

Ekonometria Finansowa

Jednowymiarowe modele szeregów czasowych

mgr Paweł Jamer¹

11 października 2015

¹pawel.jamer@gmail.com

Biały szum

Biały szum

Białym szumem nazwiemy szereg czasowy ϵ_t niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie taki, że

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\epsilon_t) &= 0, \\ \text{Var}(\epsilon_t) &= \sigma^2.\end{aligned}$$

Biały szum oznaczać będziemy symbolem $\text{WN}(0, \sigma^2)$.

Uwaga Bardziej złożone modele szeregów czasowych wykorzystują biały szum do opisu niepewności pomiaru opisywanych przez nie wielkości.

Błądzenie losowe

Błądzenie losowe (bez dryftu)

Szereg czasowy p_t nazwiemy błądzeniem losowym bez dryftu, jeżeli spełnia on równanie

$$p_t = p_{t-1} + \epsilon_t,$$

gdzie

- ϵ_t — biały szum.

Uwaga. Uzupełniając powyższy wzór o niezerową stałą α

$$p_t = \alpha + p_{t-1} + \epsilon_t$$

uzyskujemy proces błądzenia losowego z dryftem.

Ceny instrumentów finansowych

Hipoteza

Cena instrumentu finansowego p_t jest błądzeniem losowym.

Rozważmy model

$$p_t = \alpha + \rho p_{t-1} + \epsilon_t.$$

Prawdziwość powyższej hipotezy jest równoznaczna z tym, że:

- $\hat{\rho}$ statystycznie nie różni się od jedności,
- ϵ_t jest białym szumem.

Ponadto, jeżeli na zadanym poziomie istotności zachodzi:

- $\hat{\alpha} = 0$, to p_t jest błądzeniem losowym bez dryfu,
- $\hat{\alpha} \neq 0$, to p_t jest błądzeniem losowym z dryfem.

Uwaga. Z powodu możliwej niestacjonarności p_t estymacja powyższego równania jest problematyczna.

Właściwości błędzenia losowego

Błądzenie losowe bez dryftu

$$p_t = p_{t-1} + \epsilon_t,$$

$$p_t = p_0 + \sum_{h=0}^t \epsilon_{t-h},$$

$$\mathbb{E}(p_t) = p_0,$$

$$\text{Var}(p_t) = t\sigma_{\epsilon_t}^2.$$

Błądzenie losowe z dryftem

$$p_t = \alpha + p_{t-1} + \epsilon_t,$$

$$p_t = p_0 + t\alpha + \sum_{h=0}^t \epsilon_{t-h},$$

$$\mathbb{E}(p_t) = p_0 + t\alpha,$$

$$\text{Var}(p_t) = t\sigma_{\epsilon_t}^2.$$

Stopy zwrotu instrumentów finansowych

Rozważmy model błędzenia losowego bez dryftu dla logarytmu cen pewnego instrumentu finansowego

$$\log(p_t) = \log(p_{t-1}) + \epsilon_t.$$

Model ten przekształcić możemy do postaci

$$r_t = \log\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) = \epsilon_t.$$

Uwaga. Badanie czy logarytm cen p_t instrumentu finansowego jest błędzeniem losowym sprowadza się do ustalenia, czy logarytmiczne stopy zwrotu r_t tego instrumentu są białym szumem.

Krytyka

Optymalna prognoza ceny instrumentu finansowego na okres przyszły, to przyjęcie ceny tego instrumentu z okresu bieżącego.

Nie uwzględnia się rentowności zależnej od ryzyka.

Proces AR

Zdefiniujmy operator

$$\varphi(B) = I - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p,$$

gdzie $p \in \mathbb{Z}_+$.

Proces AR

Słabo stacjonarny szereg czasowy X_t nazwiemy procesem AR (autoregresyjnym) rzędu p , jeżeli spełnia on równanie

$$\varphi(B) X_t = \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

Oznaczenie. Proces AR rzędu p oznacza się symbolem $\text{AR}(p)$.

Proces MA

Zdefiniujmy operator

$$\theta(B) = I + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q,$$

gdzie $q \in \mathbb{Z}_+$.

Proces MA

Słabo stacjonarny szereg czasowy X_t nazwiemy procesem MA (średniej ruchomej) rzędu q , jeżeli spełnia on równanie

$$X_t = \theta(B) \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

Oznaczenie. Proces MA rzędu q oznacza się symbolem $\text{MA}(q)$.

Proces ARMA

Definicja

Proces ARMA

Słabo stacjonarny szereg czasowy X_t nazwiemy procesem ARMA (p, q) , jeżeli spełnia on równanie

$$\varphi(B) X_t = \theta(B) \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

Proces ARMA

Estymowanie funkcji autokorelacji (ACF)

Estymator funkcji autokorelacji

Jako estymator funkcji autokorelacji procesu X_t możemy przyjąć

$$\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h}^T (X_t - \bar{X}) (X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}$$

Proces ARMA

Estymowanie funkcji autokorelacji częściowej (PACF)

Estymator funkcji autokorelacji częściowej

Jako estymator funkcji autokorelacji częściowej procesu X_t możemy przyjąć

$$\alpha_0 = 1,$$

$$\alpha_1 = \phi_{1,1} = \hat{\rho}_1,$$

$$\alpha_h = \phi_{h,h} = \frac{\hat{\rho}_h - \sum_{j=1}^{h-1} \phi_{h-1,j} \hat{\rho}_{h-j}}{1 - \sum_{j=1}^{h-1} \phi_{h-1,j} \hat{\rho}_j}, h = 2, 3, \dots,$$

gdzie $\phi_{i,j}$ to rozwiązania układu Yule'a-Walkera.

Intuicja. Współczynnik autokorelacji częściowej mierzy korelację między zmiennymi X_t oraz X_{t-h} po eliminacji wpływu zmiennych pośrednich.

Proces ARMA

Identyfikacja na podstawie ACF oraz PACF

- Jeżeli proces jest typu $AR(p)$, to funkcja autokorelacji powoli maleje, natomiast funkcja autokorelacji częściowej staje się statystycznie równa zero od wartości $p + 1$.
- Jeżeli proces jest typu $MA(q)$, to funkcja autokorelacji staje się statystycznie równa zero od wartości $q + 1$, natomiast funkcja autokorelacji częściowej powoli maleje.
- Jeżeli proces jest typu $ARMA(p, q)$, to funkcja autokorelacji oraz funkcja autokorelacji częściowej łagodnie zanikają.

Proces ARMA

Identyfikacja na podstawie kryteriów informacyjnych

Idea

Należy oszacować modele ARMA (p, q) dla wszystkich możliwych kombinacji parametrów $p = 1, 2, \dots, P$ oraz $q = 1, 2, \dots, Q$, a następnie obliczyć dla nich wartości wybranego kryterium informacyjnego. Minimalna wartość kryterium wyznacza optymalną parę parametrów p i q .

Proces ARMA

Kryteria informacyjne

Niech $L_{p,q}$ oznacza wiarygodność modelu ARMA (p, q) .

Kryterium informacyjne Akaike (AIC)

$$\text{AIC}_{p,q} = -2 \ln L_{p,q} + 2(p + q + 1)$$

Bayesowskie kryterium informacyjne (BIC)

$$\text{BIC}_{p,q} = -2 \ln L_{p,q} + (p + q + 1) \ln T$$

Proces ARMA

Podział metod estymacji

Metody estymacji:

- Metody estymacji parametrów modelu AR (p) :
 - równania Yule'a-Walkera,
 - metoda najmniejszych kwadratów,
 - metoda największej wiarygodności.
- Metody estymacji parametrów modelu ARMA (p, q) :
 - metoda największej wiarygodności.

Proces ARMA

Idea metod estymacji

Równania Yule'a-Walkera

Równania Yule'a-Walkera to liniowy układ równań pozwalający na wyrażenie parametrów autoregresji za pomocą współczynników autokorelacji. Oszacowania parametrów modelu $AR(p)$ otrzymujemy zastępując we wspomnianym układzie współczynniki autokorelacji ich estymatorami, a następnie rozwiązując układ.

Metoda najmniejszych kwadratów

Wykorzystanie klasycznej MNK do stacjonarnego szeregu czasowego typu $AR(p)$. Uzysane w ten sposób estymatory będą zgodne z estymatorami metody największej wiarygodności.

Metoda największej wiarygodności

Metoda polegająca na maksymalizacji funkcji największej wiarygodności procesu $ARMA(p, q)$.

Proces ARMA

Prognoza

Interesuje nas prognoza na h okresów w przód:

$$X_{t+h} = \sum_{k=1}^p \rho_k X_{t+h-k} + \sum_{k=0}^q \theta_k \epsilon_{t-k},$$

gdzie $\theta_0 = 0$.

Możemy wyrazić ją jako warunkową wartość oczekiwaną:

$$\begin{aligned}\hat{X}_t(h) &= \mathbb{E}(X_{t+h} \mid X_t, X_{t-1}, \dots), \\ \mathbb{E}(X_{t+j} \mid X_t, X_{t-1}, \dots) &= \begin{cases} X_{t+j}, & j \leq 0, \\ \hat{X}_t(j), & j > 0, \end{cases} \\ \mathbb{E}(\epsilon_{t+j} \mid \epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \dots) &= \begin{cases} \epsilon_{t+j}, & j \leq 0, \\ 0, & j > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Proces ARIMA

Proces ARIMA

Szereg czasowy X_t nazwiemy procesem ARIMA (p, d, q) , jeżeli szereg czasowy $\Delta^d X_t$ jest procesem ARMA (p, q) .

Z powyższej definicji wynika, że proces ARIMA (p, d, q) jest opisywany przez następujące równanie:

$$\varphi(B) (\Delta^d X_t) = \theta(B) \epsilon_t.$$

Multiplikatywny proces ARMA

Intuicja

Niech proces X_t charakteryzuje równanie

$$\varphi_X(B) X_t = \theta_X(B) \epsilon_t,$$

natomiast proces ϵ_t równanie

$$\varphi_\epsilon(B) \epsilon_t = \theta_\epsilon(B) \eta_t,$$

gdzie $\eta_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$. Składając powyższe równania uzyskujemy

$$\varphi_\epsilon(B) \varphi_X(B) X_t = \theta_X(B) \theta_\epsilon(B) \eta_t.$$

Uwaga. Powyższe złożenie dwóch procesów ARMA pozostaje nadal procesem ARMA.

Multiplikatywny proces ARMA

Definicja

Multiplikatywny proces ARMA

Szereg czasowy X_t nazwiemy multiplikatywnym procesem $\text{ARMA}(p, q) \times (P, Q)_s$, jeżeli spełnia on równanie

$$\Phi(B^s)X_t = \Theta(B^s)\epsilon_t,$$

gdzie

- Φ — operator analogiczny do φ rzędu P ,
- Θ — operator analogiczny do θ rzędu Q ,
- ϵ_t — proces $\text{ARMA}(p, q)$.

Multiplikatywny proces ARMA

Właściwości

Reprezentacja. Proces $\text{ARMA}(p, q) \times (P, Q)_s$ jest specyficznym przypadkiem procesu $\text{ARMA}(p + sP, q + sQ)$.

Estymacja. Estymacja parametrów multiplikatywnych procesów ARMA odbywa się przez osobną estymację parametrów każdego z procesów ARMA wchodzących w jego skład.

Sezonowy proces ARIMA

Sezonowy proces ARIMA

Szereg czasowy X_t nazwiemy sezonowym procesem ARIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, jeżeli spełnia on równanie

$$\Phi(B^s)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^dX_t = \Theta(B^s)\theta(B)\epsilon_t,$$

gdzie

- ϵ_t — biały szum,
- $\Delta_s^D\Delta^dX_t$ — proces stacjonarny.

Model ARCH

Model GARCH

Model GARCH-M

Model EGARCH

Model TGARCH

Definicja

Model korekty błędem (ECM)

$$\Delta y_t = \mu + \alpha (y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1}) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i \Delta x_{t-i} + \epsilon_t$$

Interpretacja:

- $y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}$ — równanie równowagi długookresowej,
- $y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1}$ — odchylenie od równowagi długookr.,
- α — współczynnik opisujący szybkość dostosowywania się zmiennej objaśnianej do poziomu równowagi długookresowej (w stabilnym modelu $\alpha < 0$).
- θ_i, γ_i — współczynniki opisujące dynamikę krótkookresową.

Stosowalność

Uwaga. Twierdzenie Grangera o reprezentacji gwarantuje nam możliwość zastosowania mechanizmu korekty błędem względem skointegrowanych szeregów czasowych.

Estymacja

- 1 Estymacja parametrów równania równowagi długookresowej

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}.$$

- 2 Skonstruowanie szeregów czasowych

$$\epsilon_t = y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t,$$

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1},$$

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}.$$

- 3 Estymacja parametrów równania modelu korekty błędem

$$\Delta y_t = \mu + \alpha \epsilon_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i \Delta x_{t-i} + \epsilon_t$$

Pytania?

Dziękuję za uwagę!