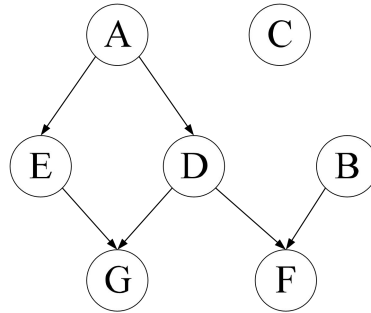


Bayes Nets

(a) Please draw the directed graph corresponding to the following distribution:

$$P(A, B, C, D, E, F, G) = P(A)P(B)P(C)P(D | A)P(E | A)P(F | B, D)P(G | D, E)$$

Solution:



(b) Please write down the factored joint distribution represented by the graph below.

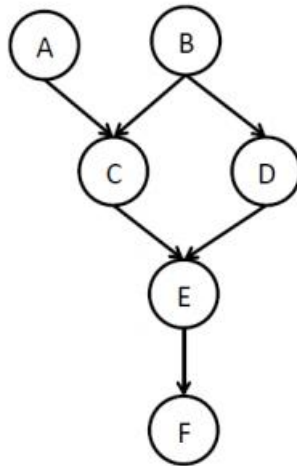


Figure 1: Bayes net for question parts (b) and (c).

Solution:

$$P(A, B, C, D, E, F) = P(A)P(B)P(C | A, B)P(D | B)P(E | C, D)P(F | E)$$

(c) Assume the random variables in the graph shown above are Boolean. How many parameters are needed in total to fully specify this Bayesian network? Justify your answer.

Solution:

- (1) 共计需要 14 个参数 (parameters)。
- (2) 证明：在本次题目中，由于所有的变量都是布尔类型，因此每个变量只有 True 与 False 两种情况，利用概率和为 1 的知识便可完成证明，例如假设

$P(B = \text{True}) = \theta$ ，那么我们可以获得 $P(B = \text{False}) = 1 - \theta$ ，也就是说仅需要一个参数即可确定 B 的分布，以此为基础我们进行拓展。

A: 需要 1 个参数确定其分布

B: 需要 1 个参数确定其分布

C: 需要 4 个参数确定 C 的分布，分别对应着以下四种情况下 C 的分布。

A	B
True	True
True	False
False	True
False	False

D: 需要 2 个参数确定 D 的分布，分别对应 B=True 和 B=False 两种情况。

E: 需要 4 个参数确定 E 的分布情况，与 C 相似，在此不做罗列。

F: 需要 2 个参数确定 F 的分布，分别对应 E=True 和 E=False 的两种情况。

因此总计需要 $1 + 1 + 4 + 2 + 4 + 2 = 14$ 个参数完善网络。

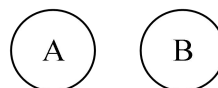
(d) Based on the graph shown in part (b), state whether the following are true or false:

- i. $A \perp\!\!\!\perp B$
- ii. $A \perp\!\!\!\perp B|C$
- iii. $C \perp\!\!\!\perp D$
- iv. $C \perp\!\!\!\perp D|E$
- v. $C \perp\!\!\!\perp D|B, F$
- vi. $F \perp\!\!\!\perp B$
- vii. $F \perp\!\!\!\perp B|C$
- viii. $F \perp\!\!\!\perp B|C, D$
- ix. $F \perp\!\!\!\perp B|E$
- x. $A \perp\!\!\!\perp F$
- xi. $A \perp\!\!\!\perp F|C$
- xii. $A \perp\!\!\!\perp F|D$

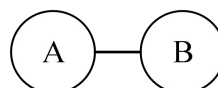
Solution:

本题采用 D-Separation 方法进行判断，以下给出判断结果以及 D-Separation 方法处理后的网络图。

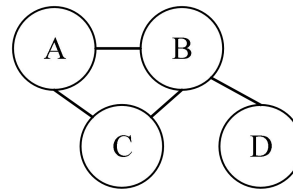
(1) True，处理过后 A,B 之间没有连接，因此相互独立



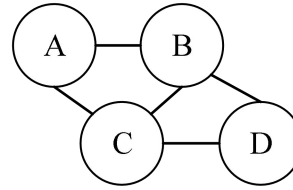
(2) False，处理过后，A,B 之间有连接，因此不相互独立。



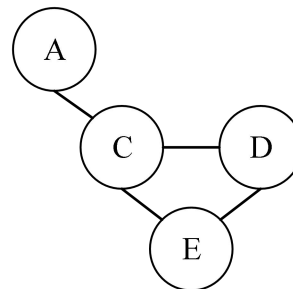
(3) False, 处理之后, C,D 之间存在连接, 因此不相互独立。



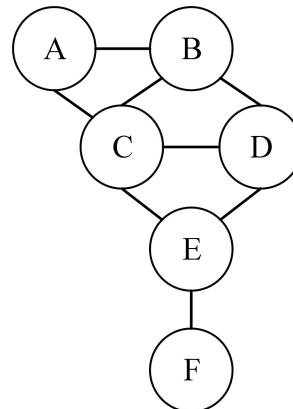
(4) False, 处理之后, C,D 之间存在连接, 因此不相互独立。



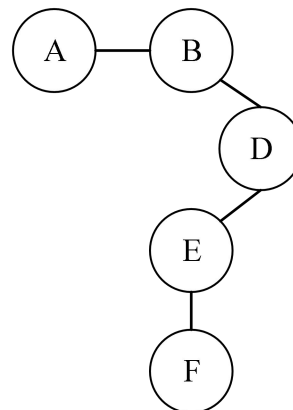
(5) False, 处理之后, C,D 之间存在连接, 因此不相互独立。



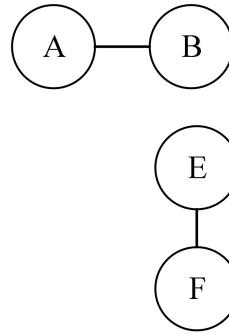
(6) False, 处理之后, F,B 之间存在连接, 因此不相互独立。



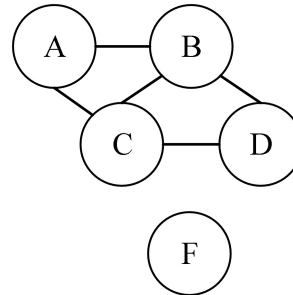
(7) False, 处理之后, F,B 之间存在连接, 因此不相互独立。



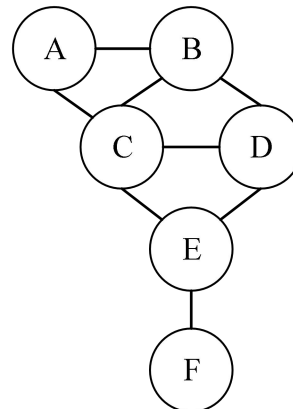
(8) **True**, 处理之后, F,B 之间不存在连接, 因此相互独立。



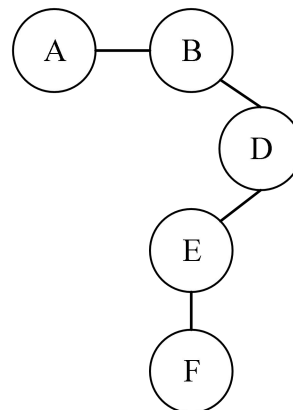
(9) **True**, 处理之后, F,B 之间不存在连接, 因此相互独立。



(10) **False**, 处理之后, A,F 之间存在连接, 因此不相互独立。



(11) **False**, 处理之后, A,F 之间存在连接, 因此不相互独立。



(12) False, 处理之后, A,F 之间存在连接,
因此不相互独立。

