矩阵分解

对角化分解

特征值分解 EVD Eigen Value Decomposition

$A = V \Lambda V^{-1}$ https://zhuanlan.zhihu.com/p/29846048

条件：方阵，代数重数＝几何重数

矩阵A的特征向量组成矩阵 $V = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$

矩阵A的特征值组成对角矩阵 $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
AV &= A[x_1, x_2, \cdots, x_n] \\
&= [Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n] \\
&= [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n] \\
&= [x_1, x_2, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= V\Lambda
\end{aligned}
$$

$A = V\Lambda V^{-1}$

理解：对旋转、缩放两种效应的归并

奇异值分解 SVD Sigular Value Decomposition

$A = U\Sigma V^T$ 针对非方阵

$AV = U\Sigma$ → 对角矩阵

酉矩阵 酉矩阵

$U^TU = I$, $V^TV = I$

V由 A^TA 的特征向量张成

https://zhuanlan.zhihu.com/p/29846048

$$A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T) = V\Sigma U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$$

V^T 包含了右奇异向量，代表列空间

U由 AA^T 的特征向量张成

$$AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T = U\Sigma^2 U^T$$

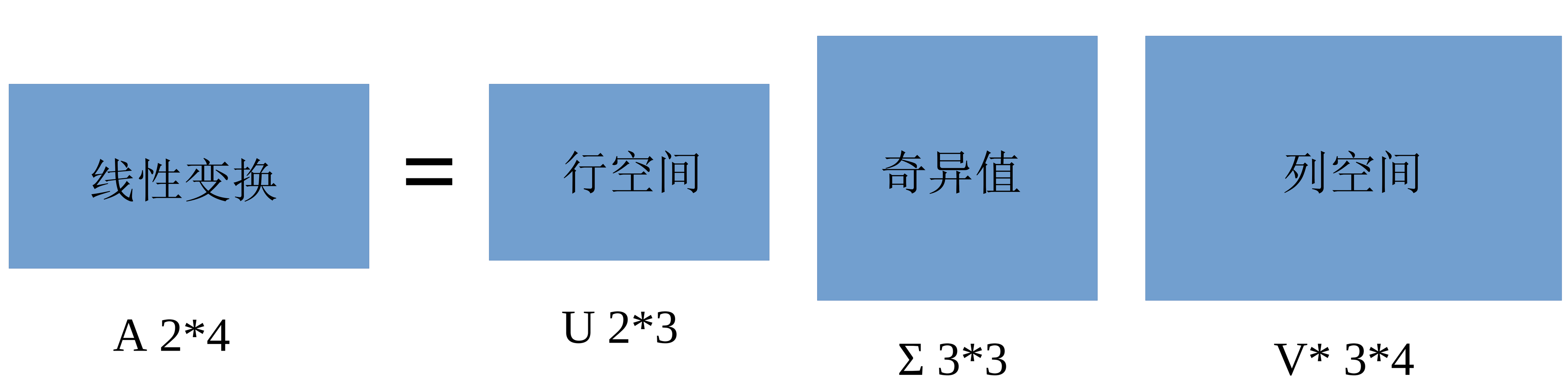
U包含了左奇异向量，代表行空间

构成特征空间的基

Σ^2 对角线上是 A^TA 的特征值

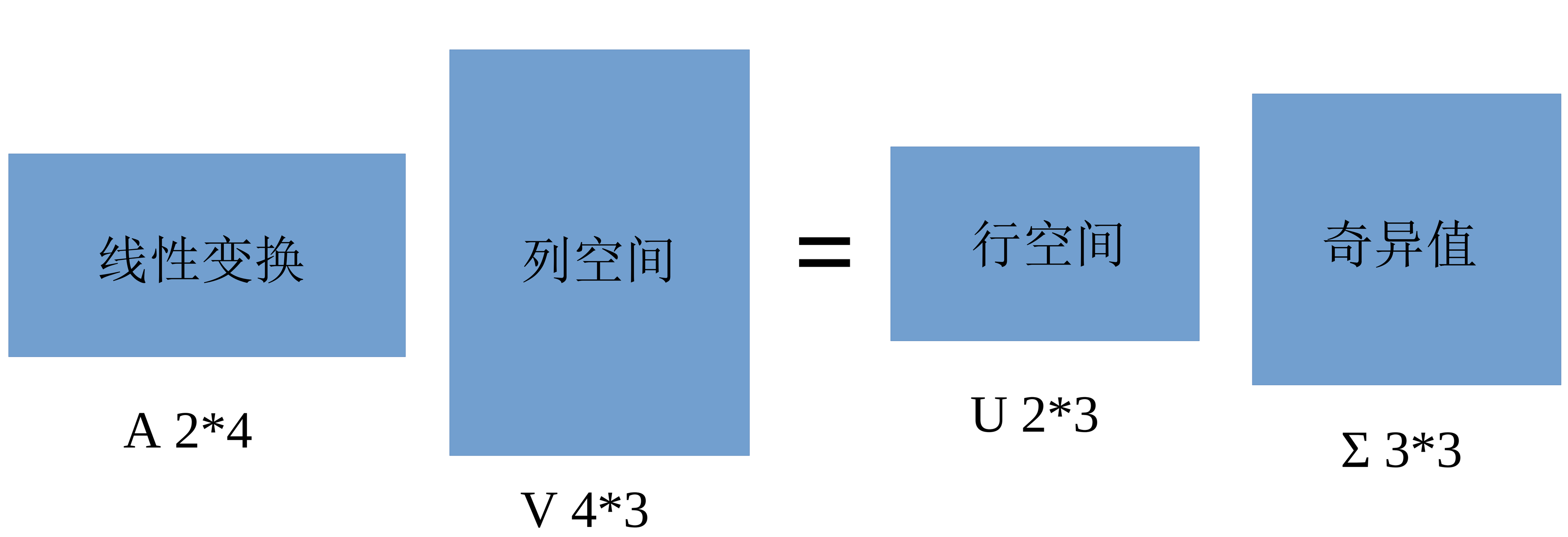
开方得到奇异值

奇异值表示特征空间的重要性



理解：将列空间中的一个向量旋转并缩放到行空间中去，缩放因子就是各个奇异值。如果列空间维度比行空间大，则表示还进行了投影。

https://www.zhihu.com/question/19666954



QR分解

$A = Q\,R$ 　　非奇异，非方阵

Q：酉矩阵　R：上三角矩阵

$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$

施密特正交化，将列向量线性组合得到标准正交基 $Q = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]$

$$\begin{cases} \beta_1 = b_{11}\alpha_1 \\ \beta_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_n = b_{1n}\alpha_1 + \cdots + b_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$AB = Q$

$A = QB^{-1}$