**Fundamentals Of Information Science** **2022 Spring**

Homework11

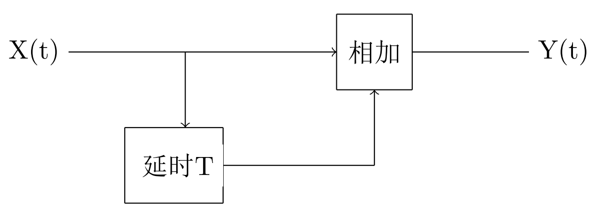
*学生: 华园（202000120027））* *时间: 2022.5.31*

# Problem 1.

设 $X(t)$ 是一个均值为 $a$, 自相关函数为 $R_x(\tau)$ 的平稳随机过程, 它通过某线性系统的输出为 $Y(t) = X(t) + X(t-T)$ ( $T$ 为延迟时间)。
(1) 画出该线性系统的框图;
(2) 求 $Y(t)$ 的自相关函数和功率谱密度;
(3) 求 $Y(t)$ 的平均功率。

**Solution.**

(1)




(2)由于平稳过程X（t）通过线性系统后的输出过程Y（t）也是平稳的,因此可以获得自相关函数：

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] \\ &= E\{[X(t)+X(t-T)][X(t+\tau)+X(t+\tau-T)]\} \\ &= 2R_X(\tau)+R_X(\tau-T)+R_X(\tau+T) \end{aligned}$$

自相关函数与功率谱密度互为傅里叶变换，因此可以获得功率谱密度：

$$\begin{aligned} P_Y(\omega) &= 2P_X(\omega)+P_X(\omega)e^{-jwT}+P_X(\omega)e^{jwT} \\ &= 2(1+\cos\omega T)P_X(\omega) \end{aligned}$$

（3）针对平稳随机过程，平均功率：

$$\begin{aligned} S &= R_Y(0) \\ &= 2R_X(0)+R_X(-T)+R_X(T) \\ &= 2[R_X(0)+R_X(T)] \end{aligned}$$

# Problem 2.

某个信息源由四个符号组成, 设每个符号独立出现, 其出现概率分别为 1/4 、1/4、3/16、5/16, 经过信道传输后, 每个符号正确接收的概率为 1021/1024, 错为其他符号的条件概率为 1/1024, 试求该信道的信道容量

**Solution.**

信道容量C：

$$
\begin{aligned}
C &= max(H(Y) - H(Y|X)) \\
&= 2 - H(\frac{1021}{1024}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{1024}) \\
&= 2 - 0.3351 \\
&= 1.967(b/sym)
\end{aligned}
$$

从而可以获得信道容量：

$$C = 1.967(b/sym)$$

# Problem 3.

3. 已知彩色电视图像画面由 $5 \times 10^5$ 个像素组成, 设每个像素有 64 种彩色度, 每种彩色度有 16 个亮度等级。如果所有彩色度和亮度等级的组合机会均等, 并统计独立。
(1) 试计算每秒传送 100 幅画面所需的信道容量!
(2) 如果接收机信噪比为 30 dB, 为了传送彩色图像所需信道带宽为多少?

**Solution.**

（1）由题目可知，每个像素点的信息量为：

$$I_i = log_2 \frac{1}{p(x)} = 10bits$$

因此我们可以获得一幅图像的数据量为：

$$I = 5 \times 10^5 \times 10 = 5 \times 10^6 bits$$

则每秒传送100幅画面所需的信道容量为：

$$C = 100I = 5 \times 10^8 bits$$

（2）当接收机信噪比为30db时，代入公式可求得B：

$$B = \frac{C}{log_2(1 + \frac{S}{N})} = \frac{5 \times 10^8}{log_2(1 + 10^3)} = 5.02 \times 10^7 Hz$$

# Problem 4.

已知 AM 信号的表达式为

$$s_{AM}(t) = A\left[1 + m\cos\omega_m t\right]\cos\omega_c t$$

式中: $m$ 为调幅系数, 定义为调制信号的最大振幅 $A_m$ 与载波最大振幅 $A$ 的比值。$\omega_m$ 为调制角频率, $\omega_c$ 为载波角频率，试写出:
（1）上下边频的振幅与载波振幅的关系;
(2) 边带功率与载波功率的关系;
(3) 如果载波功率为 1 kW, 计算最大边带功率;
(4) AM 信号的频谱表达式。

**Solution.**

将AM表达式变形可得

$$s_{AM}(t) = [A + A_m \cos\omega_m t]\cos\omega_c t = A\cos\omega_c t + A_m \cos\omega_m t \cos\omega_c t$$

(1)根据变形之后的表达式可得，前一项为载波项，后一项为边带项，从而可以得出上下边频的振幅和载波振幅的比值为：

$$\frac{A_m}{A} = m$$

(2)由变形后的AM公式可以求得功率：

$$P_{AM} = P_C + P_S = \frac{A^2}{2} + \frac{A_m^2}{4}$$

前一项为载波功率，后一项为边带功率，则边带功率和载波功率之比为：

$$\frac{P_S}{P_C} = \frac{m^2}{2}$$

(3)满调幅时，即$\frac{A_m}{A} = m = 1$时，边带功率最大，此时最大边带功率为：

$$P_{smax} = \frac{1}{2}P_C = 500W$$

(4)经傅里叶变换得：

$$S_{\mathrm{AM}}(\omega) = \pi A\left[\delta\left(\omega+\omega_c\right)+\delta\left(\omega-\omega_c\right)\right] + \frac{\pi A_m}{2}\pi A_m[\delta\left(\omega-\omega_m+\omega_c\right)+\delta\left(\omega+\omega_m+\omega_c\right)+\delta\left(\omega+\omega_m-\omega_c\right)+\delta\left(\omega+\omega_m-\omega_c\right)$$

## Problem 5.

设二进制调制系统的码元速率 $R_B = 2 \times 10^6$Baud, 信道加性高斯白噪声的单边功率谱密度 $n_0 = 4 \times 10^{-15}$ W/Hz, 接收端解调器输入信号的峰值振幅 $a = 800\mu$V, 试计算和比较:
（1）非相干（包络检波）接收 2ASK、2FSK 信号时, 系统的误码率;
(2) 相干接收 2ASK、2FSK、2PSK 信号时, 系统的误码率。

**Solution.**

由题可知，该系统为二进制调制系统，因此我们可以获得带宽B：

$$B = 2 \times R_B = 4 \times 10^6 HZ$$

从而可以获得噪声的方差：

$$\sigma_n^2 = n_0 \times B = 1.6 \times 10^{-8}$$

进而可以获得信噪比r：

$$r = \frac{a^2}{2\sigma_n^2} = 20$$

(1)在非相干接受时，针对2ASK:

$$P_e \approx \frac{1}{2}e^{-5} = 3.369 \times 10^{-3}$$

针对2FSK系统，可以获得误码率：

$$P_e \approx \frac{1}{2}e^{-10} = 2.270 \times 10^{-5}$$

(2）在相干接受时，针对2ASK系统，误码率为：

$$P_e \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \times 20}}e^{-5} = 8.5 \times 10^{-4}$$

针对2FSK系统，误码率为：

$$P_e \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 20}}e^{-10} = 4.05 \times 10^{-6}$$

针对2PSK系统，误码率为：

$$P_e \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi \times 20}}e^{-20} = 8.169 \times 10^{-9}$$