

2024 CUMCM -A 数学建模国赛A题一省二

该项目针对学习数学建模 A类赛题的队伍学习参考

Abstract

模型 计算几何模型 解法 改进欧拉迭代

问题一

采取等距螺线：利用几何关系得到角速度与极角 θ 的速度表达式子

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i = \frac{v_i}{b\sqrt{\theta_i^2 + 1}} \quad (\theta_i \text{ 是极角, } v_i \text{ 是第 } n \text{ 个板凳的速度, 其中 } v_i = 1m/s) \quad (1)$$

然后利用积分：

$$b\sqrt{\theta_i^2 + 1} d\theta_i = v_i dt \quad (2)$$

Let $\tan u = \theta_i^2$:

$$v_i T = \frac{b}{2} \theta_i \sqrt{\theta_i^2 + 1} + \operatorname{arcsinh}(\theta_i) \Big|_{\theta_i}^{32\pi} \quad (3)$$

请注意:此积分函数并不是显示的函数（并不能根据 t 的值来求得 θ 的值）相反可以根据 θ_i 计算求得 t ，但实际上我们需要求得他的反函数，即就是 θ_i 与 T 的显示函数，因此我们借助 *Matlab* 的 *fsolve* 函数不断迭代，每次循环给定初始猜测值 θ_i ，根据 t 可以不断猜测 θ 。但是实际上更有一种改进的欧拉迭代算法，可以使得方程的求解更高效，并且保持高精度数值求解.详情请看我们的论文.

因为根据“龙头”可以求得紧挨的第一块龙身体的线速度，进而也可求得后续龙身的速度，因此采取改进欧拉算法对于每一块板凳进行迭代，可以求得数值解，从而节省大量计算时间。

问题二

根据我们找到浙大的一篇博士论文¹（对于车类碰撞分析），进行运动学类比，可以得出一种高效准确的面积计算碰撞模型，通过计算龙头4个顶点与每一块龙身的面积，并与 $S_{\text{板凳}}$ （板凳的面积）进行比较. 最外面的循环:

从 $t = 0 \rightarrow n$, 其中 n 的取值为 $[100, 250]$ (其中每次 $n = n + dt$, dt 为时间步长) 从龙尾开始往前遍历, 不断地计算面积大小, 如果 *check()* 函数返回1代表没有发生碰撞, 返回0代表发生了碰撞. 最终可以求得碰撞的时间以及碰撞的板块位置. *check* 函数源码具体可以参考我们的论文.

在评审中，组委会要求精度较高，我们只确定了整数位碰撞的时间，应该对 $dt = 0.001$ 再进行一次遍历，以此得到较高精度的碰撞时间，但是计算会耗费大量的时间，优化的方法是保存此刻的速度矩阵，以及位置坐标，以此时此刻为初始条件，这一点是我们当时没有考虑到的，毕竟当时距离结束只有不到24h想着能把结果跑出来就万幸了！

问题三

先采取二分区间搜索，由于搜索范围为实数范围，因此区间： $[0.4337, 0.4338]$ ，之后在进行步长为0.00001的小步长遍历. 较为简单

问题四

根据我们的论文得到最小掉头的路径，利用碰撞模型检测，可以得到位置速度,碰撞模型的精髓在于 $check()$ 函数的设定。

在这一问题上，我耗费了大量的时间来整合坐标矩阵，进而导致问题四的求解过于直接，应该考虑多种情况！

问题五

直接暴力遍历法，我们没有采取智能算法(GA, GD)，因为目标函数可以直接搜索得到，对于A类，启发式算法用时需要谨慎考虑！

总结

本论文最大的优点在于找到了这篇浙大的碰撞检测文献：

其中，下面是我的一些改进的想法：

1. 本问题当中耗费时间的计算莫过于问题二当中的碰撞函数，可以将给一个时间段 $[t_{begin}, t_{end}]$, 此时间段假如没有发生碰撞，那么可以将 t_{end} 时间段的矩阵保存下来，直接进行下一阶段的循环. 需要对源码进行大量的改动，碍于时间的紧迫，我们当时并没有采取.
2. *Matlab* 中的 `parfor` 循环特别适合相互独立的循环，可以根据不同时间段的 t_{end} 启动并行循环，在暑假期间我有尝试过使用 `gpuArray` 来加速 `Ga` 函数的运行速度（使用的是英伟达RTX 3060），但是效果不是很理想，可能与我的写法有关，有兴趣的可以尝试一下.
3. `check()` 函数当中 存在一个 ϵ 来表示计算出面积与板凳的面积误差大小，需要不断的进行手动调参，我们最终将 $\epsilon = 0.66 \times S_{板凳}$ ，调参的过程比较复杂.

1. 李柏. 复杂约束下自动驾驶车辆运动规划的计算最优控制方法研究[D]. 浙江大学, 2018. [🔗](#)