

# 目录

## 一、 张量基础

1. 张量的表示
2. 两种经典的张量分解算法

## 二、 张量应用

1. 引例—基于 Tucker 分解和背景差分的张量分解
2. 张量低秩特性应用
3. 张量稀疏表示应用

# 一、张量基础

## 1. 张量的表示

张量的基本概念及记号表示主要包括：

- 1) 张量的表示：张量的纤维(fiber)和切片(slice)表示，张量的矩阵化(mode-n 表示)，张量的向量化；详细内容可查阅附录 1。
- 2) 张量的外积，Kronecker 积，Khatri-Rao 积，Hadamard 积，mode-n 积；详细内容可查阅附录 1 和附录 2。
- 3) 张量的秩、内积和范数等详细内容可以查阅附录 2。

## 2. 两种经典的张量分解算法

CP 分解和 Tucker 分解是两种经典的张量分解算法，主要可应用于数据挖掘、目标检测、图像低秩恢复及降噪、计算机视觉等领域。

### 2.1 CP 分解

CP 分解将一个已知张量分解成为一系列秩为一的张量的和。以三阶张量  $X$  为例，其 CP 分解的形式如下：

$$X = \sum_{r=1}^R a_r \circ b_r \circ c_r \quad (1-1)$$

其中  $R$  是一个正整数，代表了 CP 分解的秩（也是秩一张量的个数）， $R$  是一个超参数，在实际的分解算法中由人为指定；符号“ $\circ$ ”代表了向量的外积。CP 分解的**目的**即是求解出  $R$  个秩为一的张量（如式 1-1 中的  $a_r, b_r, c_r$ ），使得在约束条件下能够尽量逼近原始张量。求解时，前提假设是秩已为固定值，使用交替最小二乘法（Alternating least squares, ALS）来进行求解。具体求解过程可以查阅附录 2。

### 2.2 Tucker 分解

Tucker 分解可以看作高阶主成分分析（high-order PCA）的一种形式，它将一个张量分解成为核张量和因子矩阵通过 n-mode 积相乘的形式，数学式如下：

$$X \approx G \times_1 A \times_2 B \times_3 C = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \sum_{r=1}^R g_{pqr} a_p \circ b_q \circ c_r \quad (1-2)$$

其中  $X \in \mathbb{R}^{X \times Y \times Z}$ ， $G \in \mathbb{R}^{P \times Q \times R}$  为核张量， $A \in \mathbb{R}^{X \times P}$ ， $B \in \mathbb{R}^{Y \times Q}$ ， $C \in \mathbb{R}^{Z \times R}$  为因子矩阵（通常为列正交矩阵）。其中核心张量  $G$  的大小为 Tucker 分解的秩，在实际算法中为超参数，由人为设定。Tucker 分解的**目的**即是在约束条件下求解出核心张量  $G$  以及因子矩阵  $A, B, C$  来对原始张量进行重构。在进行 Tucker 分解的求解时，前提假设是秩已为固定值，使用 ALS 算法（在 Tucker 分解的求解中也称作 higher-order orthogonal iteration, HOOI）来进行求解。具体求解过程可以查

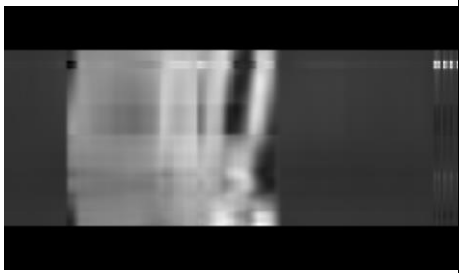
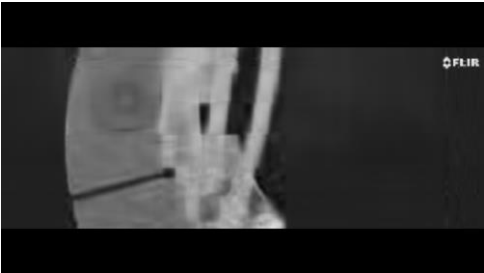
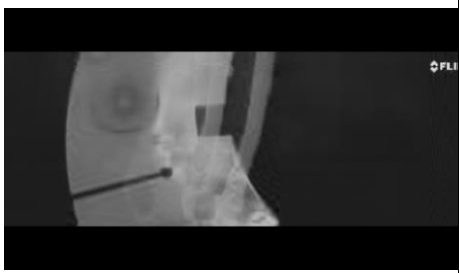
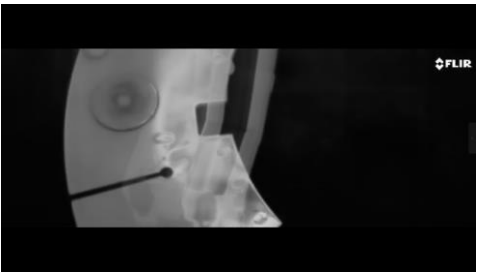
阅附录 2。

2.3 CP 分解和 Tucker 分解的应用

由于 CP 分解和 Tucker 分解的秩为超参数，在教研室实际应用时可以以这两种分解来对数据进行低秩近似和降噪，求取数据的背景。这两种分解的源码可以在 <http://www.sandia.gov/~tgkolda/TensorToolbox/index-2.6.html> 下载。

表 1-1 展示了原始数据和分别进行了 CP 分解和 Tucker 分解后的结果对比（此处使用这两种分解对原始数据进行低秩近似，尝试还原视频背景）。此处 CP 分解的秩为 5 和 25，Tucker 分解的秩为 (24,64,1) 和 (240,640,1)。并且由于秩的改变会较大幅度上影响结果（通常是秩越大越接近原始张量，但计算复杂度也会随之上升），所以在实际应用时可以多次尝试调整。

表 1-1：秩对结果的影响

CP 分解	秩：5	秩：25
结果		
Tucker 分解	秩：(24,64,1)	秩：(240,640,1)
结果		

## 二、张量应用

### 1. 引例—基于 Tucker 分解和背景差分的张量分解

背景差分在移动目标检测中是一个重要的领域，该理论的主要内容为将移动的目标（通常称为前景）从静止的物体（通常称为背景）中分离出来。基本原理为通过低秩近似等方法求取图像背景，再将当前含有前景目标的图像与背景图像相减，计算出超过设定阈值的区域作为前景目标。

表 2-1 展示了背景差分在移动目标检测中的实际运用。此处使用 Tucker 分解对背景进行近似，得到背景后进行差分操作获得前景。背景差分实现的关键是背景模型的获取和更新。在运动情况下图像和视频本身会受到移动速度、光线变化、物体遮挡等因素的影响，所以算法建立的背景模型必须要适应各种干扰条件。在无损检测领域，对于背景建模和更新主要的困难来自于激励线圈激励后的红外热扩散带来的噪声和干扰。当裂纹、缺陷信息较微弱时，如果背景噪声的干扰过大，会直接覆盖掉缺陷和裂纹信息，导致检测失败。所以得到精确建模的背景图像、视频是涡流红外热成像无损检测的重要目标之一。

下面介绍基于 Tucker 分解和背景差分的方法。该方法的流程框图如图 2-1 所示（流程图中计算了参数  $w$ ，目的是用于去除鬼影，可以不使用）。实验得到的热成像视频原始数据是一个三维张量  $X \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ ，可以将其分解为两个部分：前景张量  $S$  和背景张量  $L$ ：




$$X = L + S \quad (2-1)$$

一般情况下缺陷和裂纹区域在空间上是稀疏的，也即前景张量  $S$  包含了缺陷和裂纹的信息，最终使用输出的前景信号进行缺陷检测。对于背景张量  $L$  可以使用 Tucker 分解来进行重构，得出背景后使用背景差分计算前景张量  $S$ ：

$$S = X - L \quad (2-2)$$

最终输出前景视频即可进行缺陷检测。

表 2-1 背景差分的实际运用

项目	原始场景	前景	背景
可视化结果			

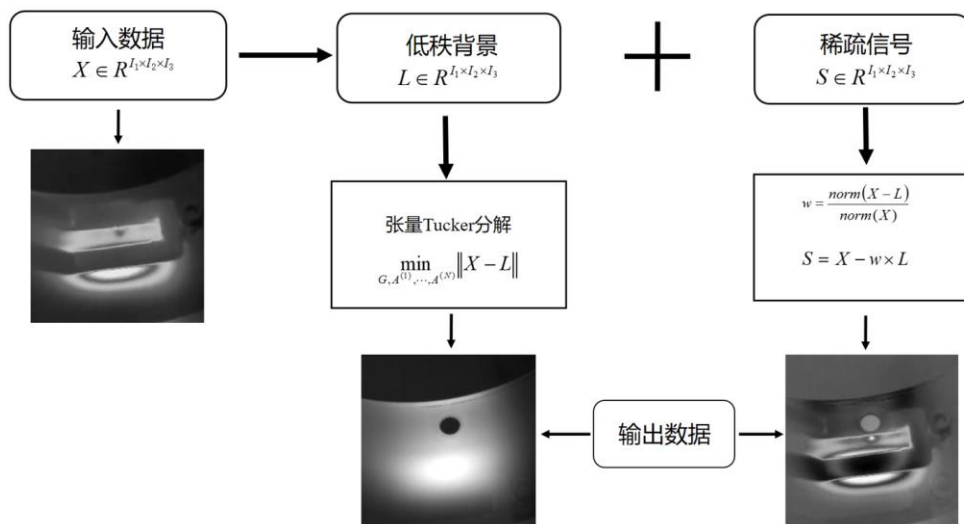


图 2-1 基于 Tucker 分解和背景差分的方法

## 2. 张量低秩特性应用

矩阵和张量的低秩特性的应用主要包括鲁棒主成分分析、低秩补全等几个方面。主要应用领域为图像和视频的背景建模、去噪以及推荐系统。

如果将图像看成一个矩阵，那么它的基的数量越少，基对应的线性无关向量数量就越少，矩阵的秩就越小。当它远远小于矩阵的大小的时候，图像就是低秩的。低秩矩阵的每行或者每列都可以用其他的行或者列线性表示，这说明这个矩阵包含了大量的冗余信息。利用这种冗余信息可以对确实图像信息进行恢复，可以将多出来的噪声信息进行去除，还可以对错误的图像信息进行恢复。视频序列则可以看作张量，对于目前越来越多的视频处理算法，张量结构更加契合。

### 2.1 张量鲁棒主成分分析

张量的鲁棒主成分分析目的是将张量  $X$  分解为两个张量  $L$  和  $S$  的和，其中  $L$  是一个低秩张量， $S$  是一个稀疏张量。问题的目的则是如何根据张量  $X$ ，将低秩张量  $L$  和稀疏张量  $S$  分别恢复出来。以三维张量为例，模型示意图如图 2-2 所示。

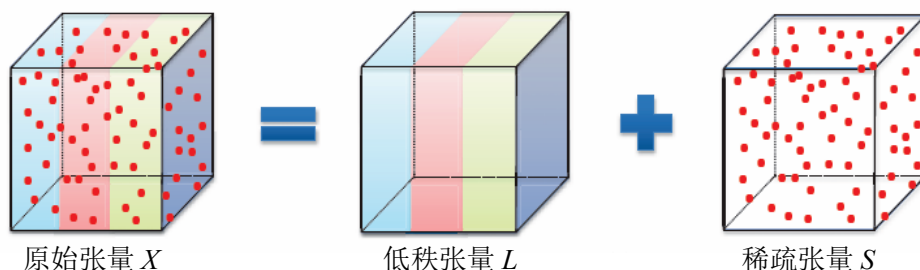


图 2-2 张量鲁棒主成分分析模型示意

可用如下思路来求解。首先用低秩张量  $L$  的秩和稀疏张量  $S$  的 0 范数来对原始问题进行约束。即张量  $L$  的秩和张量  $S$  的 0 范数（指张量  $S$  中非零元素的个数）取得最小时，所得的  $L$  和  $S$  即为所求。如下式所示：

$$\min_{L,S} \text{rank}(L) + \lambda \|S\|_0, \text{ s.t. } L+S=X \quad (2-3)$$

由于张量  $L$  的秩和张量  $S$  的 0 范数是非凸的，故无法求出最优解，此时想到使用张量的核范数和 L1 范数来对张量的秩和 0 范数进行凸近似，从而得到如下的优化问题：

$$\min_{L,S} \|L\|_* + \lambda \|S\|_1, \text{ s.t. } X=L+S \quad (2-4)$$

上述优化问题为凸优化问题，有解，当低秩张量  $L$  的核范数和稀疏张量  $S$  的 L1 范数值取最小时，即得到所求  $L$  和  $S$ 。

#### 2.1.1 张量鲁棒主成分分析的求解

张量鲁棒主成分分析考虑求解下述凸优化问题：

$$\min_{L,S} \|L\|_* + \lambda \|S\|_1, \text{ s.t. } X=L+S \quad (2-5)$$

上式中  $\lambda$  是经验参数，此处取值为  $1/\sqrt{\max(n_1, n_2)n_3}$ ，其中  $n_1, n_2$  分别为张量  $X$  的第一维和第二维大小。对于该优化问题，可以使用增广拉格朗日乘子法来进行求解。首先构造如下拉格朗日函数：

$$L(L,S,Y) = \|L\|_* + \lambda \|S\|_1 + \langle Y, L+S-X \rangle \quad (2-6)$$

其中  $Y$  为拉格朗日乘子， $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为张量内积。为了将有约束问题转化为无约束问题，增加如下正则惩罚项：

$$L(L,S,Y) = \|L\|_* + \lambda \|S\|_1 + \langle Y, L+S-X \rangle + \frac{\mu}{2} \|L+S-X\|_F^2 \quad (2-7)$$

其中  $\mu$  为一正标量。 $\|\cdot\|_F^2$  为张量 Frobenius 范数。

至此，可以采用 ADMM 来对上述问题进行求解。下面是求解推导过程：

$$\min_L \|L\|_* + \langle Y, L+S-X \rangle + \frac{\mu}{2} \|L+S-X\|_F^2 \quad (2-8)$$

根据内积、范数与迹的关系可得：

$$\Rightarrow \min_L \|L\|_* + \text{tr}\left(Y^T(L+S-X)\right) + \frac{\mu}{2} \text{tr}\left((L+S-X)^T(L+S-X)\right) \quad (2-9)$$

合并同类项可得：

$$\Rightarrow \min_L \|L\|_* + \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( (L+S-X)^T (L+S-X) + \frac{2Y^T}{\mu} (L+S-X) \right) \quad (2-10)$$

增一项减一项可得：

$$\Rightarrow \min_L \|L\|_* + \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( (L+S-X)^T (L+S-X) + \frac{2Y^T}{\mu} (L+S-X) + \frac{Y^T Y}{\mu \mu} \right) - \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( \frac{Y^T Y}{\mu \mu} \right) \quad (2-11)$$

合并、化简，并忽略不含  $L$  的相关项得：

$$\Rightarrow \min_L \|L\|_* + \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( \left( L+S-X+\frac{Y}{\mu} \right)^T \left( L+S-X+\frac{Y}{\mu} \right) \right) - \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( \frac{2Y^T Y}{\mu \mu} \right) \quad (2-12)$$

忽略最后一项并改写为范数形式得：

$$\Rightarrow \min_L \|L\|_* + \frac{\mu}{2} \left\| L+S-X+\frac{Y}{\mu} \right\|_F^2 \quad (2-13)$$

最终得到如下的更新式：

$$L_{k+1} = \arg\min_L \|L\|_* + \frac{\mu_k}{2} \left\| L+S_k-X+\frac{Y_k}{\mu_k} \right\|_F^2 \quad (2-14)$$

关于更新式的求解可以参见附录 4、张量鲁棒主成分分析的整体算法流程以及参数  $\mu$  和拉格朗日乘子  $Y$  的更新式会在 3.1 节说明稀疏部分求解之后给出。实例演示也会在 3.1 节给出。

## 2.2 张量低秩补全

张量的低秩补全目的是从已知的张量数据出发（该数据部分缺失），重建完整张量。由于真实的张量数据在多个维度上往往都具备较强的线性关联性，而这种关联性即可利用张量的低秩特性来进行刻画。以三维张量为例，模型示意图如图 2-3 所示。

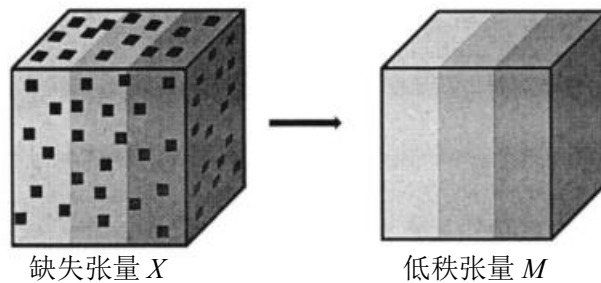


图 2-3 张量低秩补全

低秩张量补全的问题可以抽象为如下模型：

$$\min_X \text{rank}(X) \text{ s.t. } \mathcal{P}_\Omega(X) = \mathcal{P}_\Omega(M) \quad (2-15)$$


















其中 $\mathcal{P}_\Omega(X)$ 表示张量 $X$ 在采样指标集合上的投影， $M$ 为恢复的低秩张量。对于该问题 Candes 等人证明了当采样指标合集以及张量 $X$ 的奇异值满足一定条件时可以做到对低秩张量的精确恢复（可参考附录 3）。接下来再使用张量的核范数对秩进行松弛，转化为凸优化问题：

$$\min_X \|X\|_* \text{ s.t. } \mathcal{P}_\Omega(X) = \mathcal{P}_\Omega(M) \tag{2-16}$$

针对上述问题可以使用 ADMM 或者增广拉格朗日算法进行优化求解。使用 ADMM 优化的求解过程可以参考附录 3。下面给出使用张量低秩补全的实例。

**实例：**张量低秩补全用于去噪

表 2-1 张量低秩补全去噪

项目	原始图片	噪声图片	复原图片
1			
2			
3			
4			
5			





### 3. 张量稀疏特性应用

#### 3.1 张量鲁棒主成分分析

从 2.1 节可知张量鲁棒主成分分析考虑求解下述凸优化问题：

$$\min_{L, S} \|L\|_* + \lambda \|S\|_1, \text{ s.t. } X = L + S \quad (3-1)$$

在得到拉格朗日函数后，使用 ADMM 算法求解稀疏部分：

$$\min_S \lambda \|S\|_1 + \langle Y, L + S - X \rangle + \frac{\mu}{2} \|L + S - X\|_F^2 \quad (3-2)$$

根据内积、范数与迹的关系可得：

$$\Rightarrow \min_S \lambda \|S\|_1 + \text{tr} \left( Y^T (L + S - X) \right) + \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( (L + S - X)^T (L + S - X) \right) \quad (3-3)$$

合并同类项可得：

$$\Rightarrow \min_S \lambda \|S\|_1 + \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( (L + S - X)^T (L + S - X) + \frac{2Y^T}{\mu} (L + S - X) \right) \quad (3-4)$$

增一项减一项可得：

$$\Rightarrow \min_S \lambda \|S\|_1 + \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( (L + S - X)^T (L + S - X) + \frac{2Y^T}{\mu} (L + S - X) + \frac{Y^T Y}{\mu \mu} \right) - \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( \frac{Y^T Y}{\mu \mu} \right) \quad (3-5)$$

合并、化简，并忽略不含  $S$  的相关项得：

$$\Rightarrow \min_S \lambda \|S\|_1 + \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( \left( L + S - X + \frac{Y}{\mu} \right)^T \left( L + S - X + \frac{Y}{\mu} \right) \right) - \frac{\mu}{2} \text{tr} \left( \frac{2Y^T Y}{\mu \mu} \right) \quad (3-6)$$

忽略最后一项并改写为范数形式得：

$$\Rightarrow \min_S \lambda \|S\|_1 + \frac{\mu}{2} \left\| L + S - X + \frac{Y}{\mu} \right\|_F^2 \quad (3-7)$$

最终得到如下的更新式：

$$S_{k+1} = \argmin_S \lambda \|S\|_1 + \frac{\mu_k}{2} \left\| L_{k+1} + S - X + \frac{Y_k}{\mu_k} \right\|_F^2 \quad (3-8)$$

关于更新式的求解可以参见附录 4。最终得到整个求解张量鲁棒主成分分析的算法求解流程如表 3-1 所示。

表 3-1 张量鲁棒主成分分析的算法流程

输入：原始张量 $X$ ，参数 $\lambda$
输出：低秩张量 $L$ ，稀疏张量 $S$
初始化参数： $L_0=S_0=Y_0=0$ ， $\rho=1.1$ ， $\mu_0=1e-3$ ， $\mu_{max}=1e10$ ， $\epsilon=1e-8$ .
未收敛时，执行：
1.更新 $L_{k+1}$ ：
$L_{k+1} = \underset{L}{\operatorname{argmin}} \left\  L \right\ _* + \frac{\mu_k}{2} \left\  L + S_k - X + \frac{Y_k}{\mu_k} \right\ _F^2$
2.更新 $S_{k+1}$ ：
$S_{k+1} = \underset{S}{\operatorname{argmin}} \lambda \ S\ _1 + \frac{\mu_k}{2} \left\  L_{k+1} + S - X + \frac{Y_k}{\mu_k} \right\ _F^2$
3.更新 $Y_{k+1}$ ：
$Y_{k+1} = Y_k + \mu_k (L_{k+1} + S_{k+1} - X)$
4.更新 $\mu_{k+1}$ ：
$\mu_{k+1} = \min(\rho \mu_k, \mu_{\max})$
5.检查收敛条件：
$\ L_{k+1} - L_k\ _\infty \leq \epsilon, \ S_{k+1} - S_k\ _\infty \leq \epsilon,$
$\ L_{k+1} + S_{k+1} - X\ _\infty \leq \epsilon$

### 3.2 张量稀疏性的其他应用

除了张量鲁棒主成分分析的经典应用，张量的稀疏性还可以应用于张量的恢复、去噪等方面。接下来将给出实例，详细的论文和模型推导可从下面的网址获取：

- 1) 西安交通大学孟德宇老师主页：

<http://gr.xjtu.edu.cn/web/dymeng/8> 主页包含论文和源代码，主要包含张量的稀疏性在去噪方面的应用。

- 2) CanyiLu 的个人主页：



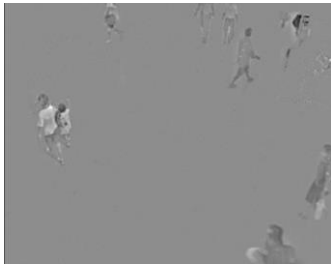
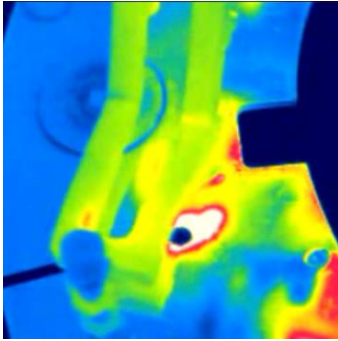
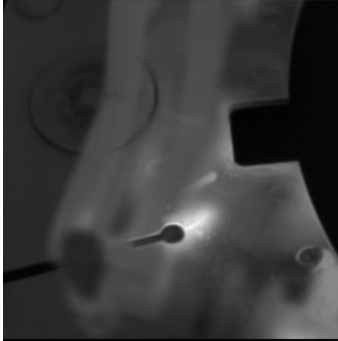
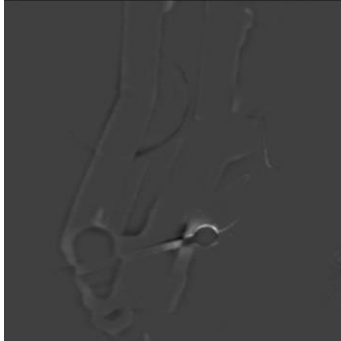
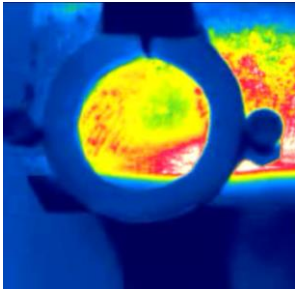
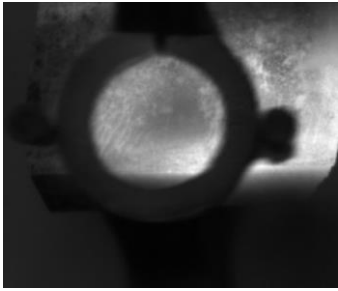
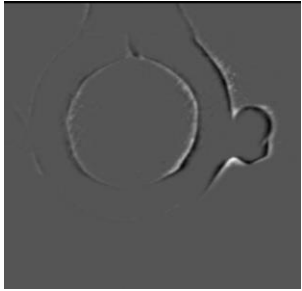
<https://canyilu.github.io/publications/> 主页包含论文和源代码，以及

常用的工具箱，包括张量低秩性和稀疏性的各种应用。

- 3) 电子科技大学刘翼鹏老师主页：  
[http://faculty.uestc.edu.cn/yipengliu/zh\\_CN/zhym/152931/list/index.htm](http://faculty.uestc.edu.cn/yipengliu/zh_CN/zhym/152931/list/index.htm) 主要包括张量的结构化稀疏性在盲源分离方面的应用。

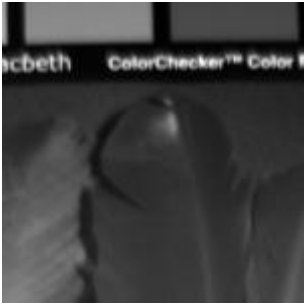
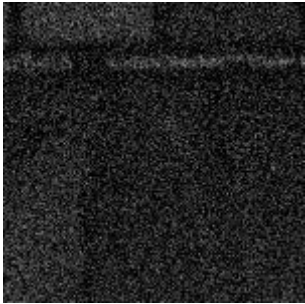
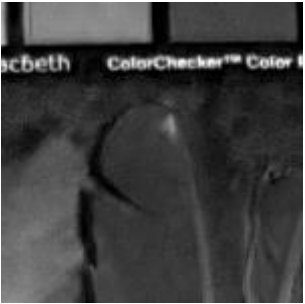

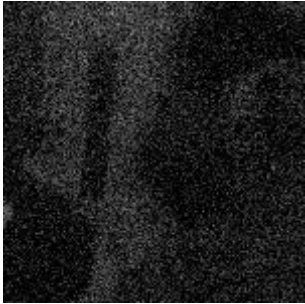

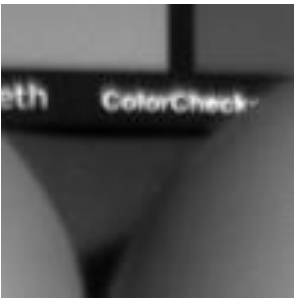


**实例：张量鲁棒主成分分析**

表 3-2 张量鲁棒主成分分析结果比较

项目	原始张量	低秩张量	稀疏张量
1			
2			
3			

实例：张量稀疏性用于去噪

表 3-3 张量稀疏性用于去噪结果比较

项目	原始图片	噪声图片	复原图片
1			
2			
3			

## 附录

1. Andrzej Cichocki, Rafal Zdunek, Anh Huy Phan, Shun-Ichi Amari. Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations[M]. WILEY, 2009. (补充材料中有)
2. T. G. Kolda and B.W. Bader. Tensor decompositions and applications[J]. SIAM Review, 2008. (补充材料中有)
3. 郝儒儒. 基于矩阵分解的低秩张量恢复算法及其应用[D]. 大连. 大连理工大学, 2017. (网上搜索)
4. 张量鲁棒主成分分析求解:

对于低秩张量  $L$  (式2-14) 的求解, 原始论文 (Tensor Robust Principal Component Analysis: Exact Recovery of Corrupted Low-Rank Tensors via Convex Optimization, 见补充材料) 采用张量奇异值分解完成, 张量奇异值分解过程如下图所示:

---

### Algorithm 1 t-SVD

---

```
Input:  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_N}$   
 $L = n_3 n_4 \dots n_N$   
 $\mathcal{D} = \mathcal{M}$   
for  $i = 3$  to  $N$  do  
     $\mathcal{D} \leftarrow \text{fft}(\mathcal{D}, [], i);$   
end for  
for  $i = 1$  to  $L$  do  
     $[\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathcal{D}(:, :, i))$   
     $\hat{\mathbf{U}}(:, :, i) = \mathbf{U}; \hat{\mathbf{S}}(:, :, i) = \mathbf{S}; \hat{\mathbf{V}}(:, :, i) = \mathbf{V};$   
end for  
for  $i = 3$  to  $N$  do  
     $\mathbf{U} \leftarrow \text{ifft}(\hat{\mathbf{U}}, [], i); \mathbf{S} \leftarrow \text{ifft}(\hat{\mathbf{S}}, [], i); \mathbf{V} \leftarrow \text{ifft}(\hat{\mathbf{V}}, [], i);$   
end for
```

---

图中  $\text{fft}$ 、 $\text{ifft}$  分别表示傅里叶变换与反变换。代码求解可以参考补充材料中的 `prox_tnn.m`。

对于低秩张量  $S$  (式 3-8) 的求解, 可以直接参考补充材料中的代码 `prox_l1.m`。

# 张量基础

## 1 张量的表述

张量 (tensor) 实际上就是标量, 向量与矩阵的扩展, 可用来描述高维数组, N 阶张量用来表示一个 N 维数组。

在张量中用 Fiber (纤维) 模拟矩阵中的行与列, 如图 2-4 所示。对于一个三阶张量  $A \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times N_3}$ , 可以用  $A_{n_1, n_2, n_3}$  表示 A 的第  $(n_1, n_2, n_3)$  个元素, 同时可以用  $A(:, n_2, n_3)$ 、 $A(n_1, :, n_3)$  和  $A(n_1, n_2, :)$  分别表示三阶张量 A 的列纤维 (columns fiber)、行纤维 (rows fiber) 和管纤维 (tubes fiber)。

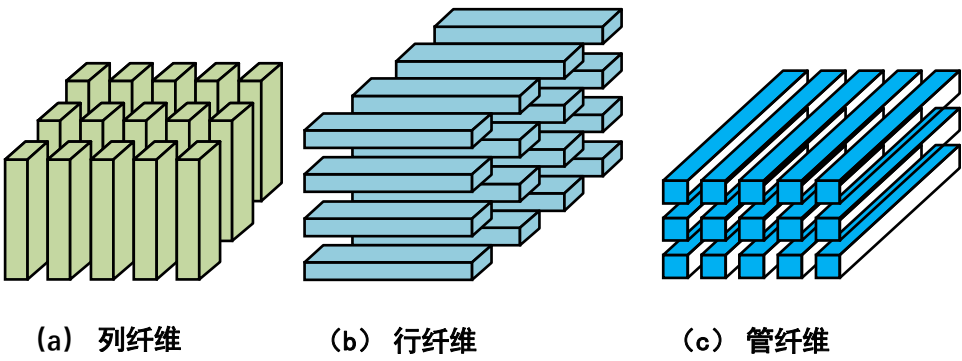


图 2-4 三阶张量的 Fiber (纤维) 示意图

在张量中用 Slice (切片) 这一概念可将张量看成不同矩阵的堆叠, 如图 2-5 所示。对于一个三阶张量  $A \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times N_3}$ , 用  $A(n_1, :, :)$ 、 $A(:, n_2, :)$  和  $A(:, :, n_3)$  分别表示三阶张量 A 的水平切片 (horizontal slice)、侧向切片 (lateral slice) 以及正面切片 (frontal slice)。

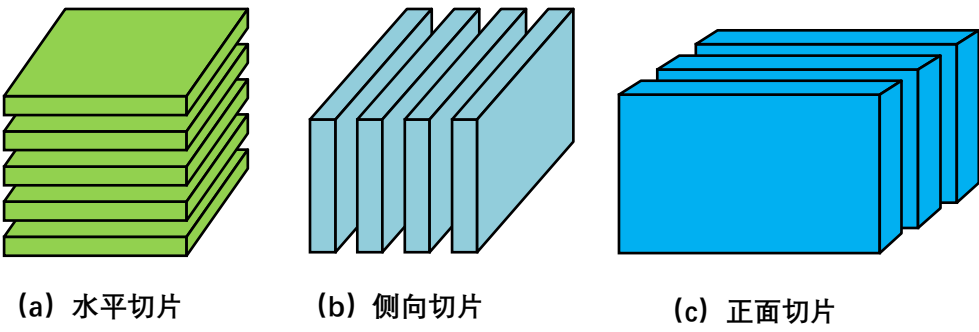


图 2-5 试件表面三个区域示意图

## 2 张量代数的常见运算法则



### (1) 张量的 mode-n 展开

若将一个张量数组的 mode-n 纤维作为列矢量, 按顺序依次排列, 最后张量被展开成矩阵的形式, 称为张量的 mode-n 展开。

可用  $X_{(n)}$  表示张量  $X$  的 mode-n 展开的结果, 式 (2-1) 给出了张量  $X$  的元素转换到矩阵  $(i_{(n)}, j)$  的映射方式。

$$j = 1 + \sum_{k=1, k \neq n}^N (i_k - 1) J_k \quad (2-1)$$

### (2) 张量与矩阵的 mode-n 乘积

若有一张量  $X \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  和矩阵  $U \in \mathbb{R}^{I_n \times J}$ , 用  $X \times_n U$  表示张量  $X$  与矩阵  $U$  的  $n$ -模积, 结果是一个大小是  $I_1 \times \dots \times I_{n-1} \times J \times I_{n+1} \times \dots \times I_N$  的张量。乘积的实质是  $A$  的每个 mode 纤维与矩阵  $U$  相乘, 则得到的张量只在 mode- $n$  上发生大小变化, 由  $I_n$  变成  $J$ 。计算方式如表达式 (2-2) 所示:

$$(X \times_n U)_{i_1 \dots i_{n-1} j i_{n+1} \dots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} x_{i_1 i_2 \dots i_N} u_{j i_n} \quad (2-2)$$

### (3) 张量的内积与范数

两个张量的内积的定义是两个张量数组对应元素的乘积, 所以进行内积运算要求两个张量的大小相同。其表达式如 (2-3) 所示。

$$\langle \chi, \gamma \rangle = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} \chi_{i_1 \dots i_N} \gamma_{i_1 \dots i_N} \quad (2-3)$$

对于任一张量  $X \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ , 其范数定义如表达式 (2-4) 所示:

$$\|\chi\|_F := \sqrt{\langle \chi, \chi \rangle} \quad (2-4)$$

### (4) 矩阵的 Kronecker 乘积, Hadamard 乘积与 Khatri-Rao 积

用  $A \otimes B$  表示任意两个矩阵  $A \in \mathbb{R}^{I \times J}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{K \times L}$  的 Kronecker 乘积, 其运算结果为大小为  $IK \times JL$  的矩阵, 如式 (2-5) 所示:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1J}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2J}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}B & a_{I2}B & \dots & a_{IJ}B \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

用  $A * B$  表示任意两个大小相同的矩阵  $A \in \mathbb{R}^{I \times J}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{I \times J}$  的 Hadamard 乘积, 其定义为两个矩阵同一位置的元素相乘, 其运算结果为大小为  $I \times J$  的矩阵, 如式 (2-6) 所示:

$$A * B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \dots & a_{1J}b_{1J} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{2J}b_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}b_{I1} & a_{I2}b_{I2} & \dots & a_{IJ}b_{IJ} \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

对于任意两个矩阵  $A \in \mathbb{R}^{I \times K}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{J \times K}$ , 用  $A \odot B$  表示它们的 *Khatri-Rao* 积, 其大小为  $(IJ) \times K$ , 按照表达式 (2-7) 进行计算:

$$A \odot B = [a_1 \otimes b_1 \quad a_2 \otimes b_2 \quad \cdots \quad a_n \otimes b_n] \quad (2-7)$$

#### (5) 张量的秩

1. (秩一张量) 对于任意一个张量  $X \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$ , 如果这个张量可以表示成如式 (2-8) 所示  $N$  个矢量  $\alpha^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n}$  的外积形式, 则称此张量为秩一张量 (rank one)。

$$X = a^{(1)} \circ a^{(2)} \cdots \circ a^{(N)} \quad (2-8)$$

式中  $\circ$  代表矢量的外积运算。

2. (张量的秩) 用  $R = \text{rank}(X)$  表示任意一个  $N$  阶张量  $X$  的秩, 它表示的是若将  $X$  表示成秩一张量的和的形式时, 所需要的秩一张量的个数的最少值。

3. ( $n$  模秩) 对于任意一张量  $X \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$ , 将它的模- $n$  进行矩阵化的结果  $X_{(n)}$  的列秩定义为  $X$  的  $n$ -模秩, 也就是说  $R_n = \text{rank}_{(n)}(X) = \text{rank}(X_{(n)})$ 。 $n$ -秩较张量的秩的优点在于, 它是唯一确定的且可以被准确地求出。

### 3 张量分解模型

本小节介绍张量分解中最常见的两种分解模型: CP 分解模型、Tucker 分解模型。

#### (1) CP 分解

CP 分解的原理是把任意一个高阶张量分解称为  $R$  个秩-1 张量之和, 因此 CP 分解又叫秩-1 分解。图 2-6 为 CP 分解的分解示意图, 分解表达式为 (2-9)。CP 分解形式很简洁但在分解过程中张量秩的大小在实际求解过程中很难被确定。

$$X \approx \sum_{r=1}^R a_r \circ b_r \circ c_r \quad (2-9)$$

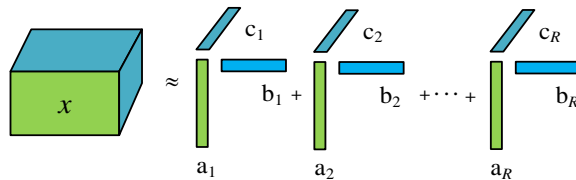


图 2-6 三阶张量的 CP 分解模型示意图

#### (2) Tucker 分解

Tucker 分解的本质是一种高阶的主成分分析, 在其分解过程中将一个张量

描述成一个核心（core）张量沿着其每个 mode 乘上一个矩阵。对于一个三阶张量  $X \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$  通过 Tucker 分解可将其分解为一个核心张量  $C \in \mathbb{R}^{P \times Q \times R}$  以及在三个 mode 上与核心张量作模乘的系数矩阵  $A \in \mathbb{R}^{I \times P}$ ， $B \in \mathbb{R}^{J \times Q}$  以及  $G \in \mathbb{R}^{K \times R}$ 。图 2-7 为 Tucker 分解的分解示意图，分解表达式如 (2-10) 所示：

$$X \approx G \times_1 A \times_2 B \times_3 C = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \sum_{r=1}^R g_{pqr} a_p \circ b_q \circ c_r \quad (2-10)$$

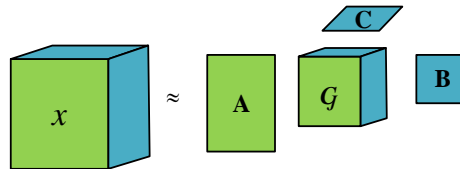


图 2-7 三阶张量的 Tucker 分解示意图