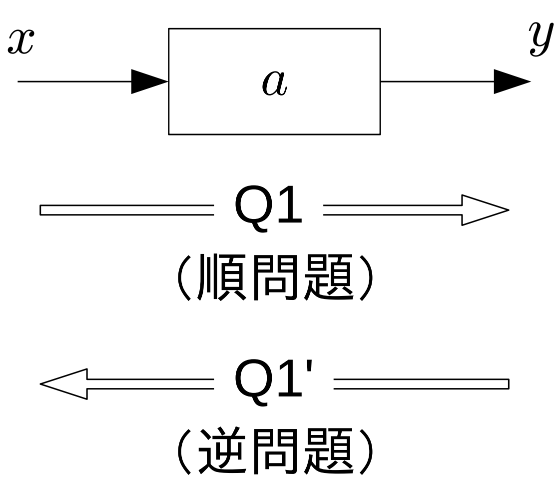
- また別の算数の問題（逆問題）
  - Q1': ある文具店では鉛筆を1本50円で売っています. あなたは何本かの鉛筆を買って250円払いました. あなたは何本の鉛筆を買ったのでしょうか？
  - A1': $250\ (\mathrm{yen})/50\ (\mathrm{yes}) = 5\ (\mathrm{pencils})$

少し一般化

$x = y/a$ ただし a: 鉛筆の値段
x: あなたが買った鉛筆の本数
y: あなたの支払金額

1.4 算数の問題

- 問題 Q1
  - a と x の値を知って, $y = ax$ を満たす y の値を求める
  - 解: $y = ax$
- 問題 Q1'
  - a と y の値を知って, $y = ax$ を満たす x の値を求める
  - 解: $x = y/a$ 除算



a, x および y の間の関係は
乗算 $y = ax$ によって表される

定数／係数
（鉛筆の値段）

変数
（買った鉛筆の本数）

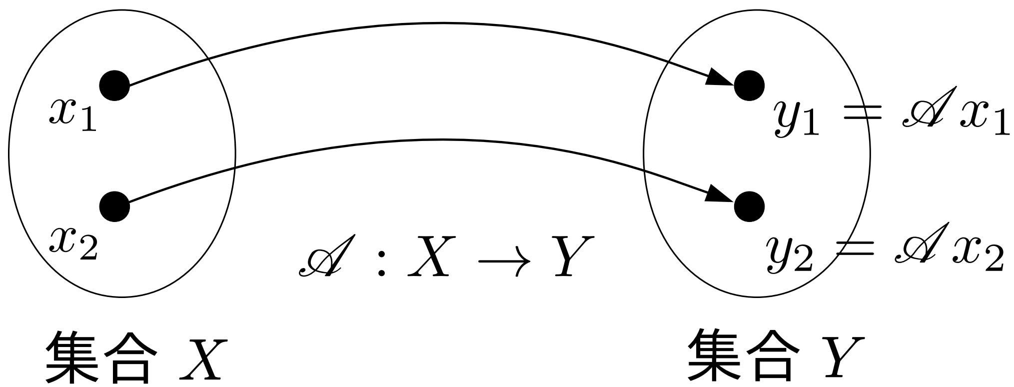
行列による除算はいつ, どのように定義できるだろうか？

1.4 算数の問題

- 行列は写像と線形性に密接に関連していることを見出した
- そこで, 線形性と写像に目を向けてみよう
- その後, 行列の乗算と行列による除算に話を戻すことにする

2. 線形性
2.1 線形性

- **重ねの理**がなりたつ
  - 線形写像, 線形変換, 線形関数, 線形作用素 $\mathscr{A}$



$$\mathscr{A}\text{が線形である} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathscr{A}(x_1 + x_2) = \mathscr{A} x_1 + \mathscr{A} x_2 \\ \mathscr{A}(c_1 x_1) = c_1(\mathscr{A} x_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{A}(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1(\mathscr{A} x_1) + c_2(\mathscr{A} x_2) \qquad (2.1)$$

c_1, c_2 : 定数

(ここでは, $c_1 x_1 + c_2 x_2 \in X$と$c_1(\mathscr{A} x_1) + c_2(\mathscr{A} x_2) \in Y$を仮定している. これについては後に議論する.)

例: $\mathscr{A} = 2\times, \text{ i.e., } y = 2 \times x = 2x$

2.1 線形性

– 方程式の線形性

線形方程式: 未知変数が1次の項としてのみ現れる.

$$ax + by = r \quad \text{or} \quad [a \ b]\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{未知変数}} = r$$

$$a(t)\frac{d}{dt}x(t) + b(t)x(t) = f(t) \quad \text{or} \quad [a(t) \ b(t)]\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ x(t) \end{bmatrix}}_{\text{未知変数}} = f(t)$$

2.1 線形性

– 線形方程式における重ねの理

$\mathscr{A}$を既知項から解への写像とする.

$$[a\ b]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{r}_{\text{既知項}} \qquad \text{に対して } \mathscr{A} : r \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{と定義する}$$

以下のようにおく $\mathscr{A} r_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, i.e. $[a\ b]\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = r_1$

$$\mathscr{A} r_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ i.e. } [a\ b]\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = r_2$$

このとき

$$[a\ b]\left(c_1\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = c_1[a\ b]\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + c_2[a\ b]\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 r_1 + c_2 r_2$$

すなわち

$$\mathscr{A}(c_1 r_1 + c_2 r_2) = c_1(\mathscr{A} r_1) + c_2(\mathscr{A} r_2).$$

2.1 線形性

$$\begin{bmatrix} a(t) & b(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \underbrace{f(t)}_{\text{既知項}}$$ に対しては $\mathscr{A} : f \mapsto x$ と定義すればよい

例

微分方程式 $x(t) + \dfrac{d}{dt}x(t) = \sin t$ はどうやって解く?

2.1 線形性

- 線形写像・作用素と非線形写像・作用素の例

$$\mathscr{A}x = \frac{d}{dt}x$$

$$\mathscr{A}(c_1x_1 + c_2x_2) = \frac{d}{dt}(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1\frac{dx_1}{dt} + c_2\frac{dx_2}{dt}$$

線形

$$\mathscr{A}x = x^2$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(c_1x_1 + c_2x_2) &= (c_1x_1 + c_2x_2)^2 \\ &= {c_1}^2{x_1}^2 + 2c_1c_2x_1x_2 + {c_2}^2{x_2}^2 \\ &\neq c_1{x_1}^2 + c_2{x_2}^2\end{aligned}$$

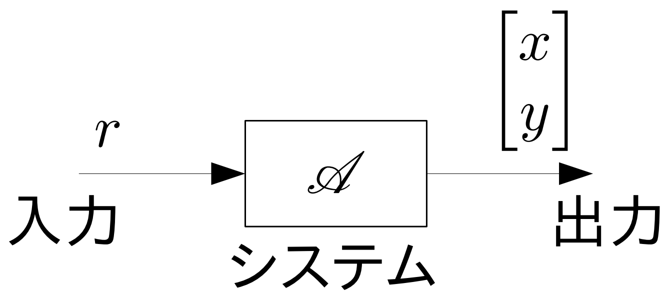
非線形

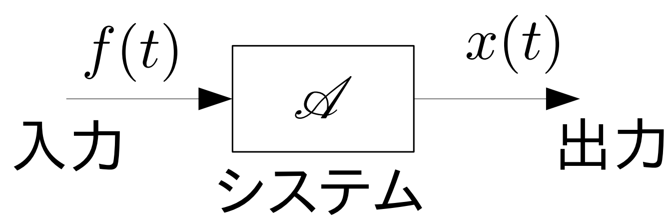
2.2 線形システム

次の線形方程式

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \quad \text{および} \quad \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = f(t)$$

において, 既知項 (rおよび$f(t)$) は**入力**, 解 (x, yおよび$x(t)$) は対応する**出力**とみなすことができる.





- 線形システム
  - 入力と出力の間に重ねの理がなりたつ

2.3 線形空間

- 線形空間
  - F を定数の集合とする. Fは加減乗除について閉じており,
    零元0と, $\left(c+0=0+c=c \text{ for } c\in F \right)$
    乗法単位元1 $\left(c\cdot 1=1\cdot c=c \text{ for } c\in F \right)$
    を持っているものとする
    F は体と呼ばれる
  - Xを, その任意の2要素の間に和が定義され, Xの任意の要素とFの任意の要素に積が定義されている集合とする
  - もし, $\forall x_1\in X, \forall x_2\in X$ と $\forall c_1\in F, \forall c_2\in F$ に対して,
    $c_1x_1+c_2x_2\in X$ がなりたつとき, (F,X) は**線形空間**であると言う.
    あるいは, XはF 上の線形空間であると言う

Fの要素は**スカラー**, Xの要素は**ベクトル**と呼ばれる

2.3 線形空間

- 25ページで線形性を定義したとき,

  $$c_1 x_1 + c_2 x_2$$

  がX中に存在することを仮定していた
- 線形空間では $c_1 x_1 + c_2 x_2$ は常に存在する

⇓

線形空間は, 線形写像や線形方程式を定義する基礎である.

2.3 線形空間

- 線形空間の例
  - $F:\mathbb{R},\quad X:\mathbb{R}^n$　　　　$\mathbb{R}$: 実数の集合

    $\boldsymbol{x}\in X$ はn個の要素を持つベクトル

    F は零元0,を持ち，したがって，Xも零元（零ベクトル）$\mathbf{0}$を持つ

    $\left(\boldsymbol{x}\in X \text{ に対して，} 0\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\in X\right)$

  - $F:\mathbb{R},\quad X$: tについての連続関数の集合

    Fは零元0,を持ち，したがって，Xも零元（常に値が0である関数）をもつ

線形空間には必ずそれ自身の零元が含まれる.

3. 写像
3.1 写像

- 写像

X, Y: 集合

写像 $\mathscr{A}$ は, Xの任意の要素 $x \in X$ にYのある要素$y \in Y$ を対応させる.

$$\mathscr{A} : x \mapsto y \ (y = \mathscr{A}x), \quad \mathscr{A} : X \to Y$$

$\mathscr{A}$: 写像, 変換. 特に$Y = \mathbb{R}$ の時は関数

X: $\mathscr{A}$ の定義域

$\mathscr{A}(X)$ (or $\mathscr{R}(\mathscr{A})$) $= \{y | y = \mathscr{A}x, x \in X\}$: $\mathscr{A}$ の値域