

损失函数的邻近点算子和Fenchel共轭证明

王华军, 修乃华*

(北京交通大学数学系, 北京, 100044)

摘要: 本文是论文[1]的一个补充材料. 本文主要包括两部分: (i)给出了论文[1]所需要的9种损失函数的邻近点算子证明(见A1-A9); (ii)给出了论文[1]所需要的15种损失函数的Fenchel共轭证明(见B1-B15).

A1. 广义合页损失函数的邻近点算子证明

广义合页损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{gh}}(s)$ 是下面函数的极小值点

$$\theta_{gh}(v) := \begin{cases} \theta_{gh1}(v) := \alpha(1 + \eta(v-1)) + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > 1, \\ \theta_{gh2}(v) := \alpha + \frac{(1-s)^2}{2}, & v = 1, \\ \theta_{gh3}(v) := \alpha v + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (0, 1), \\ \theta_{gh4}(v) := \frac{s^2}{2}, & v = 0, \\ \theta_{gh5}(v) := \frac{(v-s)^2}{2}, & v < 0. \end{cases}$$

对于 $v > 1$, $\theta_{gh1}(v)$ 是二次连续可微的强凸函数, 由 $\nabla\theta_{gh1}(v) = \alpha\eta + v - s = 0$ 可得 $\theta_{gh1}(v)$ 唯一极小值点 $v = s - \alpha\eta$. 类似地, 对于 $v \in (0, 1)$, $\theta_{gh3}(v)$ 的唯一极小值点 $v = s - \alpha$. 对于 $v < 0$, $\theta_{gh5}(v)$ 的唯一极小值点是 $v = s$. 对于 $\theta_{gh2}(v)$ 和 $\theta_{gh4}(v)$ 的极小点分别在不可微点 $v = 1$ 和 $v = 0$ 取得, 下面我们比较 $\theta_{gh1}(v)$, $\theta_{gh2}(v)$, $\theta_{gh3}(v)$, $\theta_{gh4}(v)$ 和 $\theta_{gh5}(v)$ 的值.

- (i) 若 $s > 1 + \alpha\eta \Leftrightarrow \min\{\theta_{gh2}(v), \theta_{gh3}(v), \theta_{gh4}(v), \theta_{gh5}(v)\} > \theta_{gh1}(v)$, 得 $v = s - \alpha\eta$.
- (ii) 若 $s \in (1 + \alpha, 1 + \alpha\eta] \Leftrightarrow \min\{\theta_{gh1}(v), \theta_{gh3}(v), \theta_{gh4}(v), \theta_{gh5}(v)\} > \theta_{gh2}(v)$, 得 $v = 1$.
- (iii) 若 $s \in (\alpha, 1 + \alpha] \Leftrightarrow \min\{\theta_{gh1}(v), \theta_{gh2}(v), \theta_{gh4}(v), \theta_{gh5}(v)\} > \theta_{gh3}(v)$, 得 $v = s - \alpha$.
- (iv) 若 $s \in (0, \alpha] \Leftrightarrow \min\{\theta_{gh1}(v), \theta_{gh2}(v), \theta_{gh3}(v), \theta_{gh5}(v)\} > \theta_{gh4}(v)$, 得 $v = 0$.
- (v) 若 $s \leq 0 \Leftrightarrow \min\{\theta_{gh1}(v), \theta_{gh2}(v), \theta_{gh3}(v), \theta_{gh4}(v)\} > \theta_{gh5}(v)$, 得 $v = s$.

综上所述, 我们可得广义合页损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{gh}}(s)$. 证毕. \square

A2. 弹球损失函数的邻近点算子证明

弹球损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{pl}}(s)$ 是下面函数的极小值点

$$\theta_{pl}(v) := \begin{cases} \theta_{pl1}(v) := \alpha v + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > 0, \\ \theta_{pl2}(v) := \frac{s^2}{2}, & v = 0, \\ \theta_{pl3}(v) := -\alpha\tau v + \frac{(v-s)^2}{2}, & v < 0, \end{cases}$$

对于 $v > 0$, $\theta_{pl1}(v)$ 是二次连续可微的强凸函数, 由 $\nabla\theta_{pl1}(v) = \alpha + v - s = 0$ 可得 $\theta_{pl1}(v)$ 唯一极小值点 $v = s - \alpha$. 类似地, 对于 $v < 0$, $\theta_{pl3}(v)$ 的唯一极小值点是 $v = s + \alpha\tau$. 对于 $\theta_{pl2}(v)$ 的极小点在不可微点 $v = 0$ 取得, 下面我们比较 $\theta_{pl1}(v)$, $\theta_{pl2}(v)$ 和 $\theta_{pl3}(v)$ 的值.

- (i) 若 $s > \alpha \Leftrightarrow \min\{\theta_{pl2}(v), \theta_{pl3}(v)\} > \theta_{pl1}(v)$, 得 $v = s - \alpha$.
- (ii) 若 $s \in [-\tau\alpha, \alpha] \Leftrightarrow \min\{\theta_{pl1}(v), \theta_{pl3}(v)\} > \theta_{pl2}(v)$, 得 $v = 0$.
- (iii) 若 $s < -\tau\alpha \Leftrightarrow \min\{\theta_{pl1}(v), \theta_{pl2}(v)\} > \theta_{pl3}(v)$, 得 $v = s + \alpha\tau$.

综上所述, 我们可得弹球损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{pl}}(s)$. 证毕. \square

A3. ε -不敏感弹球损失函数的邻近点算子证明

ε -不敏感弹球损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{ip}}(s)$ 是下面函数的极小值点

$$\theta_{ip}(v) := \begin{cases} \theta_{ip1}(v) := \alpha(v - \varepsilon) + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > \varepsilon, \\ \theta_{ip2}(v) := \frac{(\varepsilon-s)^2}{2}, & v = \varepsilon, \\ \theta_{ip3}(v) := \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (-\varepsilon/\tau, \varepsilon), \\ \theta_{ip4}(v) := \frac{(-\varepsilon/\tau-s)^2}{2}, & v = -\varepsilon/\tau, \\ \theta_{ip5}(v) := -\alpha\tau(v + \varepsilon/\tau) + \frac{(v-s)^2}{2}, & v < -\varepsilon/\tau. \end{cases}$$

对于 $v > \varepsilon$, $\theta_{ip1}(v)$ 是二次连续可微的强凸函数, 由 $\nabla \theta_{ip1}(v) = \alpha + v - s = 0$ 可得 $\theta_{ip1}(v)$ 唯一极小值点 $v = s - \alpha$. 类似地, 对于 $v \in (-\varepsilon/\tau, \varepsilon)$, $\theta_{ip3}(v)$ 的唯一极小值点 $v = s$. 对于 $v < -\varepsilon/\tau$, $\theta_{ip5}(v)$ 的唯一极小值点是 $v = s + \alpha\tau$. 对于 $\theta_{ip2}(v)$ 和 $\theta_{ip4}(v)$ 的极小点分别在不可微点 $v = \varepsilon$ 和 $v = -\varepsilon/\tau$ 取得, 下面我们比较 $\theta_{ip1}(v)$, $\theta_{ip2}(v)$, $\theta_{ip3}(v)$, $\theta_{ip4}(v)$ 和 $\theta_{ip5}(v)$ 的值.

- (i) 若 $s > \alpha + \varepsilon \Leftrightarrow \min\{\theta_{ip2}(v), \theta_{ip3}(v), \theta_{ip4}(v), \theta_{ip5}(v)\} > \theta_{ip1}(v)$, 得 $v = s - \alpha$.
 - (ii) 若 $s \in [\varepsilon, \alpha + \varepsilon] \Leftrightarrow \min\{\theta_{ip1}(v), \theta_{ip3}(v), \theta_{ip4}(v), \theta_{ip5}(v)\} > \theta_{ip2}(v)$, 得 $v = \varepsilon$.
 - (iii) 若 $s \in [-\varepsilon/\tau, \varepsilon] \Leftrightarrow \min\{\theta_{ip1}(v), \theta_{ip2}(v), \theta_{ip4}(v), \theta_{ip5}(v)\} > \theta_{ip3}(v)$, 得 $v = s$.
 - (iv) 若 $s \in [-\varepsilon/\tau - \tau\alpha, -\varepsilon/\tau] \Leftrightarrow \min\{\theta_{ip1}(v), \theta_{ip2}(v), \theta_{ip3}(v), \theta_{ip5}(v)\} > \theta_{ip4}(v)$, 得 $v = -\varepsilon/\tau$.
 - (v) 若 $s < -\varepsilon/\tau - \tau\alpha \Leftrightarrow \min\{\theta_{ip1}(v), \theta_{ip2}(v), \theta_{ip3}(v), \theta_{ip4}(v)\} > \theta_{ip5}(v)$, 得 $v = s + \tau\alpha$.
- 综上所述, 我们可得 ε -不敏感弹球损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{ip}}(s)$. 证毕. \square

A4. 二次合页损失函数的邻近点算子证明

二次合页损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{sh}}(s)$ 是下面函数的极小值点

$$\theta_{sh}(v) := \begin{cases} \theta_{sh1}(v) := \alpha v^2 + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > 0, \\ \theta_{sh2}(v) := \frac{(v-s)^2}{2}, & v \leq 0, \end{cases}$$

对于 $v > 0$, $\theta_{sh1}(v)$ 是二次连续可微的强凸函数, 由 $\nabla \theta_{sh1}(v) = 2\alpha v + v - s = 0$ 可得 $\theta_{sh1}(v)$ 唯一极小值点 $v = \frac{s}{1+2\alpha}$. 类似地, 对于 $v \leq 0$, $\theta_{sh2}(v)$ 的唯一极小值点是 $v = s$. 下面我们比较 $\theta_{sh1}(v)$ 和 $\theta_{sh2}(v)$ 的值.

- (i) 若 $s \geq 0 \Leftrightarrow \min \theta_{sh2}(v) > \theta_{sh1}(v)$, 得 $v = \frac{s}{1+2\alpha}$.
- (ii) 若 $s < 0 \Leftrightarrow \min \theta_{sh1}(v) > \theta_{sh2}(v)$, 得 $v = s$.

综上所述, 我们可得二次合页损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{sh}}(s)$. 证毕. \square

A5. Huber合页损失函数的邻近点算子证明

Huber合页损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{hh}}(s)$ 是下面函数的极小值点

$$\theta_{hh}(v) := \begin{cases} \theta_{hh1}(v) := \alpha(v - \frac{\delta}{2}) + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > \delta, \\ \theta_{hh2}(v) := \alpha \frac{v^2}{2\delta} + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in [0, \delta], \\ \theta_{hh3}(v) := \frac{(v-s)^2}{2}, & v < 0. \end{cases}$$

对于 $v > \delta$, $\theta_{hh1}(v)$ 是二次连续可微的强凸函数, 由 $\nabla \theta_{hh1}(v) = \alpha + v - s = 0$ 可得 $\theta_{hh1}(v)$ 唯一极小值点 $v = s - \alpha$. 类似地, 对于 $v \in [0, \delta]$, $\theta_{hh2}(v)$ 的唯一极小值点 $v = \frac{\delta s}{\alpha + \delta}$. 对于 $v < 0$, $\theta_{hh3}(v)$ 的唯一极小值点是 $v = s$. 下面我们比较 $\theta_{hh1}(v)$, $\theta_{hh2}(v)$ 和 $\theta_{hh3}(v)$ 的值.

- (i) 若 $s \geq \alpha + \delta \Leftrightarrow \min\{\theta_{hh2}(v), \theta_{hh3}(v)\} > \theta_{hh1}(v)$, 得 $v = s - \alpha$.
- (ii) 若 $s \in [0, \alpha + \delta] \Leftrightarrow \min\{\theta_{hh1}(v), \theta_{hh3}(v)\} > \theta_{hh2}(v)$, 得 $v = \frac{\delta s}{\alpha + \delta}$.
- (iii) 若 $s < 0 \Leftrightarrow \min\{\theta_{hh1}(v), \theta_{hh2}(v)\} > \theta_{hh3}(v)$, 得 $v = s$.

综上所述, 我们可得Huber合页损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{hh}}(s)$. 证毕. \square

A6. Huber弹球损失函数的邻近点算子证明

Huber弹球损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{hp}}(s)$ 是下面函数的极小值点

$$\theta_{hp}(v) := \begin{cases} \theta_{hp1}(v) := \alpha(v - \delta/2) + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > \delta, \\ \theta_{hp2}(v) := \alpha v^2 / (2\delta) + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (0, \delta], \\ \theta_{hp3}(v) := \alpha \tau v^2 / (2\delta) + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in [-\delta, 0], \\ \theta_{hp4}(v) := -\tau\alpha(v + \delta/2) + \frac{(v-s)^2}{2}, & v < -\delta. \end{cases}$$

对于 $v > \delta$, $\theta_{hp1}(v)$ 是二次连续可微的强凸函数, 由 $\nabla \theta_{hp1}(v) = \alpha + v - s = 0$ 可得 $\theta_{hp1}(v)$ 唯一极小值点 $v = s - \alpha$. 类似地, 对于 $v \in (0, \delta]$, $\theta_{hp2}(v)$ 的唯一极小值点 $v = \delta s / (\delta + \alpha)$. 对于 $v \in [-\delta, 0]$, $\theta_{hp3}(v)$ 的唯一极小值点是 $v = \delta s / (\delta + \tau\alpha)$. 对于 $v < -\delta$, $\theta_{hp4}(v)$ 的唯一极小值点是 $v = s + \tau\alpha$. 下面我们比较 $\theta_{hp1}(v)$, $\theta_{hp2}(v)$, $\theta_{hp3}(v)$ 和 $\theta_{hp4}(v)$ 的值.

- (i) 若 $s \geq \alpha + \delta \Leftrightarrow \min\{\theta_{hp2}(v), \theta_{hp3}(v), \theta_{hp4}(v)\} > \theta_{hp1}(v)$, 得 $v = s - \alpha$.
- (ii) 若 $s \in (0, \alpha + \delta) \Leftrightarrow \min\{\theta_{hp1}(v), \theta_{hp3}(v), \theta_{hp4}(v)\} > \theta_{hp2}(v)$, 得 $v = \delta s / (\delta + \alpha)$.
- (iii) 若 $s \in (-\tau\alpha + \delta, 0] \Leftrightarrow \min\{\theta_{hp1}(v), \theta_{hp2}(v), \theta_{hp4}(v)\} > \theta_{hp3}(v)$, 得 $v = \delta s / (\delta + \tau\alpha)$.

(iv) 若 $s \leq -(\tau\alpha + \delta) \Leftrightarrow \min\{\theta_{hp1}(v), \theta_{hp2}(v), \theta_{hp3}(v)\} > \theta_{hp4}(v)$, 得 $v = s + \tau\alpha$.
综上所述, 我们可得Huber弹球损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{hp}}(s)$. 证毕. \square

A7. 截断最小二乘损失函数的邻近点算子证明

截断最小二乘损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{ts}}(s)$ 是下面函数的极小值点

$$\theta_{ts}(v) := \begin{cases} \theta_{ts1}(v) := \alpha(\mu - \varepsilon)^2 + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > \mu, \\ \theta_{ts2}(v) := \alpha(\mu - \varepsilon)^2 + \frac{(1-s)^2}{2}, & v = \mu, \\ \theta_{ts3}(v) := \alpha(v - \varepsilon)^2 + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (\varepsilon, \mu), \\ \theta_{ts4}(v) := \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in [-\varepsilon, \varepsilon], \\ \theta_{ts5}(v) := \alpha(-v - \varepsilon)^2 + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (-\mu, -\varepsilon), \\ \theta_{ts6}(v) := \alpha(\mu - \varepsilon)^2 + \frac{(-1-s)^2}{2}, & v = -\mu, \\ \theta_{ts7}(v) := \alpha(\mu - \varepsilon)^2 + \frac{(v-s)^2}{2}, & v < -\mu. \end{cases}$$

对于 $v > \mu$, $\theta_{ts1}(v)$ 是二次连续可微的强凸函数, 由 $\nabla\theta_{ts1}(v) = v - s = 0$ 可得 $\theta_{ts1}(v)$ 唯一极小值点 $v = s$. 类似地, 对于 $v \in (\varepsilon, \mu)$, $\theta_{ts3}(v)$ 的唯一极小值点 $v = (s + 2\alpha\varepsilon)/(2\alpha + 1)$. 对于 $v \in v \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\theta_{ts4}(v)$ 的唯一极小值点 $v = s$. 对于 $v \in (-\mu, -\varepsilon)$, $\theta_{ts5}(v)$ 的唯一极小值点 $v = (s - 2\alpha\varepsilon)/(2\alpha + 1)$. 对于 $v < -\mu$, $\theta_{ts7}(v)$ 的唯一极小值点 $v = s$. 此外, $\theta_{ts2}(v)$ 和 $\theta_{ts6}(v)$ 的极小值点在不可微点处 $v = \mu$ 和 $-\mu$ 取得. 下面我们比较 $\theta_{ts1}(v)$, $\theta_{ts2}(v)$, $\theta_{ts3}(v)$, $\theta_{ts4}(v)$, $\theta_{ts5}(v)$, $\theta_{ts6}(v)$ 和 $\theta_{ts7}(v)$ 的值.

- (i) 若 $s > \sqrt{2\alpha + 1}(\mu - \varepsilon) + \varepsilon \Leftrightarrow \min\{\theta_{ts2}(v), \theta_{ts3}(v), \theta_{ts4}(v), \theta_{ts5}(v), \theta_{ts6}(v), \theta_{ts7}(v)\} > \theta_{ts1}(v)$, 得 $v = s$.
- (ii) 若 $s = \sqrt{2\alpha + 1}(\mu - \varepsilon) + \varepsilon \Leftrightarrow \min\{\theta_{ts2}(v), \theta_{ts4}(v), \theta_{ts5}(v), \theta_{ts6}(v), \theta_{ts7}(v)\} > \theta_{ts1}(v) = \theta_{ts3}(v)$, 得 $v = s$ 或者 $(s + 2\alpha\varepsilon)/(2\alpha + 1)$.
- (iii) 若 $s \in (\varepsilon, \sqrt{2\alpha + 1}(\mu - \varepsilon) + \varepsilon) \Leftrightarrow \min\{\theta_{ts1}(v), \theta_{ts2}(v), \theta_{ts4}(v), \theta_{ts5}(v), \theta_{ts6}(v), \theta_{ts7}(v)\} > \theta_{ts3}(v)$, 得 $v = (s + 2\alpha\varepsilon)/(2\alpha + 1)$.
- (iv) 若 $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow \min\{\theta_{ts1}(v), \theta_{ts2}(v), \theta_{ts3}(v), \theta_{ts5}(v), \theta_{ts6}(v), \theta_{ts7}(v)\} > \theta_{ts4}(v)$, 得 $v = s$.
- (v) 若 $s \in (-\sqrt{2\alpha + 1}(\mu - \varepsilon) - \varepsilon, -\varepsilon) \Leftrightarrow \min\{\theta_{ts1}(v), \theta_{ts2}(v), \theta_{ts3}(v), \theta_{ts4}(v), \theta_{ts6}(v), \theta_{ts7}(v)\} > \theta_{ts5}(v)$, 得 $v = (s - 2\alpha\varepsilon)/(2\alpha + 1)$.
- (vi) 若 $s = -\sqrt{2\alpha + 1}(\mu - \varepsilon) - \varepsilon \Leftrightarrow \min\{\theta_{ts1}(v), \theta_{ts2}(v), \theta_{ts3}(v), \theta_{ts4}(v), \theta_{ts6}(v)\} > \theta_{ts5}(v) = \theta_{ts7}(v)$, 得 $v = (s - 2\alpha\varepsilon)/(2\alpha + 1)$ 或者 s .
- (vii) 若 $s < -\sqrt{2\alpha + 1}(\mu - \varepsilon) - \varepsilon \Leftrightarrow \min\{\theta_{ts1}(v), \theta_{ts2}(v), \theta_{ts3}(v), \theta_{ts4}(v), \theta_{ts5}(v), \theta_{ts6}(v)\} > \theta_{ts7}(v)$, 得 $v = s$. 综上所述, 我们可得截断最小二乘损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{ts}}(s)$.

A8. 截断弹球损失函数的邻近点算子证明

因为截断弹球损失函数的邻近点算子对于 $\alpha \in (0, 2\kappa/\tau)$ 和 $\alpha \geq 2\kappa/\tau$ 有不同的显示表达式. 下面分别对这两种情况进行证明.

Case I: 当 $\alpha \in (0, 2\kappa/\tau)$ 时, 截断弹球损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{tp}}(s)$ 是下面函数的极小值点

$$\theta_{tp}(v) := \begin{cases} \theta_{tp1}(v) := \alpha v + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > 0, \\ \theta_{tp2}(v) := \frac{s^2}{2}, & v = 0, \\ \theta_{tp3}(v) := -\alpha\tau v + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (-\kappa, 0), \\ \theta_{tp4}(v) := \alpha\tau\kappa + \frac{(-\kappa-s)^2}{2}, & v = -\kappa, \\ \theta_{tp5}(v) := \alpha\tau\kappa + \frac{(v-s)^2}{2}, & v < -\kappa. \end{cases}$$

对于 $v > 0$, $\theta_{tp1}(v)$ 是二次连续可微的强凸函数, 由 $\nabla\theta_{tp1}(v) = \alpha + v - s = 0$ 可得 $\theta_{tp1}(v)$ 唯一极小值点 $v = s - \alpha$. 类似地, 对于 $v \in (-\kappa, 0)$, $\theta_{tp3}(v)$ 的唯一极小值点 $v = s + \tau\alpha$. 对于 $v < -\kappa$, $\theta_{tp5}(v)$ 的唯一极小值点 $v = s$. 对于 $\theta_{tp2}(v)$ 和 $\theta_{tp4}(v)$ 的极小点分别在不可微点 $v = 0$ 和 $v = -\kappa$ 取得. 下面我们比较 $\theta_{tp1}(v)$, $\theta_{tp2}(v)$, $\theta_{tp3}(v)$, $\theta_{tp4}(v)$ 和 $\theta_{tp5}(v)$ 的值.

- (i) 若 $s \geq \alpha \Leftrightarrow \min\{\theta_{tp2}(v), \theta_{tp3}(v), \theta_{tp4}(v), \theta_{tp5}(v)\} > \theta_{tp1}(v)$, 得 $v = s - \alpha$.
- (ii) 若 $s \in [-\tau\alpha, \alpha] \Leftrightarrow \min\{\theta_{tp1}(v), \theta_{tp3}(v), \theta_{tp4}(v), \theta_{tp5}(v)\} > \theta_{tp2}(v)$, 得 $v = 0$.
- (iii) 若 $s \in [-\tau\alpha/2 - \kappa, -\tau\alpha] \Leftrightarrow \min\{\theta_{tp1}(v), \theta_{tp2}(v), \theta_{tp4}(v), \theta_{tp5}(v)\} > \theta_{tp3}(v)$, 得 $v = s + \tau\alpha$.

- (iv) 若 $s = -\tau\alpha/2 - \kappa \Leftrightarrow \min\{\theta_{tp1}(v), \theta_{tp2}(v), \theta_{tp4}(v)\} > \theta_{tp3}(v) = \theta_{tp5}(v)$, 得 $v = s + \tau\alpha$ 或者 s .
 (v) 若 $s < -\tau\alpha/2 - \kappa \Leftrightarrow \min\{\theta_{tp1}(v), \theta_{tp2}(v), \theta_{tp3}(v), \theta_{tp4}(v)\} > \theta_{tp5}(v)$, 得 $v = s$.
 综上所述, 当 $\alpha \in (0, 2\kappa/\tau)$ 时, 我们可得截断弹球损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{tp}}(s)$ 表达式.

Case II: 当 $\alpha \geq 2\kappa/\tau$ 时, 其证明类似于 $\alpha \in (0, 2\kappa/\tau)$, 因此省略详细证明. 证毕. \square

A9. 双截断弹球损失函数的邻近点算子证明

因为双截断弹球损失函数的邻近点算子对于 (i) $\alpha \in (0, \frac{2\kappa}{\tau})$ 且 $\alpha \in (0, 2\mu)$, (ii) $\alpha \in (0, \frac{2\kappa}{\tau})$ 且 $\alpha \geq 2\mu$, (iii) $\alpha \geq \frac{2\kappa}{\tau}$ 且 $\alpha \in (0, 2\mu)$ 和 (iv) $\alpha \geq \frac{2\kappa}{\tau}$ 且 $\alpha \geq 2\mu$ 有不同的显示表达式. 下面分别对这四种情况进行证明.

Case (i): 当 $\alpha \in (0, \frac{2\kappa}{\tau})$ 且 $\alpha \in (0, 2\mu)$ 时, 双截断弹球损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{btP}}(s)$ 是下面函数的极小值点

$$\theta_{btP}(v) := \begin{cases} \theta_{btP1}(v) := \alpha\mu + \frac{(v-s)^2}{2}, & v > \mu, \\ \theta_{btP2}(v) := \alpha\mu + \frac{(\mu-s)^2}{2}, & v = \mu, \\ \theta_{btP3}(v) := \alpha v + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (0, \mu), \\ \theta_{btP4}(v) := \frac{s^2}{2}, & v = 0, \\ \theta_{btP5}(v) := -\alpha\tau v + \frac{(v-s)^2}{2}, & v \in (-\kappa, 0), \\ \theta_{btP6}(v) := \alpha\tau\kappa + \frac{(-\kappa-s)^2}{2}, & v = -\kappa, \\ \theta_{btP7}(v) := \alpha\tau\kappa + \frac{(v-s)^2}{2}, & v < -\kappa. \end{cases}$$

对于 $v > \mu$, $\theta_{btP1}(v)$ 是二次连续可微的强凸函数, 由 $\nabla\theta_{btP1}(v) = v - s = 0$ 可得 $\theta_{btP1}(v)$ 唯一极小值点 $v = s$. 类似地, 对于 $v \in (0, \mu)$, $\theta_{btP3}(v)$ 的唯一极小值点 $v = s - \alpha$. 对于 $v \in (-\kappa, 0)$, $\theta_{btP5}(v)$ 的唯一极小值点 $v = s + \tau\alpha$. 对于 $v < -\kappa$, $\theta_{btP7}(v)$ 的唯一极小值点 $v = s$. 此外, $\theta_{btP2}(v)$, θ_{btP4} 和 θ_{btP6} 的极小值点在不可微点处 $v = \mu$, 0 和 $-\kappa$ 取得. 下面我们比较 $\theta_{btP1}(v)$, $\theta_{btP2}(v)$, $\theta_{btP3}(v)$, $\theta_{btP4}(v)$, $\theta_{btP5}(v)$, $\theta_{btP6}(v)$ 和 $\theta_{btP7}(v)$ 的值.

- (i) 若 $s > \mu + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \min\{\theta_{btP2}(v), \theta_{btP3}(v), \theta_{btP4}(v), \theta_{btP5}(v), \theta_{btP6}(v), \theta_{btP7}(v)\} > \theta_{btP1}(v)$, 得 $v = s$.
 (ii) 若 $s = \mu + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \min\{\theta_{btP2}(v), \theta_{btP4}(v), \theta_{btP5}(v), \theta_{btP6}(v), \theta_{btP7}(v)\} > \theta_{btP1}(v) = \theta_{btP3}(v)$, 得 $v = s$ 或者 $s - \alpha$.
 (iii) 若 $s \in [\alpha, \mu + \alpha/2] \Leftrightarrow \min\{\theta_{btP1}(v), \theta_{btP2}(v), \theta_{btP4}(v), \theta_{btP5}(v), \theta_{btP6}(v), \theta_{btP7}(v)\} > \theta_{btP3}(v)$, 得 $v = s - \alpha$.
 (iv) 若 $s \in (-\tau\alpha, \alpha] \Leftrightarrow \min\{\theta_{btP1}(v), \theta_{btP2}(v), \theta_{btP3}(v), \theta_{btP5}(v), \theta_{btP6}(v), \theta_{btP7}(v)\} > \theta_{btP4}(v)$, 得 $v = 0$.
 (v) 若 $s \in (-\tau\alpha/2 - \kappa, -\tau\alpha) \Leftrightarrow \min\{\theta_{btP1}(v), \theta_{btP2}(v), \theta_{btP3}(v), \theta_{btP4}(v), \theta_{btP6}(v), \theta_{btP7}(v)\} > \theta_{btP5}(v)$, 得 $v = s + \tau\alpha$.
 (vi) 若 $s = -\tau\alpha/2 - \kappa \Leftrightarrow \min\{\theta_{btP1}(v), \theta_{btP2}(v), \theta_{btP3}(v), \theta_{btP4}(v), \theta_{btP6}(v)\} > \theta_{btP5}(v) = \theta_{btP7}(v)$, 得 $v = s + \tau\alpha$ 或者 s .
 (vii) 若 $s < -\tau\alpha/2 - \kappa \Leftrightarrow \min\{\theta_{btP1}(v), \theta_{btP2}(v), \theta_{btP3}(v), \theta_{btP4}(v), \theta_{btP5}(v), \theta_{btP6}(v)\} > \theta_{btP7}(v)$, 得 $v = s$.

综上所述, 对于 Case(i), 我们可得双截断弹球损失函数的邻近点算子 $\text{prox}_{\ell_{btP}}(s)$.

对于 Case(ii): $\alpha \in (0, \frac{2\kappa}{\tau})$ 且 $\alpha \geq 2\mu$. Case(iii): $\alpha \geq \frac{2\kappa}{\tau}$ 且 $\alpha \in (0, 2\mu)$ 和 Case(iv): $\alpha \geq \frac{2\kappa}{\tau}$ 且 $\alpha \geq 2\mu$ 的情况, 其证明类似于 Case(i), 因此省略详细证明. 证毕. \square

B1. 广义合页损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 广义合页损失函数 $\ell_{gh}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{gh}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{gh1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \eta(t-1) - 1, & t > 1, \\ \ell_{gh2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - t, & t \in (0, 1], \\ \ell_{gh3}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t, & t \leq 0. \end{cases}$$

(i) 对于 $\ell_{gh1}^*(t^*)$, 当 $t^* - \eta > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{gh1}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* - \eta = 0$ 时, $\ell_{gh1}^*(t^*) = \eta - 1$. 当 $t^* - \eta < 0$ 时, 其上确界在 $t = 1$ 处得到 $\ell_{gh1}^*(t^*) = t^* - 1$.

(ii) 对于 $\ell_{gh2}^*(t^*)$, 当 $t^* - 1 > 0$ 时, 其上确界在 $t = 1$ 处得到 $\ell_{gh2}^*(t^*) = t^* - 1$. 当 $t^* - 1 = 0$ 时, $\ell_{gh2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* - 1 < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{gh2}^*(t^*) = 0$.

(iii) 对于 $\ell_{gh3}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{gh3}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{gh3}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{gh3}^*(t^*) = +\infty$.

对 $\ell_{gh1}^*(t^*)$, $\ell_{gh2}^*(t^*)$ 和 $\ell_{gh3}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{gh}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B2. 二次合页损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 二次合页损失函数 $\ell_{sh}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{sh}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{sh1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - t^2, & t > 0, \\ \ell_{sh2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t, & t \leq 0. \end{cases}$$

(i) 对于 $\ell_{sh1}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = t^*/2$ 处得到 $\ell_{sh1}^*(t^*) = (t^*)^2/4$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{sh1}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{sh1}^*(t^*) = 0$.

(ii) 对于 $\ell_{sh2}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{sh2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{sh2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{sh2}^*(t^*) = +\infty$.

对 $\ell_{sh1}^*(t^*)$ 和 $\ell_{sh2}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{sh}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B3. 对数损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 对数损失函数 $\ell_u(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_u^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \log(1 + \exp(t-1)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

对于 $\ell_u^*(t^*)$, 当 $t^* > 1$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_u^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* = 1$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_u^*(t^*) = 1$. 当 $t^* \in (0, 1)$ 时, 其上确界在 $t = \log(t^*/(1-t^*)) + 1$ 处得到 $\ell_u^*(t^*) = t^* \log(t^*) + (1-t^*) \log(1-t^*) + t^*$. 当 $t^* = 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_u^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_u^*(t^*) = +\infty$.

B4. Huber合页损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, Huber合页损失函数 $\ell_{hh}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{hh}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{hh1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} (t^* - 1)t + \frac{\delta}{2}, & t > \delta, \\ \ell_{hh2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \frac{t^2}{2\delta}, & t \in [0, \delta], \\ \ell_{hh3}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t, & t < 0. \end{cases}$$

(i) 对于 $\ell_{hh1}^*(t^*)$, 当 $t^* - 1 > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{hh1}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* - 1 = 0$ 时, $\ell_{hh1}^*(t^*) = \frac{\delta}{2}$. 当 $t^* - 1 < 0$ 时, 其上确界在 $t = \delta$ 处得到 $\ell_{hh1}^*(t^*) = \delta(t^* - \frac{1}{2})$.

(ii) 对于 $\ell_{hh2}^*(t^*)$, 当 $t^* > 1$ 时, 其上确界在 $t = \delta$ 处得到 $\ell_{hh2}^*(t^*) = \delta(t^* - \frac{1}{2})$. 当 $t^* \in [0, 1]$ 时, 其上确界在 $t = \delta t^*$ 处得到 $\ell_{hh2}^*(t^*) = \frac{\delta(t^*)^2}{2}$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{hh2}^*(t^*) = 0$.

(iii) 对于 $\ell_{hh3}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{hh3}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{hh3}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{hh3}^*(t^*) = +\infty$.

对 $\ell_{hh1}^*(t^*)$, $\ell_{hh2}^*(t^*)$ 和 $\ell_{hh3}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{hh}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B5. Huber弹球损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, Huber弹球损失函数 $\ell_{hp}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{hp}^*(t^*) = \begin{cases} \ell_{hp1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} (t^* - 1)t + \frac{\delta}{2}, & t > \delta, \\ \ell_{hp2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \frac{t^2}{2\delta}, & t \in [0, \delta], \\ \ell_{hp3}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \frac{\tau t^2}{2\delta}, & t \in [-\delta, 0], \\ \ell_{hp4}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} (t^* + \tau)t + \frac{\tau\delta}{2}, & t < -\delta. \end{cases}$$

- (i) 对于 $\ell_{hp1}^*(t^*)$, 当 $t^* - 1 > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{hp1}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* - 1 = 0$ 时, $\ell_{hp1}^*(t^*) = \frac{\delta}{2}$. 当 $t^* - 1 < 0$ 时, 其上确界在 $t = \delta$ 处得到 $\ell_{hp1}^*(t^*) = \delta(t^* - \frac{1}{2})$.
- (ii) 对于 $\ell_{hp2}^*(t^*)$, 当 $t^* > 1$ 时, 其上确界在 $t = \delta$ 处得到 $\ell_{hp2}^*(t^*) = \delta(t^* - \frac{1}{2})$. 当 $t^* \in [0, 1]$ 时, 其上确界在 $t = \delta t^*$ 处得到 $\ell_{hp2}^*(t^*) = \frac{\delta(t^*)^2}{2}$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{hp2}^*(t^*) = 0$.
- (iii) 对于 $\ell_{hp3}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{hp3}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* \in [-\tau, 0]$ 时, 其上确界在 $t = \delta t^*/\tau$ 处得到 $\ell_{hp3}^*(t^*) = \frac{\delta(t^*)^2}{2\tau}$. 当 $t^* < -\tau$ 时, 其上确界在 $t = -\delta$ 处得到 $\ell_{hp3}^*(t^*) = -\delta t^* - \tau\delta/2$.
- (iv) 对于 $\ell_{hp4}^*(t^*)$, 当 $t^* + \tau > 0$ 时, 其上确界在 $t = -\delta$ 处得到 $\ell_{hp4}^*(t^*) = -\delta t^* - \tau\delta/2$. 当 $t^* + \tau = 0$ 时, $\ell_{hp4}^*(t^*) = \tau\delta/2$. 当 $t^* + \tau < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{hp4}^*(t^*) = +\infty$.
- 对 $\ell_{hp1}^*(t^*)$, $\ell_{hp2}^*(t^*)$, $\ell_{hp3}^*(t^*)$ 和 $\ell_{hp4}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{hp}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B6. 滑道损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 滑道损失函数 $\ell_{rl}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{rl}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{rl1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - 1, & t > 1, \\ \ell_{rl2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} (t^* - 1)t, & t \in [0, 1], \\ \ell_{rl3}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t, & t < 0. \end{cases}$$

- (i) 对于 $\ell_{rl1}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{rl1}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{rl1}^*(t^*) = -1$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = 1$ 处得到 $\ell_{rl1}^*(t^*) = t^* - 1$.
- (ii) 对于 $\ell_{rl2}^*(t^*)$, 当 $t^* - 1 > 0$ 时, 其上确界在 $t = 1$ 处得到 $\ell_{rl2}^*(t^*) = t^* - 1$. 当 $t^* - 1 = 0$ 时, $\ell_{rl2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* - 1 < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{rl2}^*(t^*) = 0$.
- (iii) 对于 $\ell_{rl3}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{rl3}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{rl3}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{rl3}^*(t^*) = +\infty$.
- 对 $\ell_{rl1}^*(t^*)$, $\ell_{rl2}^*(t^*)$ 和 $\ell_{rl3}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{rl}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B7. 截断对数损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 截断对数损失函数 $\ell_{tl}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{tl}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{tl1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \log(1 + \exp(-\nu)), & t > 1 - \nu, \\ \ell_{tl2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \log(1 + \exp(t - 1)), & t \leq 1 - \nu. \end{cases}$$

- (i) 对于 $\ell_{tl1}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{tl1}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{tl1}^*(t^*) = -\log(1 + \exp(-\nu))$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = 1 - \nu$ 处得到 $\ell_{tl1}^*(t^*) = t^*(1 - \nu) - \log(1 + \exp(-\nu))$.
- (ii) 对于 $\ell_{tl2}^*(t^*)$, 当 $t^* > 1$ 时, 其上确界在 $t = 1 - \nu$ 处得到 $\ell_{tl2}^*(t^*) = t^*(1 - \nu) - \log(1 + \exp(-\nu))$. 当 $t^* = 1$ 时, 其上确界在 $t = 1 - \nu$ 处得到 $\ell_{tl2}^*(t^*) = t^*(1 - \nu) - \log(1 + \exp(-\nu))$. 当 $t^* \in (0, 1)$ 时, 其上确界在 $t = \log(t^*/(1 - t^*)) + 1$ 处得到 $\ell_{tl2}^*(t^*) = t^* \log(t^*) + (1 - t^*) \log(1 - t^*) + t^*$. 当 $t^* = 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{tl2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{tl2}^*(t^*) = +\infty$.
- 对 $\ell_{tl1}^*(t^*)$ 和 $\ell_{tl2}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{tl}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B8. 截断最小二乘损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 截断最小二乘损失函数 $\ell_{ts}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{ts}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{ts1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - (\mu - \varepsilon)^2, & t \geq \mu, \\ \ell_{ts2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - (t - \varepsilon)^2, & t \in [\varepsilon, \mu), \\ \ell_{ts3}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t, & t \in [0, \varepsilon), \\ \ell_{ts4}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t, & t \in [-\varepsilon, 0), \\ \ell_{ts5}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - (-t - \varepsilon)^2, & t \in [-\mu, -\varepsilon), \\ \ell_{ts6}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - (\mu - \varepsilon)^2, & t \leq -\mu. \end{cases}$$

- (i) 对于 $\ell_{ts1}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{ts1}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{ts1}^*(t^*) = -(\mu - \varepsilon)^2$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = \mu$ 处得到 $\ell_{ts1}^*(t^*) = t^*\mu - (\mu - \varepsilon)^2$.
- (ii) 对于 $\ell_{ts2}^*(t^*)$, 当 $t^* > 2(\mu - \varepsilon)$ 时, 其上确界在 $t = \mu$ 处得到 $\ell_{ts2}^*(t^*) = t^*\mu - (\mu - \varepsilon)^2$. 当 $t^* \in [0, 2(\mu - \varepsilon)]$ 时, 其上确界在 $t = t^*/2 + \varepsilon$ 处得到 $\ell_{ts2}^*(t^*) = (t^*)^2/4 + t^*\varepsilon$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = \varepsilon$ 处得到 $\ell_{ts2}^*(t^*) = t^*\varepsilon$.

(iii) 对于 $\ell_{tts3}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = \varepsilon$ 处得到 $\ell_{tts3}^*(t^*) = t^*\varepsilon$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{tts3}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{tts3}^*(t^*) = 0$.

(iv) 对于 $\ell_{tts4}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{tts4}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{tts4}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = -\varepsilon$ 处得到 $\ell_{tts4}^*(t^*) = -t^*\varepsilon$.

(v) 对于 $\ell_{tts5}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = -\varepsilon$ 处得到 $\ell_{tts5}^*(t^*) = -t^*\varepsilon$. 当 $t^* \in [2(\varepsilon - \mu), 0]$ 时, 其上确界在 $t = t^*/2 - \varepsilon$ 处得到 $\ell_{tts5}^*(t^*) = (t^*)^2/4 - t^*\varepsilon$. 当 $t^* < 2(\varepsilon - \mu)$ 时, 其上确界在 $t = -\mu$ 处得到 $\ell_{tts5}^*(t^*) = -t^*\mu - (\mu - \varepsilon)^2$.

(vi) 对于 $\ell_{tts6}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = -\mu$ 处得到 $\ell_{tts6}^*(t^*) = -t^*\mu - (\mu - \varepsilon)^2$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{tts6}^*(t^*) = -(\mu - \varepsilon)^2$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{tts6}^*(t^*) = +\infty$.

对 $\ell_{tts1}^*(t^*)$, $\ell_{tts2}^*(t^*)$, $\ell_{tts3}^*(t^*)$, $\ell_{tts4}^*(t^*)$, $\ell_{tts5}^*(t^*)$ 和 $\ell_{tts6}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{tts}^*(t^*)$ 表达式. 证毕. \square

B9. 截断弹球损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 截断弹球损失函数 $\ell_{tp}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{tp}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{tp1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} (t^* - 1)t, & t \geq 0, \\ \ell_{tp2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} (t^* + \tau)t, & t \in [-\kappa, 0), \\ \ell_{tp3}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \tau\kappa, & t < -\kappa. \end{cases}$$

(i) 对于 $\ell_{tp1}^*(t^*)$, 当 $t^* - 1 > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{tp1}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* - 1 = 0$ 时, $\ell_{tp1}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* - 1 < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{tp1}^*(t^*) = 0$.

(ii) 对于 $\ell_{tp2}^*(t^*)$, 当 $t^* + \tau > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{tp2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* + \tau = 0$ 时, $\ell_{tp2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* + \tau < 0$ 时, 其上确界在 $t = -\kappa$ 处得到 $\ell_{tp2}^*(t^*) = -\kappa(t^* + \tau)$.

(iii) 对于 $\ell_{tp3}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = -\kappa$ 处得到 $\ell_{tp3}^*(t^*) = -\kappa(t^* + \tau)$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{tp3}^*(t^*) = -\tau\kappa$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{tp3}^*(t^*) = +\infty$.

对 $\ell_{tp1}^*(t^*)$, $\ell_{tp2}^*(t^*)$ 和 $\ell_{tp3}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{tp}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B10. 双截断弹球损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 双截断弹球损失函数 $\ell_{btp}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{btp}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{btp1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \mu, & t \geq \mu, \\ \ell_{btp2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} (t^* - 1)t, & t \in [0, \mu), \\ \ell_{btp3}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} (t^* + \tau)t, & t \in [-\kappa, 0), \\ \ell_{btp4}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \tau\kappa, & t < -\kappa. \end{cases}$$

(i) 对于 $\ell_{btp1}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{btp1}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{btp1}^*(t^*) = -1$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = \mu$ 处得到 $\ell_{btp1}^*(t^*) = (t^* - 1)\mu$.

(ii) 对于 $\ell_{btp2}^*(t^*)$, 当 $t^* - 1 > 0$ 时, 其上确界在 $t = \mu$ 处得到 $\ell_{btp2}^*(t^*) = (t^* - 1)\mu$. 当 $t^* - 1 = 0$ 时, $\ell_{btp2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* - 1 < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{btp2}^*(t^*) = 0$.

(iii) 对于 $\ell_{btp3}^*(t^*)$, 当 $t^* + \tau > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{btp3}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* + \tau = 0$ 时, $\ell_{btp3}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* + \tau < 0$ 时, 其上确界在 $t = -\kappa$ 处得到 $\ell_{btp3}^*(t^*) = -\kappa(t^* + \tau)$.

(iv) 对于 $\ell_{btp4}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = -\kappa$ 处得到 $\ell_{btp4}^*(t^*) = -\kappa(t^* + \tau)$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{btp4}^*(t^*) = -\tau\kappa$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{btp4}^*(t^*) = +\infty$.

对 $\ell_{btp1}^*(t^*)$, $\ell_{btp2}^*(t^*)$, $\ell_{btp3}^*(t^*)$ 和 $\ell_{btp4}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{btp}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B11. 广义指数损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 广义指数损失函数 $\ell_{gel}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{gel}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{gel1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \sigma^2(1 - \exp(-(t/\sigma)^2)), & t > 0, \\ \ell_{gel2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t, & t \leq 0. \end{cases}$$

(i) 对于 $\ell_{gel1}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{gel1}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{gel1}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{gel1}^*(t^*) = 0$.

(ii) 对于 $\ell_{gel2}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{gel2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{gel2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{gel2}^*(t^*) = +\infty$.

对 $\ell_{gel1}^*(t^*)$ 和 $\ell_{gel2}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{gel}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B12. 广义对数损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 广义对数损失函数 $\ell_{gl}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{gl}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_{gl1}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \sigma^2 \log(1 + (t/\sigma)^2), & t > 0, \\ \ell_{gl2}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t, & t \leq 0. \end{cases}$$

(i) 对于 $\ell_{gl1}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{gl1}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{gl1}^*(t^*) = 0$. $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{gl1}^*(t^*) = 0$.

(ii) 对于 $\ell_{gl2}^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_{gl2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_{gl2}^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{gl2}^*(t^*) = +\infty$.

对 $\ell_{gl1}^*(t^*)$ 和 $\ell_{gl2}^*(t^*)$ 逐点取上确界, 得 $\ell_{gl}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B13. Sigmoid损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, Sigmoid损失函数 $\ell_{sl}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{sl}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \frac{1}{1 + \exp(-\beta t)}, t \in \mathbb{R}.$$

当 $t^* > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{sl}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* = 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{sl}^*(t^*) = 0$, 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{sl}^*(t^*) = +\infty$. 综上所述, 即得 $\ell_{sl}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B14. 累计分布损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 累计分布损失函数 $\ell_{cd}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{cd}^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - \int_{-\infty}^t \frac{1}{2\pi} \exp(-\gamma^2/2) d\gamma, t \in \mathbb{R}.$$

当 $t^* > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_{cd}^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* = 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{cd}^*(t^*) = 0$, 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_{cd}^*(t^*) = +\infty$. 综上所述, 即得 $\ell_{cd}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

B15. 0-1损失函数的Fenchel共轭证明

对任意 $t^* \in \mathbb{R}$, 0-1损失函数 $\ell_{0/1}(t)$ 的Fenchel共轭为

$$\ell_{0/1}^*(t^*) := \begin{cases} \ell_1^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t - 1, & t > 0, \\ \ell_2^*(t^*) := \sup_{t \in \mathbb{R}} t^*t, & t \leq 0. \end{cases}$$

(i) 对于 $\ell_1^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 令 t 趋于正无穷大得到 $\ell_1^*(t^*) = +\infty$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_1^*(t^*) = -1$. 当 $t^* < 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_1^*(t^*) = -1$.

(ii) 对于 $\ell_2^*(t^*)$, 当 $t^* > 0$ 时, 其上确界在 $t = 0$ 处得到 $\ell_2^*(t^*) = 0$. 当 $t^* = 0$ 时, $\ell_2^*(t^*) = 0$. 当 $t^* < 0$ 时, 令 t 趋于负无穷大得到 $\ell_2^*(t^*) = +\infty$.

对 $\ell_1^*(t^*)$ 和 $\ell_2^*(t^*)$ 逐点取上确界, 即得 $\ell_{0/1}^*(t^*)$ 的表达式. 证毕. \square

参考文献

- [1] 王华军, 修乃华, 支持向量机损失函数分析, (2020).