

全排列和对换

全排列和对换

全排列
对换

全排列

全排列 = n 元排列

n 元排列 (有 $1, 2, \dots, n$, 共 n 个数, 不重不漏, 按一定顺序排成一行, 即是“一个” n 元排列)



总共有多少个 n 元排列呢?

$$n \times (n-1) \cdots 1 = n!$$

S_n (所有 n 元排列构成的集合)

逆序数

逆序与逆序数

若存在一个大数排在一个小数前面, 则这一对数构成“一个逆序”

而逆序数, 其实就是“逆序的总个数”

记为 $t(\dots)$, 如 $t(32514) = 5$

求法: 对于每个数, 看后面比它小的数字的个数

奇偶排列

奇偶排列

逆序数为“奇”称为奇排列

逆序数为“偶”称为偶排列

对换

结论: 对换两数, 奇偶改变

(对换排列中的两个数字, 导致逆序数的奇偶性发生改变)

证明:

首先考虑**相邻对换**的情况，对换一次后逆序数奇偶性一定改变；同理，对换两次则不变 → 相邻对换奇数次则逆序数奇偶性改变，否则不改变。

推广到任意两个位置的交换，假设两个位置之间的距离为 k

交换过程：

1. 左边的数字依次与其右侧的数字相邻对换，知道遇到右侧的数字，也要对换，共交换 $k + 1$ 次
2. 右侧的数字依次与其左侧的数字交换，共交换 k 次
3. 故一共交换 $2k + 1$ 次，奇偶性发生改变