Ekonometria Finansowa

Jednowymiarowe modele szeregów czasowych

mgr Paweł Jamer[1]

11 października 2015

[1] pawel.jamer@gmail.com

Biały szum

Biały szum

Białym szumem nazwiemy szereg czasowy ϵ_t niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie taki, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\epsilon_t\right) &= 0, \\ \mathrm{Var}\left(\epsilon_t\right) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Biały szum oznaczać będziemy symbolem $\mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right)$.

Uwaga Bardziej złożone modele szeregów czasowych wykorzystują biały szum do opisu niepewności pomiaru opisywanych przez nie wielkości.

Błądzenie losowe

Błądzenie losowe (bez dryftu)

Szereg czasowy p_t nazwiemy błądzeniem losowym bez dryftu, jeżeli spełnia on równanie

$$p_t = p_{t-1} + \epsilon_t,$$

gdzie

- ϵ_t — biały szum.

Uwaga. Uzupełniając powyższy wzór o niezerową stałą α

$$p_t = \alpha + p_{t-1} + \epsilon_t$$

uzyskujemy proces błądzenia losowego z dryftem.

Ceny instrumentów finansowych

Hipoteza

Cena instrumentu finansowego p_t jest błądzeniem losowym.

Rozważmy model

$$p_t = \alpha + \rho p_{t-1} + \epsilon_t.$$

Prawdziwość powyższej hipotezy jest równoznaczna z tym, że:

- $\hat{\rho}$ statystycznie nie różni się od jedności,
- ϵ_t jest białym szumem.

Ponadto, jeżeli na zadanym poziomie istotności zachodzi:

- $\hat{\alpha} = 0$, to p_t jest błądzeniem losowym bez dryfu,
- $\hat{\alpha} \neq 0$, to p_t jest błądzeniem losowym z dryfem.

Uwaga. Z powodu możliwej niestacjonarności p_t estymacja powyższego równania jest problematyczna.

Właściwości błądzenia losowego

Błądzenie losowe bez dryftu

$$p_t = p_{t-1} + \epsilon_t,$$

$$p_t = p_0 + \sum_{h=0}^{t} \epsilon_{t-h},$$

$$\mathbb{E}\left(p_t\right) = p_0,$$

$$\mathrm{Var}\left(p_t\right) = t\sigma^2_{\epsilon_t}.$$

Błądzenie losowe z dryftem

$$p_t = \alpha + p_{t-1} + \epsilon_t,$$

$$p_t = p_0 + t\alpha + \sum_{h=0}^{t} \epsilon_{t-h},$$

$$\mathbb{E}\left(p_t\right) = p_0 + t\alpha,$$

$$\mathrm{Var}\left(p_t\right) = t\sigma^2_{\epsilon_t}.$$

Stopy zwrotu instrumentów finansowych

Rozważmy model błądzenia losowego bez dryftu dla logarytmu cen pewnego instrumentu finansowego

$$\log(p_t) = \log(p_{t-1}) + \epsilon_t.$$

Model ten przekształcić możemy do postaci

$$r_t = \log\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) = \epsilon_t.$$

Uwaga. Badanie czy logarytm cen p_t instrumentu finansowego jest błądzeniem losowym sprowadza się do ustalenia, czy logarytmiczne stopy zwrotu r_t tego instrumentu są białym szumem.

Krytyka

Optymalna prognoza ceny instrumentu finansowego na okres przyszły, to przyjęcie ceny tego instrumentu z okresu bieżącego.

Nie uwzględnia się rentowności zależnej od ryzyka.

Proces MA

Zdefiniujmy operator

$$\theta(B) = I + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q,$$

gdzie $q \in \mathbb{Z}_+$.

Proces MA

Słabo stacjonarny szereg czasowy X_t nazwiemy procesem MA (średniej ruchomej) rzędu q, jeżeli spełnia on równanie

$$X_t = \theta(B)\,\epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right)$.

Oznaczenie. Proces MA rzędu q oznacza się symbolem $\mathrm{MA}(q)$.

Proces AR

Zdefiniujmy operator

$$\varphi(B) = I - \varphi_1 B - \ldots - \varphi_p B^p,$$

gdzie $p \in \mathbb{Z}_+$.

Proces AR

Słabo stacjonarny szereg czasowy X_t nazwiemy procesem AR (autoregresyjnym) rzędu p, jeżeli spełnia on równanie

$$\varphi(B) X_t = \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

Oznaczenie. Proces AR rzędu p oznacza się symbolem $\mathrm{AR}(p)$.

Proces ARMA

Proces ARMA

Słabo stacjonarny szereg czasowy X_t nazwiemy procesem ARMA (p, q) , jeżeli spełnia on równanie

$$\varphi(B) X_t = \theta(B) \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

Proces ARIMA

Proces ARIMA

Szereg czasowy X_t nazwiemy procesem ARIMA (p, d, q) , jeżeli szereg czasowy $\Delta^d X_t$ jest procesem ARMA (p, q) .

Bezpośrednio z powyższej definicji wynika, że proces ARIMA (p, d, q) charakteryzuje następujące równanie:

$$\varphi(B)\left(\Delta^d X_t\right) = \theta(B)\,\epsilon_t.$$

Proces SARIMA

Proces ARIMA

Szereg czasowy X_t nazwiemy procesem ARIMA (p, d, q) , jeżeli szereg czasowy $\Delta^d X_t$ jest procesem ARMA (p, q) .

Bezpośrednio z powyższej definicji wynika, że proces ARIMA (p, d, q) charakteryzuje następujące równanie:

$$\varphi(B)\left(\Delta^d X_t\right) = \theta(B)\,\epsilon_t.$$

Multiplikatywny proces ARMA

Proces ARIMA

Szereg czasowy X_t nazwiemy procesem ARIMA (p, d, q) , jeżeli szereg czasowy $\Delta^d X_t$ jest procesem ARMA (p, q) .

Bezpośrednio z powyższej definicji wynika, że proces ARIMA (p, d, q) charakteryzuje następujące równanie:

$$\varphi(B)\left(\Delta^d X_t\right) = \theta(B)\,\epsilon_t.$$

Model ARCH

Model GARCH

Model GARCH-M

Model EGARCH

Model TGARCH

Definicja

Model korekty błędem (ECM)

$$\Delta y_t = \mu + \alpha \left(y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1} \right) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i \Delta x_{t-i} + \epsilon_t$$

Interpretacja:

- $y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}$ — równanie równowagi długookresowej,
- $y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1}$ — odchylenie od równowagi długookr.,
- α — współczynnik opisujący szybkość dostosowywania się zmiennej objaśnianej do poziomu równowagi długookresowej (w stabilnym modelu $\alpha < 0$).
- θ_i, γ_i — współczynniki opisujące dynamikę krótkookresową.

Stosowalność

Uwaga. Twierdzenie Grangera o reprezentacji gwarantuje nam możliwość zastosowania mechanizmu korekty błędem względem skointegrowanych szeregów czasowych.

Estymacja

1. Estymacja parametrów równania równowagi długookresowej

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}.$$

2. Skonstruowanie szeregów czasowych

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t, \\ \Delta x_t &= x_t - x_{t-1}, \\ \Delta y_t &= y_t - y_{t-1}. \end{aligned}$$

3. Estymacja parametrów równania modelu korekty błędem

$$\Delta y_t = \mu + \alpha \epsilon_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i \Delta x_{t-i} + \epsilon_t$$

Pytania?

Dziękuję za uwagę!