# 损失函数的邻近点算子和Fenchel共轭证明

王华军

(北京交通大学数学系, 北京, 100044)

**摘要:** 本文是博士毕业论文[1]的一个补充材料. 本文主要包括两部分: (i)给出了论文[1]所需要的10种损失函数的邻近点算子证明(见A1-A10); (ii)给出了论文[1]所需要的14种损失函数的Fenchel共轭证明(见B1-B14).

## A1. 广义合页损失函数的邻近点算子证明

广义合页损失函数的邻近点算子$\text{prox}_{\ell_{gh}}(s)$是下面函数的极小值点

$$\theta_{gh}(v) := \begin{cases} \theta_{gh1}(v) := \alpha(1+\eta(v-1)) + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > 1, \\ \theta_{gh2}(v) := \alpha + \frac{(1-s)^2}{2}, & v = 1, \\ \theta_{gh3}(v) := \alpha v + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (0,1), \\ \theta_{gh4}(v) := \frac{s^2}{2}, & v = 0, \\ \theta_{gh5}(v) := \frac{(v-s)^2}{2}, & v < 0. \end{cases}$$

对于$v > 1$, $\theta_{gh1}(v)$ 是二次连续可微的强凸函数, 由$\triangledown\theta_{gh1}(v) = \alpha\eta + v - s = 0$可得$\theta_{gh1}(v)$唯一极小值点$v = s - \alpha\eta$. 类似地, 对于$v \in (0,1)$, $\theta_{gh3}(v)$的唯一极小值点$v = s - \alpha$. 对于$v < 0$, $\theta_{gh5}(v)$的唯一极小值点是$v = s$. 对于$\theta_{gh2}(v)$和$\theta_{gh4}(v)$的极小点分别在不可微点$v = 1$和$v = 0$取得, 下面我们比较$\theta_{gh1}(v)$, $\theta_{gh2}(v)$, $\theta_{gh3}(v)$, $\theta_{gh4}(v)$和$\theta_{gh5}(v)$的值.

(i) 若$s > 1 + \alpha\eta \Leftrightarrow \min\{\theta_{gh2}(v), \theta_{gh3}(v), \theta_{gh4}(v), \theta_{gh5}(v)\} > \theta_{gh1}(v)$, 得$v = s - \alpha\eta$.

(ii) 若$s \in (1+\alpha, 1+\alpha\eta] \Leftrightarrow \min\{\theta_{gh1}(v), \theta_{gh3}(v), \theta_{gh4}(v), \theta_{gh5}(v)\} > \theta_{gh2}(v)$, 得$v = 1$.

(iii) 若$s \in (\alpha, 1+\alpha] \Leftrightarrow \min\{\theta_{gh1}(v), \theta_{gh2}(v), \theta_{gh4}(v), \theta_{gh5}(v)\} > \theta_{gh3}(v)$, 得$v = s - \alpha$.

(iv) 若$s \in (0, \alpha] \Leftrightarrow \min\{\theta_{gh1}(v), \theta_{gh2}(v), \theta_{gh3}(v), \theta_{gh5}(v)\} > \theta_{gh4}(v)$, 得$v = 0$.

(v) 若$s \leqslant 0 \Leftrightarrow \min\{\theta_{gh1}(v), \theta_{gh2}(v), \theta_{gh3}(v), \theta_{gh4}(v)\} > \theta_{gh5}(v)$, 得$v = s$.

综上所述, 我们可得广义合页损失函数的邻近点算子$\text{prox}_{\ell_{gh}}(s)$. 证毕. $\square$

## A2. 弹球损失函数的邻近点算子证明

弹球损失函数的邻近点算子$\text{prox}_{\ell_{pl}}(s)$是下面函数的极小值点

$$\theta_{pl}(v) := \begin{cases} \theta_{pl1}(v) := \alpha v + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > 0, \\ \theta_{pl2}(v) := \frac{s^2}{2}, & v = 0, \\ \theta_{pl3}(v) := -\alpha\tau v + \frac{(v-s)^2}{2}, & v < 0, \end{cases}$$

对于$v > 0$, $\theta_{pl1}(v)$是二次连续可微的强凸函数, 由$\triangledown\theta_{pl1}(v) = \alpha + v - s = 0$可得$\theta_{pl1}(v)$唯一极小值点$v = s - \alpha$. 类似地, 对于$v < 0$, $\theta_{pl3}(v)$的唯一极

小值点是$v=s+\alpha\tau$. 对于$\theta_{pl2}(v)$的极小点在不可微点$v=0$取得, 下面我们比较$\theta_{pl1}(v)$, $\theta_{pl2}(v)$和$\theta_{pl3}(v)$的值.
(i) 若$s>\alpha \Leftrightarrow \min\{\theta_{pl2}(v),\theta_{pl3}(v)\}>\theta_{pl1}(v)$, 得$v=s-\alpha$.
(ii) 若$s\in[-\tau\alpha,\alpha] \Leftrightarrow \min\{\theta_{pl1}(v),\theta_{pl3}(v)\}>\theta_{pl2}(v)$, 得$v=0$.
(iii) 若$s<-\tau\alpha \Leftrightarrow \min\{\theta_{pl1}(v),\theta_{pl2}(v)\}>\theta_{pl3}(v)$, 得$v=s+\alpha\tau$.
综上所述, 我们可得弹球损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{pl}}(s)$. 证毕. $\square$

**A3. $\varepsilon$-不敏感弹球损失函数的邻近点算子证明**

$\varepsilon$-不敏感弹球损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{ip}}(s)$是下面函数的极小值点

$$\theta_{ip}(v):=\begin{cases}\theta_{ip1}(v):=\alpha(v-\varepsilon)+\frac{(v-s)^2}{2}, & v>\varepsilon,\\ \theta_{ip2}(v):=\frac{(\varepsilon-s)^2}{2}, & v=\varepsilon,\\ \theta_{ip3}(v):=\frac{(v-s)^2}{2}, & v\in(-\varepsilon/\tau,\varepsilon),\\ \theta_{ip4}(v):=\frac{(-\varepsilon/\tau-s)^2}{2}, & v=-\varepsilon/\tau,\\ \theta_{ip5}(v):=-\alpha\tau(v+\varepsilon/\tau)+\frac{(v-s)^2}{2}, & v<-\varepsilon/\tau.\end{cases}$$

对于$v>\varepsilon$, $\theta_{ip1}(v)$是二次连续可微的强凸函数, 由$\bigtriangledown\theta_{ip1}(v)=\alpha+v-s=0$可得$\theta_{ip1}(v)$唯一极小值点$v=s-\alpha$. 类似地, 对于$v\in(-\varepsilon/\tau,\varepsilon)$, $\theta_{ip3}(v)$ 的唯一极小值点$v=s$. 对于$v<-\varepsilon/\tau$, $\theta_{ip5}(v)$的唯一极小值点是$v=s+\alpha\tau$. 对于$\theta_{ip2}(v)$ 和$\theta_{ip4}(v)$的极小点分别在不可微点$v=\varepsilon$和$v=-\varepsilon/\tau$取得, 下面我们比较$\theta_{ip1}(v)$, $\theta_{ip2}(v)$, $\theta_{ip3}(v)$, $\theta_{ip4}(v)$和$\theta_{ip5}(v)$ 的值.
(i) 若$s>\alpha+\varepsilon \Leftrightarrow \min\{\theta_{ip2}(v),\theta_{ip3}(v),\theta_{ip4}(v),\theta_{ip5}(v)\}>\theta_{ip1}(v)$, 得$v=s-\alpha$.
(ii) 若$s\in[\varepsilon,\alpha+\varepsilon] \Leftrightarrow \min\{\theta_{ip1}(v),\theta_{ip3}(v),\theta_{ip4}(v),\theta_{ip5}(v)\}>\theta_{ip2}(v)$, 得$v=\varepsilon$.
(iii) 若$s\in[-\varepsilon/\tau,\varepsilon) \Leftrightarrow \min\{\theta_{ip1}(v),\theta_{ip2}(v),\theta_{ip4}(v),\theta_{ip5}(v)\}>\theta_{ip3}(v)$, 得$v=s$.
(iv) 若$s\in[-\varepsilon/\tau-\tau\alpha,-\varepsilon/\tau) \Leftrightarrow \min\{\theta_{ip1}(v),\theta_{ip2}(v),\theta_{ip3}(v),\theta_{ip5}(v)\}>\theta_{ip4}(v)$, 得$v=-\varepsilon/\tau$.
(v) 若$s<-\varepsilon/\tau-\tau\alpha \Leftrightarrow \min\{\theta_{ip1}(v),\theta_{ip2}(v),\theta_{ip3}(v),\theta_{ip4}(v)\}>\theta_{ip5}(v)$, 得$v=s+\tau\alpha$.
综上所述, 我们可得$\varepsilon$-不敏感弹球损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{ip}}(s)$. 证毕. $\square$

**A4. 二次合页损失函数的邻近点算子证明**

二次合页损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{sh}}(s)$是下面函数的极小值点

$$\theta_{sh}(v):=\begin{cases}\theta_{sh1}(v):=\alpha v^2+\frac{(v-s)^2}{2}, & v>0,\\ \theta_{sh2}(v):=\frac{(v-s)^2}{2}, & v\leqslant 0,\end{cases}$$

对于$v>0$, $\theta_{sh1}(v)$是二次连续可微的强凸函数, 由$\bigtriangledown\theta_{sh1}(v)=2\alpha v+v-s=0$可得$\theta_{sh1}(v)$唯一极小值点$v=\frac{s}{1+2\alpha}$. 类似地, 对于$v\leqslant 0$, $\theta_{sh2}(v)$的唯一极小值点是$v=s$.下面我们比较$\theta_{sh1}(v)$和$\theta_{sh2}(v)$的值.
(i) 若$s\geqslant 0 \Leftrightarrow \min\theta_{sh2}(v)>\theta_{sh1}(v)$, 得$v=\frac{s}{1+2\alpha}$.

(ii) 若$s<0 \Leftrightarrow \min\theta_{sh1}(v)>\theta_{sh2}(v)$, 得$v=s$.
综上所述, 我们可得二次合页损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{sh}}(s)$. 证毕. □

**A5. Huber合页损失函数的邻近点算子证明**

Huber合页损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{hh}}(s)$是下面函数的极小值点

$$\theta_{hh}(v):=\begin{cases}\theta_{hh1}(v):=\alpha(v-\frac{\delta}{2})+\frac{(v-s)^2}{2}, & v>\delta,\\ \theta_{hh2}(v):=\alpha\frac{v^2}{2\delta}+\frac{(v-s)^2}{2}, & v\in[0,\delta],\\ \theta_{hh3}(v):=\frac{(v-s)^2}{2}, & v<0.\end{cases}$$

对于$v>\delta$, $\theta_{hh1}(v)$是二次连续可微的强凸函数, 由$\bigtriangledown\theta_{hh1}(v)=\alpha+v-s=0$可得$\theta_{hh1}(v)$唯一极小值点$v=s-\alpha$. 类似地, 对于$v\in[0,\delta]$, $\theta_{hh2}(v)$ 的唯一极小值点$v=\frac{\delta s}{\alpha+\delta}$. 对于$v<0$, $\theta_{hh3}(v)$的唯一极小值点是$v=s$.下面我们比较$\theta_{hh1}(v),\theta_{hh2}(v)$和$\theta_{hh3}(v)$ 的值.
(i) 若$s\geqslant\alpha+\delta\Leftrightarrow\min\{\theta_{hh2}(v),\theta_{hh3}(v)\}>\theta_{hh1}(v)$, 得$v=s-\alpha$.
(ii) 若$s\in[0,\alpha+\delta)\Leftrightarrow\min\{\theta_{hh1}(v),\theta_{hh3}(v)\}>\theta_{hh2}(v)$, 得$v=\frac{\delta s}{\alpha+\delta}$.
(iii) 若$s<0\Leftrightarrow\min\{\theta_{hh1}(v),\theta_{hh2}(v)\}>\theta_{hh3}(v)$, 得$v=s$.
综上所述, 我们可得Huber合页损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{hh}}(s)$. 证毕. □

**A6. Huber弹球损失函数的邻近点算子证明**

Huber弹球损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{hp}}(s)$是下面函数的极小值点

$$\theta_{hp}(v):=\begin{cases}\theta_{hp1}(v):=\alpha(v-\delta/2)+\frac{(v-s)^2}{2}, & v>\delta,\\ \theta_{hp2}(v):=\alpha v^2/(2\delta)+\frac{(v-s)^2}{2}, & v\in(0,\delta],\\ \theta_{hp3}(v):=\alpha\tau v^2/(2\delta)+\frac{(v-s)^2}{2}, & v\in[-\delta,0],\\ \theta_{hp4}(v):=-\tau\alpha(v+\delta/2)+\frac{(v-s)^2}{2}, & v<-\delta.\end{cases}$$

对于$v>\delta$, $\theta_{hp1}(v)$是二次连续可微的强凸函数, 由$\bigtriangledown\theta_{hp1}(v)=\alpha+v-s=0$可得$\theta_{hp1}(v)$唯一极小值点$v=s-\alpha$. 类似地, 对于$v\in(0,\delta]$, $\theta_{hp2}(v)$ 的唯一极小值点$v=\delta s/(\delta+\alpha)$. 对于$v\in[-\delta,0]$, $\theta_{hp3}(v)$的唯一极小值点是$v=\delta s/(\delta+\tau\alpha)$. 对于$v<-\delta$, $\theta_{hp4}(v)$的唯一极小值点是$v=s+\tau\alpha$. 下面我们比较$\theta_{hp1}(v)$, $\theta_{hp2}(v)$, $\theta_{hp3}(v)$ 和$\theta_{hp4}(v)$的值.
(i) 若$s\geqslant\alpha+\delta\Leftrightarrow\min\{\theta_{hp2}(v),\theta_{hp3}(v),\theta_{hp4}(v)\}>\theta_{hp1}(v)$, 得$v=s-\alpha$.
(ii) 若$s\in(0,\alpha+\delta)\Leftrightarrow\min\{\theta_{hp1}(v),\theta_{hp3}(v),\theta_{hp4}(v)\}>\theta_{hp2}(v)$, 得$v=\delta s/(\delta+\alpha)$.
(iii) 若$s\in(-(\tau\alpha+\delta),0]\Leftrightarrow\min\{\theta_{hp1}(v),\theta_{hp2}(v),\theta_{hp4}(v)\}>\theta_{hp3}(v)$, 得$v=\delta s/(\delta+\tau\alpha)$.
(iv) 若$s\leqslant-(\tau\alpha+\delta)\Leftrightarrow\min\{\theta_{hp1}(v),\theta_{hp2}(v),\theta_{hp3}(v)\}>\theta_{hp4}(v)$, 得$v=s+\tau\alpha$.
综上所述, 我们可得Huber弹球损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{hp}}(s)$. 证毕. □

**A7. 滑倒损失函数的邻近点算子证明**

因为滑倒损失函数的邻近点算子对于$\alpha\in(0,2)$和$\alpha\geqslant 2$有不同的显示表达式. 下面分别对这两种情况进行证明.

Case I**:** 当$\alpha \in (0,2)$时, 滑倒损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{rl}}(s)$是下面函数的极小值点

$$\theta(v) := \begin{cases} \theta_{rl1}(v) := \{\alpha + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > 1\}, \\ \theta_{rl2}(v) := \{\alpha + \frac{(1-s)^2}{2}, & v = 1\}, \\ \theta_{rl3}(v) := \{\alpha v + \frac{(v-s)^2}{2}, & 0 < v < 1\}, \\ \theta_{rl4}(v) := \{\frac{s^2}{2}, & v = 0\}, \\ \theta_{rl5}(v) := \{\frac{(v-s)^2}{2}, & v < 0\}. \end{cases} \tag{1}$$

因为$\theta_{rl1}(v)$ 对于$v > 1$, $\theta_{rl3}(v)$ 对于$0 < v < 1$ 和$\theta_{rl5}(v)$ 对于$v < 0$ 是强凸的二次连续可微函数, 因此$\theta_{rl1}(v)$, $\theta_{rl3}(v)$ 和$\theta_{rl5}(v)$ 的唯一极小值点分别为$v = s$, $v = s - \alpha$ 和$v = s$. 此外, $\theta_{rl2}(v)$ 和$\theta_{rl4}(v)$ 分别在不可微点$v = 1$和$v = 0$处得到极小点. 接下来比较下面五个值$\theta_{rl1}(v)$ 对于$v > 1$, $\theta_{rl2}(v)$ 对于$v = 1$, $\theta_{rl3}(v)$ 对于$0 < v < 1$, $\theta_{rl4}(v)$ 对于$v = 0$ 和$\theta_{rl5}(v)$ 对于$v < 0$:
(i) 若$s > 1 + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \min\{\theta_{rl2}(v), \theta_{rl3}(v), \theta_{rl4}(v), \theta_{rl5}(v)\} > \theta_{rl1}(v)$, 得$v = s$.
(ii) 若$s = 1 + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \min\{\theta_{rl2}(v), \theta_{rl4}(v), \theta_{rl5}(v)\} > \theta_{rl1}(v) = \theta_{rl3}(v)$, 得$v = s$或者$v = s - \alpha$.
(iii) 若$\alpha \leqslant s < 1 + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \min\{\theta_{rl1}(v), \theta_{rl2}(v), \theta_{rl4}(v), \theta_{rl5}(v)\} > \theta_{rl3}(v)$, 得$v = s - \alpha$.
(iv) 若$0 \leqslant s < \alpha \Leftrightarrow \min\{\theta_{rl1}(v), \theta_{rl2}(v), \theta_{rl3}(v), \theta_{rl5}(v)\} > \theta_{rl4}(v)$, 得$v = 0$.
(v) 若$s < 0 \Leftrightarrow \min\{\theta_{rl1}(v), \theta_{rl2}(v), \theta_{rl3}(v), \theta_{rl4}(v)\} > \theta_{rl5}(v)$, 得$v = s$.
综上所述, 当$\alpha \in (0,2)$时, 我们可得滑道损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{rl}}(s)$表达式.

Case II: 当$\alpha \geqslant 2$时, 其证明类似于$\alpha \in (0,2)$, 因此省略详细证明. 证毕. □

**A8. 截断最小二乘损失函数的邻近点算子证明**

截断最小二乘损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{tls}}(s)$是下面函数的极小值点

$$\theta_{tls}(v) := \begin{cases} \theta_{tls1}(v) := \alpha(\mu-\varepsilon)^2 + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > \mu, \\ \theta_{tls2}(v) := \alpha(\mu-\varepsilon)^2 + \frac{(1-s)^2}{2}, & v = \mu, \\ \theta_{tls3}(v) := \alpha(v-\varepsilon)^2 + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (\varepsilon, \mu), \\ \theta_{tls4}(v) := \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in [-\varepsilon, \varepsilon], \\ \theta_{tls5}(v) := \alpha(-v-\varepsilon)^2 + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (-\mu, -\varepsilon). \\ \theta_{tls6}(v) := \alpha(\mu-\varepsilon)^2 + \frac{(-1-s)^2}{2}, & v = -\mu, \\ \theta_{tls7}(v) := \alpha(\mu-\varepsilon)^2 + \frac{(v-s)^2}{2}, & v < -\mu. \end{cases}$$

对于$v > \mu$, $\theta_{tls1}(v)$是二次连续可微的强凸函数, 由$\bigtriangledown\theta_{tls1}(v) = v - s = 0$可得$\theta_{tls1}(v)$唯一极小值点$v = s$. 类似地, 对于$v \in (\varepsilon, \mu)$, $\theta_{tls3}(v)$ 的唯一极小值点$v = (s + 2\alpha\varepsilon)/(2\alpha + 1)$. 对于$v \in v \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\theta_{tls4}(v)$ 的唯一极小值点$v = s$. 对于$v \in (-\mu, -\varepsilon)$,$\theta_{tls5}(v)$的唯一极小值点$v = (s - 2\alpha\varepsilon)/(2\alpha + 1)$. 对于$v < -\mu$,$\theta_{tls7}(v)$的唯一极小值点$v = s$. 此外, $\theta_{tls2}(v)$和$\theta_{tls6}$ 的极小值

点在不可微点处$v=\mu$和$-\mu$ 取得. 下面我们比较$\theta_{tls1}(v)$, $\theta_{tls2}(v)$, $\theta_{tls3}(v)$, $\theta_{tls4}(v)$, $\theta_{tls5}(v)$, $\theta_{tls6}(v)$和$\theta_{tls7}(v)$的值.
(i) 若$s>\sqrt{2\alpha+1}(\mu-\varepsilon)+\varepsilon \Leftrightarrow \min\{\theta_{tls2}(v),\theta_{tls3}(v),\theta_{tls4}(v),\theta_{tls5}(v),\theta_{tls6}(v),\theta_{tls7}(v)\}>\theta_{tls1}(v)$, 得$v=s$.
(ii) 若$s=\sqrt{2\alpha+1}(\mu-\varepsilon)+\varepsilon \Leftrightarrow \min\{\theta_{tls2}(v),\theta_{tls4}(v),\theta_{tls5}(v),\theta_{tls6}(v),\theta_{tls7}(v)\}>\theta_{tls1}(v)=\theta_{tls3}(v)$, 得$v=s$或者$(s+2\alpha\varepsilon)/(2\alpha+1)$.
(iii) 若$s\in(\varepsilon,\sqrt{2\alpha+1}(\mu-\varepsilon)+\varepsilon) \Leftrightarrow \min\{\theta_{tls1}(v),\theta_{tls2}(v),\theta_{tls4}(v),\theta_{tls5}(v),\theta_{tls6}(v),\theta_{tls7}(v)\}>\theta_{tls3}(v)$, 得$v=(s+2\alpha\varepsilon)/(2\alpha+1)$.
(iv) 若$s\in(-\varepsilon,\varepsilon) \Leftrightarrow \min\{\theta_{tls1}(v),\theta_{tls2}(v),\theta_{tls3}(v),\theta_{tls5}(v),\theta_{tls6}(v),\theta_{tls7}(v)\}>\theta_{tls4}(v)$, 得$v=s$.
(v) 若$s\in(-\sqrt{2\alpha+1}(\mu-\varepsilon)-\varepsilon,-\varepsilon) \Leftrightarrow \min\{\theta_{tls1}(v),\theta_{tls2}(v),\theta_{tls3}(v),\theta_{tls4}(v),\theta_{tls6}(v),\theta_{tls7}(v)\}>\theta_{tls5}(v)$, 得$v=(s-2\alpha\varepsilon)/(2\alpha+1)$.
(vi) 若$s=-\sqrt{2\alpha+1}(\mu-\varepsilon)-\varepsilon \Leftrightarrow \min\{\theta_{tls1}(v),\theta_{tls2}(v),\theta_{tls3}(v),\theta_{tls4}(v),\theta_{tls6}(v)\}>\theta_{tls5}(v)=\theta_{tls7}(v)$, 得$v=(s-2\alpha\varepsilon)/(2\alpha+1)$或者$s$
(vii) 若$s<-\sqrt{2\alpha+1}(\mu-\varepsilon)-\varepsilon \Leftrightarrow \min\{\theta_{tls1}(v),\theta_{tls2}(v),\theta_{tls3}(v),\theta_{tls4}(v),\theta_{tls5}(v),\theta_{tls6}(v)\}>\theta_{tls7}(v)$, 得$v=s$. 综上所述,我们可得截断最小二乘损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{tls}}(s)$. □

**A9. 截断弹球损失函数的邻近点算子证明**

因为截断弹球损失函数的邻近点算子对于$\alpha\in(0,2\kappa/\tau)$和$\alpha\geqslant 2\kappa/\tau$有不同的显示表达式. 下面分别对这两种情况进行证明.

**Case I:** 当$\alpha\in(0,2\kappa/\tau)$时, 截断弹球损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{tp}}(s)$是下面函数的极小值点

$$\theta_{tp}(v):=\begin{cases}\theta_{tp1}(v):=\alpha v+\frac{(v-s)^2}{2}, & v>0,\\ \theta_{tp2}(v):=\frac{s^2}{2}, & v=0,\\ \theta_{tp3}(v):=-\alpha\tau v+\frac{(v-s)^2}{2}, & v\in(-\kappa,0),\\ \theta_{tp4}(v):=\alpha\tau\kappa+\frac{(-\kappa-s)^2}{2}, & v=-\kappa,\\ \theta_{tp5}(v):=\alpha\tau\kappa+\frac{(v-s)^2}{2}, & v<-\kappa.\end{cases}$$

对于$v>0$, $\theta_{tp1}(v)$是二次连续可微的强凸函数, 由$\triangledown\theta_{tp1}(v)=\alpha+v-s=0$可得$\theta_{tp1}(v)$唯一极小值点$v=s-\alpha$. 类似地, 对于$v\in(-\kappa,0)$, $\theta_{tp3}(v)$的唯一极小值点$v=s+\tau\alpha$. 对于$v<-\kappa$, $\theta_{tp5}(v)$的唯一极小值点$v=s$. 对于$\theta_{tp2}(v)$和$\theta_{tp4}(v)$的极小点分别在不可微点$v=0$和$v=-\kappa$取得. 下面我们比较$\theta_{tp1}(v)$, $\theta_{tp2}(v)$, $\theta_{tp3}(v)$, $\theta_{tp4}(v)$和$\theta_{tp5}(v)$的值.
(i) 若$s\geqslant\alpha \Leftrightarrow \min\{\theta_{tp2}(v),\theta_{tp3}(v),\theta_{tp4}(v),\theta_{tp5}(v)\}>\theta_{tp1}(v)$, 得$v=s-\alpha$.
(ii) 若$s\in[-\tau\alpha,\alpha) \Leftrightarrow \min\{\theta_{tp1}(v),\theta_{tp3}(v),\theta_{tp4}(v),\theta_{tp5}(v)\}>\theta_{tp2}(v)$, 得$v=0$.
(iii) 若$s\in[-\tau\alpha/2-\kappa,-\tau\alpha) \Leftrightarrow \min\{\theta_{tp1}(v),\theta_{tp2}(v),\theta_{tp4}(v),\theta_{tp5}(v)\}>\theta_{tp3}(v)$, 得$v=s+\tau\alpha$.
(iv) 若$s=-\tau\alpha/2-\kappa \Leftrightarrow \min\{\theta_{tp1}(v),\theta_{tp2}(v),\theta_{tp4}(v)\}>\theta_{tp3}(v)=\theta_{tp5}(v)$, 得$v=s+\tau\alpha$或者$s$.
(v) 若$s<-\tau\alpha/2-\kappa \Leftrightarrow \min\{\theta_{tp1}(v),\theta_{tp2}(v),\theta_{tp3}(v),\theta_{tp4}(v)\}>\theta_{tp5}(v)$,

得$v=s$.
综上所述, 当$\alpha\in(0,2\kappa/\tau)$时, 我们可得截断弹球损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{tp}}(s)$表达式.

Case II: 当$\alpha\geqslant 2\kappa/\tau$时, 其证明类似于$\alpha\in(0,2\kappa/\tau)$, 因此省略详细证明. 证毕. $\square$

**A10. 双截断弹球损失函数的邻近点算子证明**

因为双截断弹球损失函数的邻近点算子对于(i) $\alpha\in(0,\frac{2\kappa}{\tau})$且$\alpha\in(0,2\mu)$, (ii) $\alpha\in(0,\frac{2\kappa}{\tau})$且$\alpha\geqslant 2\mu$, (iii) $\alpha\geqslant\frac{2\kappa}{\tau}$且$\alpha\in(0,2\mu)$和(iv)$\alpha\geqslant\frac{2\kappa}{\tau}$且$\alpha\geqslant 2\mu$有不同的显示表达式. 下面分别对这四种情况进行证明.

Case (i): 当$\alpha\in(0,\frac{2\kappa}{\tau})$且$\alpha\in(0,2\mu)$时, 双截断弹球损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{btp}}(s)$是下面函数的极小值点

$$\theta_{btp}(v):=\begin{cases}\theta_{btp1}(v):=\alpha\mu+\frac{(v-s)^2}{2}, & v>\mu,\\ \theta_{btp2}(v):=\alpha\mu+\frac{(\mu-s)^2}{2}, & v=\mu,\\ \theta_{btp3}(v):=\alpha v+\frac{(v-s)^2}{2}, & v\in(0,\mu),\\ \theta_{btp4}(v):=\frac{s^2}{2}, & v=0,\\ \theta_{btp5}(v):=-\alpha\tau v+\frac{(v-s)^2}{2}, & v\in(-\kappa,0).\\ \theta_{btp6}(v):=\alpha\tau\kappa+\frac{(-\kappa-s)^2}{2}, & v=-\kappa,\\ \theta_{btp7}(v):=\alpha\tau\kappa+\frac{(v-s)^2}{2}, & v<-\kappa.\end{cases}$$

对于$v>\mu$,$\theta_{btp1}(v)$是二次连续可微的强凸函数, 由$\bigtriangledown\theta_{btp1}(v)=v-s=0$可得$\theta_{btp1}(v)$唯一极小值点$v=s$. 类似地, 对于$v\in(0,\mu)$, $\theta_{btp3}(v)$的唯一极小值点$v=s-\alpha$. 对于$v\in(-\kappa,0)$,$\theta_{btp5}(v)$的唯一极小值点$v=s+\tau\alpha$. 对于$v<-\kappa$, $\theta_{btp7}(v)$的唯一极小值点$v=s$. 此外, $\theta_{btp2}(v)$, $\theta_{btp4}$和$\theta_{btp6}$的极小值点在不可微点处$v=\mu$, 0和$-\kappa$取得. 下面我们比较$\theta_{btp1}(v)$, $\theta_{btp2}(v)$, $\theta_{btp3}(v)$, $\theta_{btp4}(v)$, $\theta_{btp5}(v)$, $\theta_{btp6}(v)$和$\theta_{btp7}(v)$的值.

(i) 若$s>\mu+\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\min\{\theta_{btp2}(v),\theta_{btp3}(v),\theta_{btp4}(v),\theta_{btp5}(v),\theta_{btp6}(v),\theta_{btp7}(v)\}>\theta_{btp1}(v)$, 得$v=s$.
(ii) 若$s=\mu+\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\min\{\theta_{btp2}(v),\theta_{btp4}(v),\theta_{btp5}(v),\theta_{btp6}(v),\theta_{btp7}(v)\}>\theta_{btp1}(v)=\theta_{btp3}(v)$, 得$v=s$或者$s-\alpha$.
(iii) 若$s\in[\alpha,\mu+\alpha/2)\Leftrightarrow\min\{\theta_{btp1}(v),\theta_{btp2}(v),\theta_{btp4}(v),\theta_{btp5}(v),\theta_{btp6}(v),\theta_{btp7}(v)\}>\theta_{btp3}(v)$, 得$v=s-\alpha$.
(iv) 若$s\in(-\tau\alpha,\alpha]\Leftrightarrow\min\{\theta_{btp1}(v),\theta_{btp2}(v),\theta_{btp3}(v),\theta_{btp5}(v),\theta_{btp6}(v),\theta_{btp7}(v)\}>\theta_{btp4}(v)$, 得$v=0$.
(v) 若$s\in(-\tau\alpha/2-\kappa,-\tau\alpha)\Leftrightarrow\min\{\theta_{btp1}(v),\theta_{btp2}(v),\theta_{btp3}(v),\theta_{btp4}(v),\theta_{btp6}(v),\theta_{btp7}(v)\}>\theta_{btp5}(v)$, 得$v=s+\tau\alpha$.
(vi) 若$s=-\tau\alpha/2-\kappa\Leftrightarrow\min\{\theta_{btp1}(v),\theta_{btp2}(v),\theta_{btp3}(v),\theta_{btp4}(v),\theta_{btp6}(v)\}>\theta_{btp5}(v)=\theta_{btp7}(v)$, 得$v=s+\tau\alpha$ 或者 $s$.
(vii) 若$s<-\tau\alpha/2-\kappa\Leftrightarrow\min\{\theta_{btp1}(v),\theta_{btp2}(v),\theta_{btp3}(v),\theta_{btp4}(v),\theta_{btp5}(v),\theta_{btp6}(v)\}>\theta_{btp7}(v)$, 得$v=s$.
综上所述, 对于Case(i), 我们可得双截断弹球损失函数的邻近点算子$\mathrm{prox}_{\ell_{btp}}(s)$.

对于Case(ii): $\alpha \in (0, \frac{2\kappa}{\tau})$且$\alpha \geqslant 2\mu$. Case(iii): $\alpha \geqslant \frac{2\kappa}{\tau}$且$\alpha \in (0, 2\mu)$和Case(iv): $\alpha \geqslant \frac{2\kappa}{\tau}$ 且$\alpha \geqslant 2\mu$的情况, 其证明类似于Case(i), 因此省略详细证明. 证毕.

□

**B1. 广义合页损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^* \in \mathbb{R}$, 广义合页损失函数$\ell_{gh}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell_{gh}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{gh1}^*(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t - \eta(t-1) - 1, & t > 1, \\ \ell_{gh2}^*(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t - t, & t \in (0,1], \\ \ell_{gh3}^*(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

(i)对于$\ell_{gh1}^*(t^*)$, 当$t^* - \eta > 0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell_{gh1}^*(t^*) = +\infty$. 当$t^* - \eta = 0$时, $\ell_{gh1}^*(t^*) = \eta - 1$. 当$t^* - \eta < 0$ 时, 其上确界在$t = 1$处得到$\ell_{gh1}^*(t^*) = t^* - 1$.
(ii)对于$\ell_{gh2}^*(t^*)$, 当$t^* - 1 > 0$时, 其上确界在$t = 1$处得到$\ell_{gh2}^*(t^*) = t^* - 1$. 当$t^* - 1 = 0$时, $\ell_{gh2}^*(t^*) = 0$. 当$t^* - 1 < 0$时, 其上确界在$t = 0$处得到$\ell_{gh2}^*(t^*) = 0$.
(iii)对于$\ell_{gh3}^*(t^*)$, 当$t^* > 0$时, 其上确界在$t = 0$处得到$\ell_{gh3}^*(t^*) = 0$. 当$t^* = 0$时, $\ell_{gh3}^*(t^*) = 0$. 当$t^* < 0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell_{gh3}^*(t^*) = +\infty$.
对$\ell_{gh1}^*(t^*)$, $\ell_{gh2}^*(t^*)$和$\ell_{gh3}^*(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell_{gh}^*(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B2. 二次合页损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^* \in \mathbb{R}$, 二次合页损失函数$\ell_{sh}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell_{sh}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{sh1}^*(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t - t^2, & t > 0, \\ \ell_{sh2}^*(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

(i)对于$\ell_{sh1}^*(t^*)$, 当$t^* > 0$时, 其上确界在$t = t^*/2$处得到$\ell_{sh1}^*(t^*) = (t^*)^2/4$. 当$t^* = 0$时, $\ell_{sh1}^*(t^*) = 0$. $t^* < 0$ 时, 其上确界在$t = 0$处得到$\ell_{sh1}^*(t^*) = 0$.
(ii)对于$\ell_{sh2}^*(t^*)$, 当$t^* > 0$时, 其上确界在$t = 0$处得到$\ell_{sh2}^*(t^*) = 0$. 当$t^* = 0$时, $\ell_{sh2}^*(t^*) = 0$. 当$t^* < 0$时, 令$t$ 趋于负无穷大得到$\ell_{sh2}^*(t^*) = +\infty$.
对$\ell_{sh1}^*(t^*)$和$\ell_{sh2}^*(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell_{sh}^*(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B3. 对数损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^* \in \mathbb{R}$, 对数损失函数$\ell_{ll}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell_{ll}^*(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t - \log(1 + \exp(t-1)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

对于$\ell_{ll}^*(t^*)$, 当$t^* > 1$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell_{ll}^*(t^*) = +\infty$. 当$t^* = 1$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell_{ll}^*(t^*) = 1$. 当$t^* \in (0,1)$ 时, 其上确界在$t = \log(t^*/(1-t^*)) + 1$处得到$\ell_{ll}^*(t^*) = t^*\log(t^*) + (1-t^*)\log(1-t^*) + t^*$. 当$t^* = 0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell_{ll}^*(t^*) = 0$. 当$t^* < 0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell_{ll}^*(t^*) = +\infty$.

**B4. Huber合页损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^* \in \mathbb{R}$, Huber合页损失函数$\ell_{hh}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell_{hh}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{hh1}^*(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} (t^*-1)t + \frac{\delta}{2}, & t > \delta, \\ \ell_{hh2}^*(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t - \frac{t^2}{2\delta}, & t \in [0,\delta], \\ \ell_{hh3}^*(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t, & t < 0. \end{cases}$$

(i)对于$\ell_{hh1}^*(t^*)$, 当$t^*-1>0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell_{hh1}^*(t^*)=+\infty$. 当$t^*-1=0$时, $\ell_{hh1}^*(t^*)=\frac{\delta}{2}$. 当$t^*-1<0$ 时, 其上确界在$t=\delta$处得到$\ell_{hh1}^*(t^*)=\delta(t^*-\frac{1}{2})$.
(ii)对于$\ell_{hh2}^*(t^*)$, 当$t^*>1$时, 其上确界在$t=\delta$处得到$\ell_{hh2}^*(t^*)=\delta(t^*-\frac{1}{2})$. 当$t^*\in[0,1]$时, 其上确界在$t=\delta t^*$处得到$\ell_{hh2}^*(t^*)=\frac{\delta(t^*)^2}{2}$. 当$t^*<0$ 时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell_{hh2}^*(t^*)=0$.
(iii)对于$\ell_{hh3}^*(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell_{hh3}^*(t^*)=0$. 当$t^*=0$时, $\ell_{hh3}^*(t^*)=0$. 当$t^*<0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell_{hh3}^*(t^*)=+\infty$.
对$\ell_{hh1}^*(t^*)$, $\ell_{hh2}^*(t^*)$和$\ell_{hh3}^*(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell_{hh}^*(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B5.Huber弹球损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^*\in\mathbb{R}$, Huber弹球损失函数$\ell_{hp}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell_{hp}^*(t^*)=\begin{cases}\ell_{hp1}^*(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}(t^*-1)t+\frac{\delta}{2}, & t>\delta,\\ \ell_{hp2}^*(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}t^*t-\frac{t^2}{2\delta}, & t\in[0,\delta],\\ \ell_{hp3}^*(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}t^*t-\frac{\tau t^2}{2\delta}, & t\in[-\delta,0),\\ \ell_{hp4}^*(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}(t^*+\tau)t+\frac{\tau\delta}{2}, & t<-\delta.\end{cases}$$

(i)对于$\ell_{hp1}^*(t^*)$, 当$t^*-1>0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell_{hp1}^*(t^*)=+\infty$. 当$t^*-1=0$时, $\ell_{hp1}^*(t^*)=\frac{\delta}{2}$. 当$t^*-1<0$ 时, 其上确界在$t=\delta$处得到$\ell_{hp1}^*(t^*)=\delta(t^*-\frac{1}{2})$.
(ii)对于$\ell_{hp2}^*(t^*)$, 当$t^*>1$时, 其上确界在$t=\delta$处得到$\ell_{hp2}^*(t^*)=\delta(t^*-\frac{1}{2})$. 当$t^*\in[0,1]$时, 其上确界在$t=\delta t^*$处得到$\ell_{hp2}^*(t^*)=\frac{\delta(t^*)^2}{2}$. 当$t^*<0$ 时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell_{hp2}^*(t^*)=0$.
(iii)对于$\ell_{hp3}^*(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell_{hp3}^*(t^*)=0$. 当$t^*\in[-\tau,0]$时, 其上确界在$t=\delta t^*/\tau$ 处得到$\ell_{hp3}^*(t^*)=\frac{\delta(t^*)^2}{2\tau}$. 当$t^*<-\tau$时, 其上确界在$t=-\delta$处得到$\ell_{hp3}^*(t^*)=-\delta t^*-\tau\delta/2$.
(iv)对于$\ell_{hp4}^*(t^*)$, 当$t^*+\tau>0$时, 其上确界在$t=-\delta$处得到$\ell_{hp4}^*(t^*)=-\delta t^*-\tau\delta/2$. 当$t^*+\tau=0$时, $\ell_{hp4}^*(t^*)=\tau\delta/2$. 当$t^*+\tau<0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell_{hp4}^*(t^*)=+\infty$.
对$\ell_{hp1}^*(t^*)$, $\ell_{hp2}^*(t^*)$, $\ell_{hp3}^*(t^*)$ 和$\ell_{hp4}^*(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell_{hp}^*(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B6. 滑道损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^*\in\mathbb{R}$, 滑道损失函数$\ell_{rl}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell_{rl}^*(t^*):=\begin{cases}\ell_{rl1}^*(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}t^*t-1, & t>1,\\ \ell_{rl2}^*(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}(t^*-1)t, & t\in[0,1],\\ \ell_{rl3}^*(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}t^*t, & t<0.\end{cases}$$

(i)对于$\ell_{rl1}^*(t^*)$, 当$t^*>0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell_{rl1}^*(t^*)=+\infty$. 当$t^*=0$时, $\ell_{rl1}^*(t^*)=-1$. 当$t^*<0$ 时, 其上确界在$t=1$ 处得到$\ell_{rl1}^*(t^*)=t^*-1$.
(ii)对于$\ell_{rl2}^*(t^*)$, 当$t^*-1>0$时, 其上确界在$t=1$处得到$\ell_{rl2}^*(t^*)=t^*-1$.

当$t^*-1=0$时, $\ell^*_{rl2}(t^*)=0$. 当$t^*-1<0$ 时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell^*_{rl2}(t^*)=0$.
(iii)对于$\ell^*_{rl3}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell^*_{rl3}(t^*)=0$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{rl3}(t^*)=0$. 当$t^*<0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell^*_{rl3}(t^*)=+\infty$.
对$\ell^*_{rl1}(t^*)$, $\ell^*_{rl2}(t^*)$和$\ell^*_{rl3}(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell^*_{rl}(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B7. 截断对数损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^*\in\mathbb{R}$, 截断对数损失函数$\ell_{tll}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell^*_{tll}(t^*):=\begin{cases}\ell^*_{tll1}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t-\log(1+\exp(-\nu)), & t>1-\nu,\\ \ell^*_{tll2}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t-\log(1+\exp(t-1)), & t\leqslant 1-\nu.\end{cases}$$

(i)对于$\ell^*_{tll1}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 令$t$ 趋于正无穷大得到$\ell^*_{tll1}(t^*)=+\infty$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{tll1}(t^*)=-\log(1+\exp(-\nu))$. 当$t^*<0$时, 其上确界在$t=1-\nu$ 处得到$\ell^*_{tll1}(t^*)=t^*(1-\nu)-\log(1+\exp(-\nu))$.
(ii)对于$\ell^*_{tll2}(t^*)$, 当$t^*>1$时, 其上确界在$t=1-\nu$处得到$\ell^*_{tll2}(t^*)=t^*(1-\nu)-\log(1+\exp(-\nu))$. 当$t^*=1$ 时, 其上确界在$t=1-\nu$处得到$\ell^*_{tll2}(t^*)=t^*(1-\nu)-\log(1+exp(-\nu))$. 当$t^*\in(0,1)$ 时, 其上确界在$t=\log(t^*/(1-t^*))+1$处得到$\ell^*_{tll2}(t^*)=t^*\log(t^*)+(1-t^*)\log(1-t^*)+t^*$. 当$t^*=0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell^*_{tll2}(t^*)=0$. 当$t^*<0$时, 令$t$ 趋于负无穷大得到$\ell^*_{tll2}(t^*)=+\infty$.
对$\ell^*_{tll1}(t^*)$和$\ell^*_{tll2}(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell^*_{tll}(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B8. 截断最小二乘损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^*\in\mathbb{R}$, 截断最小二乘损失函数$\ell_{tls}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell^*_{tls}(t^*):=\begin{cases}\ell^*_{tls1}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t-(\mu-\varepsilon)^2, & t\geqslant\mu,\\ \ell^*_{tls2}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t-(t-\varepsilon)^2, & t\in[\varepsilon,\mu),\\ \ell^*_{tls3}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t, & t\in[0,\varepsilon),\\ \ell^*_{tls4}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t, & t\in[-\varepsilon,0),\\ \ell^*_{tls5}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t-(-t-\varepsilon)^2, & t\in[-\mu,-\varepsilon),\\ \ell^*_{tls6}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t-(\mu-\varepsilon)^2, & t\leqslant-\mu.\end{cases}$$

(i)对于$\ell^*_{tls1}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell^*_{tls1}(t^*)=+\infty$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{tls1}(t^*)=-(\mu-\varepsilon)^2$. 当$t^*<0$ 时, 其上确界在$t=\mu$ 处得到$\ell^*_{tls2}(t^*)=t^*\mu-(\mu-\varepsilon)^2$.
(ii)对于$\ell^*_{tls2}(t^*)$, 当$t^*>2(\mu-\varepsilon)$时, 其上确界在$t=\mu$处得到$\ell^*_{tls2}(t^*)=t^*\mu-(\mu-\varepsilon)^2$. 当$t^*\in[0,2(\mu-\varepsilon)]$时, 其上确界在$t=t^*/2+\varepsilon$处得到$\ell^*_{tls2}(t^*)=(t^*)^2/4+t^*\varepsilon$. 当$t^*<0$时, 其上确界在$t=\varepsilon$处得到$\ell^*_{tls2}(t^*)=t^*\varepsilon$.
(iii)对于$\ell^*_{tls3}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=\varepsilon$处得到$\ell^*_{tls3}(t^*)=t^*\varepsilon$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{tls3}(t^*)=0$. 当$t^*<0$ 时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell^*_{tls3}(t^*)=0$.
(iv)对于$\ell^*_{tls4}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell^*_{tls4}(t^*)=0$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{tls4}(t^*)=0$. 当$t^*<0$时, 其上确界在$t=-\varepsilon$处得到$\ell^*_{tls4}(t^*)=-t^*\varepsilon$.
(v)对于$\ell^*_{tls5}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=-\varepsilon$处得到$\ell^*_{tls5}(t^*)=-t^*\varepsilon$.

当$t^* \in [2(\varepsilon-\mu),0]$时, 其上确界在$t=t^*/2-\varepsilon$ 处得到$\ell^*_{tls5}(t^*)=(t^*)^2/4-t^*\varepsilon$. 当$t^*<2(\varepsilon-\mu)$ 时, 其上确界在$t=-\mu$处得到$\ell^*_{tls5}(t^*)=-t^*\mu-(\mu-\varepsilon)^2$.
(vi)对于$\ell^*_{tls6}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=-\mu$处得到$\ell^*_{tls6}(t^*)=-t^*\mu-(\mu-\varepsilon)^2$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{tls6}(t^*)=-(\mu-\varepsilon)^2$. 当$t^*<0$时, 令$t$ 趋于负无穷大得到$\ell^*_{tls6}(t^*)=+\infty$.
对$\ell^*_{tls1}(t^*)$, $\ell^*_{tls2}(t^*)$, $\ell^*_{tls3}(t^*)$, $\ell^*_{tls4}(t^*)$, $\ell^*_{tls5}(t^*)$和$\ell^*_{tls6}(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell^*_{tls}(t^*)$表达式. 证毕. □

**B9. 截断弹球损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^* \in \mathbb{R}$, 截断弹球损失函数$\ell_{tp}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell^*_{tp}(t^*) := \begin{cases} \ell^*_{tp1}(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}}(t^*-1)t, & t \geqslant 0, \\ \ell^*_{tp2}(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}}(t^*+\tau)t, & t \in [-\kappa,0), \\ \ell^*_{tp3}(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t-\tau\kappa, & t<-\kappa. \end{cases}$$

(i)对于$\ell^*_{tp1}(t^*)$, 当$t^*-1>0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell^*_{tp1}(t^*)=+\infty$. 当$t^*-1=0$时, $\ell^*_{tp1}(t^*)=0$. 当$t^*-1<0$时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell^*_{tp1}(t^*)=0$.
(ii)对于$\ell^*_{tp2}(t^*)$, 当$t^*+\tau>0$时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell^*_{tp2}(t^*)=0$. 当$t^*+\tau=0$时, $\ell^*_{tp2}(t^*)=0$. 当$t^*+\tau<0$时, 其上确界在$t=-\kappa$处得到$\ell^*_{tp2}(t^*)=-\kappa(t^*+\tau)$.
(iii)对于$\ell^*_{tp3}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=-\kappa$处得到$\ell^*_{tp3}(t^*)=-\kappa(t^*+\tau)$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{tp3}(t^*)=-\tau\kappa$. 当$t^*<0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell^*_{tp3}(t^*)=+\infty$.
对$\ell^*_{tp1}(t^*)$, $\ell^*_{tp2}(t^*)$和$\ell^*_{tp3}(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell^*_{tp}(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B10. 双截断弹球损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^* \in \mathbb{R}$, 双截断弹球损失函数$\ell_{btp}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell^*_{btp}(t^*) := \begin{cases} \ell^*_{btp1}(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t-\mu, & t \geqslant \mu, \\ \ell^*_{btp2}(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}}(t^*-1)t, & t \in [0,\mu), \\ \ell^*_{btp3}(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}}(t^*+\tau)t, & t \in [-\kappa,0), \\ \ell^*_{btp4}(t^*) := \sup_{t\in\mathbb{R}} t^*t-\tau\kappa, & t<-\kappa. \end{cases}$$

(i)对于$\ell^*_{btp1}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell^*_{btp1}(t^*)=+\infty$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{btp1}(t^*)=-1$. 当$t^*<0$时, 其上确界在$t=\mu$处得到$\ell^*_{btp1}(t^*)=(t^*-1)\mu$.
(ii)对于$\ell^*_{btp2}(t^*)$, 当$t^*-1>0$时, 其上确界在$t=\mu$处得到$\ell^*_{btp1}(t^*)=(t^*-1)\mu$. 当$t^*-1=0$时, $\ell^*_{btp2}(t^*)=0$. 当$t^*-1<0$时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell^*_{btp2}(t^*)=0$.
(iii)对于$\ell^*_{btp3}(t^*)$, 当$t^*+\tau>0$时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell^*_{btp3}(t^*)=0$. 当$t^*+\tau=0$时, $\ell^*_{btp3}(t^*)=0$. 当$t^*+\tau<0$时, 其上确界在$t=-\kappa$处得到$\ell^*_{btp3}(t^*)=-\kappa(t^*+\tau)$.

(iv)对于$\ell^*_{btp4}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=-\kappa$处得到$\ell^*_{btp4}(t^*)=-\kappa(t^*+\tau)$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{btp4}(t^*)=-\tau\kappa$. 当$t^*<0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell^*_{btp4}(t^*)=+\infty$.
对$\ell^*_{btp1}(t^*)$, $\ell^*_{btp2}(t^*)$, $\ell^*_{btp3}(t^*)$和$\ell^*_{btp4}(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell^*_{btp}(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B11. 广义指数损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^*\in\mathbb{R}$, 广义指数损失函数$\ell_{gel}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell^*_{gel}(t^*):=\begin{cases}\ell^*_{gel1}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}t^*t-\sigma^2(1-\exp(-(t/\sigma)^2)), & t>0,\\ \ell^*_{gel2}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}t^*t, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

(i)对于$\ell^*_{gel1}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell^*_{gel1}(t^*)=+\infty$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{gel1}(t^*)=0$. $t^*<0$ 时, 其上确界在$t=0$ 处得到$\ell^*_{gel1}(t^*)=0$.
(ii)对于$\ell^*_{gel2}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell^*_{gel2}(t^*)=0$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{gel2}(t^*)=0$. 当$t^*<0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell^*_{gel2}(t^*)=+\infty$.
对$\ell^*_{gel1}(t^*)$和$\ell^*_{gel2}(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell^*_{gel}(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B12. 广义对数损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^*\in\mathbb{R}$, 广义对数损失函数$\ell_{gll}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell^*_{gll}(t^*):=\begin{cases}\ell^*_{gll1}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}t^*t-\sigma^2\log(1+(t/\sigma)^2), & t>0,\\ \ell^*_{gll2}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}t^*t, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

(i)对于$\ell^*_{gll1}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell^*_{gll1}(t^*)=+\infty$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{gll1}(t^*)=0$. $t^*<0$ 时, 其上确界在$t=0$ 处得到$\ell^*_{gll1}(t^*)=0$.
(ii)对于$\ell^*_{gll2}(t^*)$, 当$t^*>0$时, 其上确界在$t=0$处得到$\ell^*_{gll2}(t^*)=0$. 当$t^*=0$时, $\ell^*_{gll2}(t^*)=0$. 当$t^*<0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell^*_{gll2}(t^*)=+\infty$.
对$\ell^*_{gll1}(t^*)$和$\ell^*_{gll2}(t^*)$逐点取上确界, 得$\ell^*_{gll}(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B13. Sigmoid损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^*\in\mathbb{R}$, Sigmoid损失函数$\ell_{sl}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell^*_{sl}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}t^*t-\frac{1}{1+\exp(-\beta t)},t\in\mathbb{R}.$$

当$t^*>0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell^*_{sl}(t^*)=+\infty$. 当$t^*=0$ 时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell^*_{sl}(t^*)=0$, 当$t^*<0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell^*_{sl}(t^*)=+\infty$. 综上所述, 即得$\ell^*_{sl}(t^*)$的表达式. 证毕. □

**B14. 累计分布损失函数的Fenchel共轭证明**

对任意$t^*\in\mathbb{R}$, 累计分布损失函数$\ell_{cd}(t)$的Fenchel共轭为

$$\ell^*_{cd}(t^*):=\sup_{t\in\mathbb{R}}t^*t-\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2\pi}\exp(-\gamma^2/2)d\gamma,t\in\mathbb{R}.$$

当$t^* > 0$时, 令$t$趋于正无穷大得到$\ell^*_{cd}(t^*) = +\infty$. 当$t^* = 0$ 时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell^*_{cd}(t^*) = 0$, 当$t^* < 0$时, 令$t$趋于负无穷大得到$\ell^*_{cd}(t^*) = +\infty$. 综上所述, 即得$\ell^*_{cd}(t^*)$ 的表达式. 证毕. $\square$

## 参考文献

[1] 王华军, 0/1损失支持向量机优化模型与算法.