GEMA1001 Week 5 Tutorial

HuNianlan

Note：10.24 quiz 1

- 45min
- 3道题
- 难度相当于考试中的第一、二道大题

Contents

Review

- 上（下）确界
- 数列及其单调性、有界性
- 数列的极限
- 极限证明技巧举例
- 数列极限的性质及运算法则
- 单调有界数列极限存在准则
- 区间套定理与凝聚定理
- 极限计算举例

定义 1.1 我们说一个集合 E 是 *数集* 如果它是 $\mathbb{R}$ 中的子集.

定义 1.2 给定一个非空集合 $E \subseteq \mathbb{R}$

1. 如 $\exists M \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall x \in E$，有 $x \leq M$，则称 E 是有 *上界的*（*bounded above*），且称 M 是 E 的一个 *上界*（*upper bound*）；
2. 如 $\exists m \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall x \in E$，有 $x \geq m$，则称 E 是有 *下界的*（*lower bounded*），且称 m 是 E 的一个 *下界*（*lower bound*）；
3. 若 E 同时有上界和下界，则称 E 为 *有界*（*bounded*），反之，则称 E 是 *无界*（*unbounded*）的. 换言之，$\exists \overline{M} > 0$，使得 $\forall x \in E$，有 $|x| \leq \overline{M}$，此时称 $\overline{M}$ 为数集 E 的一个 *界*（*bound*）.

定义 1.3 给定非空数集 $E \subseteq \mathbb{R}$，若 $\exists \beta \in \mathbb{R}$ 满足

1. $\forall x \in E$，有 $x \leq \beta$，即 β 是 E 的一个 *上界*;
2. $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E$，使得 $x_\epsilon > \beta - \epsilon$，即 β 是 E 所有上界中最小的一个上界.

则称 β 是 E 的 *上确界*（*supremum*），记为 $\beta = \sup E$.

定义 1.3$'$ 若非空数集 E 有下界，则其下界 $\alpha \in \mathbb{R}$ 称为 E 的 *下确界* 当且仅当任何大于 α 的数不再是 E 的下界，即 $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E$，使得 $x_\epsilon < \alpha + \epsilon$. 记为 $\alpha = \inf E$.

定义 2.1 一个*数列*（*sequence*）$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是正整数集 $\mathbb{Z}_{>0}$ 上的函数，即映射

[

\mathbb{Z}*{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R} \quad n \longmapsto x*{n}

]

其中 x_n 称为该数列的 *通项或一般项*（*general term*）. 在这个数列中，第一项是 x_1，第二项是 x_2，$\cdots$，第 n 项是 x_n 等等. 常将 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 简写为 $\{x_n\}$.

有时，我们也考虑 *常数列*（*constant sequence*），即每一项都是常数 C 的数列.

定义 2.2 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $\forall\, n$，有 $x_{n+1} \geq x_n$（或 $x_{n+1} > x_n$），则称 $\{x_n\}$ 是 *单调增加（严格单调增加）数列*；反之，若 $\forall n$，有 $x_{n+1} \leq x_n$（或 $x_{n+1} < x_n$），则称 $\{x_n\}$ 是 *单调减少（严格单调减少）数列.*

定义 2.3 若数列 $\{x_n\}$ 满足：$\exists M > 0$ 使得 $\forall n$，都有 $|x_n| \le M$，则称 $\{x_n\}$ 是 *有界数列*. 类似地，可给出 *上（下）界* 的定义.

定义 3.1 对数列 $\{x_n\}$，若 $\exists$ 数 A，$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$，则称 $\{x_n\}$ 的 *极限*（limit）为 A，或称数列 $\{x_n\}$ *收敛*（convergent）, 且 *收敛于*（convergent to） A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$（或者 $x_n \to A\,(n \to \infty)$）. 若不存在这样的常数 A，则称数列 $\{x_n\}$无极限，也称其 *发散*（divergent）或不收敛.

定义 3.2 极限为 0 的数列 $\{x_n\}$ 称为 *无穷小量*（infinitesimal），简称 x_n 为 *无穷小*（infinite small）．

定义 3.3 对数列 $\{x_n\}$，若 $\forall G > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时，$|x_n| > G$，则称 $\{x_n\}$ 是 *无穷大量*，简称 x_n 为 *无穷大*，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty.$

定义 6.1 设 $\{n_1, n_2, \cdots\}$ 是正整数集的一个无穷子集，且 $n_{k+1} > n_k, k = 1, 2, \cdots$，则数列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个 *子数列（sub-sequence）*，简称 *子列*.

定义 7.1 一列 **闭** 区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 称为是一个 *闭区间套*，如果

1. $[a_{n+1},\, b_{n+1}] \subseteq [a_n,\, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \cdots$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.