

作业 一

1. 写出命题 $p \iff q$ 的真值表, 其中 p, q 为任意命题.

2. 利用真值表, 证明德摩根律

$$\begin{cases} \neg(p \vee q) & \iff & \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) & \iff & \neg p \vee \neg q \end{cases}$$

3. 用逻辑符号 (\forall, \exists 等) 严格写出下面命题, 并写出其否定形式.

(a) 非空数集 X 的最小值是 m .

(b) f 是区间 (a, b) 上的单调增函数.

(c) f 是区间 (a, b) 上的单调函数.

(d) $A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\} \neq \emptyset$

4. 若 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是线性映射, 证明 T 是单射当且仅当: 若 $T(x) = 0$, 则 $x = 0$.

5. 若 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是线性映射, 证明 T 是单射当且仅当 T 是满射.

6. 对映射 T 及其逆映射 T^{-1} , 证明有 $T \circ T^{-1} = I|_{R(T)}$; $T^{-1} \circ T = I|_{D(T)}$, 其中 I 代表恒等映射, 即满足 $I(x) = x$ 的映射.

7. 迪利克雷 (Dirichlet) 函数定义为: $D(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 、迪利克雷函数是否为周期函数? 如果是, 其最小正周期是否存在?

8. 利用欧拉公式证明三角函数的加法公式.

9. 验证 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 和 $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

10. 写出尖点曲线 $y^2 = x^3$ 的一个参数方程描述.

11. 不用导数的定义, 求三次曲线 $y = x^3 + 2x + 3$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

12. 将下列隐函数方程曲线转化为参数方程曲线, 并指出参数的变化范围.

$$a) \quad 4x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0; \quad b) \quad e^y + y^3 + 2x = 1$$

13. 将下列曲线方程转化为极坐标方程, 并指出 θ 的变化范围.

$$a) \quad x^2 - y^2 = 1; \quad b) \quad (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = x^2 - y^2$$

14. 绘制下列极坐标方程表示的曲线的图形.

$$a) \quad r = a\theta \ (a > 0); \quad b) \quad r = \tan \theta \sec \theta$$

15. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义, 把满足 $f(x^*) = x^*$ 的点 x^* 称为 $f(x)$ 的不动点. 证明: 若 $f(f(x))$ 有唯一不动点, 则 $f(x)$ 也有唯一不动点.