西安交通大学

数学实验报告

易拉罐尺寸的最优设计

Xi’an Jiaotong University

Report on Mathematical Experiments

The Optimum Design of

The Size of the Can

评分表:

班级	学号	姓名	班号	组号	任务	成绩
电类 938	2194323176	胡欣盈	7	52	模型的代码实现	
电类 937	2196123402	何佩阳			建立数学模型	
电类 935	2196123421	刘雪婷			撰写实验报告	

2020 年 7 月 15 日

易拉罐尺寸的最优设计

一、问题重述

1.1 问题背景

销量很大的饮料的饮料罐（即易拉罐）的形状和尺寸几乎都是一样的。生活中的易拉罐多为近似圆柱形，上面提到的常见尺寸应为圆柱形易拉罐的一种最优设计。对于单个的易拉罐来说，这种最优设计可以节省的资源可能很有限，但是如果是生产几亿，甚至几十亿、几万亿个易拉罐的话，可以节约的资源就很可观了。因此，研究不同形状下易拉罐的最优尺寸设计，从而达到用料最省的效果尤为关键。

1.2 目标任务

实验问题为：将双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$绕 y 轴旋转一周，制作一个外形相似于此旋转曲面的容积是 365 毫升的易拉罐，试确定易拉罐的各项尺寸大小及制作易拉罐的用料体积。问题要求在给定的形状下，通过分析计算得出使易拉罐用料最省的尺寸设计。

根据上述基本要求，需要解决以下问题：

（1）得出已知情况下的边界条件，以确定用料最省的尺寸设计；

（2）联系实际情况，对模型进行修正和改进。

二、模型假设

给出下面四条假设：

（1） 所取易拉罐各面的厚度均匀；

（2） 易拉罐的顶盖和下底盖都是规则的平面；

（3） 易拉罐侧面是光滑的曲面；

（4） 易拉罐采用同种材料制成。

三、符号说明

a	独立参数
b	
h_0	距xoy平面的距离
h	截取长度
S	表面积

四、问题分析

本题是一个基于现实需求的，具有较大应用价值的优化设计问题。问题要求我们使用已有的易拉罐形状，建立数学模型，对旋转得到的曲面作以分析，来计算符合最优设计的尺寸，并对所得结果进行描述。

五、模型的建立与求解

5.1 模型的整体分析

此模型是应用多元函数积分学与有限制条件的极值问题相关知识建立的，模型藉由给定的几何描述确定部分限制条件，并通过极值问题的一般方法进行求解，从而得出结论。

在多面体中，球体拥有单位表面积最大的空间利用率。同时，图形的对称性越高，对空间的利用性能就越好。在这种情况下，若 a、b 为变量，则图形会在优化过程中趋近于两条平行直线，在空间上表现为一圆柱，以实现在 h、h0 相对不变下尽可能较大的空间利用率。在本题的讨论中，我们将 a、b 固定，讨论 h0 与 h 的取值情况。

5.2 在三维坐标空间建立抽象模型

原双曲线为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

使用 Matlab 绘制其图象如下：

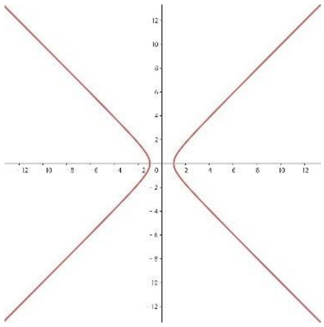

Fig1. 双曲线

按照题意旋转原双曲线后，得旋转双曲面如下：

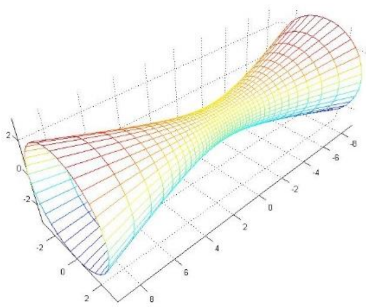

Fig2. 旋转双曲面

5.3 模型求解

利用多元函数积分学知识可求得该抽象模型的体积与表面积表达式。

5.3.1 体积的计算

利用三重积分。将被积函数取做 1，则三重积分的值即为曲面包围的体积。即：

$$V=\iiint dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2+z^2}}r\,dr\int_{h_0}^{h_0+h}dz=\pi\int_{h_0}^{h_0+h}\frac{a^2\pi}{b^2}(b^2+z^2)\,dz$$

5.3.2 表面积的计算

表面积的计算一般使用第一型面积分。可以看出，用上下两个底面分别截取，易拉罐总制造材料为两个圆盘和中间的回转体的表面积之和。通过三维解析式可以解出

$$z=\frac{b}{a}\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}$$

分别对 x、y 两个分量求导，知：

$$z_x = \frac{bx}{a\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$$

$$z_y = \frac{by}{a\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$$

则

$$ds = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}d\sigma = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)(a^2+b^2)-a^4}{a^2(x^2+y^2-a^2)}}d\sigma$$

易拉罐在 xOy 面上的投影为一圆环，且内环、外环半径可由

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

求得。

那么将第一型面积分转化为二重积分，有

$$\begin{aligned} S = S_{上、下} + \iint ds \\ &= \pi(R_1^2+R_2^2) \\ &+ \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{a\sqrt{b^2+h_0^2}}{b}}^{\frac{a\sqrt{b^2+(h+h_0)^2}}{b}} r * \sqrt{\frac{r^2(a^2+b^2)-a^4}{a^2(r^2-a^2)}}dr \end{aligned}$$

$$S(a,b,h,h_0) = b^2 * \frac{\pi(b^2+(h+h_0)^2)}{a^2} + 2\pi *$$

$$(\frac{a(h+h_0)}{2b(a^2+b^2)}\sqrt{\frac{a^2(h+h_0)^2}{b^2}+b^2+(h+h_0)^2}$$

$$+\frac{b^2}{4(a^2+b^2)}\ln\left(a^2b^2+2a^2(h+h_0)^2+\frac{2a^4(h+h_0)^2}{b^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2a^2(h+h_0)\sqrt{a^2+b^2}}{b}\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2}+b^2+(h+h_0)^2}\right)$$

$$-\frac{ab^2}{2\sqrt{(a^2+b^2)}}\ln(ab)-(\frac{ah_0}{2b(a^2+b^2)}\sqrt{\frac{a^2h_0^2}{b^2}+b^2+h_0^2}$$

$$+\frac{b^2}{4(a^2+b^2)}\ln\left(a^2b^2+2a^2h_0^2+\frac{2a^4h_0^2}{b^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2a^2h_0\sqrt{a^2+b^2}}{b}\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2}+b^2+h_0^2}\right)-\frac{ab^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\ln(ab)))$$

5.3.3

根据易拉罐容积一定，用料体积最省的最优化设计建立以下模型：

$$\min\big(S(a,b,h,h_0)\big)=b^2*\frac{\pi\left(b^2+(h+h_0)^2\right)}{a^2}+2\pi*$$

$$
\left(\frac{a(h+h_0)}{2b(a^2+b^2)}\sqrt{\frac{a^2(h+h_0)^2}{b^2}+b^2+(h+h_0)^2}\right.
$$

$$
+\frac{b^2}{4(a^2+b^2)}\ln\left(a^2b^2+2a^2(h+h_0)^2+\frac{2a^4(h+h_0)^2}{b^2}\right.
$$

$$
\left.+\frac{2a^2(h+h_0)\sqrt{a^2+b^2}}{b}\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2}+b^2+(h+h_0)^2}\right)
$$

$$
-\frac{ab^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\ln(ab)-\left(\frac{ah_0}{2b(a^2+b^2)}\sqrt{\frac{a^2h_0^2}{b^2}+b^2+h_0^2}\right.
$$

$$
+\frac{b^2}{4(a^2+b^2)}\ln\left(a^2b^2+2a^2h_0^2+\frac{2a^4h_0^2}{b^2}\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{2a^2h_0\sqrt{a^2+b^2}}{b}\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2}+b^2+h_0^2}\right)-\frac{ab^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\ln(ab)\right))
$$

$$
s.t.\begin{cases} V=a^2h\pi+\dfrac{a^2\pi(h^3+3h_0h^2+3hh_0^2)}{3b^2}=365 \\ h>0 \end{cases}
$$

5.3 **代码实现**

```
function f = fun1(x)
k=1;
f=(pi*x(1)^2/x(2)^2*(x(3)^2+(x(4)+x(3))^2+2*x(2)^2))*k+2*pi*((x(1)*(x(4)+x(3)))/(2*x(2)*(x(1)^2+x(2)^2))*sqrt(((x(1)^2*(x(4)+x(3))^2)/x(2)^2+x(2)^2+(x(4)+x(3))^2))+x(2)^2/(4*(x(1)^2+x(2)^2))*log(x(1)^2*x(2)^2+2*x(1)^2*(x(4)+x(3))^2+(2*x(1)^4*(x(4)+x(3))^2)/x(2)^2+(2*x(1)^2*(x(4)+x(3))*sqrt(x(1)^2+x(2)^2))/x(2)*sqrt((x(1)^2*x(2)^2)/x(2)^2+x(2)^2+(x(4)+x(3))^2))-
(x(1)*x(2)^2)/(2*sqrt(x(1)^2+x(2)^2))*log(x(1)*x(2))-
((x(1)*(x(3)))/(2*x(2)*(x(1)^2+x(2)^2))*sqrt(((x(1)^2*(x(3))^2)/x(2)^2+x(2)^2+(x(3))^2))+x(2)^2/(4*(x(1)^2+x(2)^2))*log(x(1)^2*x(2)^2+2*x(1)^2*(x(3))^2+(2*x(1)^4*(x(3))^2)/x(2)^2+(2*x(1)^2*(x(3))*sqrt(x(1)^2+x(2)^2))/x(2)*sqrt((x(1)^2*x(2)^2)/x(2)^2+x(2)^2+(x(3))^2))-(x(1)*x(2)^2)/(2*sqrt(x(1)^2+x(2)^2))*log(x(1)*x(2))));
```

```
function [c,ceq]=fun2(x)
c(1)=0;
% c(2)=10-0.004*(x(1)^(-4))*x(2)*(x(3)^3);
% c(3)=x(1)*(x(2)+1.5)+0.0044*(x(1)^(-4))*x(2)*(x(3)^3)-3.7*x(3);
% c(4)=375-356000*x(1)*(x(2)^(-1))*x(3)^(-2);
% c(5)=4-x(3)/x(1);
```

```
ceq(1)=x(1)^2*x(4)*pi+(x(1)^2*pi*(x(4)^3+3*x(3)*x(4)^2+3*x(4)*x(3)^2))/(3*x(2)^2)-365;
%ceq(2)=x(3)*2+x(4);

clc;
aaa=1;
bbb=1;
x0=[aaa bbb 0 10]';
vlb=[aaa bbb -1000 0]';
vub=[aaa bbb 1000 1000]';
[x,fval]=fmincon(@fun1,x0,[],[],[],[],vlb,vub,@fun2)



o=10;
a=x0(1);
b=x0(2);
oo=1;
xxx=[-oo:0.01:oo];
for i=1:201
xxx(i)=x0(3);
end
c=(a^2+b^2)^(0.5) ;%表示焦点
x=[-o:0.01:-a];
y=(b^2*(x.^2/a^2-1)).^0.5;
plot(-oo:0.01:oo,xxx,'LineWidth',3,'Color','k')
hold on
for i=1:1031
xxx(i)=x0(4);
end
ooo=5.15;
plot(-ooo:0.01:ooo,xxx,'LineWidth',3,'Color','k')
hold on
plot(x,y,'k');
hold on;
plot(x,-y,'k')
% 画右侧双曲线
plot(-x,y,'k')
plot(-x,-y,'k')
ylim([x0(3),x0(4)])
title('picture')
xlabel('r')
```

```
ylabel('h')
grid on
```

5.4 结果分析

经多次运算，表面积最小的优化模型数据如下（即在 a，b 固定的情况下，求表面积最小模型的h_0, h, V）：

a	1	1	1	1	1
b	1	1.25	1.5	1.75	2
h0	0.3657	0.4728	0.5669	0.6503	0.7251
h	6.5377	7.5141	8.4271	9.2906	10.1133
V	265.8693	219.3486	187.0293	163.4106	145.4728

a	0.125	0.25	0.5	0.75
b	0.82	1	1	1
h0	25.9365	11.4382	3.4238	1.0375
h	5.9547	7.7366	7.7922	7.3902
V	366.5411	280.259	272.7955	266.7404

经多次拟合，在 a=0.125，b=0.82，$h_0 = 25.9365$，$h = 5.9547$，$V = 366.5411$时最为符合题目要求。

六、参考文献

[1]韩中庚，数学建模方法及应用（第二版），2009，北京：高等教育出版社

[2]李继成，数学实验（第二版），2014，北京：高等教育出版社

[3]姜启源、谢金星、叶俊，数学模型（第四版），2011，北京：高等教育出版社

[4]齐雪林，数学建模[R]，西安：数学与统计学院，2020