

波浪能最大输出功率设计

摘要

问题旨在研究不同阻尼系数在特定条件下对波浪能装置平均输出功率的影响。本文在求解过程中通过受力分析得到浮子与振子的运动模型，基于四阶 Runge-Kutta 算法求解得到微分方程组的数值解，基于从好点出发法优化决策变量使阻尼器平均功率最大。

针对问题一，进行受力分析，运用牛顿第二定律建立浮子与振子运动模型。利用四阶 Runge-Kutta 算法求得方程组在前 40 个震荡周期每隔 0.2 s 的数值解，得出浮子与振子在节点时刻相对于平衡位置的位移与速度。绘图发现浮子与振子经过一段时间的姿态调整后运动呈简谐运动。

针对问题二，视阻尼系数或比例系数与幂指数为决策变量，稳态下的 PTO 最大平均功率为目标函数，建立非线性规划模型。经过大步长试验后发现平均功率为单峰函数，因此，对于阻尼系数恒定的情形，本文采用黄金分割法进行求解；针对变阻尼系数的情形，采用从好点出发法不断缩小搜索范围。计算得到阻尼系数恒定时，最大平均功率为 229.4678 W，此时的阻尼系数为 37265.4646 N·s/m；当阻尼系数与相对速度的幂相关时，最大平均功率为 229.4937 W，此时比例系数为 61229.3115，幂指数为 0.2093。观察发现，若阻尼系数与浮子振子相对速度相关，能够提高 PTO 系统平均输出功率。

针对问题三，本文分开考虑垂荡与纵摇，两者通过弹簧耦合。在问题一模型的基础上考虑纵摇运动：求出浮子与振子的质心，并利用平行轴定理求得相对于转轴的转动惯量，重新进行力矩受力分析，并将力矩作用点统一。基于刚体转动定律建立浮子与振子运动模型。联立 8 个微分方程，利用四阶 Runge-Kutta 算法求出前 40 个震荡周期每隔 0.2 s 的数值解，得出浮子与振子相对于平衡位置的（角）位移、（角）速度。绘图发现浮子与振子经过一段时间的姿态调整后垂荡、纵摇运动均呈简谐振动。

针对问题四，在问题二模型的基础上考虑纵摇运动，构建非线性规划模型，视两阻尼器平均功率之和为决策变量。以 PTO 最大平均功率为目标函数。沿用问题二的方法进行求解。求解得出的最大平均功率为 378.0834 W，此时直线阻尼器的阻尼系数为 45547.4789 N·s/m，旋转阻尼器的阻尼系数为 63644.1059 N·m·s。

本文对问题一、问题三浮子、振子稳态运动进行傅里叶分析，发现运动频率与波浪频率一致。

关键词：牛顿第二定律；刚体转动定律；多元微分方程组；四阶 Runge-Kutta 算法；从好点出发法

一、问题重述

波浪能转置是一类能够利用波浪能转换为其他能量的转置，其主要结构包含浮子、振子、中轴与能量输出装置（PTO）。

考虑海水无粘且无旋，浮子受到周期性的波浪激励力（矩）、附加惯性力（矩）、兴波阻尼力（矩）与静水恢复力（矩）。忽略中轴、底座、隔层和 PTO 的质量与各类摩擦。

问题一：假定浮子在波浪作用下仅做垂荡运动，振子沿中轴往复运动，建立浮子与振子的振动模型。初始时刻浮子与振子处于平衡位置，利用附件参数，计算下述两种情况下浮子与振子在受到波浪激励力 $f \cos \omega t$ 作用下前 40 个周期内每隔 0.2 s 的垂荡位移与速度：

- （1）直线阻尼器的阻尼系数为常数 10 000 N·s/m；
- （2）直线阻尼器的阻尼系数与浮子和振子相对速度的绝对值的幂成正比，比例系数为 10000，幂指数为 0.5。

问题二：仍假定浮子做垂荡运动，针对下述两种情况确定直线阻尼器的最优阻尼系数，使得 PTO 的平均输出功率最大：

- （1）阻尼系数为常量，在区间[0,100 000]内取值；
- （2）阻尼系数与浮子和振子相对速度的绝对值的幂成正比，比例系数在区间[0,100 000]内取值，幂指数在区间[0,1]内取值。

问题三：波浪能转置还安装有扭转弹簧与旋转阻尼器，中轴铰接于中轴底座中心。在波浪能作用下，浮子做摇荡运动，并带动中轴转动。振子随中轴转动，同时沿中轴滑动。扭转弹簧的扭矩与浮子和振子的相对角位移成正比，比例系数为扭转弹簧的刚度；旋转阻尼器产生的扭矩与浮子和振子的相对角速度成正比，比例系数为其阻尼系数。考虑浮子仅做垂荡与纵摇运动，建立浮子与振子的振动模型。计算浮子与振子在波浪激励力和波浪激励力矩 $f \cos \omega t$ ， $L \cos \omega t$ 作用下前 40 个周期内时间间隔为 0.2 s 的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。

问题四：在问题三的条件下考虑直线阻尼器与旋转阻尼器的阻尼系数在区间[0,100 000]内取值时，计算最大输出功率与此时的最优阻尼系数。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一需要在两种情况下计算浮子与振子的位移与速度随时间的关系，并给出前 40 个周期每隔 0.2 s 浮子与振子的垂荡位移与速度。隔离两者做受力分析，利用牛顿第二定律建立运动学微分方程组，代入浮子与振子相关设计参数，使用四阶 Runge-Kutta 算法计算微分方程的数值解。

2.2 问题二的分析

问题二要求在两种情况下优化直线阻尼器相关参数，使 PTO 的平均输出功率最大。在问题一的基础上计算系统稳定时不同阻尼系数的平均输出功率，并将其离散化以得到目标函数，建立非线性规划模型。由于循环求解微分方程需要耗费大量时间，经过大步长寻优后寻找规律，针对两小问设计合适的算法进行求解。

2.3 问题三的分析

问题三在问题一的基础上引入纵摇运动，要求建立浮子与振子的运动模型。将装置的垂荡与纵摇运动分开考虑。垂荡方面可以沿用问题一的模型进行求解；纵摇方面需要重新进行力矩受力分析，利用平行轴定理得到浮子相对于质心的转动惯量与振子相对于转轴的转动惯量，利用刚体转动定律建立力学参数与运动学参数的联系。综合两者，得出描述垂荡与纵摇的运动微分方程组，两者在弹簧长度上相互联系，联立形成合成运动微分方程组模型，采用四阶 Runge-Kutta 算法求数值解。

2.4 问题四的分析

问题四需要优化两阻尼系数，使两阻尼器平均输出功率的最大值。对于直线阻尼器的输出功率可以沿用问题二的模型，而对于旋转阻尼器则需要得到包含力矩的平均功率表达式。对两功率求和得目标函数，使用问题二求解方法找出输出功率最大值与对应的阻尼器阻尼系数。

三、模型假设

1. 忽略转轴与中轴底座高度，视中轴铰接于隔层中心；
2. 装置做纵摇运动时，忽略浮子与振子质心的水平坐标差；
3. 假设问题三与四中垂荡与纵摇运动仅通过弹簧长度耦合。

四、符号说明

符号	符号意义	单位
x	相对于平衡位置的位移	m
θ	相对于平衡位置的角位移	rad
θ'	浮子与振子的相对角位移	rad
m	质量	kg
I	转动惯量	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
ρ	海水的密度	kg/m^3
g	重力加速度	$\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$
k	弹簧刚度	N/m
β	直线阻尼器的阻尼系数	N·s/m
γ	旋转阻尼器的阻尼系数	N·s·m/rad
K	扭转弹簧刚度	N·m
G	静水恢复力矩系数	N·m
f	波浪激励力振幅	m
L	波浪激励力矩振幅	N·m
λ	垂荡兴波阻尼系数	N·s/m
μ	纵摇兴波阻尼系数	N·s/m
ω	波浪频率	s^{-1}

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 模型建立

1. 受力分析

分别对浮子与振子进行受力分析，如图 1 所示.

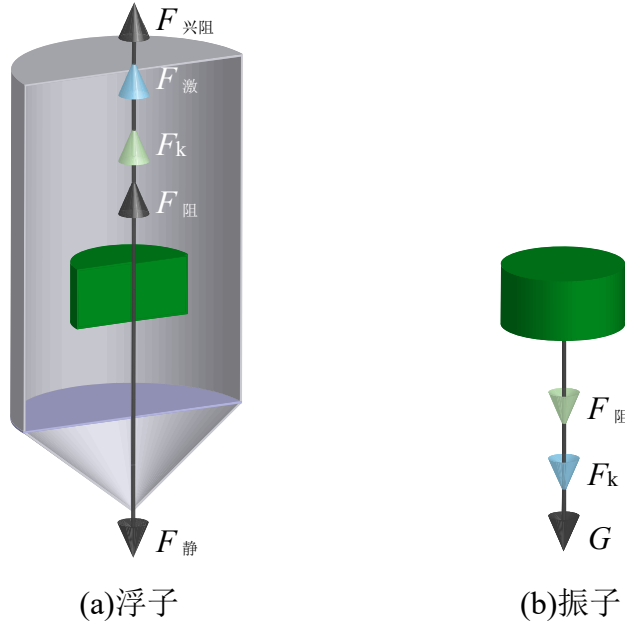


图 1 问题一、二浮子与振子受力的示意图

①浮子的受力分析

取向上为正方向，对浮子而言，分别受兴波阻尼力 $F_{兴阻}$ 、垂荡激励力 $F_{激}$ 、弹簧弹力 F_k 、阻尼器阻力 $F_{阻}$ 、静水恢复力 $F_{静}$ ，其中静水恢复力包含自身所受重力与浮力.

设初始时刻弹簧伸长量为 x_0 . 此刻，视浮子受共线的重力、浮力与弹簧弹力. 由于三者受力平衡，有等式

$$m_1 g + kx_0 = \rho g V_{排}$$

成立，其中 $V_{排}$ 为排开水的体积. 当浮子位移为 x_1 时，静水恢复力

$$\begin{aligned} F_{静} &= \rho g V_{排}' - m_1 g \\ &= -\rho g x_1 \pi r^2. \end{aligned}$$

经验证，水平面将一直与浮子圆柱部分相交，故上式中 $r = R_0$.

根据题意，对于浮子受到的其它力，有

$$\begin{aligned}
F_{\text{兴阻}} &= \lambda \dot{x}_1, \\
F_{\text{激}} &= f \cos \omega t, \\
F_k &= k(x_2 - x_1), \\
F_{\text{阻}} &= \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1),
\end{aligned}$$

式中 \dot{x} 表示位移对时间的一阶导数，即速度。

②振子的受力分析

振子受到的重力

$$G = m_2 g$$

与初始状态下弹簧弹力相抵。由牛顿第三定律，振子还受到弹簧弹力与阻尼器阻力，大小与 F_k 、 $F_{\text{阻}}$ 相对，方向相反。

2. 浮子与振子运动微分方程组模型的建立

由牛顿第二定律

$$F_{\text{合}} = ma$$

得出描述浮子与振子的运动微分方程。初始时刻下浮子与振子位移、速度均为零，得浮子与振子的运动模型

$$\begin{cases}
f \cos \omega t - \rho g x_1 \pi R_0^2 + k(x_2 - x_1) + \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \lambda \dot{x}_1 = (m_1 + m_f) \ddot{x}_1, \\
-k(x_2 - x_1) - \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2 \ddot{x}_2, \\
x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0.
\end{cases} \quad (1)$$

式中 m_f 为垂荡附加质量。

5.1.2 模型求解与结果分析

1. 模型求解

对于常阻尼系数的情形，(1)式中 β 取常量 10000 N·s/m；对于变阻尼系数的情形，

$$\beta = 10000 \sqrt{|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|}.$$

使用四阶 Runge-Kutta 算法求解(1)式微分方程组。对(1)式的二阶微分方程组进行降阶，转换成一阶微分方程组

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_3, \\
\dot{x}_2 = x_4, \\
\dot{x}_3 = \frac{f \cos \omega t - \rho g x_1 \pi R_0^2 + k(x_2 - x_1) + \beta(x_4 - x_3) - \lambda x_3}{m_1 + m_f}, \\
\dot{x}_4 = \frac{-k(x_2 - x_1) - \beta(x_4 - x_3)}{m_2}, \\
x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0.
\end{cases} \quad (2)$$

取步长恒为 $h = 0.2 \text{ s}$ ，由四阶 Runge-Kutta 方法经典格式^[1]得出递推公式

$$x_i(t+h)=x_i(t)+\frac{h}{6}\left(K_1+2K_2+2K_3+K_4\right), i=1,2,3,4,$$

其中

$$\begin{cases} K_1=x_i(t), \\ K_2=x_i\left(t+\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{2}K_1, \\ K_3=x_i\left(t+\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{2}K_2, \\ K_4=x_i(t+h)+hK_3. \end{cases}$$

不断递推直至时间 t 达到 40 个波浪周期所需时间.

2. 浮子与振子垂荡位移与速度结果

针对两种情形求解得出 10 s、20 s、40 s、60 s 和 100 s 时两种情况下的浮子与振子垂荡位移和速度，如表 1 与表 2 所示.

表 1 常阻尼系数情形的浮子与振子的垂荡位移与速度求解结果

时间(s)	浮 子		振 子	
	垂荡位移(m)	垂荡速度(m·s ⁻¹)	垂荡位移(m)	垂荡速度(m·s ⁻¹)
10	-0.19059	-0.64056	-0.21155	-0.69361
20	-0.59053	-0.24047	-0.63407	-0.27229
40	0.285456	0.313436	0.29661	0.333248
60	-0.31444	-0.47911	-0.33135	-0.51556
100	-0.08359	-0.60407	-0.08404	-0.64304

表 2 变阻尼系数情形的浮子与振子的垂荡位移与速度求解结果

时间(s)	浮 子		振 子	
	垂荡位移(m)	垂荡速度(m·s ⁻¹)	垂荡位移(m)	垂荡速度(m·s ⁻¹)
10	-0.20583	-0.65279	-0.23463	-0.69823
20	-0.61125	-0.25419	-0.66077	-0.27589
40	0.268708	0.295805	0.280324	0.313936
60	-0.32725	-0.49125	-0.3493	-0.52414
100	-0.08832	-0.60974	-0.09376	-0.64955

3. 结果分析

针对两种情形的浮子与振子在一定时间内的运动情况绘得图 2、图 3.

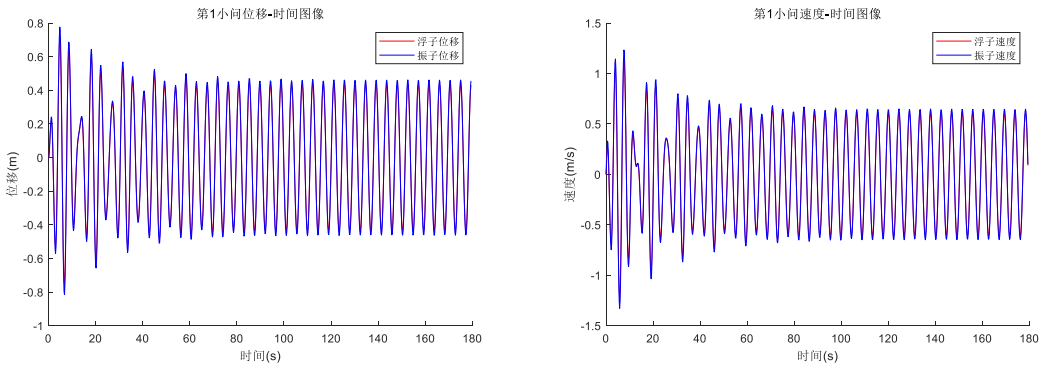


图 2 常阻尼系数情形的浮子与振子的垂荡位移与速度随时间变化图

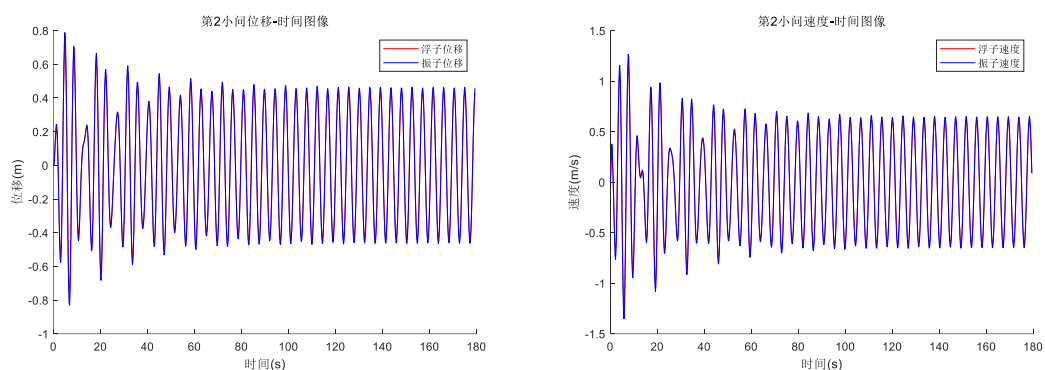


图 3 变阻尼系数情形的浮子与振子的垂荡位移与速度随时间变化图

观察发现，浮子与振子进行一段时间的调整后达到稳态。

4. 模型检验

对 100 s 后的数据进行傅里叶分析，观察频谱（图 4）发现两小问浮子、振子位移、速度具有相似的频率，其中幅值最大的角频率为

$$\omega' = 0.09 \times 5 \times \pi = 1.4137 \text{ rad/s},$$

接近波浪激励力频率。因此，推断稳态的运动主要受波浪激励力影响。

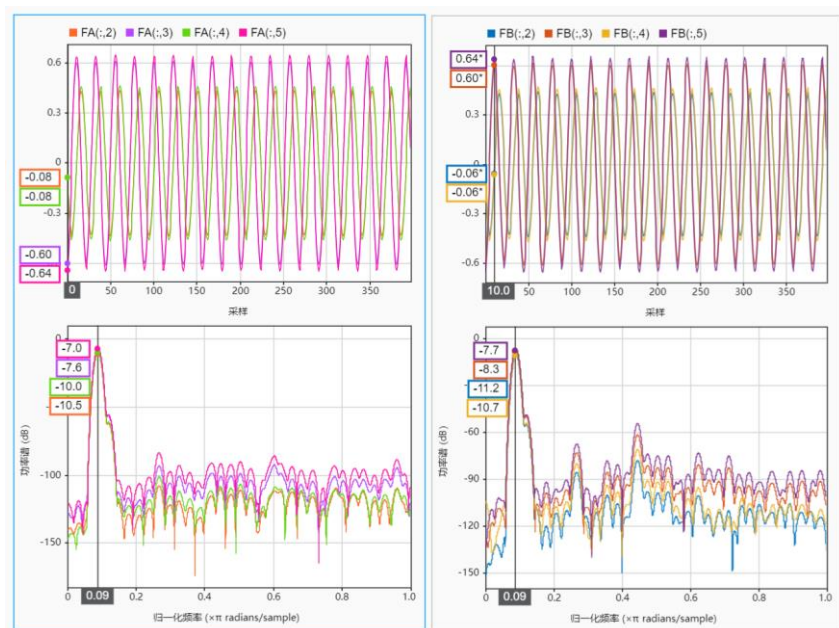


图 4 问题一傅里叶分析结果图

5. 2 问题二模型的建立与求解

5. 2. 1 模型的建立

1. 决策变量

对于常阻尼系数的情形，阻尼系数 β 是该问题的决策变量；对于变阻尼系数的情形，阻尼系数由比例系数 α 与幂指数 k 共同确定：

$$\beta = \alpha u^k. \quad (3)$$

当(3)式中 k 取 0 时即为常阻尼系数的情形，故将两情形下中的 β 同时用(3)式表述：

$$\beta = \alpha u^k, \alpha \in [0, 100\ 000], k = 0 \text{ 或 } k \in [0, 1]. \quad (4)$$

2. 目标函数

(1) 平均功率的确定

对于变力的瞬时功率由公式

$$P = Fv$$

定义．在本题中， $F = F_{\text{阻}}, v = |\dot{x}_2 - \dot{x}_1|$ ．

将阻尼器产生的力代入上式可得

$$P = F_{\text{阻}} v = \beta u^2,$$

其中， $u = |\dot{x}_2 - \dot{x}_1|$ 为浮子与振子的相对速度的绝对值．

平均功率为

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} Fv dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \beta u^2 dt. \quad (5)$$

(2) 积分离散化

为简化计算过程，将(5)式离散化以求数值解，此时的平均功率

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{T} \sum_{i=t_0/\Delta t}^{(t_0+T)/\Delta t} \alpha [\dot{x}_2(i) - \dot{x}_1(i)]^{2+k} \Delta t, \quad (6)$$

式中 Δt 为数值解中时间 t 的步长，求解过程中取 $\Delta t = 0.01$ s．

3. 约束条件

(6)式中浮子与振子的速度满足系统约束条件，即(1)式。

综上所述，根据题设条件建立含定义域约束的非线性规划模型：

$$\max \bar{P}_1 = \frac{1}{T} \sum_{i=t_0/\Delta t}^{(t_0+T)/\Delta t} \alpha [\dot{x}_2(i) - \dot{x}_1(i)]^{2+k} \Delta t, \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} f \cos \omega t - \rho g x_1 \pi R_0^2 + k(x_2 - x_1) + \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \lambda \dot{x}_1 = (m_1 + m_f) \ddot{x}_1, \\ -k(x_2 - x_1) - \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2 \ddot{x}_2, \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0. \end{cases}$$

5. 2. 2 模型求解与结果分析

仅考虑浮子与振子处于稳定垂荡状态时的功率，观察图 2 与图 3 发现在 $t=100$ s 后，两者基本处于稳定状态，故取(5)式中 $t_0=100$ s．

由于浮子与振子的振动频率等于周期性驱动力的频率，即波浪频率 ω ，为使(7)式累加区间 $[t_0, t_0 + T]$ 恰好包含整数个振动周期，取

$$T = 100 \times \frac{2\pi}{\omega}$$

使积分区间包括 100 个振动周期。

分别针对两小问的(7)式计算最大功率及功率取最大值时的比例系数与幂指数。首先按变阻尼系数情形进行线性搜索，取步长 $\Delta k = 0.1, \Delta \alpha = 10\ 000$ 。图 5 示此过程平均功率与两阻尼系数关系。

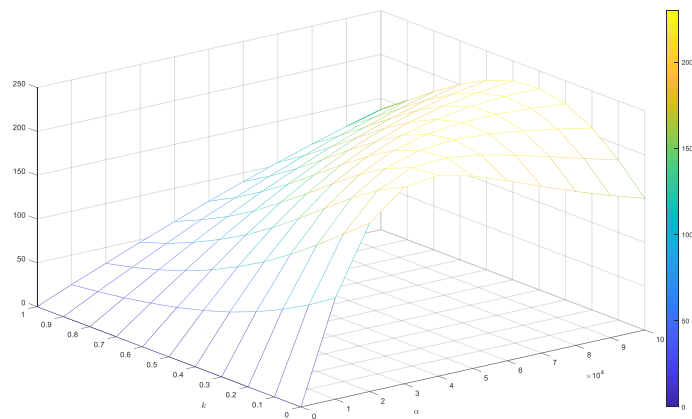


图 5 大步长搜索结果

观察图 5 发现，不论是否限制 $k=0$ ，功率都是关于 α 与 k 的单峰函数。因此，针对常阻尼系数的情形，采用黄金分割法进行求解；针对变阻尼系数的情形，采用从好点出发法求解。

1. 常阻尼系数情形下的模型求解

(1) 求解过程

采用黄金分割法逐渐缩小阻尼系数的取值范围，用最少的试验次数求出较高精度的解。^[2]具体算法如图 6 所示。

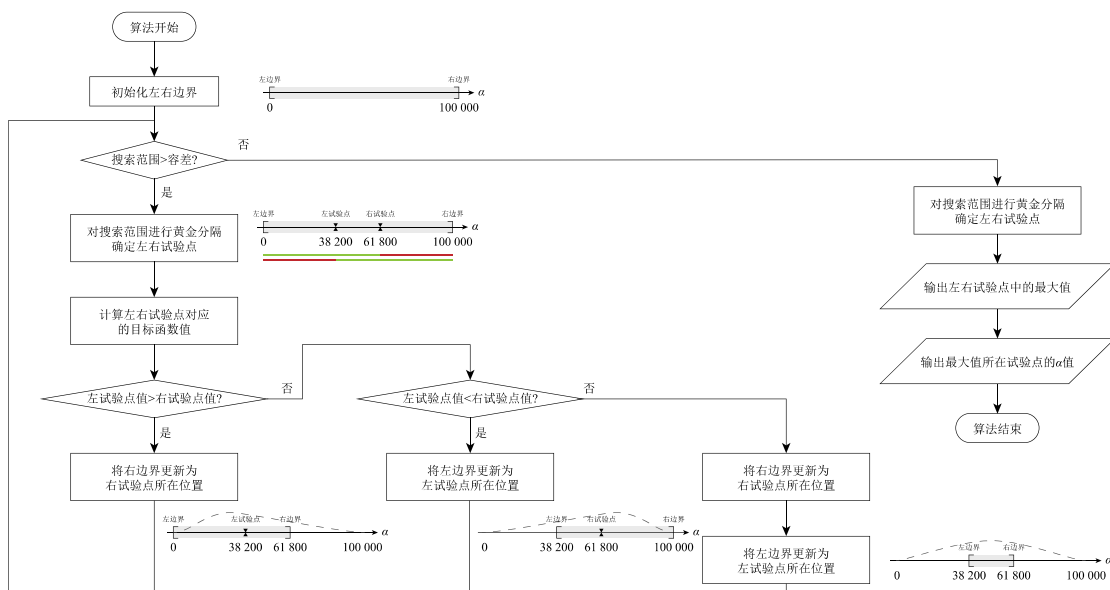


图 6 问题二第一小问算法流程图

求解过程中，取容差为 0.001，使计算所得平均功率的最大值保证小数点后三位最大。

(2) 结果

第一小问求解所得结果如表 3 所示。

表 3 问题二单因素情形求解结果

阻尼系数	平均功率
37265.4646 N·s/m	229.4678 W

2. 变阻尼系数情形下的模型求解

(1) 求解过程

由于变阻尼系数情形有两个决策变量，无法简单地使用黄金分割法进行求解，因此使用从好点出发法^[3]不断缩小范围，具体算法如图 7 所示。图中的单因素优化仍使用黄金分割法求解。

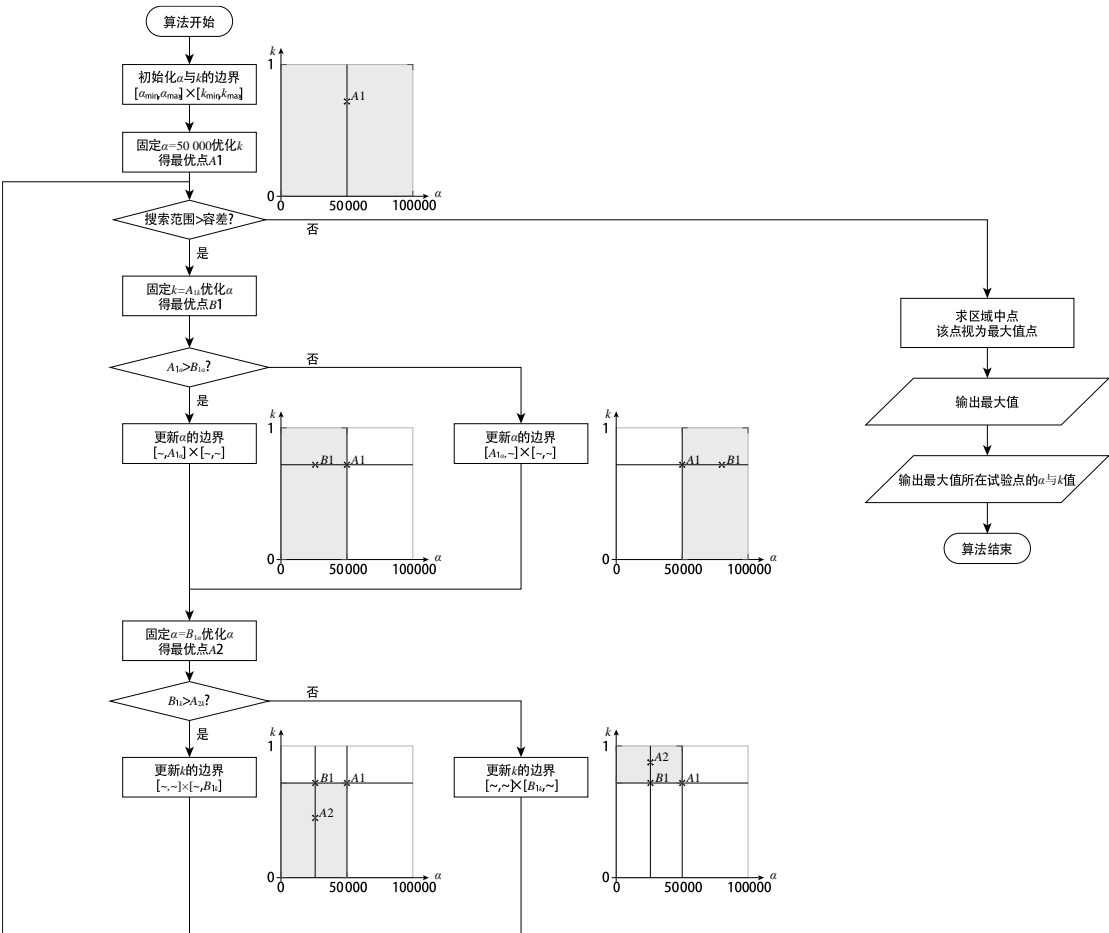


图 7 问题二第二小问算法流程图

(2) 结果

第二小问求解所得结果如表 4 所示。

表 4 问题二双因素情形求解结果

比例系数	幂指数	平均功率
61229.3115	0.2093	229.4937 W

3. 结果分析

对照两种情形平均输出功率最大值，发现变阻尼系数情形下的最大值不小于常阻尼系数情形下的最大值，与理论相符。同时发现，若阻尼系数与浮子振子相对速度有关，能够提高 PTO 系统平均输出功率。

5.3 问题三模型的建立与求解

5.3.1 模型的建立

1. 力矩分析

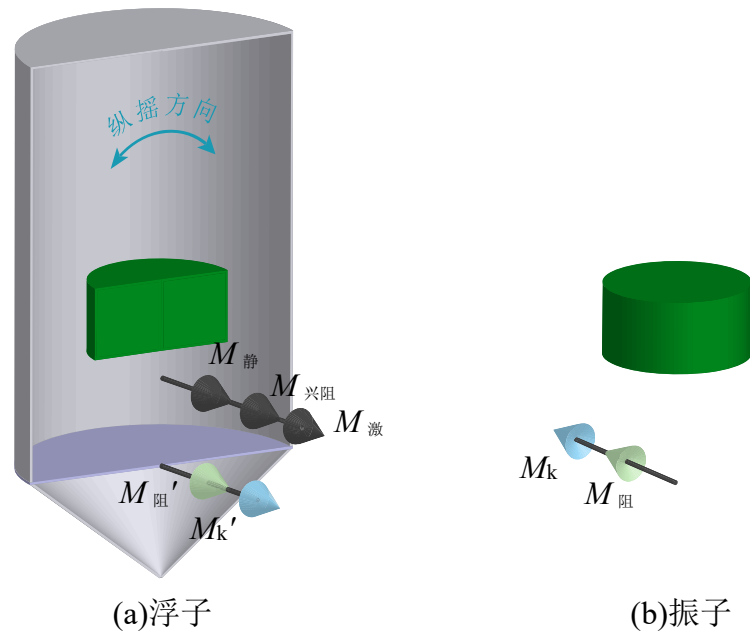


图 8 浮子与振子受旋转力矩作用点示意图

①振子的力矩分析

对于振子而言，其受到扭转弹簧的扭矩与旋转阻尼器的扭矩都作用于转轴上，大小为

$$\begin{aligned} M_{\text{阻}} &= \dot{\theta} \gamma, \\ M_{\text{k}} &= \theta K. \end{aligned}$$

②浮子的力矩分析

对于浮子而言，其受到静水恢复力矩、兴波阻尼力矩、波浪激励力矩的作用点位于系统质心 r_c 上，而受到振子的反作用力矩作用在转轴上。为了便于相加，需要统一作用点。

由于外力对浮子的实际作用点为浮子的质心，力的大小为

$$F = \frac{M}{|r_{z1} - r_z|},$$

则这些力在转轴上产生的力矩

$$M' = F \cdot r_{z1} = M \frac{|r_{z1} - r_z|}{r_{z1}}.$$

r_z 是在坐标系中系统质心的竖坐标. 计算过程中, 忽略浮子与振子的质心在水平面上的位置差. 因此,

$$r_z = \frac{m_1 r_{z1} + m_2 r_{z2}}{m_1 + m_2}.$$

设力矩修正系数

$$\delta = \frac{|r_{z1} - r_z|}{r_{z1}},$$

则浮子在转轴处受到的力矩大小依次为

$$M_{\text{阻}} = \dot{\theta} \gamma,$$

$$M_k = \theta K,$$

$$M_{\text{静}}' = \delta \theta_1 G,$$

$$M_{\text{兴阻}}' = \delta \dot{\theta}_1 \mu,$$

$$M_{\text{激}}' = \delta L \cos \omega t.$$

2. 浮子与振子合成运动模型的建立

对于垂荡运动而言, (1)式仍然成立.

对于纵摇运动而言, 牛顿第二定律有力矩表示形式, 即刚体转动定律:

$$M = I \ddot{\theta}.$$

分别对浮子与振子计算合力矩, 并与(1)式联立, 得两者运动微分方程模型

$$\begin{cases} f \cos \omega t - \rho g x_1 \pi R_0^2 + k(x_2 - x_1) + \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \lambda \dot{x}_1 = (m_1 + m_f) \ddot{x}_1, \\ -k(x_2 - x_1) - \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2 \ddot{x}_2, \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0, \\ \delta \theta_1 G + \delta \dot{\theta}_1 \mu + \delta L \cos \omega t - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \gamma - (\theta_1 - \theta_2) K = (I_1 + I_f) \ddot{\theta}_1, \\ (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \gamma + (\theta_1 - \theta_2) K = I_2 \ddot{\theta}_2, \\ \theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = 0, \dot{\theta}_2(0) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

在(8)式中, 部分参数与弹簧长度 d 有关, 由(1)式可解得

$$d = d_0 + (x_2 - x_1).$$

5.3.2 模型求解与结果分析

1. 模型求解

以隔层中心为原点，沿轴向上为正方向建立一维坐标系。

(1) 质心的计算

浮子的表面积

$$S = 2\pi R_0^2 + 2\pi R_0 h_1 + \pi R_0 \sqrt{R_0^2 + h_2^2},$$

面密度

$$\sigma = \frac{m_1}{S},$$

故浮子的质心为

$$\begin{aligned} r_{z1} &= \frac{\sigma}{m_1} \left[\int_0^{h_1} 2\pi R_0 dz + \int_{-h_2}^0 \frac{2\pi R_0}{h_2} \left(1 + \frac{R_0}{h_2} \right) z(z + h_2) dz + h_1 \pi R_0^2 \right] \\ &= \frac{\sigma}{m_1} \left[\pi R_0 h_1^2 + \frac{2\pi R_0}{h_2} \left(1 + \frac{R_0}{h_2} \right) \left(\frac{1}{3} h_2^3 - \frac{1}{2} h_2^3 \right) + h_1 \pi R_0^2 \right]. \end{aligned}$$

振子的质心

$$r_{z2} = d + \frac{h_3}{2},$$

其中 d 为弹簧长度。

计算得到的质心位置

$$r_{z1} = 1.2413\text{m}, \quad r_{z2} = d + 0.25\text{m};$$

(2) 转动惯量的计算

对于实心圆柱体，当转动轴过质心且与圆柱体轴垂直时，该圆柱体的转动惯量可由公式

$$I_0 = \frac{1}{4} M a^2 + \frac{1}{3} M b^2$$

计算得出。式中 a 为圆柱体半径， b 为圆柱体高的一半， M 为圆柱体总质量。

根据平行轴定理，转动物体对任意轴的动惯量等于过物体质心且与此轴平行的轴的转动惯量与物体质量和两轴垂直距离平方之积的和^[4]，即振子以转轴为轴的转动惯量

$$I_2 = \frac{1}{4} m_2 R_0^2 + \frac{1}{3} m_2 \left(\frac{h_3}{2} \right)^2 + m_2 \left(d + \frac{h_3}{2} \right)^2.$$

对于浮子而言，其转动惯量是顶部与隔层上的圆盘、上端圆柱体壳、下端圆锥侧壳组成，这些部分的转动惯量依次是

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{4} m R_0^2 + m(h_1 - r_{z1})^2 + \frac{1}{4} m R_0^2 + m r_{z1}^2 \\ &= (\sigma \pi R_0^2) \left(\frac{1}{2} R_0^2 + (h_1 - r_{z1})^2 + r_{z1}^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \int_0^{h_1} \left[\frac{1}{2} R_0^2 + (z - r_{z1})^2 \right] \sigma 2\pi R_0 dz \\
&= \pi R_0^3 \sigma h_1 + 2\pi R_0 \sigma \left[\frac{(h_1 - r_{z1})^3}{3} + \frac{r_{z1}^3}{3} \right], \\
I_{13} &= 2\pi \sigma R_0 \int_0^{h_2} \left[\frac{1}{2} \left(R_0 \frac{h_2 - z}{h_2} \right)^2 + (z + r_{z1})^2 \right] \frac{h_2 - z}{h_2} dz.
\end{aligned}$$

因此，浮子的转动惯量

$$I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13}. \quad (9)$$

计算所得转动惯量为

$$I_1 = 8.0132 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_2 = 2433 \left(d + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{10543}{16} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

(3) 微分方程的求解

对(8)式降阶，得

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_3, \\
\dot{x}_2 = x_4, \\
\dot{x}_3 = \frac{f \cos \omega t - \rho g x_1 \pi R_0^2 + k(x_2 - x_1) + \beta(x_4 - x_3) - \lambda x_3}{m_1 + m_f}, \\
\dot{x}_4 = \frac{-k(x_2 - x_1) - \beta(x_4 - x_3)}{m_2}, \\
\dot{\theta}_1 = \theta_3, \\
\dot{\theta}_2 = \theta_4, \\
\dot{\theta}_3 = \frac{\delta \theta_1 G + \delta \theta_3 \mu + \delta L \cos \omega t - (\theta_4 - \theta_3) \gamma - (\theta_2 - \theta_1) K}{I_1 + I_f}, \\
\dot{\theta}_4 = \frac{(\theta_4 - \theta_3) \gamma + (\theta_2 - \theta_1) K}{I_2}, \\
x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0, \\
\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = 0, \dot{\theta}_2(0) = 0.
\end{cases} \quad (10)$$

与问题一求解过程相似，通过四阶 Runge-Kutta 算法求解(10)式的微分方程组。

2. 结果

计算所得浮子与振子在制定时刻的垂荡、纵摇（角）位移、（角）速度如表 5、表 6 所示。

表 5 浮子垂荡与纵摇运动参数

时间(s)	垂 荡		纵 摇	
	垂荡位移	垂荡速度	纵摇角位移	纵摇角速度

	(m)	(m·s ⁻¹)	(rad)	(rad·s ⁻¹)
10	-0.52827	0.96985	-0.00035	0.00008
20	-0.70481	-0.26931	-0.00011	-0.00029
40	0.36936	0.75758	0.00007	0.00069
60	-0.32067	-0.72176	0.00000	0.00052
100	-0.05015	-0.94669	-0.00024	-0.00038

表 6 振子垂荡与纵摇运动参数

时间(s)	垂 荡		纵 摇	
	垂荡位移 (m)	垂荡速度 (m·s ⁻¹)	纵摇角位移 (rad)	纵摇角速度 (rad·s ⁻¹)
10	-0.59873	1.03820	-0.00040	0.00006
20	-0.77229	-0.31903	-0.00010	-0.00030
40	0.39265	0.84496	0.00005	0.00067
60	-0.34142	-0.79932	0.00000	0.00050
100	-0.04261	-1.03653	-0.00028	-0.00035

3. 结果分析

针对浮子与振子在一定时间内的垂荡与纵摇运动情况绘得图 9.

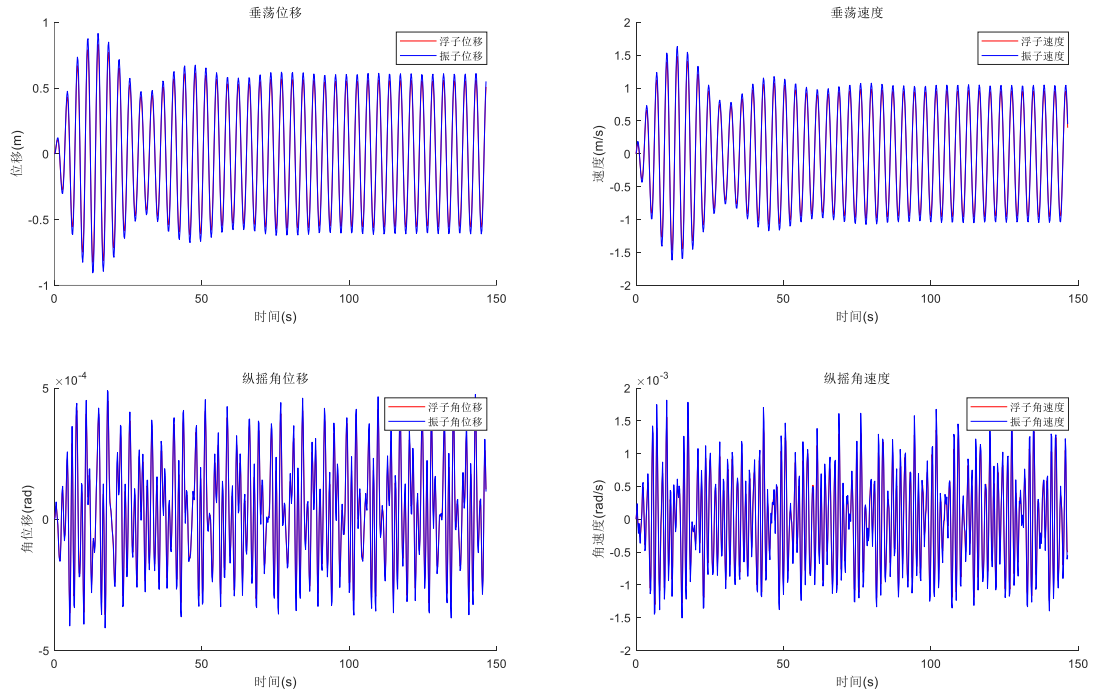


图 9 浮子与振子的垂荡、纵荡（角）位移与（角）速度随时间变化图

与问题一类似，浮子与振子进行一段时间的调整后达到稳态.

4. 模型检验

对 100 s 后的数据进行傅里叶分析，观察频谱发现浮子、振子的位移、角位移、速度、角速度具有相似的频率，其中幅值最大的角频率为

$$\omega' = 0.11 \times 5 \times \pi = 1.7279 \text{ rad/s},$$

接近入射波浪频率. 因此，推断不论是垂荡运动还是纵摇运动，稳态阶段的运

动主要受波浪影响。

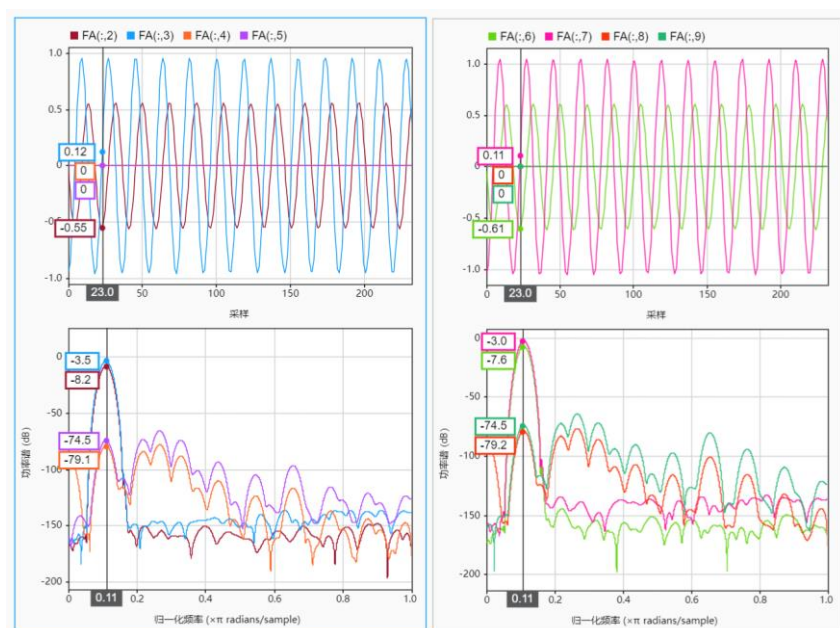


图 10 问题三傅里叶分析结果图

5.3.3 灵敏性分析

考虑到模型中忽略了浮子与振子质心在水平方向的差，会对系统质心造成一定影响。现对系统质心竖坐标 r_z 施加 $\pm 1\%$ 扰动检验模型的可靠性。

此时系统质心竖坐标

$$r_z = \frac{m_1 r_{z1} + m_2 r_{z2}}{m_1 + m_2} \times (100\% \pm 1\%) .$$

扰动前后浮子与振子的振动规律如图 11 所示。

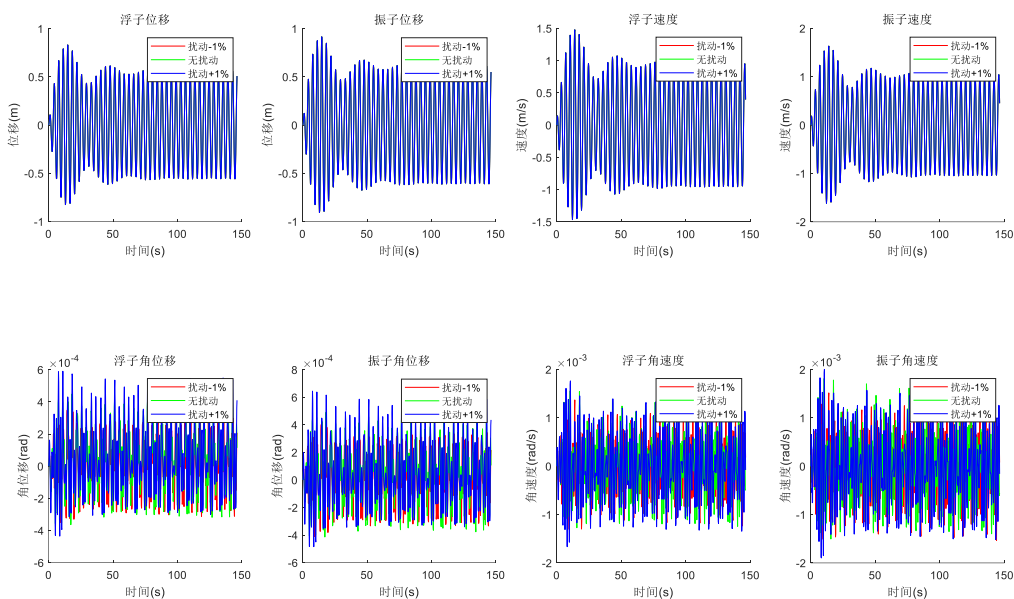


图 11 扰动前后浮子与振子运动规律对比图

对每个指标采样点计算扰动前后数据之差的平均值，绘得图 12。

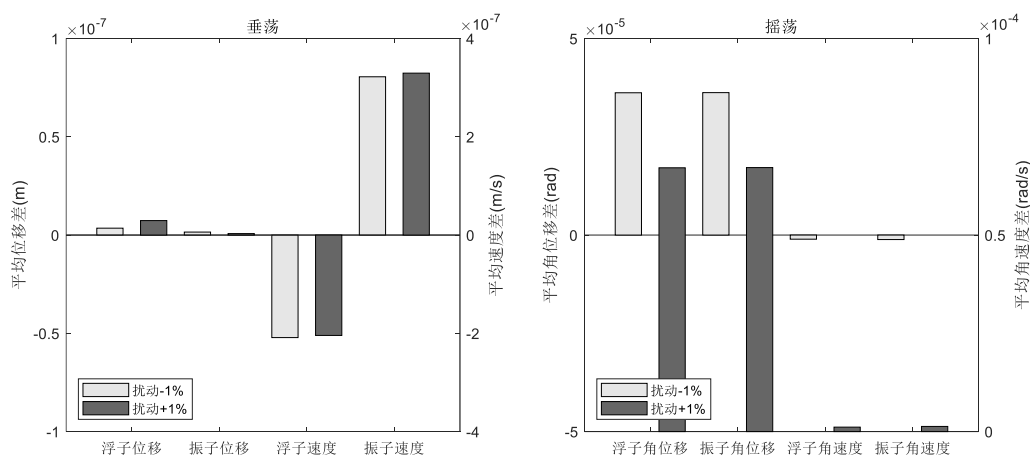


图 12 各指标扰动前后差的均值对比图

观察图 12 发现各个指标在扰动后对模型结果产生的误差数量级在 10^{-4} 以内，忽略浮子与振子质心在水平方向上的差值不会多模型产生过多影响。

5.4 问题四模型的建立与求解

5.4.1 模型的建立

1. 决策变量

由题意知待优化因素直线阻尼器阻尼系数 β 与旋转阻尼器阻尼系数 γ 为模型的决策变量，且有定义域

$$\begin{cases} 0 \leq \beta \leq 100000, \\ 0 \leq \gamma \leq 100000 \end{cases}$$

约束.

2. 目标函数

(1) 平均功率的确定

对于直线阻尼器，其输出的功率沿用(5)式进行求解。下面计算旋转阻尼器的功率。

力矩做功的微元可通过公式

$$dW = M d\theta = M \frac{d\theta}{dt} dt$$

计算得到。对上式两边积分，得

$$W = \int M \dot{\theta} dt .$$

由于

$$\bar{P} = \frac{W}{t} ,$$

因此旋转阻尼器的平均功率

$$\begin{aligned} \bar{P}_2 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} M_{\text{阻}} \dot{\theta}' dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \gamma \dot{\theta}'^2 dt. \end{aligned}$$

所以，两阻尼器的总输出功率为

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\beta (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \gamma (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \right] dt , \quad (11)$$

观察图 9，仍取 $t_0 = 100$ s， $T = 100 \times \frac{2\pi}{\omega}$ 。

(2) 积分离散化

将(11)式离散化：

$$\max \bar{P} = \frac{1}{T} \sum_{i=t_0/\Delta t}^{(t_0+T)/\Delta t} \left[\beta (\dot{x}_2(i) - \dot{x}_1(i))^2 + \gamma (\dot{\theta}_2(i) - \dot{\theta}_1(i))^2 \right] \Delta t , \quad (12)$$

3. 约束条件

问题三模型构成此模型的系统约束条件，由(8)式描述。

综上所述，建立非线性规划模型：

$$\max \bar{P} = \frac{1}{T} \sum_{i=t_0/\Delta t}^{(t_0+T)/\Delta t} \left[\beta (\dot{x}_2(i) - \dot{x}_1(i))^2 + \gamma (\dot{\theta}_2(i) - \dot{\theta}_1(i))^2 \right] \Delta t$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} f \cos \omega t - \rho g x_1 \pi R_0^2 + k(x_2 - x_1) + \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \lambda \dot{x}_1 = (m_1 + m_f) \ddot{x}_1, \\ -k(x_2 - x_1) - \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2 \ddot{x}_2, \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0, \\ \delta \theta_1 G + \delta \dot{\theta}_1 \mu + \delta L \cos \omega t - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \gamma - (\theta_1 - \theta_2) K = (I_1 + I_f) \ddot{\theta}_1, \\ (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \gamma + (\theta_1 - \theta_2) K = I_2 \ddot{\theta}_2, \\ \theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = 0, \dot{\theta}_2(0) = 0. \end{cases}$$

5.4.2 模型求解与结果分析

1. 模型求解

首先进行线性搜索用以试验，取步长 $\Delta k = 0.1, \Delta \alpha = 10\ 000$ 。图 13 示此过程平均功率与两因素关系。

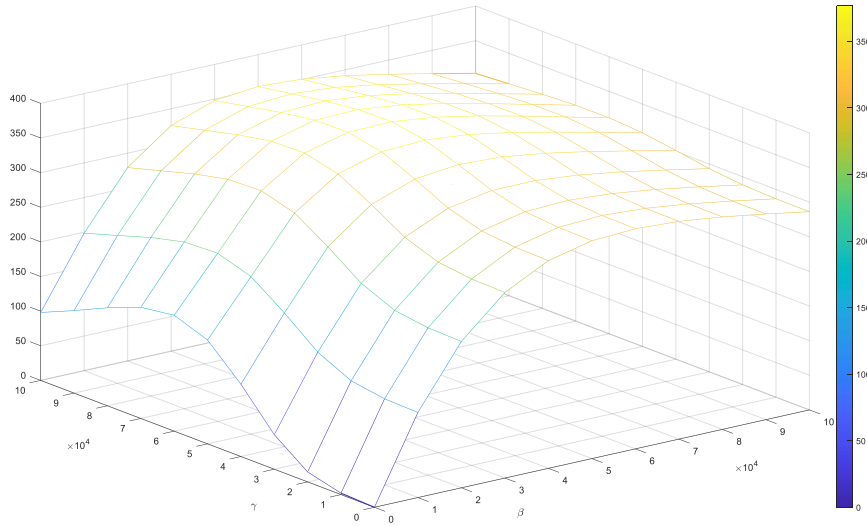


图 13 问题四第一轮搜索结果

观察发现 β 、 γ 与功率呈单峰函数。由于存在两个决策变量，定义域广，与问题二变阻尼系数情形求解过程类似，采用从好点出发法减少微分方程求解次数。同时，为再次简化求解过程，观察图 13 将初始范围缩小至

$$\begin{aligned} \beta &\in [30\ 000, 70\ 000], \\ \gamma &\in [30\ 000, 100\ 000]. \end{aligned}$$

2. 结果

求解所得结果如表 7 所示。

表 7 问题四结果

最大功率	阻尼系数	
	直线阻尼器	旋转阻尼器
378.0834 W	45547.4789 N·s/m	63644.1059 N·s·m/rad

3. 结果分析

与问题二常阻尼系数情形所求结果对照，增加旋转阻尼器后最大输出功率提升 65%。因此，增加旋转阻尼器能有效提升 PTO 装置输出功率。

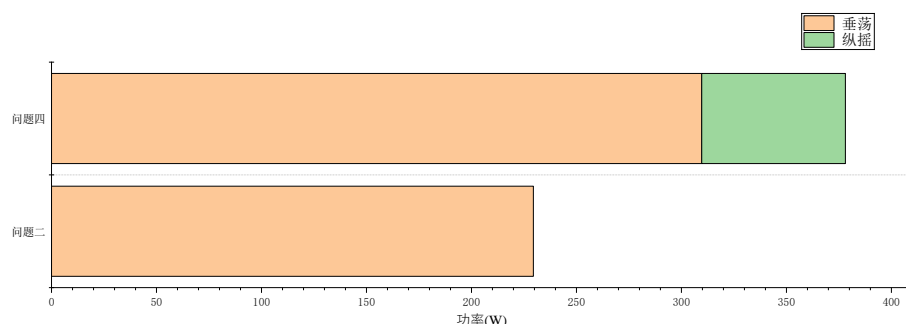


图 14 增加旋转阻尼器对 PTO 功率影响对照图

分析问题四优化所得阻尼系数下垂荡与纵摇阻尼器对输出功率的贡献，并与问题二常阻尼系数情形对照，如图 14 所示。对照发现，问题四垂荡运动平均功率较问题二有所提升，这是垂荡兴波阻尼系数增加所致。

六、模型评价

6.1 模型的优点

1. 问题一中分别以浮子与振子的平衡位置建立位移起点，计算过程中能够消去浮子的重力，计算结果做出的图能够更加表现浮子与振子相对初始位置的运动趋势。
2. 问题二、四的求解采用黄金分割法与从好点出发法，减少了求解多元微分方程组与转动惯量积分的次数，极大地缩短了运算时间。

6.2 模型的缺点

1. 问题一、三得到的解为数值解，做出的图存在一定误差。
2. 问题二、四中平均功率在计算过程中将积分离散化，且使用矩形面积计算，损失了计算精度。

6.3 模型的推广

问题一与三模型基于受力分析与牛顿运动定律，可以推广至受到更多力的情况，甚至可以推广至受来自其它方向的力矩的情况。

参考文献

- [1] 李庆杨, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2018: 118.
- [2] 刘绍学. 优选法与实验设计初步[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019: 8-9.
- [3] 华罗庚. 优选法与统筹法平话[M]. 北京: 北京出版社, 2020: 6-8.
- [4] 赵凯华, 罗蔚茵. 力学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 171.

附录 1 支撑材料清单

支撑材料清单		
问题 1	Q1.m	问题一求解主程序
	Q1_func1.m	问题一第一小问微分方程函数
	Q1_func2.m	问题一第二小问微分方程函数
	result-1.xlsx	问题一求解结果
问题 2	Q2_q1.m	问题二第一小问求解主程序
	Q2_q2.m	问题二第二小问求解主程序
	Q2_func1.m	问题二微分方程函数
	result-2.xlsx	问题二结果
问题 3	Q3.m	问题三主程序
	Q3_func.m	问题三微分方程函数
问题 4	Q4_serach.m	问题四主程序
	Q4_func1.m	问题四微分方程函数

附录 2 源程序代码

Q1.m
<p>问题一求解主程序</p> <pre> %% 初始化 clear close all clc %% 参数赋值 m1=4866; mf=1335.535; R0=1; h1=3; h2=0.8; m2=2433; R1=0.5; h3=0.5; rou=1025; g=9.8; k=80000; d0=0.5; f=6250; omg=1.4005; lmd=656.3616; t=0; t0=0; tf=40*2*pi/omg; </pre>

```

%% 求解微分方程组
beta=10000;
P12=-m1-mf;
P11=beta-lmd;
P21=-beta;
P10=rou*g*pi*R0*R0+k;
P20=-k;
P=m1*g-rou*g*pi*R0*R0*h1-rou*g*pi*R0*R0*h2/3+f*cos(omg*t)-k*(h1-h3-d0);
Q22=-m2;
Q11=-beta;
Q21=beta;
Q10=-k;
Q20=k;
Q=m2*g+k*(h1-h3-d0);

%% (1)
[t,m]=ode45('Q1_func1',t0:0.2:tf,[0,0,0,0]);
figure
subplot(1,2,1)
hold on
plot(t(:),m(:,1),'r-');
plot(t(:),m(:,2),'b-');
legend('浮子位移','振子位移')
title('第1小问位移-时间图像')
xlim([0,180])
xlabel('时间(s)');
ylabel('位移(m)');
hold off
subplot(1,2,2)
hold on
plot(t(:),m(:,3),'r-');
plot(t(:),m(:,4),'b-');
legend('浮子速度','振子速度')
title('第1小问速度-时间图像')
xlim([0,180])
xlabel('时间(s)');
ylabel('速度(m/s)');
hold off
A=t;
A(:,2:5)=[m(:,1),m(:,3),m(:,2),m(:,4)];
xlswrite('问题1(1)结论.xlsx',A,1);

%% (2)
[t,n]=ode45('Q1_func2',t0:0.2:tf,[0,0,0,0]);
figure
subplot(1,2,1)
hold on
plot(t(:),n(:,1),'r-');
plot(t(:),n(:,2),'b-');
legend('浮子位移','振子位移')
title('第2小问位移-时间图像')
xlim([0,180])
xlabel('时间(s)');
ylabel('位移(m)');
hold off
subplot(1,2,2)
hold on

```

```

plot(t(:),n(:,3),'r-');
plot(t(:),n(:,4),'b-');
legend('浮子速度','振子速度')
title('第2小问速度-时间图像')
xlim([0,180])
xlabel('时间(s)');
ylabel('速度(m/s)');
hold off
B=t;
B(:,2:5)=[n(:,1),n(:,3),n(:,2),n(:,4)];;
xlswrite('问题1(2)结论.xlsx',B,1);
ind=2;
C={'时间','(1)浮子位移','(1)浮子速度','(1)振子位移','(1)振子速度','(2)浮子位移',
'(2)浮子速度','(2)振子位移','(2)振子速度'};
for i=1:length(A(:,1))
    if ismember(A(i,1),[10 20 40 60 100])
        for j=1:5
            C{ind,j}=A(i,j);
        end
        for j=6:9
            C{ind,j}=B(i,j-4);
        end
        ind=ind+1;
    end
end

%% 傅里叶分析
L=256;
% 浮子位移
% A1=fft(m(end-area+1:end,1));
% f=1/0.2/area*(-area/2:area/2-1);
% plot(f,abs(fftshift(A1)))
Fs=t(end)-t(end-L+1);
f = Fs/L*(0:(L/2));

Y = fft(m(end-L+1:end,1));
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);

plot(f,P1,"LineWidth",3)
title("Single-Sided Amplitude Spectrum of S(t)")
xlabel("f (Hz)")
ylabel("|P1(f)|")

```

Q1_func1.m

问题一第一小问微分方程函数

```

function dy = Q1_func1( t,y )
% 问题1第1小问微分方程组

%% 参数赋值
m1=4866;
mf=1335.535;
R0=1;
h1=3;
h2=0.8;

```

```

m2=2433;
R1=0.5;
h3=0.5;
rou=1025;
g=9.8;
k=80000;
d0=0.5;
f=6250;
omg=1.4005;
lmd=656.3616;

%% 微分方程组系数赋值
beta=10000;

%% 微分方程组描述
dy=zeros(4,1);
dy(1)=y(3);
dy(2)=y(4);
dy(3)=(f*cos(omg*t)-rou*g*y(1)*pi*R0*R0+k*(y(2)-y(1))+beta*(y(4)-y(3))-lmd*y(3))/(m1+mf);
dy(4)=(-k*(y(2)-y(1))-beta*(y(4)-y(3)))/m2;
end

```

Q1_func2.m

问题一第二小问微分方程函数

```

function dy = Q1_func2( t,y )
% 问题 1 第 2 小问微分方程组

%% 参数赋值
m1=4866;
mf=1335.535;
R0=1;
h1=3;
h2=0.8;
m2=2433;
R1=0.5;
h3=0.5;
rou=1025;
g=9.8;
k=80000;
d0=0.5;
f=6250;
omg=1.4005;
lmd=656.3616;

%% 微分方程组系数赋值
beta=10000*sqrt(abs(y(4)-y(3)));

%% 微分方程组描述
dy=zeros(4,1);
dy(1)=y(3);
dy(2)=y(4);
dy(3)=(f*cos(omg*t)-rou*g*y(1)*pi*R0*R0+k*(y(2)-y(1))+beta*(y(4)-y(3))-lmd*y(3))/(m1+mf);
dy(4)=(-k*(y(2)-y(1))-beta*(y(4)-y(3)))/m2;
end

```


Q2_q1.m

问题二第一小问求解主程序

```
% 问题 2 第 1 小问
%% 初始化
clear
clc

%% 主程序
omg=1.7152;
T=100*2*pi/omg;
global C;
e=0.001;
left_barrier=0;
right_barrier=100000;
dist=right_barrier-left_barrier;
while dist>e
    %% 左试验点
    left_try=right_barrier-0.618*dist;
    C(1)=left_try;
    C(2)=0;
    [~,n]=ode45('Q2_func1',[0:0.01:100+T],[0,0,0,0]);
    left_ans=sum(C(1)*(abs(n(10000:end,4)-
n(10000:end,3))).^(C(2)+2).*0.01)/T;
    %% 右试验点
    right_try=left_barrier+0.618*dist;
    C(1)=right_try;
    C(2)=0;
    [~,n]=ode45('Q2_func1',[0:0.01:100+T],[0,0,0,0]);
    right_ans=sum(C(1)*(abs(n(10000:end,4)-
n(10000:end,3))).^(C(2)+2).*0.01)/T;
    %% 边界更新
    if left_ans>right_ans
        right_barrier=right_try;
    elseif left_ans<right_ans
        left_barrier=left_try;
    else
        right_barrier=right_try;
        left_barrier=left_try;
    end
    dist=right_barrier-left_barrier;
    fprintf("当前长度=%.6f\n",dist)
end
if left_ans > right_ans
    max_num=left_ans;
    max_idx=left_try;
else
    max_num=right_ans;
    max_idx=right_try;
end
fprintf("=====结果=====\n")
disp("最大值"+max_num)
disp("最大值点"+max_idx)

% 计算结果:
% 最大值 229.4678
```

```
% 最大值点 37265.4646
```

Q2_q2.m

问题二第二小问求解主程序

```
% 问题 2 第 2 小问
%% 初始化
clear
clc

%% main
barrier1=[60000,100000];
barrier2=[0,0.5];
area=get_area(barrier1,barrier2);
e=0.00001;
B=[(barrier1(2)-barrier1(1))/2,0,0];    % 优化因素 2 得到的最优点 x,y,z 坐标
flag=0; % 首次不划因素 2
while area>e
    %% 优化因素 2
    A=[B(1),0,0];
    [A(3),A(2)]=get_best2(B(1),barrier2);
    %% 因素 2 边界更新
    if flag
        if A(2)>B(2)
            barrier2(1)=B(2);
        else
            barrier2(2)=B(2);
        end
        area=get_area(barrier1,barrier2);
    else
        flag=1;
    end
    fprintf("当前面积=%.6f, 区域[%.4f,%.4f]×[%.4f,%.4f], 最大值\n", area, barrier1(1), barrier1(2), barrier2(1), barrier2(2), A(3))
    %% 优化因素 1
    B=[0,A(2),0];
    [B(3),B(1)]=get_best1(barrier1,A(2));
    %% 因素 1 边界更新
    if A(1)>B(1)
        barrier1(2)=A(1);
    else
        barrier1(1)=A(1);
    end
    area=get_area(barrier1,barrier2);
    fprintf("当前面积=%.6f, 区域[%.4f,%.4f]×[%.4f,%.4f], 最大值\n", area, barrier1(1), barrier1(2), barrier2(1), barrier2(2), B(3))
end
[a,k]=meshgrid(barrier1,barrier2);
res=zeros(1,4);
for i=1:4
    res(i)=aim([a(i),k(i)]);
end
[max_num,idx]=max(res);
max_idx=[a(idx),k(idx)];
disp("最大值"+max_num)
disp(["alpha=", "k="]+max_idx)
```

```

%% 目标函数
function result=aim(x)
    omg=1.7152;
    T=100*2*pi/omg;
    global C
    C(1)=x(1);
    C(2)=x(2);
    [~,n]=ode45('Q2_func1',[0:0.01:100+T],[0,0,0,0]);
    result=(sum(C(1)*(abs(n(10000:end,4)-
n(10000:end,3))).^(C(2)+2).*0.01)/T);
end

function area=get_area(barrier1,barrier2)
    area=(barrier1(2)-barrier1(1))*(barrier2(2)-barrier2(1));
end

function [max_num,max_idx]=get_best1(barrier1,val2)
    % 优化因素 1
    omg=1.7152;
    T=100*2*pi/omg;
    global C;
    left_barrier=barrier1(1);
    right_barrier=barrier1(2);
    dist=right_barrier-left_barrier;
    e=0.001;
    while dist>e
        % 左试验点
        left_try=right_barrier-0.618*dist;
        C(1)=left_try;
        C(2)=val2;
        [~,n]=ode45('Q2_func1',[0:0.01:100+T],[0,0,0,0]);
        left_ans=sum(C(1)*(abs(n(10000:end,4)-
n(10000:end,3))).^(C(2)+2).*0.01)/T;
        % 右试验点
        right_try=left_barrier+0.618*dist;
        C(1)=right_try;
        C(2)=val2;
        [~,n]=ode45('Q2_func1',[0:0.01:100+T],[0,0,0,0]);
        right_ans=sum(C(1)*(abs(n(10000:end,4)-
n(10000:end,3))).^(C(2)+2).*0.01)/T;
        % 边界更新
        if left_ans>right_ans
            right_barrier=right_try;
        elseif left_ans<right_ans
            left_barrier=left_try;
        else
            right_barrier=right_try;
            left_barrier=left_try;
        end
        dist=right_barrier-left_barrier;
        %      fprintf("当前长度=%.6f\n",dist)
    end
    if left_ans > right_ans
        max_num=left_ans;
        max_idx=left_try;
    else
        max_num=right_ans;
        max_idx=right_try;
    end
end

```

```

end
end

function [max_num,max_idx]=get_best2(val1,barrier2)
    % 优化因素 2
    omg=1.7152;
    T=100*2*pi/omg;
    global C;
    left_barrier=barrier2(1);
    right_barrier=barrier2(2);
    dist=right_barrier-left_barrier;
    e=0.000001;
    while dist>e
        %% 左试验点
        left_try=right_barrier-0.618*dist;
        C(1)=val1;
        C(2)=left_try;
        [~,n]=ode45('Q2_func1',[0:0.01:100+T],[0,0,0,0]);
        left_ans=sum(C(1)*(abs(n(10000:end,4)-
n(10000:end,3))).^(C(2)+2).*0.01)/T;
        %% 右试验点
        right_try=left_barrier+0.618*dist;
        C(1)=val1;
        C(2)=right_try;
        [~,n]=ode45('Q2_func1',[0:0.01:100+T],[0,0,0,0]);
        right_ans=sum(C(1)*(abs(n(10000:end,4)-
n(10000:end,3))).^(C(2)+2).*0.01)/T;
        %% 边界更新
        if left_ans>right_ans
            right_barrier=right_try;
        elseif left_ans<right_ans
            left_barrier=left_try;
        else
            right_barrier=right_try;
            left_barrier=left_try;
        end
        dist=right_barrier-left_barrier;
        % fprintf("当前长度=%.6f\n",dist)
    end
    if left_ans > right_ans
        max_num=left_ans;
        max_idx=left_try;
    else
        max_num=right_ans;
        max_idx=right_try;
    end
end
end

```

Q2_func1.m

问题二微分方程函数

```

function dy = Q2_func1( t,y )
%% 参数赋值
m1=4866;
mf=1165.992;
R0=1;
h1=3;

```

```

h2=0.8;
m2=2433;
R1=0.5;
h3=0.5;
rou=1025;
g=9.8;
k=80000;
d0=0.5;
f=4890;
omg=2.2143;
lmd=167.8395;

%% 微分方程组系数赋值
global C;
beta=C(1)*(abs(y(4)-y(3)))^C(2);

%% 微分方程组描述
dy=zeros(4,1);
dy(1)=y(3);
dy(2)=y(4);
dy(3)=(f*cos(omg*t)-rou*g*y(1)*pi*R0*R0+k*(y(2)-y(1))+beta*(y(4)-y(3))-
lmd*y(3))/(m1+mf);
dy(4)=(-k*(y(2)-y(1))-beta*(y(4)-y(3)))/m2;
end

```

Q3.m

问题三主程序

```

%% 初始化
clear
close all
clc

%% 参数赋值
m1=4866;
mf=1028.876;
R0=1;
h1=3;
h2=0.8;
m2=2433;
R1=0.5;
h3=0.5;
rou=1025;
g=9.8;
k=80000;
d0=0.5;
f=3640;
omg=1.7152;
lmd=683.4558;
mu=654.3383;
beta=10000;
gamma=1000;
syms d;

%% 计算质心
sgm=m1/(2*pi*R0*R0+2*pi*R0*h1+pi*R0*sqrt(R0^2+h2^2));
rz1=sgm*(2*pi*R0*h1+pi*R0*h2)/m1;
rz2=d+h3/2;

```

```

rz=(m1*rz1+m2*rz2)/(m1+m2);

%% 计算转动惯量
I11=(sgm*pi*R0^2)*(R0^2/2+(h1-rz1)^2+rz1^2);
I12=pi*R0^3*sgm*h1+2*pi*R0*sgm*((h1-rz1)^3/3+rz1^3/3);
I13=2*pi*sgm*R0* integral(@(z)((R0.*(h2-z)./h2).^2+(z+rz1).^2).*(h2-
z)./h2,0,h2);
I1=I11+I12+I13;
I2=m2*R0^2/4+m2*h3^2/12+m2*(d+h3/2)^2;
t0=0;
tf=40*2*pi/omg;

%% 求解微分方程组、作图、保存数据
[t,n]=ode45('Q3_func',t0:0.2:tf,[0,0,0,0,0,0,0,0]);
figure
subplot(2,2,1)
hold on
plot(t(:),n(:,1),'r-');
plot(t(:),n(:,2),'b-');
legend('浮子位移','振子位移')
xlabel('时间(s)');
ylabel('位移(m)');
title('垂荡位移')
hold off
subplot(2,2,2)
hold on
plot(t(:),n(:,3),'r-');
plot(t(:),n(:,4),'b-');
legend('浮子速度','振子速度')
xlabel('时间(s)');
ylabel('速度(m/s)');
title('垂荡速度')
hold off
subplot(2,2,3)
hold on
plot(t(:),n(:,5),'r-');
plot(t(:),n(:,6),'b-');
legend('浮子角位移','振子角位移')
xlabel('时间(s)');
ylabel('角位移(rad)');
title('纵摇角位移')
hold off
subplot(2,2,4)
hold on
plot(t(:),n(:,7),'r-');
plot(t(:),n(:,8),'b-');
legend('浮子角速度','振子角速度')
xlabel('时间(s)');
ylabel('角速度(rad/s)');
title('纵摇角速度')
hold off
A=t;
A(:,2)=n(:,1);
A(:,3)=n(:,3);
A(:,4)=n(:,5);
A(:,5)=n(:,7);
A(:,6)=n(:,2);

```

```

A(:,7)=n(:,4);
A(:,8)=n(:,6);
A(:,9)=n(:,8);
xlswrite('问题3结论.xlsx',A,1);
ind=1;
for i=1:length(A(:,1))
    if ismember(A(i,1),[10 20 40 60 100])
        C(ind,1:9)=A(i,1:9);
        ind=ind+1;
    end
end
end

```

Q3 func.m

问题三微分方程函数

```

function dy = Q3_func( t,y )
% 问题3 微分方程组

%% 参数赋值
m1=4866;
mf=1028.876;
R0=1;
h1=3;
h2=0.8;
m2=2433;
R1=0.5;
h3=0.5;
rou=1025;
g=9.8;
k=80000;
K=250000;
d0=0.5;
f=3640;
omg=1.7152;
lmd=683.4558;
mu=654.3383;
beta=10000;
gamma=1000;
G=8890.7;
L=1690;
d=d0+(y(2)-y(1));
If=7001.914;

%% 计算质心
sgm=m1/(2*pi*R0*R0+2*pi*R0*h1+pi*R0*sqrt(R0^2+h2^2));
rz1=sgm*(2*pi*R0*h1+pi*R0*h2)/m1;
rz2=d+h3/2;
rz=(m1*rz1+m2*rz2)/(m1+m2);

%% 计算转动惯量
I11=(sgm*pi*R0^2)*(R0^2/2+(h1-rz1)^2+rz1^2);
I12=pi*R0^3*sgm*h1+2*pi*R0*sgm*((h1-rz1)^3/3+rz1^3/3);
I13=2*pi*sgm*R0* integral(@(z)((R0.*(h2-z)./h2).^2+(z+rz1).^2).*(h2-z)./h2,0,h2);
I1=I11+I12+I13;
I2=m2*R0^2/4+m2*h3^2/12+m2*(d+h3/2)^2;

%% 计算相关参数

```

```

delta=abs(rz1-rz)/rz1;

%% 微分方程组描述
dy=zeros(8,1);
dy(1)=y(3);
dy(2)=y(4);
dy(3)=(f*cos(omg*t)-rou*g*y(1)*pi*R0*R0+k*(y(2)-y(1))+beta*(y(4)-y(3))-
lmd*y(3))/(m1+mf);
dy(4)=(-k*(y(2)-y(1))-beta*(y(4)-y(3)))/m2;
dy(5)=y(7);
dy(6)=y(8);
dy(7)=(delta*y(5)*G+delta*y(7)*mu+delta*L*cos(omg*t)+(y(7)-
y(8))*gamma+(y(5)-y(6)*K))/(I1+If);
dy(8)=-((y(8)-y(7))*gamma+(y(6)-y(5))*K)/I2;
end

```

Q4_serach.m

问题四主程序

```

% 问题 4
%% 初始化
clear
clc

%% 计算恒定的质心与转动惯量，存至全局变量之中
m1=4866;
R0=1;
h1=3;
h2=0.8;
global I1 rz1;
sgm=m1/(2*pi*R0*R0+2*pi*R0*h1+pi*R0*sqrt(R0^2+h2^2));
rz1=sgm*(2*pi*R0*h1+pi*R0*h2)/m1;
I11=(sgm*pi*R0^2)*(R0^2/2+(h1-rz1)^2+rz1^2);
I12=pi*R0^3*sgm*h1+2*pi*R0*sgm*((h1-rz1)^3/3+rz1^3/3);
I13=2*pi*sgm*R0* integral(@(z)((R0.*(h2-z)./h2).^2+(z+rz1).^2).*(h2-
z)./h2,0,h2);
I1=I11+I12+I13;

%% main
barrier1=[30000,70000];
barrier2=[30000,100000];
area=get_area(barrier1,barrier2);
e=0.0001;
B=[(barrier1(2)-barrier1(1))/2,0,0]; % 优化因素 2 得到的最优点 x,y,z 坐标
flag=0; % 首次不划因素 2
while area>e
    %% 优化因素 2
    A=[B(1),0,0];
    [A(3),A(2)]=get_best2(B(1),barrier2);
    %% 因素 2 边界更新
    if flag
        if A(2)>B(2)
            barrier2(1)=B(2);
        else
            barrier2(2)=B(2);
        end
        area=get_area(barrier1,barrier2);
    end
end

```



```

else
    flag=1;
end
fprintf("当前面积=%.6f, 区域[%.4f,%.4f]×[%.4f,%.4f], 最大值
=%.6f\n", area, barrier1(1), barrier1(2), barrier2(1), barrier2(2), A(3))
%% 优化因素 1
B=[0, A(2), 0];
[B(3), B(1)]=get_best1(barrier1, A(2));
%% 因素 1 边界更新
if A(1)>B(1)
    barrier1(2)=A(1);
else
    barrier1(1)=A(1);
end
area=get_area(barrier1, barrier2);
fprintf("当前面积=%.6f, 区域[%.4f,%.4f]×[%.4f,%.4f], 最大值
=%.6f\n", area, barrier1(1), barrier1(2), barrier2(1), barrier2(2), B(3))
end
[beta, gamma]=meshgrid(barrier1, barrier2);
res=zeros(1,4);
for i=1:4
    res(i)=aim([beta(i), gamma(i)]);
end
[max_num, idx]=max(res);
max_idx=[beta(idx), gamma(idx)];
disp("最大值"+max_num)
disp(["beta=", "gamma="]+max_idx)

%% 目标函数
function result=aim(x)
    omg=1.9806;
    T=100*2*pi/omg;
    global C
    C(1)=x(1);
    C(2)=x(2);
    [~, n]=ode45('Q4_func1', 0:0.01:100+T, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]);
    result=sum((C(1)*(abs(n(10000:end, 4)-n(10000:end, 3))).^2 ...
        +C(2)*(abs(n(10000:end, 8)-n(10000:end, 7))).^2).*0.01)/T;
end

function area=get_area(barrier1, barrier2)
    area=(barrier1(2)-barrier1(1))*(barrier2(2)-barrier2(1));
end

function [max_num, max_idx]=get_best1(barrier1, val2)
    % 优化因素 1
    global C;
    left_barrier=barrier1(1);
    right_barrier=barrier1(2);
    dist=right_barrier-left_barrier;
    e=0.001;
    while dist>e
        %% 左试验点
        left_try=right_barrier-0.618*dist;
        left_ans=aim([left_try, val2]);
        %% 右试验点
        right_try=left_barrier+0.618*dist;
        right_ans=aim([right_try, val2]);
    end
end

```

```

        %% 边界更新
        if left_ans>right_ans
            right_barrier=right_try;
        elseif left_ans<right_ans
            left_barrier=left_try;
        else
            right_barrier=right_try;
            left_barrier=left_try;
        end
        dist=right_barrier-left_barrier;
    %         fprintf("当前长度=%.6f\n",dist)
    end
    if left_ans > right_ans
        max_num=left_ans;
        max_idx=left_try;
    else
        max_num=right_ans;
        max_idx=right_try;
    end
end

function [max_num,max_idx]=get_best2(val1,barrier2)
    % 优化因素 2
    global C;
    left_barrier=barrier2(1);
    right_barrier=barrier2(2);
    dist=right_barrier-left_barrier;
    e=0.001;
    while dist>e
        %% 左试验点
        left_try=right_barrier-0.618*dist;
        left_ans=aim([val1,left_try]);
        %% 右试验点
        right_try=left_barrier+0.618*dist;
        right_ans=aim([val1,right_try]);
        %% 边界更新
        if left_ans>right_ans
            right_barrier=right_try;
        elseif left_ans<right_ans
            left_barrier=left_try;
        else
            right_barrier=right_try;
            left_barrier=left_try;
        end
        dist=right_barrier-left_barrier;
    %         fprintf("当前长度=%.6f\n",dist)
    end
    if left_ans > right_ans
        max_num=left_ans;
        max_idx=left_try;
    else
        max_num=right_ans;
        max_idx=right_try;
    end
end
end

```

Q4_func1.m

问题四微分方程函数

```
function dy = Q4_func1( t,y )
%% 参数赋值
m1=4866;
mf=1091.099;
R0=1;
h1=3;
h2=0.8;
m2=2433;
R1=0.5;
h3=0.5;
rou=1025;
g=9.8;
k=80000;
K=250000;
d0=0.5;
f=1760;
omg=1.9806;
lmd=528.5018;
mu=1655.909;
G=8890.7;
L=2140;
d=d0+(y(2)-y(1));
If=7142.493;

%% 微分方程组系数赋值
global C;
beta=C(1);
gamma=C(2);

%% 计算质心
global rz1
sgm=m1/(2*pi*R0*R0+2*pi*R0*h1+pi*R0*sqrt(R0^2+h2^2));
rz2=d+h3/2;
rz=(m1*rz1+m2*rz2)/(m1+m2);

%% 计算转动惯量
global I1
I2=m2*R0^2/4+m2*h3^2/12+m2*(d+h3/2)^2;

%% 计算相关参数
delta=abs(rz1-rz)/rz1;

%% 微分方程组描述
dy=zeros(8,1);
dy(1)=y(3);
dy(2)=y(4);
dy(3)=(f*cos(omg*t)-rou*g*y(1)*pi*R0*R0+k*(y(2)-y(1))+beta*(y(4)-y(3))-lmd*y(3))/(m1+mf);
dy(4)=(-m2*g-k*(y(2)-y(1))-beta*(y(4)-y(3)))/m2;
dy(5)=y(7);
dy(6)=y(8);
dy(7)=(delta*y(5)*G+delta*y(7)*mu+delta*L*cos(omg*t)+(y(7)-y(8))*gamma+(y(5)-y(6)*K))/(I1+If);
dy(8)=-((y(8)-y(7))*gamma+(y(6)-y(5))*K)/I2;
end
```

