2017 考研数学高数基础班

武忠祥 教授

（2016 年 4 月）

第一部分　考研数学高分导学

以下讲两个常考的专题，求极限和平面域的面积及旋转体的体积.

专题一：求极限

求极限常见的是七种类型不定式，即 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}，其重点是“$\frac{0}{0}$”型和“1^{∞}”型.

1. “$\frac{0}{0}$”型极限

常用的方法有三种

1）洛必达法则：

若　1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

2）$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞）;

则　$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2）等价无穷小代换

（1）代换原则：

a) 乘除关系可以换；

b) 加减关系在一定条件下可以换；

若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq 1$. 则 $\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$.

（2）常用的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$;

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad a^x-1\sim x\ln a,$$

$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3\qquad \tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3\qquad x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3\qquad x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3$$

3）泰勒公式

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

(4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$

【例 1】（2008 年，数一、数二，10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$. 【$\dfrac{1}{6}$】

【例 2】（2008 年，数三，10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$. 【$-\dfrac{1}{6}$】

【例 3】（2012 年，数三，10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$. 【$\dfrac{1}{12}$】

【例 4】（2009 年，数一，数二，数三，4 分）

当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　）

（A）$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$. （B）$a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

（C）$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$. （D）$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

【例 5】（2011 年，数二，数三，4 分）

已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则

（A）$k=1,c=4$. （B）$k=1,c=-4$.

（C）$k=3,c=4$. （D）$k=3,c=-4$.

【例 6】(2013 年，数一，4 分)

已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$, 其中 k,c 为常数，且 $c\neq 0$, 则

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　　(B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$.

(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　　(D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

【例 7】(2014 年，数三，4 分) 设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$. 当 $x\to 0$ 时, 若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列结论中错误的是

(A) $a=0$　　(B) $b=1$　　(C) $c=0$　　(D) $d=\dfrac{1}{6}$

2. “1^∞”型极限

常用的方法有三种

1）凑基本极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

2）改写成指数 $\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}$，**用洛必达法则；**

3）若 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=\infty$，**且** $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$.

则 $\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}=e^A$.

【例 1】(2010 年，数一，4 分)

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$

(A) 1. **(B)** e. **(C)** e^{a-b}. **(D)** e^{b-a}.

【例 2】(2012 年，数三，4 分)

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________. 【$e^{-\sqrt{2}}$】

【例 3】(2011 年，数一，10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$. 【$e^{-\frac{1}{2}}$】

【例 4】(2013 年，数二，4 分)

$$\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$ 【$e^{\frac{1}{2}}$】

专题二：平面域的面积及旋转体的体积

1. 平面图形的面积

(1) 若平面域 D 由曲线 $y=f(x),y=g(x)\ (f(x)\geq g(x))$，$x=a$，$x=b$（$a<b$）

所围成，则的

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

(2) 若平面域 D 由曲线曲 $\rho=\rho(\theta)$，$\theta=\alpha$，$\theta=\beta\ (\alpha<\beta)$ 所围成，则其面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

2. 旋转体体积

设区域 D 由曲线 $y=f(x)\ (f(x)\geq 0)$，和直线 $x=a$，$x=b\ (0\leq a<b)$ 及 x 轴

所围成，则

1) 区域 D 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

2) 区域 D 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$$

【例 1】(2014 年，数三，4 分) 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$

围成的有界区域，则 D 的面积为________. 【$\frac{3}{2}-\ln 2$】

【例 2】（2013 年，数二，数三） 设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y=10V_x$，求 a 的值. 【$a=7\sqrt{7}$】

【例 3】 求圆盘 $(x-2)^2+y^2\le 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积. 【$4\pi^2$】

【例 4】 求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转一周所得旋转体的体积. 【64π】

【例 5】（1993 年，数三） 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积. 【$\dfrac{\pi^2}{2}-\dfrac{2\pi}{3}$】

第二部分　高等数学基础导学

第一章　　函数 极限 连续

第一节　函　数

考 试 内 容 概 要

（一）函数的定义

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有一个确定的数值 y 和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$.常称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为函数的**定义域**.

注：函数概念有两个基本要素：定义域、对应规则（或称依赖关系）. 当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，它们就是同一函数.

（二）函数的性质

1. 单调性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上有定义，如果对于区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $y=f(x)$ 在该区间内**单调增加**（或**单调减少**）.

注：函数的单调性主要是利用单调性的定义和一阶导数的正负进行判定.

2. 奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则有 $-x\in D$），如

果对于任一 $x \in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**偶函数**；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**奇函数**.

【注】(1) $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln\frac{1-x}{1+x}, \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \frac{e^x-1}{e^x+1}, f(x)-f(-x)$ 都是奇函数；$x^2, |x|, \cos x, f(x)+f(-x)$ 都是偶函数；

(2) 奇函数 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称，且若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$；偶函数的图形关于 y 轴对称.

(3) 两个奇（偶）函数之和仍为奇（偶）函数；两个奇（偶）函数之积必为偶函数；奇函数与偶函数之积必为奇函数.

3. **周期性**

定义 4 若存在实数 $T>0$，对于任意 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**.使得上述关系式成立的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的**最小正周期**，简称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

【注】(1) $\sin x$ 和 $\cos x$ 以 2π 为周期，$\sin 2x$ 和 $|\sin x|$ 以 π 为周期.

(2) 若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期.

4. **有界性**

定义 5 设 $y=f(x)$ 在集合 X 上有定义.若存在 $M>0$，使得对任意的 $x \in X$，恒有 $|f(x)| \le M$，则称 $f(x)$ 在 X 上为**有界函数**.

【注】(1) $|\sin x| \le 1; |\cos x| \le 1; |\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}; |\arctan x| < \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \le \pi;$;

(2) 如果没有指明 x 的范围，而说"$f(x)$ 为有界函数"，是指 $f(x)$ 在其定义域上为有界函数.

(3) 如果对任意的 $M>0$，至少存在一个 $x_0 \in X$，使得 $|f(x_0)|>M$，则 $f(x)$ 为 X 上的无界函数.

（三）常见函数

1. 复合函数

定义 6 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，值域为 R_g，若 $D_f\cap R_g\neq\phi$,则称函数 $y=f[g(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的**复合函数**. 它的定义域为 $\left\{x\middle|x\in D_g,g(x)\in D_f\right\}$.

2. 反函数

定义 7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_y.若对任意 $y\in R_y$，有唯一确定的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，则记为 $x=f^{-1}(y)$，称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

注: (1) 有时也将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$. 在同一直角坐标系中，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 的图形重和， $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(2) $f^{-1}[f(x)]=x,\quad f[f^{-1}(x)]=x.$

3. 基本初等函数

幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）;

指数函数 $y=a^{x}$ （$a>0,\ a\neq1$）

对数函数 $y=\log_a x\quad(a>0,a\neq1)$

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$;

反三角函数 $y=\arcsin x$， $y=\arccos x$， $y=\arctan x$,

定义 8 上述五类函数统称为**基本初等函数**。

4. 初等函数

定义 9 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成 ，并能用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

常考题型与典型例题

常考题型

1。函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定；

2。复合函数；

【例 1】(1987 年 3) $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是

(A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数 (D) 偶函数.

【D】

【例 2】(1988 年 1, 2) 已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$, 则 $\varphi(x)=$ ______ 的定义域为 ______.

【$\arcsin(1-x^2)$; $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.】

【例 3】 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, x\le 0,\\ x+2, x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, x<0,\\ -x, x\ge 0\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$ ______.

【$g[f(x)]=\begin{cases}2+x^2, x<0,\\ 2+x, x\ge 0.\end{cases}$】

第二节 极 限

考 试 内 容 概 要

(一) 极限的概念

1. 数列的极限

定义 1 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 总存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立, 则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷时的**极限**, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

【注】(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的几何意义是: 对于 a 点的任何 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, 一定存在 N, 当 $n>N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内, 而只有

有限个（最多只有 N 个）在这区间之外.

（2）数列 $\{x_n\}$ 的极限是否存在，如果存在极限值等于多少与数列的前有限项无关.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a.$

2. 函数的极限

1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 2 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$。

定义 3 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $X > 0$，当 $x > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$。

定义 4 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $X > 0$，当 $x < -X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$。

定理 1 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在的充要条件是极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在并且相等.

2) 自变量趋于有限值时函数的极限

定义 5 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$。

定义 6 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A\,.$$

定义 7 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A.$$

定理 2 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 及右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在并且相等.

【注】需要分左、右极限求极限的问题常见有三种：

(1) 分段函数在分界点处的极限，而在该分界点两侧函数表达式不同(这里也包括带有绝对值的函数，如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$)；

(2) e^{∞} 型极限（如 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}$）；

(3) $\arctan\infty$ 型极限（如 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$,，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$）

（二）极限的性质

1. 有界性

1)（数列）如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

2)（函数）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有界(即局部有界).

2. 保号性

1)（数列）设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$

（1） 如果 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n>0$（或 $x_n<0$）;

（2） 如果存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n\ge 0$（或 $x_n\le 0$），则 $A\ge 0$（或 $A\le 0$），

2)（函数）设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

（1） 如果 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

（2） 如果存在 $\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$），那么 $A\ge 0$（或 $A\le 0$）.

3. 有理运算性质

若 $\lim f(x)=A,\quad \lim g(x)=B$.

那么：$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$$

$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\ne 0)$$

两个常用的结论：1） $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在，$\lim g(x)=0\Rightarrow\lim f(x)=0;$

2） $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0,\lim f(x)=0\Rightarrow\lim g(x)=0;$

4. 极限值与无穷小之间的关系；

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$. 其中$\lim\alpha(x)=0.$

【注】数列极限也有以上对应的后两条性质.

【例 1】设$f(x)$在$x=0$处连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$.则

（A） $f(0)=1,f'(0)=0;$ （B） $f(0)=0,f'(0)=1;$

(C) $f(x)$在$x=0$处取极大值； (D) $f(x)$在$x=0$处取极小值；

（三） 极限的存在准则

1. **夹逼准则**： 若存在N，当$n>N$时，$x_n\le y_n\le z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a,$ 则

$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a.$

2. **单调有界准则**：单调有界数列必有极限.

【注】1）夹逼准则比较多的是用在 n 项和的数列极限，而单调有界准则比较多的是用在递推关系$x_{n+1}=f(x_n)$所定义的数列极限；

2）函数极限也有对应的以上两条存在准则.

（四） 无穷小量

1. **无穷小量的概念**： 若函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的极限为零，则称$f(x)$为$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的**无穷小量**.

2. **无穷小的比较**： 设$\lim\alpha(x)=0,\ \lim\beta(x)=0$，且$\beta(x)\neq 0$.

（1）**高阶**： 若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$； 记为$\alpha(x)=o(\beta(x));$

（2）**同阶**： 若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$；

（3）等价： 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$；记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

（4）无穷小的阶：若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

3. 无穷小的性质：

（1）有限个无穷小的和仍是无穷小.

（2）有限个无穷小的积仍是无穷小.

（3）无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

（五） 无穷大量

1. 无穷大量的概念：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量；

即：若对任意给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

2. 常用的一些无穷大量的比较

（1）当 $x\to+\infty$ 时

$$\ln^\alpha x<<x^\beta<<a^x$$

其中 $\alpha>0,\beta>0,a>1$.

（2）当 $n\to\infty$ 时

$$\ln^\alpha n<<n^\beta<<a^n<<n!<<n^n$$

其中 $\alpha>0,\beta>0,a>1$.

【例 2】（2010 年 3）设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，则当充分大时，有（C）.

（A） $g(x)<h(x)<f(x)$ （B） $h(x)<g(x)<f(x)$

（C） $f(x)<g(x)<h(x)$ （D） $g(x)<f(x)<h(x)$

3. 无穷大量与无界变量的关系：

无穷大量必为无界变量，而无界变量不一定是无穷大量.

4. 无穷大量与无穷小量的关系：

在同一极限过程中，如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小；反之，如果 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0,$ 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大；

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

1）极限的概念、性质及存在准则

2）求极限；

3）无穷小量阶的比较；

一．极限的概念、性质及存在准则

【例 1】（1999 年，2）“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geq N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leq 2\varepsilon$” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的（ ）.

（A）充分条件但非必要条件　　（B）必要条件但非充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既非必要也非充分条件

【例 2】（2015 年，3）设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是（　）

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a.$

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,$

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a.$

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,$

二. 求 极 限

方法 1　利于有理运算法则求极限

【例 1】（1997 年，1）　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)x}=$______________.　【$\dfrac{3}{2}$】

【例 2】　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.　【$\dfrac{3}{2}$】

方法 2　利用基本极限求极限

1）　常用的基本极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1\\ \text{不存在}, & x=-1.\end{cases}\qquad \lim_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

2）“1^∞”型极限常用结论

若 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=\infty$，且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$.

则 $\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}=e^A$.

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\sin\dfrac{1}{n}$ 【$\dfrac{1}{e}$】

【例 2】（1997 年 2）$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=$ ________. 【$e^{-\frac{\pi}{2}}$】

【例 3】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3})^n$ ，其中 $a>0,b>0,c>0.$ $(\sqrt[3]{abc})$

【例 4】（2012 年 3） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ________. $(e^{-\sqrt{2}})$

【例 5】（2010 年 1） 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$ ________. (C)

(A) 1. **(B)** e. **(C)** e^{a-b}. **(D)** e^{b-a}.

方法 3　利用等价无穷小代换求极限

1)常用的等价无穷小： 当 $x \to 0$ 时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\qquad a^x - 1 \sim x\ln a,\ \ ,$$

2)等价无穷小代换

(1)乘、除关系可以换： 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则 $\lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$

(2)加、减关系在一定条件下可以换：

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$. 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$.

【例 1】(2016 年 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2} = $ __________. [$\frac{1}{2}$]

【例 2】(2016 年 3) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 则

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = $ __________. [6]

【例 3】(2015 年 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = $ ____________. 【$-\frac{1}{2}$】

【例 4】（2006 年 1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$__________. 【2】

【例 5】（2009 年 3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$__________. $[\dfrac{3e}{2}]$

【例 6】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x\ln(1+x^2)}$. 【$-\dfrac{1}{2}$】

【例 7】（2006 年 2）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$ $[-\dfrac{1}{6}]$

【例 8】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. 【$\dfrac{3}{2}$】

方法 4　利用夹逼原理求极限

【例 1】（1995 年 3） $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right]$ 【$\dfrac{1}{2}$】

【例 2】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$ 【3】

【例 3】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n}$. 其中 $a_i>0,(i=1,2,\cdots m)$ 【$\max a_i$】

【例 4】(2008 年 4)设 $0<a<b$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$( ). 【B】

(A)a. (B)a^{-1}. (C)b. (D)b^{-1}.

【例 5】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$,$(x>0)$.

方法 5 利用单调有界准则求极限

【例 4】 设 $x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$, $n=1,2,\cdots$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 【1】

三. 无穷小量阶的比较

【例 1】（2005 年 2）当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$______. $(\dfrac{3}{4})$

【例 2】（2001 年 2）设当 $x\to 0$ 时 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于（ B ）

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【例 3】（2014 年 2） 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x),(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(1,2)$

（C）$(\dfrac{1}{2},1)$　　（D）$(0,\dfrac{1}{2})$

【例4】(2016年2) 设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1),\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}),\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x\to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序是

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　（B）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.　　（C）$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　　（D）$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

第三节 函数的连续性

考试内容概要

（一）连续性的概念

定义 1 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$$

则称 $y=f(x)$ **在点 x_0 处连续**。

定义 2 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ **在点 x_0 处连续**。

注：以上两个定义是等价的.

定义 3 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ **在点 x_0 处左连续**；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ **在点 x_0 处右连续**

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

定义 4 如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每点都连续，则称 $f(x)$ **在 (a,b) 内连续**。若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$ **在 $[a,b]$ 上连续**。

（二）间断点及其分类

1. 间断点的定义

定义 5 若 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有定义，但在 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点**。

2. 间断点的分类

左、右极限都存在的间断点称为**第一类间断点**.其中左、右极限都存在且相等的间断点称为**可去间断点**；左、右极限都存在但不相等的间断点称为**跳跃间断点**.

左、右极限至少有一个不存在的间断点称为**第二类间断点**.其中若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**。

函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没定义，且左、右极限都不存在，这是由于当 $x\to 0$ 时，其函数值在 -1 与 1 之间无穷多次振荡，则称点 $x=0$ 为函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的**振荡间断点**。

（三）连续性的运算与性质

定理 1　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处也连续。

定理 2 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 处也连续。

定理 3　基本初等函数在其定义**域**内都是连续的.

定理 4　初等函数在其定义**区间**内都是连续的.

注：所谓定义区间，是指包含在定义域内的区间.

（四）闭区间上连续函数的性质

定理 5（**有界性定理**）设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

定理 6（**最值定理**）　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值与最小值。

定理 7（**介值定理**）　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的数 C，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=C$.

推论　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取到介于最小值 m 与最大值 M 之间的任何值.

定理 8（**零点定理**）　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

注：零点定理的一个重要应用就是证明方程的根的存在性.

常考题型与典型例题

常考题型

1。讨论函数的连续性及间断点的类型；

2。有关闭区间上连续函数性质的证明题;　.

【例 1】（1997 年 2）已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, x\neq 0,\\ a, \qquad\quad x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ______. .

【例 2】 讨论 $f(x)=\dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续性并指出间断点类型.

【例 3】 函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\frac{1}{x}}{x^2-1}$ 的可去间断点的个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<c<d<b$. 试证对任意的正数 p,q，至少存在一个 $\xi\in[c,d]$，使 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$.

第二章　导数与微分

考试内容概要

（一）导数与微分的概念

1. 导数的概念

定义 1（导数）　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义。如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ **在点 x_0 处可导，并称此极限值为** $f(x)$ **在点 x_0 处的导数**，记为 $f'(x_0)$，或 $y'|_{x=x_0}$，或 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.如果上述极限不存在，则称 $f(x)$ **在点 x_0 处不可导**.

注：常用的导数定义的等价形式有：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\qquad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

定义 2（左导数） 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其某个左邻域内有定义，若左极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

存在时，则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记为 $f'_-(x_0)$.

定义 3（右导数） 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其某个右邻域内有定义，若右极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

存在时，则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右导数**，记为 $f'_+(x_0)$.

定理 1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是它在该点处左导数与右导数都存在且相等。

定义 4（区间上可导及导函数）

如果 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ **在区间 (a,b) 内可导**。此时对于 (a,b) 内的每一点 x，都对应一个导数值 $f'(x)$，常称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的**导函数**，简称为**导数**.若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ **在区间 $[a,b]$ 上可导**

2. 微分的概念

定义 5（微分） 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\qquad(\Delta x\to 0)$$

其中 A 为不依赖于 Δx 的常数，则称函数 $f(x)$ **在点 x_0 处可微**，称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的**微分**，记为 $\mathrm{d}\,y = A\Delta x$.

定理 2 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且有

$$\mathrm{d}\,y = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\,\mathrm{d}\,x.$$

在点 x 处，常记 $\mathrm{d}\,y = f'(x)\,\mathrm{d}\,x$.

3. 导数与微分的几何意义

1）**导数的几何意义：** 导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处必有切线，其切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

如果 $f'(x_0) \neq 0$，则此曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的法线方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

如果 $f'(x_0) = 0$，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y = f(x_0)$，即曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有水平切线。

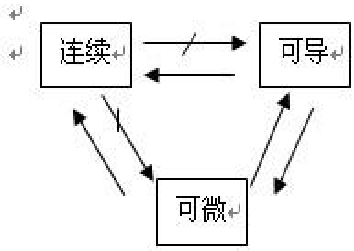
注： 导数还有物理意义：若 $s = s(t)$ 为变速直线运动的位移函数，则 $s'(t)$ 为瞬时速度，$s''(t)$ 为加速度，

2）**微分的几何意义：** 微分 $dy = f'(x_0)dx$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 的切线上的增量。

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 上的增量。

$\Delta y \approx dy$

4．连续、可导、可微之间的关系



（二）导数公式及求导法则

1. 基本初等函数的导数公式

1） $(C)'=0$

2） $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

3） $(a^{x})'=a^{x}\ln a$

4） $(e^{x})'=e^{x}$

5） $(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

6） $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

7） $(\sin x)'=\cos x$

8） $(\cos x)'=-\sin x$

9） $(\tan x)'=\sec^{2}x$

10） $(\cot x)'=-\csc^{2}x$

11） $(\sec x)'=\sec x\tan x$

12） $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

13） $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

14） $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

15） $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$

16） $(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$

2. 求导法则

1）有理运算法则

设 $u=u(x),v=v(x)$ 在 x 处可导，则

1） $(u\pm v)'=u'\pm v'$

2） $(uv)'=u'v+uv'$

3） $(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^{2}}\quad(v\neq0)$

2）复合函数求导法

设 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，$y=f(u)$ 在对应点处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\varphi'(x)$$

3）隐函数求导法

设 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的可导函数，为求得 y'，可在方程 $F(x,y)=0$ 两边对 x 求导，可得到一个含有 y' 的方程，从中解出 y' 即可。

注： y' 也可由多元函数微分法中的隐函数求导公式 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}$ 得到。

4）反函数的导数

若 $x=\varphi(y)$ 在某区间内单调、可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在对应区间内也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)};\quad \text{即}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

5）参数方程求导法：

设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$(\alpha<t<\beta)$ 确定的函数，则

1）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

2）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

6）对数求导法：

如果 $y=y(x)$ 的表达式由多个因式的乘除、乘幂构成，或是幂指函数的形式，则可先将函数取对数，然后两边对 x 求导。

（三）高阶导数

1. 高阶导数的概念：

定义 6（高阶导数） 如果 $y'=f'(x)$ 作为 x 的函数在点 x 可导，则称 y' 的导数为 $y=f(x)$ 的**二阶导数**. 记为 y''，或 $f''(x)$，或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数为 $y^{(n)}=[f^{(n-1)}(x)]'$，也可记为 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^n y}{dx^n}$.

即 n 阶导数就是 $n-1$ 阶导函数的导数，

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

注：如果函数 $f(x)$ 在点 x 处 n 阶可导，则在点 x 的某邻域内 $f(x)$ 必定具有一切低于 n 阶的导数.

2．常用的高阶导数公式：

1) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$;　　2) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$;

3）$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$；　　4）$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 导数定义；

2. 复合函数、隐函数、参数方程求导；

3. 高阶导数；

【例 1】（1994 年 3）已知 $f'(x_0)=-1$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\_\_\_\_\_\_.$$　【1】

【例 2】(2011 年 2, 3)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

（A） $-2f'(0)$.　　（B） $-f'(0)$.

（C） $f'(0)$.　　（D） 0

【例 3】（2013 年 1）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则

$\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1)=$ ____________.　　【1】

【例 4】设 $f(x)$在$x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$在$x=a$ 处可导的一个充分条件是

（A） $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在；　（B） $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(a+\frac{1}{n})-f(a)]$ 存在；

（C） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在；　（D） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在；

【例 5】（2011 年 3）曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^{y}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_________.

【 $y=-2x$ 】

【例 6】（2013 年 2）曲线 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=\ln\sqrt{1+t^{2}}, \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为_________.

【 $x+y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$ 】

【例 7】（1997 年 1）对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\pi/2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为

_________. 【 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$ 】

【例 8】（2012 年 2）设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^{2}-y+1=e^{y}$ 所确定的隐函数，则

$\left.\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\right|_{x=0}=$________. 【1】

【例 9】（2013 年 1）设$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t\sin t+\cos t, \end{cases}$（$t$ 为参数），则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

【$\sqrt{2}$】

【例 10】（2007 年 2, 3）设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ________.

【$\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$】

【例 11】（2015 年 2）函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ ________.

【$n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$】

第三章　微分中值定理及导数应用

考 试 内 容 概 要

（一）微分中值定理

定理 1（费马引理）

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值，那么 $f'(x_0)=0.$

定理 2（罗尔定理） 如果 $f(x)$ 满足以下条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）在开区间 (a,b) 内可导，

（3） $f(a)=f(b)$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

定理 3（拉格朗日中值定理） 如果 $f(x)$ 满足以下条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）在开区间 (a,b) 内可导，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

推论 如果在 (a,b) 内恒有 $f'(x)=0$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 为常数。

定理 4（柯西中值定理） 如果 $f(x)$， $F(x)$ 满足以下条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）在开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内每一点处均不为零，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

定理 5（皮亚诺型余项泰勒公式）

如果 $f(x)$ 在点 x_0 有直至 n 阶的导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n],$$

常称 $R_n(x)=o[x-x_0]^n$ 为**皮亚诺型余项**。若 $x_0=0$，则得**麦克劳林公式**：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n).$$

定理 6（拉格朗日型余项泰勒公式）

设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，这里 ξ 介于 x_0 与 x 之间，称为**拉格朗日型余项**。

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

(4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$

（二）导数应用

1. 洛必达法则

若 1） $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0(\infty);$

2） $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0;$

3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞）；

则 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

【注】 1)洛必达法则主要用于7种不定式：$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}.

其中“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$” 可直接用，后5种可通过以下关系图化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限来求.

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty} \Leftarrow \begin{cases} 0\cdot\infty \Leftarrow \begin{cases} 1^{\infty} \\ \infty^{0} \\ 0^{0} \end{cases} \\ \infty-\infty \end{cases}$$

2)**使用洛必达法则应该注意的几个问题**

(1)使用洛必达法则之前，应该先检验其条件是否满足；

(2)使用洛必达法则之后，如果问题仍然是未定型极限，且仍符合洛必达法则条件，可以再次使用洛必达法则；

(3)如果“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限中的函数含有极限非零的因子，可以单独求极限，不必参与洛必达法则运算，以简化运算；

(4)如果能进行等价无穷小量代换或恒等变形配合洛必达法则使用，也可以简化运算.

2. 函数的单调性

定理7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。

1）若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增；

2）若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减；

3. 函数的极值

定义1 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义。如果对于该邻域内任何 x，恒有 $f(x)\le f(x_0)$ 或 $(f(x)\ge f(x_0))$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**（或**极小值点**），称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**极大值**（或**极小值**）。极大（小）值统称为**极值**；极大（小）值点统称为**极值点**。导数为零的点称为函数的**驻点**。

定理8（极值的必要条件） 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，如果 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$.

定理9（极值的第一充分条件） 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导，且

$f'(x_0)=0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续）

（1）若 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$，$x>x_0$ 时 $f'(x)<0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点;

（2）若 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$x>x_0$ 时 $f'(x)>0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点;

（3）若 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧同号，则 x_0 不为 $f(x)$ 的极值点.

定理 10（极值的第二充分条件） 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，

（1）若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点;

（2）若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点;

（3）若 $f''(x_0)=0$，则此方法不能判定 x_0 是否为极值点.

4. 函数的最大值与最小值

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，$x_0\in[a,b]$。若对于任意 $x\in[a,b]$，恒有 $f(x)\le f(x_0)$（或 $f(x)\ge f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的**最大值**（或**最小值**），称 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**最大值点**（或**最小值点**）.

5. 曲线的凹凸性

定义 3 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1,x_2 恒有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的；如果恒有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的；

定理 11 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，那么

（1）若在 (a,b) 内有 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

（2）若在 (a,b) 内有 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

定义 4（拐点） 连续曲线弧上的凹与凸的分界点称为曲线弧的**拐点**。

定理 12（拐点的必要条件） 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导，且点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线

$y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

定理 13（拐点的第一充分条件） 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内二阶可导，且 $f''(x_0)=0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续）

（1）若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧异号，则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

（2）若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧同号，则点 $(x_0,f(x_0))$ 不为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

定理 14（拐点的第二充分条件） 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处三阶可导，且 $f''(x_0)=0$，

（1）若 $f'''(x_0)\neq 0$，则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

（2）若 $f'''(x_0)=0$，则此方法不能判定 $(x_0,f(x_0))$ 是否为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

6. 曲线的渐近线

定义 5 若点 M 沿曲线 $y=f(x)$ 无限远离远点时，它与某条定直线 L 之间的距离将无限趋近于零，则称直线 L 为曲线 $y=f(x)$ 的一条**渐近线**.若直线 L 与 x 轴平行，则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的**水平渐近线**；若直线 L 与 x 轴垂直，则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的**铅直渐近线**；若直线 L 既不平行于 x 轴，也不垂直于 x 轴，则称直线 L 为曲线 $y=f(x)$ 的**斜渐近线**.

1）水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$），那么 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 水平渐近线.

2）垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$），那么 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

3）斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$（或 $x\to-\infty$，或 $x\to+\infty$），那么 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

7. 函数的作图

利用函数的单调性、极值、曲线的凹凸性、拐点及渐近线可以做出函数曲线.

8. 曲线的弧微分与曲率（数三不要求）

定义 6 设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有连续导数，则有**弧微分**

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

定义 7 设 $y=f(x)$ 有二阶导数，则有**曲率**

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

称 $\rho=\dfrac{1}{K}$ 为**曲率半径**.

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

定义 8 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K(K\neq 0)$。在点 M 处曲线的法线上，在曲线凹的一侧取一点 D，使 $|DM|=\dfrac{1}{K}=\rho$，以 D 为圆心，ρ 为半径的圆称为曲线在点 M 处的**曲率圆**，圆心 D 称为曲线在点 M 处的**曲率中心**.

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

1. 求极限；
2. 求函数的极值和最值，确定曲线的凹向和拐点；
3. 求渐近线；
4. 方程的根；
5. 不等式的证明；
6. 中值定理证明题；

一. 求 极 限

【例 1】试证当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{6}$，　　$\tan x-x\sim\dfrac{x^3}{3}$，

$$\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}, \qquad x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}.$$

$$x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$$

【例 2】(2008 年 1, 2)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$. 【$\dfrac{1}{6}$】

【例 3】(1994 年 3)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.. ($\dfrac{1}{2}$)

【例 4】(2013 年，1) 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$, 其中 k,c 为常数，且 $c\neq 0$, 则（　）

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$. (B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$.

(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$. (D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

【例 5】(2009 年 1, 2, 3) 当 $x\to 0$ 时， $f(x)=x-\sin ax$ 与

$g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　） 【A】

（A） $a=1,b=-\frac{1}{6}$.　　（B） $a=1,b=\frac{1}{6}$.

（C） $a=-1,b=-\frac{1}{6}$.　　（D） $a=-1,b=\frac{1}{6}$.

【例 6】（2011 年，2, 3）已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　）

（A） $k=1,c=4$.　　（B） $k=1,c=-4$.

（C） $k=3,c=4$.　　（D） $k=3,c=-4$.

【例 7】（2012 年 3）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.　　【$\frac{1}{12}$】

【例 8】(1988 年 3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x.$ 【$\dfrac{4}{\pi}$】

【例 9】(2011 年 1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}.$ 【$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$】

【例 10】(2016 年 2, 3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}.$ $(e^{\frac{1}{3}})$

【例 11】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=2$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$.

二．求函数的极值和最值及确定曲线的凹向和拐点

【例 1】（2003 年 1, 2）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形右图所示，则 $f(x)$ 有

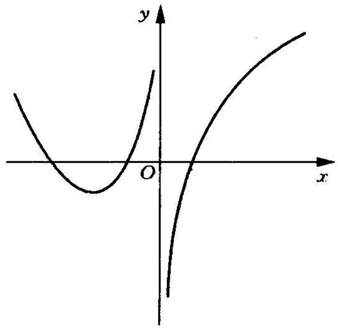


图 2－3

（A）一个极小值点和两个极大值点

（B）；两个极小值点和一个极大值点

（C）两个极小值点和两个极大值点

（D）三个极小值点和一个极大值点

【例 2】（1990 年 1, 2） 已知 $f(x)$在$x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点

$x=0$ 处 $f(x)$

（A）不可导. （B）可导，且 $f'(0)\neq 0$.

（C）取得极大值. （D）取得极小值.

【例 3】在半径为 R 的球中内接一直圆锥，试求圆锥的最大体积. 【$\dfrac{32}{81}\pi R^3$】

【例 4】(2010 年 3)若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b =$ ____.

【3】

【例 5】(2004 年 2, 3)设 $f(x) = |x(1-x)|$，则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

三．求渐近线

【例 1】(2014 年 1, 2)下列曲线中有渐近线的是 ( )

(A) $y = x + \sin x$　　(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$　　(D) $y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$

【例 2】(2007 年 1, 2) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^{x})$ 渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. [ ]

【例 3】(2016 年 2) 曲线 $y=\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为________.

四. 方程的根

【例 1】(1992 年 5) 求证:方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根,其中 p,q 为常数,且 $0<q<1$.

【例 2】设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$, 求证:方程 $na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots 2a_2x+a_1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

五．不等式的证明

【例 1】(1991 年 3) 利用导数证明：当 $x>1$,时 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$.

【例 2】证明：$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,\quad (x>0)$.

【例 3】(2012 年 1, 2, 3) 证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

六．中值定理证明题

【例 1】 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上二阶可导，且

$f(a)=f(b)=f(c)\ (a<c<b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$.

【例 2】(1990 年 1, 2) 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

【例 3】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0,$ 且存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)<0.$ 试证：

$\exists\xi,\eta\in(a,b),\ f'(\xi)<0, f''(\eta)>0.$

【例 4】（2013 年 3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0,$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2.$ 证明：

（1）存在 $a>0,$ 使得 $f(a)=1;$

（2）对 (1) 中的 a，存在 $\xi\in(0,a),$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}.$

第四章　不 定 积 分

考 试 内 容 概 要

（一）不定积分的概念与性质

1. 原函数

定义 1　设 $f(x)$ 在某区间 (a,b) 内有定义。若存在函数 $F(x)$，使其在该区间内任一点都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间内的**原函数**。

若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在某区间内的原函数，则 $F(x)+C$（C 为任意常数）也为 $f(x)$ 在该区间内的原函数。

若 $F(x)$，$\varPhi(x)$ 都是 $f(x)$ 在某区间内的原函数，则 $F(x)-\Phi(x)=C$（C 为某个确定

常数）。

2. 不定积分

定义 2 $f(x)$ 的原函数的全体称为 $f(x)$ 的**不定积分**。记为 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C.$$

其中 C 为任意常数。

3. 不定积分的几何意义　设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则从几何上看，$F(x)$ 表示平面上的一条曲线，称之为 $f(x)$ 的积分曲线。因此，不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$ 在几何上表示一族积分曲线。这族积分曲线对应于横坐标 x 处的切线都相互平行。

4. 原函数存在定理

定理 1 设 $f(x)$ 在某区间内连续，则函数 $f(x)$ 在该区间内的原函数一定存在。

5. 不定积分的性质

(1) $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$，　$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+C$，　$\int \mathrm{d}f(x) = f(x)+C.$

(3) $\int [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$；

(4) $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$（$k$ 为常数）

（二）不定积分基本公式

1) $\int 0dx = C$　　2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$

3) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x|+C$　　4) $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a}+C \quad (a>0, a\neq 1)$

5）$\int e^{x}dx = e^{x}+C$　　6）$\int \sin x dx = -\cos x + C$

7）$\int \cos x dx = \sin x + C$　　8）$\int \sec^{2} x dx = \tan x + C$

9）$\int \csc^{2} x dx = -\cot x + C$　　10）$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

11）$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$　　12）$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx = \arcsin x + C$

13) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$　　14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$　　16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$　　18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

19) $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C.$　　20) $\int \csc x\,\mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x| + C.$

（三）三种主要积分法

1. 第一换元积分法

定理 2　设 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$，$u=\varphi(x)$ 存在连续导数，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C.$$

常见的凑微分形式

（1）$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b);$

（2）$\int x^m f(ax^{m+1}+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{(m+1)a}\int f(ax^{m+1}+b)\mathrm{d}(ax^{m+1}+b) \quad (m\neq -1);$

（3）$\int f(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int f(\sqrt{x})d\sqrt{x}$

（4）$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x);$

（5）$\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x);$

（6）$\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x);$

（7）$\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x);$

（8）$\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x);$

(9)　$\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x);$

（10）$\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$ 等。

2. 第二换元积分法

定理 3　设 $x=\varphi(t)$ 是单调的、可导的函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$。又

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C,$$

则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C = F[\varphi^{-1}(x)]+C,$$

其中$\varphi^{-1}(x)$是$x=\varphi(t)$的反函数。

常用的三种变量代换

1） 被积函数含有$\sqrt{a^2-x^2}$，　　令 $x=a\sin t$（或$a\cos t$）

2）被积函数含有$\sqrt{a^2+x^2}$，　　令 $x=a\tan t$

3）被积函数含有$\sqrt{x^2-a^2}$，　　令 $x=a\sec t$

3. 分部积分法

1)分部积分公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

2) 分部积分法所适用的函数类

分部积分法比较适用于两类不同函数相乘. 如下列积分，这里$p_n(x)$为x的n次多项式。

$$\int \mathrm{p}_n(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \mathrm{p}_n(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x,\quad \int \mathrm{p}_n(x)\cos\alpha x,\quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x,\quad \int \mathrm{p}_n(x)\ln x\,\mathrm{d}x,\quad \int \mathrm{p}_n(x)\arctan x\,\mathrm{d}x,\quad \int \mathrm{p}_n(x)\arcsin x\,\mathrm{d}x$$

3) 分部积分法中u,v的选取

分部积分法在使用时的关键是u,v的选取，换句话说把谁凑到微分号里去。

1） $\int \mathrm{p}_n(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$，$\int \mathrm{p}_n(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x$，$\int \mathrm{p}_n(x)\cos\alpha x dx$，这三种积分都应把多项式以外的函数凑进微分号。

2） $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx, \int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$，这两种积分把指数函数或三角函数凑进微分号都可以，但把指数凑进去更简单，连续两次将指数函数凑进去分部积分还原便可求解。

3） $\int \mathrm{p}_n(x)\ln x\,\mathrm{d}x$，$\int \mathrm{p}_n(x)\arctan x\,\mathrm{d}x$，$\int \mathrm{p}_n(x)\arcsin x dx$，这三种积分都应把多项式函数凑进微分号。

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

求不定积分（换元、分部）

【例 1】 计算积分 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} =$ ________；

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\ge 0, \\ \cos x, & x<0, \end{cases}$ 则 $\int f(x)dx =$ ________.

【例 3】（2016 年 1, 2）已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2(x-1), & x<1, \\ \ln x, & x\ge 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

（A） $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x-1), & x\ge 1, \end{cases}$

（B） $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x+1)-1, & x\ge 1, \end{cases}$

（C） $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x+1)+1, & x\ge 1, \end{cases}$

（D） $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x-1)+1, & x\ge 1, \end{cases}$

【例 4】 计算 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx (a>0)$.

【例 5】(2006 年 2)计算 $I=\int\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$

$$[-\frac{\arcsin e^x}{e^x}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}}+C]$$

【例 6】(1994 年 1, 2, 3)　计算 $\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}.$

$$[\frac{1}{4(1+\cos x)}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C]$$

【例 7】(2011 年 3)求不定积分 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

$$[2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C]$$

第五章 定积分与反常积分

第一节 定 积 分

考试内容概要

（一）定积分的概念

1. 定积分的定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义且有界.

（1）**分割** 在 $[a,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 表示第 i 个小区间的长度.

（2）**求和** 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$.

（3）**取极限** 若极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且此极限值既不依赖于区间 $[a,b]$ 的分法，也不依赖于点 ξ_i 的取法，则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上**可积**，并称此极限为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**，记为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

【注】 (1) 定积分表示一个数值，它取决于积分区间 $[a,b]$ 与被积函数 $f(x)$，与积分变量无关，因此有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

（2）若积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在. 将 $[0,1]$ 区间 n 等分，此时 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$, 取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$, 由定积分的定义得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$$

上式在用定积分定义求极限时是一种常见形式.

2. 定积分存在的充分条件

定理 1　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 必定存在.

定理 2　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 必定存在.

定理 3　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限个第一类间断点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 必定存在.

3. 定积分的几何意义

1）设 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge 0$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值等于以曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

2）若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\le 0$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值等于以曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形面积的负值.

3）若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 的值有正也有负，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值等于 x 轴上方的面积减去 x 轴下方的面积所得之差.

（二）定积分的性质

1. 不等式性质

（1）　若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

（2）　若 M 及 m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

（3）　$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

2．中值定理

（1）　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \qquad (a<\xi<b)$$

常称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 为函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**平均值**.

（2）　若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 不变号，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a\le\xi\le b)$$

（三）积分上限的函数

变上限的积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是其上限的函数，常称之为**积分上限函数**.

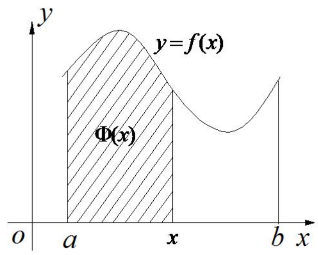


图4.5

定理 如果$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上可导，且

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x).$$

由原函数的概念可知，如果$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$为$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数.由此可知，连续函数必有原函数.

【注】 如果$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$为可导函数，则

$$\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'=f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x).$$

变上限积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$表示一个函数，因此，我们经常会遇到与函数相关的问题：如求极限，判定连续性，求导数，求微分，判定单调性，曲线的凹凸性等.

（四）定积分的计算

定积分的计算主要有以下五种方法

1. 牛顿-莱布尼兹公式

设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$F(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

2. 换元法积分法 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$满足以下条件：

（1）$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$；

（2）$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）上为单值、有连续导数的函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

3. 分部积分法

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

4. 利用奇偶性和周期性

1) 设 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的连续函数($a>0$)，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x) \text{ 为奇函数时,}\\ 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f(x) \text{ 为偶函数时.}\end{cases}$$

2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则对任给数 a，总有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

5．利用已有公式

$$(1)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数}\end{cases}$$

$$(2)\ \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x \quad (\text{其中} f(x)\text{连续})$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

1．定积分的概念、性质及几何意义；

2．定积分的计算；

3．变上限定积分.

一．定积分的概念、性质及几何意义

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})=$ ________.　　$(\ln 2)$

【例 2】(2012 年 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})=$ ________.　　$(\frac{\pi}{4})$

【例 3】（2016 年 2, 3） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n})=$ ________.

$(\sin 1-\cos 1)$

【例 4】（1997 年 1, 2）设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$， $f'(x)<0$， $f''(x)>0$. 令

$S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ S_2=f(b)(b-a),\ S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则（　）.

（A） $S_1<S_2<S_3$　　（B） $S_2<S_1<S_3$

（C） $S_3<S_1<S_2$　　（D） $S_2<S_3<S_1$　　【B】

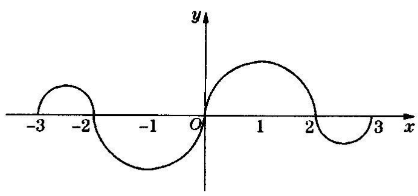
【例 5】（2007 年，1, 2, 3）如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是（　）.　　【C】

（A） $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$

（B） $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

（C） $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$

（D） $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$



【例 6】(2011 年 1, 2, 3) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$， $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,\mathrm{d}x$， $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$，

则 I,J,K 的大小关系为（ ）. 【B】

（A） $I<J<K$ （B） $I<K<J$ （C） $J<I<K$ （D） $K<J<I$

【例 7】(1991 年 1, 2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(0)$，

证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

二. 定积分的计算

【例 1】(2001 年 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=$ ______. $(\dfrac{\pi}{8})$

【例 2】$\int_0^{\pi} x\sin^2 x dx =$ ____________. $(\frac{\pi^2}{4})$

【例 3】(2000 年 1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx =$ ______. $(\frac{\pi}{4})$

【例 4】(2005 年 2) 计算 $\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. $(\frac{\pi}{4})$

【例 5】(2010 年 1) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x =$ ____________. (-4π)

【例 6】计算 $\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x.$ $(\frac{\pi}{8})$

【例 7】（1995 年 3） 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x)dx.$ (2)

三．变上限定积分

【例 1】设 $f(x)$ 连续，试求下列函数的导数

(1) $\int_{e^x}^{x^2} f(t)dt;$ (2) $\int_0^x (x-t)f(t)dt;$

(3) $\int_0^x \cos(x-t)^2 dt$； (4) $\int_1^2 f(x+t)dt.$

【例 2】（2015 年 2, 3）设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)dt$.若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$, 则

$f(1)=$________.　　　　　　　　　　　　【 2 】

【例 3】（1998 年 1）　设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=($　$)$

（A）$xf(x^2)$　　　　（B）$-xf(x^2)$

（C）$2xf(x^2)$　　　　（D）$-2xf(x^2)$　　　　【A】

【例 4】(1993 年 3) 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 1, & 1\le x\le 2, \end{cases}$ 设 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\ (0\le x\le 2)$，则 $F(x)$

为（ ）.　　　　　　　　　　　　【D】

（A）$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1, \\ x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$　　　　（B）$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1, \\ x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$

（C）$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1, \\ x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$　　　　（D）$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1, \\ x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$

【例 5】（1988 年 2） 设 $x \geq -1$, 求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t$. 【$\begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-\frac{1}{2}(1-x)^2, & x > 0. \end{cases}$】

【例 6】（2013 年 2）设函数 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$ $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$, 则（ ）

（A） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点； （B） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点；

（C） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导； （D） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导. 【C】

【例 7】（1998 年 2）确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_{b}^{x}\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c$ （$c \neq 0$）.

【$a=1,b=0,c=\dfrac{1}{2}$】

【例 8】（1996 年 3）设$\begin{cases} x=\int_0^t f(u^2)\,\mathrm{d}u, \\ y=[f(t^2)]^2, \end{cases}$其中 具有二阶导数，且 $f(u)\neq 0$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

$[\dfrac{4[f'(t^2)+2t^2 f''(t^2)]}{f(t^2)}]$

第二节 反 常 积 分

考 试 内 容 概 要

（一）无穷区间上的反常积分

定义 1 （1）设 $f(x)$ 为 $[a,+\infty)$ 上的连续函数，如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,b]$ 上的连续函数,则可类似的定义函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(3) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，如果反常积分

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

都收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$至少有一个发散，则称$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$**发散**.

常用结论： $\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx; \begin{cases} p>1 & 收敛 \\ p\le 1 & 发散 \end{cases}$， $(a>0)$

（二）无界函数的反常积分

如果函数$f(x)$在点a的任一邻域内都无界,那么点a称为函数$f(x)$的瑕点(也称为无界点).无界函数的反常积分也称为**瑕积分**.

定义 2　（1）设函数$f(x)$在$(a,b]$上连续，点a为函数$f(x)$的瑕点.如果极限

$$\lim_{t\to a^+} \int_{t}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数$f(x)$在**区间$[a,b]$上的反常积分，记作**$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_{t}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$**收敛**. 如果上述极限不存在，则称反常积分$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$**发散**.

（2）设函数$f(x)$在$[a,b)$上连续，点b为函数$f(x)$的瑕点. 则可类似的定义函数$f(x)$在**区间$[a,b]$上的反常积分**

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-} \int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

（3）设函数$f(x)$在$[a,b]$上除点c $(a<c<b)$外连续，点c为函数$f(x)$的瑕点.

如果反常积分

$$\int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x 和 \int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

都收敛，则称反常积分$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$**收敛**,且

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果$\int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$至少有一个发散，则称$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$**发散**.

常用结论： $\int_{a}^{b} \frac{1}{(x-a)^p} dx = \begin{cases} p<1 & 收敛 \\ p\ge 1 & 发散 \end{cases}$

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx=\begin{cases} p<1 & \text{收敛} \\ p\ge 1 & \text{发散} \end{cases}$$

常考题型与典型例题

常考题型

1. 反常积分的敛散性；

2. 反常积分的计算；

一. 反常积分的敛散性

【例 1】(2015 年 2) 下列反常积分中收敛的是( ) 【D】

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx.$ (B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx.$

(C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx.$ (D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx.$

【例 2】(2013 年 2) 设函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e, \\ \frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e. \end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，

则( ) 【D】

(A) $\alpha<-2.$ (B) $\alpha>2.$ (C) $-2<\alpha<0.$ (D) $0<\alpha<2.$

【例 3】（2016 年 2）反常积分 $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx,\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为（　）

（A）收敛，收敛.　　（B）收敛，发散.

（C）发散，收敛.　　（D）发散，发散.

【例 4】（2016 年 1）反常积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则（　）

（A）$a<1,b>1$.　　（B）$a>1,b>1$.

（C）$a<1,a+b>1$.　　（D）$a>1,a+b>1$.

二. 反常积分的计算

【例 1】（2000 年 2）$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$ ________.　　$[\frac{\pi}{3}]$

【例 3】（2000 年 4）计算 $I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2-x}}$. $\left(\frac{\pi}{4\mathrm{e}}\right)$

【例 4】（2013 年 1, 3） $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^{2}}dx=$ __________ . $(\ln 2)$

第六章　定积分的应用

考 试 内 容 概 要

用定积分可表示一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、变力做功、压力和函数平均值等），定积分的这些应用有个共同思想，即建立“微元”， 然后微元积分就得到所求量.

（一）几何应用

1. 平面图形的面积

（1）若平面域 D 由曲线 $y=f(x),y=g(x)\,(f(x)\ge g(x))$， $x=a$， $x=b$（ $a<b$ ）所围成，则平面域 D 的面积为

$$S=\int_{a}^{b}[f(x)-g(x)]dx$$

（2）若平面域 D 由曲线曲 $\rho=\rho(\theta)$， $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$ 所围成，则其面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{2}(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

2. 旋转体体积

若区域D由曲线$y=f(x)\ (f(x)\geq 0)$，和直线 $x=a$，$x=b\ (0\leq a<b)$及x轴所围成，则

1）区域D绕x轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

2）区域D绕y轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

3. 曲线弧长（数三不要求）

1）$C:y=y(x),a\leq x\leq b.\qquad s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$

2）$C:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\quad\alpha\leq t\leq\beta.\qquad s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}dt$

3）$C:\rho=\rho(\theta),\quad\alpha\leq\theta\leq\beta.\qquad s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$

4. 旋转体侧面积（数三不要求）

曲线$y=f(x)\ (f(x)\geq 0)$和直线 $x=a$，$x=b\ (0\leq a<b)$及x轴所围成区域绕x轴旋转所得旋转体的侧面积为

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

（二）物理应用（数三不要求）

1. 压力；　　2. 变力做功；　　3. 引力。

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

平面域面积和旋转体体积的计算

【例 1】（2014 年 3）设D是由曲线$xy+1=0$与直线$y+x=0$及$y=2$围成的有界区域，则D的面积为________.　　【$\frac{3}{2}-\ln 2$】

【例 2】(2013 年 2)设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\ (-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$, 则 L 所围平面图形的面积是 ________ .　　　　【$\frac{\pi}{12}$】

【例 3】(2015 年 2, 3)设 $A>0, D$ 是由曲线段 $y=A\sin x\ (0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1=V_2$，求 A 的值　　　　【$A=\frac{8}{\pi}$】

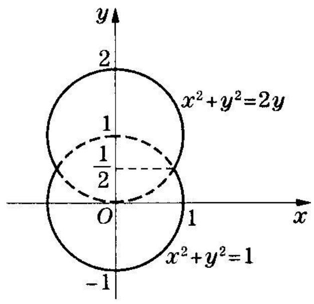
【例 4】(2012 年 2)过点 $(0,1)$ 作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【$S=2; V=\frac{2\pi}{3}(e^2-1)$】

【例 5】（2011 年 1,2） 曲 线 $y=\int_0^x \tan t dt(0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的 弧 长 $s=$ ______________.

【$\ln(1+\sqrt{2})$】

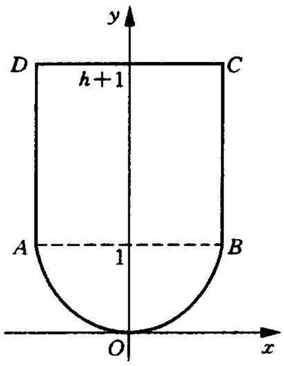
【例 6】（2011 年 2）一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y(y\ge\frac{1}{2})$ 与 $x^2+y^2=1(y\le\frac{1}{2})$ 连接而成.



（I）求容器的容积；

（II）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位：m，重力加速度为 gm/s^2，水的密度为 $10^3kg/m^3$）　　【$\frac{9}{4}\pi,\frac{27}{8}\pi\rho g$】



【例7】（2002年2）某闸门的形状与大小如图所示，其中 y 轴为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，其中 $DC=2m$, 下部

由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为5：4，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m (米)? 【 $h=2$ 】

第 七 章　微 分 方 程

考 试 内 容 概 要

（一）常微分方程的基本概念

1. **微分方程**　含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**,简称**方程**.

2. **微分方程的阶**　微分方程中所出现的未知函数最高阶导数的阶数，称为微分方程的**阶**.

3. **微分方程的解**　满足微分方程的函数，称为该方程的**解**.

4. **微分方程的通解**　如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则称之为微分方程的**通解**.

5. **微分方程的特解**　微分方程的不含任意常数的解，称之为**特解**.

6. **初始条件**　确定特解的一组常数称为**初始条件**.

7. **积分曲线**　方程的一个解在平面上对应一条曲线，称为该微分方程的**积分曲线**.

（二）一阶微分方程

1. 可分离变量的方程

能表示为 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ 的方程，称为**可分离变量的方程**.

求解的方法是两端积分

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 齐次方程　　能化为 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的微分方程称为**齐次微分方程**.

求解齐次微分方程的一般方法为：令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y'=u+xu'$，从而将原方程化为 $xu'=\varphi(u)-u$，此方程为可分离变量的方程.

3. **线性方程** 形如 $y'+p(x)y=Q(x)$ 的方程称为**一阶线性微分方程**.

求解一阶线性微分方程的一般方法为常数变易法，或直接利用以下通解公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

4. **伯努利方程** （仅数学一要求）

形如 $y'+p(x)y=Q(x)y^{n}$ 的方程 $(n\neq 0,1)$，称为**伯努利方程**.

求解伯努利方程的一般方法为：令 $u=y^{1-n}$，将原方程化为一阶线性微分方程.

5. **全微分方程**（仅数学一要求）

如果方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的左端是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分：

$$du(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

则称该方程为**全微分方程**.

此方程的通解为 $u(x,y)=C$

求 $u(x,y)$ 有以下三种方法

1）偏积分　　2）凑微分　　3）线积分

当 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数时，方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

【注】 如果给定的一阶微分方程不属于上述五种标准形式，首先考虑将 x，y 对调，即认定 x 为 y 的函数，再判定新方程的类型；或者利用简单的变量代换将其化为上述五种类型之一而求解.

（三）可降阶的高阶方程（数学三不要求）

1. $y^{(n)}=f(x)$ **型的微分方程**

2. $y''=f(x,y')$ 型的方程

只需令 $y'=p,$，$y''=p'$，可将原方程化为一阶微分方程.

3. $y''=f(y,y')$ 型的方程

只需令 $y'=p,$，$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，可将原方程化为一阶微分方程.

（四）高阶线性微分方程

1. 线性微分方程的解的结构

这里只讨论二阶线性微分方程，其结论可以推广到更高阶的方程. 二阶线性微分方程的一般形式为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

这里的 $p(x),q(x),f(x)$ 均为连续函数. 当方程右端的 $f(x)\equiv 0$ 时，称为**二阶线性齐次方程**. 否则称为**二阶线性非齐次方程**.

齐次方程 $\qquad y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad$ （1）

非齐次方程 $\qquad y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad$ (2)

定理 1 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程（1）的两个线性无关的特解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_1y_2(x)$$

就是方程（1）的通解.

【注】方程（1）的两个解线性无关的充要条件是它们之比不为常数.

定理 2 如果 y^* 是非齐次方程（2）的一个特解，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程（1）的两个线性无关的特解，则

$$y=C_1y_1(x)+C_1y_2(x)+y^*(x)$$

是非齐次微分方程（2）的通解.

定理 3 如果 $y_1^*(x)$，$y_2^*(x)$ 是非齐次方程（2）的两个特解，则 $y(x)=y_2^*(x)-y_1^*(x)$ 是齐次微分方程（1）的解.

定理 4 如果 $y_1^*(x)$，$y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$$

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的一个特解.

2. 常系数齐次线性微分方程

二阶常系数线性齐次微分方程的一般形式为

$$y''+py'+qy=0, \qquad ③$$

其特征方程为 $r^2+pr+q=0$，设 r_1， r_2 为该方程的两个根.

（1）若 $r_1\neq r_2$，为两个不相等的实特征根，则方程③的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$$

（2）若 $r_1=r_2$ 为二重实特征根，则方程③的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$$

（3）若 $r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$， $r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$，为一对共轭复根，则方程③的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

3. 常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数线性非齐次微分方程的一般形式为

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad ④$$

（1）若 $f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$，其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式，则方程④的特解可设为

$$y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式, k 是特征方程含根 λ 的重复次数.

（2）若 $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}[P_l^{(1)}(x)\cos\beta x+P_n^{(2)}(x)\sin\beta x]$，其中 $P_l^{(1)}(x)$， $P_n^{(2)}(x)$ 分别为 x 的 l 次， n 次多项式，则方程④的特解可设为

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x+R_m^{(2)}(x)\sin\beta x].$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$， $R_m^{(2)}(x)$ 是两个 m 次多项式， $m=\max\{l,n\}$.

当 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 不为方程③的特征根时，取 $k=0$；

当 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 为方程③的单特征根时，取 $k=1$.

4. 欧拉方程（仅数学一要求）

形如 $$x^n y^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x),$$

(其中 p_1， p_2， $\cdots$， p_n 为常数)的方程称为**欧拉方程**.

令 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$，可将上述欧拉方程化为线性常系数方程，一般地有

$$x^k y^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y,$$

其中 D 代表对 t 求导数的运算.

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

1．方程求解

2．综合题

3. 应用题

【例 1】(2014 年 1) 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为

$y=$ ________.

【 $y=xe^{2x+1}$ 】

【例 2】(2012 年 2) 微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$ ________.

【解 1】线性
【解 2】全微分

【$y=\sqrt{x}$】

【例 3】(2015 年 2, 3)设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处取得极值3, 则 $y=y(x)=$________.

【$2e^{x}+e^{-2x}$】

【例 4】(2015 年 1)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则( )　　【A】

(A) $a=-3,b=2,c=-1.$　　(B) $a=3,b=2,c=-1.$

(C) $a=-3,b=2,c=1.$　　(D) $a=3,b=2,c=1.$

【例 5】(2009 年 1)若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{x}$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为________.

【$y = x(1-e^x)+2$】

【例 6】(2013 年 1, 2) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解为 $y =$ ______________.

【$y = C_1e^{3x} + C_2e^x - xe^{2x}$】

【例 7】(2016 年 3) 设函数 $f(x)$ 连续，且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

【$f(x) = -\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$】

【例 8】(2015 年 1, 3) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对于任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【$\dfrac{8}{4-x}$】

【例9】(2006年3)在 xOy 坐标平面上,连续曲线 L 过点 $M(1,0)$,其上任意点 $P(x,y)(x\neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 $a>0$）.

（I）求 L 的方程;

（II）当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\dfrac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.

【$y=ax^2-ax;a=2$】

【例 10】（2009 年 2）设非负函数 $y=y(x)\ (x\geq 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$．当曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

【 $y=2x+3x^2;V=\dfrac{17\pi}{6}$ 】

第 八 章　多 元 函 数 微 分 学

第一节 函数的极限、连续、偏导数与全微分

考 试 内 容 概 要

（一） 二元函数

定义 1 设 D 是平面上的一个点集，若对每个点 $P(x,y)\in D,$ 变量 z 按照某一对应法则 f 有一个确定的值与之对应，则称 z 为 x,y 的**二元函数**，记为 $z=f(x,y)$.

其中点集 D 称为该函数的**定义域**， x,y 称为**自变量**， z 称为**应变量**.函数值 $f(x,y)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**。记为 $f(D)$.

通常情况下，二元函数 $z=f(x,y)$ 在几何上表示一张空间曲面.

（二）二元函数的极限

定义 2 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0,y_0)\in D$ 或为 D 的边界点，如果 $\forall\varepsilon>0,$ 存在 $\delta>0$，当 $P(x,y)\in D,$ 且 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ **时的极限**，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(P)=A$$

注 1）这里的极限是要求点 (x,y) 在 D 内以任意方式趋近于点 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 都

趋近于同一确定的常数 A，否则该极限就不存在.

2）一元函数极限中的下述性质对多元函数仍成立

（1）局部有界性　　（2）保号性

（3）有理运算　　（4）极限与无穷小的关系

（5）夹逼性

（三）多元函数的连续性

1）连续的概念

定义 3　设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0,y_0)\in D$，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

成立，则称函数 $f(x,y)$ **在点** $P_0(x_0,y_0)$ **连续**；如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上的每个点 (x,y) 处都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续.

2）连续函数的性质

（1）**性质 1**　多元连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数；

（2）**性质 2**　多元连续函数的复合函数也是连续函数；

（3）**性质 3**　多元初等函数在其定义区域内连续；

（4）**性质 4（最大值定理）**

有界闭区域 D 上的连续函数在区域 D 上必能取得最大值与最小值.

（5）**性质 5（介值定理）**

有界闭区域 D 上的连续函数在区域 D 上必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.

（四）偏导数

1）偏导数的定义

定义 4　设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称这个极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的**偏导数**，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad f'_x(x_0,y_0).$$

类似地，如果

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称这个极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 y 的**偏导数**，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \quad 或 \quad f_y'(x_0,y_0).$$

【注】 由以上定义不难看出偏导数本质上就是一元函数的导数，其中 $f_x'(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，$f_y'(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数.

类似地，可以定义三元函数乃至 n 元函数的偏导数.

2）二元函数偏导数的几何意义 设 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点.过点 M 作平面 $y=y_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 相交，其交线为平面 $y=y_0$ 上的曲线 $z=f(x,y_0)$，即 $\begin{cases}z=f(x,y_0),\\ y=y_0,\end{cases}$ 则 $f_x'(x_0,y_0)$ 表示上述交线在点 M 处的切线对 x 轴的斜率.

同样，过点 M 作平面 $x=x_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 相交，其交线为平面 $x=x_0$ 上的曲线 $z=f(x_0,y)$，则 $f_y'(x_0,y_0)$ 表示上述交线在点 M 处的切线对 y 轴的斜率.

3）高阶偏导数

定义 5 如果 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 仍然存在偏导数，则称之为函数 $f(x,y)$ 的**二阶偏导数**，常记为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ 或\ f_{xx}'',\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\ 或\ f_{xy}'',$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\ 或\ f_{yx}'',\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ 或\ f_{yy}''.$$

常称 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 为**混合偏导数**。

定理 1 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，

则在该区域内这两个混合偏导数必定相等.

对于二元以上的函数，也可以类似地定义二阶或更高阶偏导数，且二阶与高阶混合偏导数连续时，混合偏导数的值与求导次序无关.

（五）全微分

定义 6（全微分） 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量

$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中 A，B 与 Δx，Δy 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处**可微**，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的**全微分**，记为

$$dz=A\Delta x+B\Delta y$$

如果 $f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点 (x,y) 都可微分，则称 $f(x,y)$ 在 D 内可微分.

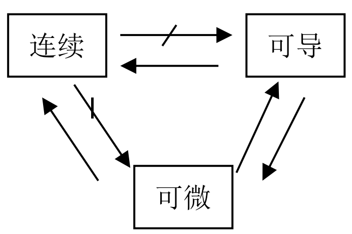
定理 2（全微分存在的必要条件） 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则该函数在点 (x,y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

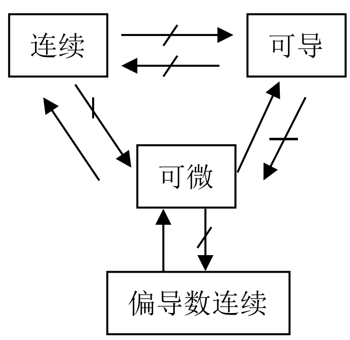
定理 3（全微分存在的充分条件） 如果 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微.

6. 连续、可偏导及可微之间的关系

一元函数



多元函数



常考题型与典型例题

常考题型

连续、偏导数、全微分的概念及其之间的关系

【例 1】(1997 年 1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（ ）.

(A) 连续、偏导数存在　　(B) 连续、偏导数不存在

(C) 不连续、偏导数存在　　(D) 不连续、偏导数不存在　　【C】

【例 2】(1994 年，1, 2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_0'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$ 存在，是 $f(x,y)$ 在该点连续的（ ）.

(A) 充分而非必要条件　　(B) 必要条件而非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件　　【D】

【例 3】(2012 年，3) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $dz\big|_{(0,1)}=$________.

【$2dx-dy$】

【例 4】证明以下几个经典的反例

（1）$f(x,y)=|x|+|y|$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可导（也不可微）；

（2）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点可导，但不连续；

（3）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点可导，但不可微；

（4）$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点可微，但偏导数不连续；

第二节　多元函数的微分法

考 试 内 容 概 要

（一）复合函数的微分法

定理 4　设函数 $u=u(x,y)$， $v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

全微分形式的不变性

设函数 $z=f(u,v)$、$u=u(x,y)$ 及 $v=v(x,y)$ 都有连续的一阶偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

即:不论把函数 z 看做自变量 x，y 的函数，还是看作中间变量 u， v 的函数，函数 z 的全微分形式都是一样的.

（二）隐函数微分法

1）由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$

若函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有连续偏导数, 且 $F(x_0,y_0)=0$, $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$. 则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域可唯一确定一个有连续导数的函数 $y=f(x)$, 并有

$$y'=-\frac{F_x'}{F_y'}.$$

2）由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$

若函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. 则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域

可唯一确定一个有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}.$$

3）由方程组 $\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=0,\\ F_2(x,y,u,v)=0\end{cases}$ **确定的隐函数** $u=u(x,y)$**，** $v=v(x,y)$ **（仅数一要求）**

欲求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$，可以将每个方程分别对 x 求偏导数，得出以 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$ 为变量的方程组，可解得 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$. 同样，将每个方程分别对 y 求偏导数，可以得出以 $\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$ 为变量的方程组，解之可得 $\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$.

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

复合函数及隐函数的偏导数和全微分的计算

【例 1】(2011 年 3）设函数 $z=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$，则 $dz|_{(1,1)}=$__________.

【$(1+2\ln 2)(dx-dy)$】

【例 2】(2015 年 2，3）若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则

$dz|_{(0,0)}=$__________.

【$-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$】

【例 3】（1988 年 4）已知$u+\mathrm{e}^{u}=xy$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial y}$.

【$\frac{y}{1+e^{u}};\frac{x}{1+e^{u}};\frac{1}{1+e^{u}}-\frac{xye^{u}}{(1+e^{u})^{3}}$】

【例 4】（1999 年 4）设$f(x,y,z)=\mathrm{e}^{x}yz^{2}$，其中$z=z(x,y)$是由$x+y+z+xyz=0$确定的隐函数，则$f_{x}'(0,1,-1)=$__________.

【1】

【例 5】（2007 年 1） 设$f(u,v)$为二元可微函数，$z=f(x^{y},y^{x})$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$__________.

$[yx^{y-1}f_1+y^x\ln yf_2]$

【例 6】(1990 年 5)设 $x^2+z^2=y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$,其中 φ 为可微函数,则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$ __________.

$$[\frac{y\varphi(\frac{z}{y})-z\varphi'(\frac{z}{y})}{2yz-y\varphi'(\frac{z}{y})}]$$

【例 7】(2002 年 3)设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数,且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定,求 du.

$$\mathrm{d}u=\left(f_x'+f_z'\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}\right)\mathrm{d}x+\left(f_y'-f_z'\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}\right)\mathrm{d}y.$$

【例 8】(2011 年 1, 2)设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数

$g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$．求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$．

$[f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)]$

第三节　多元函数的极值与最值

考 试 内 容 概 要

（一）无约束极值

定义 7　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，若对该邻域内任意的点 $P(x,y)$ 均有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\text{（或 }f(x,y)\ge f(x_0,y_0)\text{）},$$

则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的**极大值点**（或**极小值点**）；称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**极大值**（或**极小值**）. 极大值点和极小值点统称为**极值点**；极大值和极小值统称为**极值**.

定理 5（极值的必要条件）　设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，且 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极值点，则

$$f_x'(x_0,y_0)=0,\quad f_y'(x_0,y_0)=0.$$

定理 6（极值的充分条件）　设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导数，又 $f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$. 记

$$A=f_{xx}''(x_0,y_0),\quad B=f_{xy}''(x_0,y_0),\quad C=f_{yy}''(x_0,y_0),$$

则有下述结论：

（1）若 $AC-B^2>0$，则 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极值点；

① $A<0$，则 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极大值点；

② $A>0$，则 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极小值点；

（2）若 $AC-B^2<0$，则 (x_0,y_0) 不为 $f(x,y)$ 的的极值点；

（3）若 $AC-B^2=0$，则 (x_0,y_0) 可能为 $f(x,y)$ 的极值点，也可能不为 $f(x,y)$ 的极值点(此时，一般用定义判定).

求具有二阶连续偏导数二元函数 $z=f(x,y)$ 极值的一般步骤为：

（1）求出 $f(x,y)$ 的驻点 $P_1,\cdots,P_k$；

（2）利用极值的充分条件判定驻点 P_i 是否为极值点.

【注】1）二元函数 $z=f(x,y)$ 在偏导数不存在的点也可能取到极值（如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ），而这种点是否取得极值一般用极值定义判定；

2）二元函数 $z=f(x,y)$ 可能取得极值的点就两种，驻点和偏导数不存在的点.

（二）条件极值及拉格朗日乘数法

求 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的条件极值的一般方法为：

（1）构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$；

（2）将 $F(x,y,\lambda)$ 分别对 x， y， λ 求偏导数，构造方程组

$$\begin{cases} f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0, \\ f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

解出 x,y 及 λ，则其中 (x,y) 就是函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点.

以上方法可推广到对于 n 元函数在 m 个约束条件下的极值问题，如求 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$， $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值，可构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f+\lambda\varphi+\mu\psi,$$

将 F 对 x,y,z,λ,μ 分别求偏导数，并构造方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)+\mu\psi'_x(x,y,z)=0, \\ f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)+\mu\psi'_y(x,y,z)=0, \\ f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)+\mu\psi'_z(x,y,z)=0, \\ \varphi(x,y,z)=0, \\ \psi(x,y,z)=0, \end{cases}$$

解出 x,y,z,λ 及 μ，则其中 (x,y,z) 就是可能的极值点.

对于实际问题，如果驻点唯一，且由实际意义知问题存在最大（小）值，则该驻点即为最大（小）值点. 如果存在多个驻点，且由实际意义知道问题既存在最大值也存在最小值，只需比较各驻点处的函数值，最大的则为最大值，最小的则为最小值.

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

1. 求极值（无条件、条件）；

2.求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最大最小值；

3. 最大最小值应用题.

【例 1】（2003 年 3）设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是

（A） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

（B） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

（C） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

（D） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

【A】

【例 2】(2009 年 2) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点 $(0,0)$（　　）

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.　　(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.　　(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【解 1】求出 $z=f(x,y)$

【解 2】利用充分条件

【D】

【例 3】 求二元函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 的极值.

【$(0,0)$ 无极值；$(1,1)$ 极小值 -1】

【例 4】(2009 年 1, 3) 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

【$(0,\frac{1}{e})$ 极小值 $-\frac{1}{e}$】

【例 5】(2008 年 2) 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值.

【解 1】

【解 2】目标函数简化

【$(1,1,2)$ 最小值 6；$(-2,-2,8)$ 最大值 72】

【例 6】(2005 年 4) 求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\big|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$ 上的最大值与最小值。

【解】处理边界 3 种方法

【$f_{\max}=3; f_{\min}=-2$】

第九章 二重积分

考试内容概要

(一) 二重积分的概念及性质

1. 二重积分的概念

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有定义，

将区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1，\ \Delta\sigma_2，\ \cdots，\ \Delta\sigma_n，$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域,也表示它的面积.在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\xi_i)\Delta\sigma_i$. 记 λ 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$ 中的最大直径，如果 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分**，记为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i.$$

几何意义

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 是一个数.当 $f(x,y)\geq 0$ 时，其值等于以区域 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积；当 $f(x,y)\leq 0$ 时，二重积分的值为负值，其绝对值等于上述曲顶柱体的体积.

2. 二重积分的性质

性质 1（不等式性质）

（1）若在 D 上 $f(x,y)\leq g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\leq\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

（2）若在 D 上 $m\leq f(x,y)\leq M$，则

$$m\sigma\leq\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\leq M\sigma,$$

其中 σ 为区域 D 的面积.

(3) $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right|\leq\iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma.$

性质 2（中值定理）

设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 为区域 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

（二）二重积分的计算

1．利用直角坐标计算

1）先 y 后 x　　$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$

2）先 x 后 y　　$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$

2．利用极坐标计算

先 ρ 后 θ　　$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

【注】适合用极坐标计算的二重积分的特征

（1）适合用极坐标计算的被积函数: $f(\sqrt{x^2+y^2}), f(\frac{y}{x}), f(\frac{x}{y});$

（2）适合用极坐标的积分域:

如 $x^2+y^2\le R^2;\ r^2\le x^2+y^2\le R^2;\ x^2+y^2\le 2ax;\ x^2+y^2\le 2by;$

3．利用对称性和奇偶性计算

1）若积分域 D 关于 y 轴对称，$f(x,y)$ 关于 x 有奇偶性, 则:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_{x\ge0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数}. \\ 0 & f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数}. \end{cases}$$

2）若积分域 D 关于 x 轴对称，$f(x,y)$ 关于 y 有奇偶性, 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_{y\ge0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数}. \\ 0 & f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数}. \end{cases}$$

4．利用变量对称性计算

若积分域 D 关于直线 $y=x$ 对称, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

1. 累次积分交换次序或计算

2. 二重积分计算

. **一. 累次积分交换次序或计算**

【例 1】 交换累次积分 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$ 的次序 ____________.

【例 2】(2009 年 2) 设函数 $f(x,y)$ 连续,则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$

( )

(A) $\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy.$ (B) $\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy.$

(C) $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx.$ (D) $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx.$

【C】

【例 3】(1996 年 3) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$ 可以写成

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$ (B) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ (D) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

【D】

【例 4】(1990 年 1, 2) 积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$ 的值等于 ____________.

【 $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$ 】

【例 5】 积分 $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$ 的值等于 ____________.

【 $\frac{16}{9}$ 】

二. 二重积分计算

【例 1】(2008 年 3) 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (x^2-y)dxdy=$ __________.

【 $\frac{\pi}{4}$ 】

【例 2】(1991 年 1, 2) 设 D 是 xOy 平面上以(1, 1)(-1, 1)和(-1, -1)为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于（　　）

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$　　(D) 0.

【A】

【例 3】(2006 年 3) 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{y^2-xy}dxdy$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=1, x=0$ 所围成的平面区域.

【 $\frac{2}{9}$ 】

【例 4】(2006 年 1, 2) 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【$\dfrac{\pi}{2}\ln 2$】

【例 5】(2005 年 2, 3) 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\left|x^{2}+y^{2}-1\right|d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$。

【$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$】

【例 6】(2014 年 2, 3) 设平面域 $D=\left\{(x,y)|1\le x^{2}+y^{2}\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$, 计算

$$\iint\limits_{D}\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^{2}+y^{2}})}{x+y}dxdy.$$

【$-\dfrac{3}{4}$】

第十章　无 穷 级 数

第一节 常数项级数

考 试 内 容 概 要

(一) 级数的概念与性质

1. 级数的概念

设$\{u_n\}$是一数列，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为**无穷级数**，简称**级数**. $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ 称为级数的**部分和**.若部分和数列$\{s_n\}$有极限s,即

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并称这个极限值s为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **的和**，记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$.

如果极限$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$不存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

2．**级数的性质**

1）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于s,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$也收敛，且其和为ks.

2）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛于s,σ，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛于$s\pm\sigma$.

【注】1）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$必发散；

2）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$敛散性不定.

3）在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.

【注】一个级数的敛散性与其前有限项无关.

4）收敛级数加括号仍收敛且和不变.

【注】1) 若级数加括号以后收敛，原级数不一定收敛；

2) 若级数加括号以后发散，则原级数一定发散.

5)（级数收敛的必要条件）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

【注】1）若$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$不一定收敛；

2）若$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$一定发散.

（二）级数的审敛准则

1．正项级数（$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$u_n \geq 0$）

基本定理：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ S_n 上有界。

1) 比较判别法：设 $u_n \leq v_n$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散.}$$

2) 比较法极限形式：设 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l \ (0 \leq l \leq +\infty)$

①若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散.

②若 $l = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

③若 $l = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

【注】使用比较法和比较法的极限形式时，需要适当的选择一个已知其敛散性的级数作为比较的基准. 最常用的是 p 级数和等比级数.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$. 当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leq 1$ 时发散；

2) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$. 其中 a 和 q 为正数，当 $q < 1$ 时收敛，当 $q \geq 1$ 时发散.

3) 比值法：若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{收敛}, & \rho < 1, \\ \text{发散}, & \rho > 1, \\ \text{不一定}, & \rho = 1, \end{cases}$

4) 根值法：若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{收敛}, & \rho < 1, \\ \text{发散}, & \rho > 1, \\ \text{不一定}, & \rho = 1, \end{cases}$

2. 交错级数（$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0$）

莱不尼兹准则：若(1) $\{u_n\}$ 单调减；　(2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

【注】$\{u_n\}$ 单调减，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛的充分条件，但非必要条件. 如交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛，但 $u_n=\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 并不递减.

3. 任意项级数（$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，u_n 为任意实数）

1) 绝对收敛与条件收敛概念

（1）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛，此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；

（2）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛；

2) 绝对收敛和条件收敛的基本结论

（1）绝对收敛的级数一定收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（2）条件收敛的级数的所有正项(或负项)构成的级数一定发散.

即：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+|u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n-|u_n|}{2}$ 发散.

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

常数项级数的敛散性判定

【例 1】(2015 年 3) 下列级数中发散的是（　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$.

（C）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

【例 2】（2013 年 3）设$\{a_n\}$为正项数列, 下列选项正确的是（　）

（A）若$a_n > a_{n+1}$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛；　（B）若$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛, 则$a_n > a_{n+1}$；

（C）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 则存在常数$p>1$, 使$\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$存在；

（D）若存在常数$p>1$, 使$\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$存在，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛 .

【例 3】（2009 年 1）设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则（　　）

（A）当$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$收敛.　（B）当$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$发散.

（C）当$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛.　（D）当$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 发散.

【例 4】（2011 年 3）设$\{u_n\}$是数列，则下列命题正确的是(　　)

（A）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛.

（B）若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（C）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛.

（D）若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

第二节　幂 级 数

考 试 内 容 概 要

（一） 幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

定义 1 形如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$

或者 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$

的函数项级数称为**幂级数**.

定理 1（阿贝尔定理）

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处收敛，则当 $|x| < |x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

定理 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性有且仅有以下三种可能

（1） 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都收敛;

（2） 仅在 $x = 0$ 处收敛;

（3） 存在一个正数 R, 当 $|x| < R$ 时绝对收敛, 当 $|x| > R$ 时发散.

定义 2 定理 2 中的正数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**. 开区间 $(-R, R)$ 称为它的**收敛区间**. 若再考察 $x = \pm R$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性，可得出该级数收敛点的全体，称之为**收敛域**.

【注】若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 处条件收敛，则点 x_0 必为该幂级数收敛区间 $(-R, R)$ 的一个端点.

定理 3 如果 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$.

定理 4 如果 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$.

（二）幂级数的性质

1) 有理运算性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2, 令

$R=\min\{R_1,R_2\}$，则有

（1）加法：$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$，$\quad x\in(-R,R)$

（2）减法：$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$，$\quad x\in(-R,R)$

（3）乘法：$(\sum^{\infty}a_nx^n)\cdot(\sum^{\infty}b_nx^n)$

$$=a_0b_0+(a_0b_0+a_1b_0)x+(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$

$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots.\qquad x\in(-R,R)$$

（4）除法：$\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\qquad x\in(-R,R)$

其中系数 c_n （$n=0,1,2\cdots$）由 $(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 所确定.

2) 分析性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, 和函数为 $S(x)$, 则

（1）连续性：$S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内连续；

（2）可导性：$S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且可逐项求导，即

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

求导后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

（3）可积性：$S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可积，且可逐项积分，即

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}.$$

积分后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

（三）函数的幂级数展开

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上有定义，若

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

对任意的 $x\in(x_0-R,x_0+R)$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上能展开为 $x-x_0$ 的幂级数.

由幂级数的性质可知，如果函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上能展开为 $x-x_0$ 的幂级数，那么，$f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上任意阶可导. 此时有两个问题

1）展开式唯一吗？

2）展开式是什么？

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上能展开为 $x-x_0$ 的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

那么，$f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上任意阶可导，且其展开式是唯一的，

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\quad(n=0,1,2\cdots)$$

定义 2 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**泰勒级数**.

特别地，$x_0=0$ 处的泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

定理 2 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导，则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上收敛于 $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

中的余项.

几个常用的展开式

(1) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots;\qquad (-1<x<1)$

(2) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots\qquad (-\infty<x<+\infty)$

(3) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\qquad (-\infty<x<+\infty)$

(4) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\qquad (-\infty<x<+\infty)$

(5) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots\qquad (-1<x\le 1)$

(6) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

$(-1<x<1)$

函数展开为幂级数的两种方法

1）直接展开法

直接展开法分以下两步进行

第一步　求出 $f(x)$ 在 x_0 处的各阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 并写出 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

第二步　考查 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$ 是否成立.

2）间接展开法

根据函数展开为幂级数的唯一性，从某些已知函数的展开式出发，利用幂级数的性质（四则运算，逐项求导，逐项积分）及变量代换等方法，求得所给函数的展开式.

【注】直接展开法分两步，但这两步都比较困难，主要用于一开始推导一些基本展开式（如 $e^x,\sin x$）; 有了一些基本展开式后，主要用间接展开法.

常考题型与典型例题

常考题型

1. **求收敛半径、收敛区间及收敛域；**
2. **将函数展开为幂级数；**
3. **求幂级数（或数项级数）的和.**

一．求收敛半径、收敛区间及收敛域

【例 1】（2009 年 3）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为____________.

【$\frac{1}{e}$】

【例 2】（1995 年 1）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$__________.

【$\sqrt{3}$】

【例 3】（2000 年 1）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性.

【$[-3,3)$】

【例 4】(2008 年 1) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为____________.

【$(1,5]$】

【例 5】(2015 年 1)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的

(A) 收敛点，收敛点.　　　　(B) 收敛点，发散点.

(C) 发散点，收敛点.　　　　(D) 发散点，发散点.

二. 将函数展开为幂级数

【例 1】(2006 年 1) 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

【$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1},|x|<1$】

【例 2】(2007 年 3)将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

【$-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n,x\in(-1,3)$】

【例 3】将函数 $f(x)=\ln(x^2+x)$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数.

【$\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(1+\frac{1}{2^n})(x-1)^n,|x-1|<1$】

【例 4】将函数 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处展开为幂级数.

【$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{(x-\frac{\pi}{4})^n}{n!}$】

【例 5】将函数 $f(x)=\arctan x^2$ 展开成 x 的幂级数.

【$2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n+2}x^{4n+2},|x|<1$】

三. 级数求和

【例 1】求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛域及和函数.

【$(-1,1);\dfrac{x}{(1-x)^2}$】

【例 2】(2014 年 3)求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

【收敛域：$(-1,1)$. 和函数：$\dfrac{3-x}{(1-x)^3}$】

【例 3】求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$的收敛域及和函数.

【$[-1,1]; 1+(\dfrac{1}{x}-1)\ln(1-x)$】

【注】可利用结论：$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.

【例 4】(2010 年 1) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域及和函数.

【$[-1,1]; x\arctan x$】

第三节 傅 里 叶 级 数

考 试 内 容 概 要

（一）傅里叶系数与傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

为 $f(x)$ 的傅里叶系数，称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数. 记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

（二）收敛定理（狄利克雷）

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段单调, 除有限个第一类间断点外都是连续的, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛, 且收敛于

1） $f(x)$, 当 x 为 $f(x)$ 的连续点.

2） $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$, 当 x 为 $f(x)$ 的间断点.

3） $\dfrac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$, 当 $x=\pm\pi$

（三）周期为 2π 的函数的展开.

1）$[-\pi,\pi]$ 上展开.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

2） $[-\pi,\pi]$ 上奇偶函数的展开.

（1） $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

（2） $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$

3) 在 $[0,\pi]$ 上展为正弦或展为余弦.

(1) 展为正弦.

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

(2) 展为余弦.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$

（四）周期为 $2l$ 的函数的展开.

1) $[-l,l]$ 上展开.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

2） $[-l,l]$ 上奇偶函数的展开.

(1) $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

(2) $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$b_n = 0 \qquad\qquad n = 1,2\cdots$

3）在 $[0,l]$ 上展为正弦或展为余弦.

（1）展为正弦.

$a_n = 0, \qquad\qquad n = 0,1,2\cdots$

$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad\qquad n = 1,2\cdots$

（2）展为余弦.

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad\qquad n = 0,1,2\cdots$

$b_n = 0 \qquad\qquad n = 1,2\cdots$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

1.狄利克雷收敛定理

2.将函数展开为傅里叶级数；

一. 狄利克雷收敛定理

【例 1】（1988 年 1）设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶（Fourier）级数在 $x = 1$ 处收敛于 ________.　　　【$3/2$】

【例 2】（1989 年 1）设函数 $f(x) = x^2, 0 \le x < 1$，而

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx,\ n = 1,2,3,\cdots,$$

则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ 等于（　　）. 【B】

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）$-\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{1}{4}$　　（D）$\frac{1}{2}$

二. 将函数展开为傅里叶级数

【例 1】（1993 年 1）设函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则其中系数 b_3 的值为 __________. 【$\frac{2}{3}\pi$】

【例 2】（1991 年 1）将函数 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和. 【$\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2};\ \frac{\pi^2}{6}$】

【例 3】（1995 年 1）将 $f(x)=x-1\,(0\le x\le 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

【$-\dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\dfrac{\cos(2n-1)\pi x}{2}$】

第十一章　向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用

第一节　向 量 代 数

考 试 内 容 概 要

1．数量积

1）几何表示：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$.

2）代数表示：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

3）运算规律：

i）交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

ii）分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

4）几何应用：

i）求模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$

ii）求夹角：$\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

iii）判定两向量垂直：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

2. 向量积

1）几何表示　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$是一向量.

模：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha$.

方向：右手法则.

2）代数表示：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.

3）运算规律

i）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$

ii）分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

4）几何应用：

i）求同时垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的向量：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

ii）求以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形面积：$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

iii)判定两向量平行：$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.

3. 混合积：$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

1）代数表示：

$$(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

2）运算规律：

i）轮换对称性：$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{cab})$.

ii）交换变号：$(\boldsymbol{abc})=-(\boldsymbol{acb})$.

3）几何应用

i）$V_{平行六面体}=|(\boldsymbol{abc})|$.

ii)判定三向量共面：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面$\Leftrightarrow(\boldsymbol{abc})=0$.

常考题型与典型例题

常考题型

向量的运算

【例 1】(1995 年) 设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$, 则$[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=$ ________.

【解】 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$$=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$$

$$=2\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4$$

第二节　空间平面与直线

考 试 内 容 概 要

1．平面方程

1）　一般式：$Ax+By+Cz+D=0.$　　　　$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$.

2)　点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

3)　截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

2. 直线方程

1) 一般式：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

2) 对称式：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

3) 参数式: $x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt.$

3. 平面与直线的位置关系（平行、垂直、夹角）

关键：平面的法线向量，直线的方向向量。

4. 点到面的距离

点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cy+D=0$ 的距离.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

5. 点到直线距离

点 (x_0,y_0,z_0) 到直线 $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 的距离为

$$d=\frac{|(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)\times(l,m,n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

常考题型与典型例题

常考题型

建立平面和直线方程

【例 1】（1987 年 1） 与两直线 $\begin{cases}x=1,\\y=-1+t,\\z=2+t\end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程为__________.　　【$x-y+z=0$】

【注】 所求平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 和两直线的方向向量都垂直，故 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}$.

【例 2】（1990 年） 过点 $M(1,2,-1)$ 且）与直线

$$\begin{cases}x=-t+2,\\y=3t-4,\\z=t-1\end{cases}$$

垂直的平面方程为______________.　　【$x-3y-z+4=0$】

【例 3】（1991 年） 已知两条直线的方程是

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},\qquad L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$

则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是________________.　　【$x-3y+z+2=0$】

【注】 所求平面的法线向量 $\boldsymbol{n}=\{1,0,-1\}\times\{2,1,1\}=\{1,-3,1\}$.

【例 4】（1993 年） 设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为（C）.

（A） $\dfrac{\pi}{6}$ （B） $\dfrac{\pi}{4}$ （C） $\dfrac{\pi}{3}$ （D） $\dfrac{\pi}{2}$

【注】 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{1,-2,1\}$ 和 $\boldsymbol{s}_2=\{-1,-1,2\}$，

$\cos\theta=\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2/|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|=\dfrac{1}{2}$， $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

【例 5】（1995 年） 设有直线

$$L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$$

及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 L（C）.

（A） 平行于 π （B）在 π 上 （C）垂直于 π （D）与 π 斜交

【例 6】（1996 年） 设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为______________. 【$2x+2y-3z=0$】

【注】 所求平面的法线向量 $\boldsymbol{n} \perp \{4,-1,2\}$， $\boldsymbol{n} \perp \{6,-3,2\}$，取 $\boldsymbol{n} = \{2,2,-3\}$.

【例 7】(2006 年 1) 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d =$ ______.　　【$\sqrt{2}$】

第三节　曲面与空间曲线

考 试 内 容 概 要

1。曲面方程　　一般式　$F(x,y,z)=0$　或 $z=f(x,y)$

2. 空间曲线:

1) 参数式: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

2) 一般式: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

3。常见曲面

1）**旋转面**: 一条平面曲线绕平面上一条直线旋转;

设 L 是 yoz 平面上一条曲线，其方程是 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，则

（1） L 绕 y 轴旋转所得旋转面方程为　$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$

（2） L 绕 z 轴旋转所得旋转面方程为　$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$

2）**柱面**: 平行于定直线并沿定曲线 Γ 移动的直线 L 形成的轨迹;

（1）准线为 Γ： $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，母线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x,y)=0$；

（2）准线为 Γ： $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x,y,z)=0$ 和

$G(x,y,z)=0$ 联立消去 z 所得的二元方程　$H(x,y)=0.$

3）**二次曲面**

（1）椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$； 特别的：圆锥面 $x^2+y^2=z^2$.

（2）椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；特别的：球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$；

（3）单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

（4）双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

（5）椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$；特别的：旋转抛物面 $z=x^2+y^2$；

（6）双曲抛物面 （马鞍面） $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$；

4）空间曲线投影

曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，消去 z 得到关于 xoy 面的投影柱面 $H(x,y)=0$. 曲线 Γ 在 xoy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$.

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

建立柱面和旋转面方程

【例 1】求以曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+2z^2=1\\z=x^2+y^2\end{cases}$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面.

【解】 将 $z=x^2+y^2$ 代入 $x^2+y^2+2z^2=1$ 得

$x^2+y^2+2(x^2+y^2)^2=1$，即 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ 为所要求的柱面.

【例 2】求下列曲线绕指定的轴旋转产生的旋转面的方程

1） $\begin{cases}2x^2+y^2=1\\z=0\end{cases}$, 分别绕 x 轴和 y 轴旋转.

2） $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$，分别绕 y 轴和 z 轴旋转.

【解】 1）绕 x 轴旋转面方程：$2x^2 + y^2 + z^2 = 1$；

绕 y 旋转面方程：$2(x^2 + z^2) + y^2 = 1$.

2）绕 y 轴旋转面方程：$\sqrt{x^2 + z^2} = y^2$，即 $x^2 + z^2 = y^4$；

绕 z 旋转面方程：$z = y^2 + x^2$

【例 3】求曲线 $L:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2(a > 0) \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ 在 xoy 面和 xoz 面上的投影曲线方程.

【解】在 xoy 面上的投影为 $x^2 + y^2 = ax$，

在 xoz 面上的投影为 $z^2 + ax = a^2, (0 \le x \le a)$.

第四节　多元微分在几何上的应用

考 试 内 容 概 要

1. 曲面的切平面与法线

1） 曲面 $F(x, y, z) = 0$　　　　法向量：$\boldsymbol{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)$；

2） 曲面 $z = f(x, y)$　　　　法向量：$\boldsymbol{n} = (f'_x, f'_y, -1)$.

2. 曲线的切线与法平面

1) 曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = y(t) \end{cases}$，　　切向量：$\boldsymbol{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

2) 曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$，　　切向量：$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2}$

其中 $\boldsymbol{n}_1 = (F'_x, F'_y, F'_z)$，$\boldsymbol{n}_2 = (G'_x, G'_y, G'_z)$.

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

建立曲面的切平面和法线及曲线的切线和法平面的方程

【例 1】(2013 年) 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为

(A) $x-y+z=-2.$　　(B) $x+y+z=0.$

(C) $x-2y+z=-3.$　　(D) $x-y-z=0.$　　【A】

【例 2】(1993 年) 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕轴 y 旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为______________.　　【$(0,\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}})$】

【例 3】(2003 年) 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是______________.　　【$2x+4y-z=5$】

【例 4】求曲线 $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t, z=4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法平面方程.

切线方程为 $\dfrac{x+1-\frac{\pi}{2}}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

法平面方程为 $x+y+\sqrt{2}z-\dfrac{\pi}{2}-4=0$.

【例 5】求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程.

切线方程为 $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{3}$.

法平面方程为 $x-z=0$.

第五节　方向导数与梯度

考 试 内 容 概 要

1. 方向导数:

1) 定义: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$.

2) 计算: 若 $z=f(x,y)$ 可微, 则 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$.

2. 梯度:

设函数 $z=f(x,y)$ 有连续一阶偏导数,

$$\mathbf{grad}z=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

【注】梯度 $\mathbf{grad}z$ 是一个向量，它的方向是函数在这点方向导数最大的方向，它的模等于方向导数的最大值.

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

方向导数和梯度的计算

【例 1】(1996 年) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为 ______.　　【$\frac{1}{2}$】

【例 2】(2012 年) $\mathbf{grad}(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=$ ______.　　【(1, 1, 1)】

【例 3】 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点, 使函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿 $\boldsymbol{l}=(1,-1,0)$ 方向的方向导数最大.　　【$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$】

第十二章 多元积分学及其应用

第一节 三重积分

考 试 内 容 概 要

三重积分

1. 定义 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_{k,}\eta_k,\xi_k)\Delta v_k$.

2. 性质　与二重积分类似.

3. 计算

1）直角坐标

（1）先一后二（先单后重）

设平行于 z 且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 最多两个交点. Ω 在 xoy 面上的投影域为 D_{xy}（如右图），则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \iint\limits_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

（2）先二后一（先重后单）

设空间区域 $\Omega = \{(x,y,z)|(x,y)\in D_z, c_1 \le z \le c_2\}$,

其中 D_z 是垂直于 z 轴的平面截闭区域 Ω 所得的平面闭区域（如右图），则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

2）柱坐标

柱坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \le \rho < +\infty, \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

体积微元　$\mathrm{d}v = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$$

3）球坐标　　$\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

球坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ z = r\cos\varphi, & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

体积微元　$\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2\sin\varphi d\rho d\theta dz$$

4）利用奇偶性

若积分域 Ω 关于 xoy 坐标面对称，$f(x,y,z)$ 关于 z 有奇偶性，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \begin{cases} 2\iiint_{D_{z\ge 0}} f(x,y,z)\mathrm{d}v & f(x,y,z)\text{关于}z\text{是偶函数.} \\ 0 & f(x,y,z)\text{关于}z\text{是奇函数.} \end{cases}$$

【注】若积分域关于 xoz 或 yoz 坐标面对称有相应结论.

5）利用变量的对称性.

常考题型与典型例题

常考题型

三重积分计算

【例 1】（1988 年）设有空间区域

$\Omega_1 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0;$　及　$\Omega_2 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0,$

则（C）.

（A）$\iiint_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} x\,\mathrm{d}v$　　（B）$\iiint_{\Omega_1} y\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} y\,\mathrm{d}v$

（C）$\iiint_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}v$　　（D）$\iiint_{\Omega_1} xyz\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} xyz\,\mathrm{d}v$

【例 2】(2009 年) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$________.

【$\frac{4}{15}\pi$】

【例 3】(2015 年) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面围成的空间区域，则

$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$____________. 【$\frac{1}{4}$】

【例 4】(1989 年) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域. 【$\frac{\pi}{8}$】

第二节 曲 线 积 分

考 试 内 容 概 要

（一）对弧长的线积分（第一类线积分）

1．定义 $\int_L f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$

2．性质 $\int_{L(\overset{\frown}{AB})} f(x,y)ds=\int_{L(\overset{\frown}{BA})} f(x,y)ds$ （与积分路径方向无关）

3．计算(平面)

1）直接法：

(1)若 $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ ，$\alpha\le t\le\beta$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t\ .$$

(2) 若 $L:y=y(x)$ ，$a\le x\le b$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

(3) 若 $L:\rho=\rho(\theta)$ ，$\alpha\le\theta\le\beta$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\theta$$

2）利用奇偶性.

(1) 若积分曲线 L 关于 y 轴对称，则.

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{L_{x\ge0}} f(x,y)\mathrm{d}s, & 当f(x,y)关于x为偶函数.\\ 0, & 当f(x,y)关于x为奇函数.\end{cases}$$

(2)若积分曲线 L 关于 x 轴对称，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{L_{y\ge0}} f(x,y)\mathrm{d}s, & 当f(x,y)关于y为偶函数.\\ 0, & 当f(x,y)关于y为奇函数.\end{cases}$$

3）利用对称性

若积分曲线关于直线 $y=x$ 对称，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_L f(y,x)\mathrm{d}s$

特别的 $\int_L f(x)ds=\int_L f(y)ds$

对空间线积分 $\int_L f(x,y,z)ds$，通常化为定积分计算，即

若曲线 L 的方程为：$x=x(t),y=y(t),z=z(t)\quad(\alpha\le t\le\beta)$

则 $\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$

（二）对坐标的线积分(第二类线积分)

1．定义 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$

2．性质 $\int_{L(\overset{\frown}{AB})}Pdx+Qdy=-\int_{L(\overset{\frown}{BA})}Pdx+Qdy$ （与积分路径方向有关）

3．计算方法(平面)

1) 直接法 设有光滑曲线 $L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$，其起点和终点分别对应参数 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$，$P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上连续，则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

2) 格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的的曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

其中 L 为 D 取正向的边界曲线.

3) 补线用格林公式

4) 利用线积分与路径无关

（1）线积分与路径无关的判定

定理 设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在单连通域 D 上有一阶连续偏导数，则以下四条等价：

1）线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关；

2）$\oint_L Pdx+Qdy=0,$ 其中 L 为 D 中任一分段光滑闭曲线；

3）$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\qquad\forall(x,y)\in D;$

4）$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF(x,y).$

（2）计算:

a） 改换路径计算

一般是沿平行于坐标轴的直线积分.

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1)dx+\int_{y_1}^{y_2} Q(x_2,y)dy$$

或 $$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{y_1}^{y_2} Q(x_1,y)dy+\int_{x_1}^{x_2} Q(x,y_2)dx$$

b） 利用原函数计算

设 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}F(x,y)$，即 $F(x,y)$ 为 $Pdx+Qdy$ 的原函数，则

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)$$

求原函数方法:①偏积分;②凑微分.

4. 两类线积分的联系 $\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint\limits_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s$.

5. 计算方法(空间)

1) 直接法

设分段光滑的曲线 L 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ 给出，其起点和终点分别对应参数 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$， P,Q,R 在 L 上连续，则

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt$$

2) 斯托克斯公式

设 L 为空间分段光滑的有向闭曲线，$\sum$ 是以 L 为边界的分片光滑曲面，L 的方向与 $\sum$ 的法方向符合右手法则，函数 P,Q,R 在 $\sum$ 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)dz$$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} dS$$

$$=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

曲线积分计算

一．第一类线积分的计算

【例 1】（1989 年）设平面曲线 L 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分

$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$________.　　【$\pi$】

【例 2】（1998 年）设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则

$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$__________.　　【$12a$】

【例 3】（2009 年）已知曲线 $L: y=x^2\ (0\le x\le\sqrt{2})$，则 $\int_L x\,\mathrm{d}s=$_____.　　【$\dfrac{13}{6}$】

二．第二类线积分的计算

【例 1】（2004 年）设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分

$\int_L x\,\mathrm{d}y-2y\,\mathrm{d}x$ 的值为_______.　　【$\dfrac{2}{3}\pi$】

【例 2】(2010 年)已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\,(x\in[-1,1])$,起点是 $(-1,0)$,终点为 $(1,0)$,则曲线积分 $\int_L xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=$ ______.　　【0】

【例 3】(1999 年)求 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\,\mathrm{d}y$,其中 a,b 为正的常数,L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.　【$(\frac{\pi}{2}+2)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$】

【例 4】(2008 年)计算曲线积分 $\int_L\sin 2x\,\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.　　【$-\frac{\pi^2}{2}$】

【例 5】（2011 年）设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xz\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$ ________.　　【π】

第三节　曲 面 积 分

考 试 内 容 概 要

（一）对面积的面积分（第一类面积分）

1．定义　$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2．性质　$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{-\Sigma} f(x,y,z)dS$　（与积分曲面的方向无关）

3．计算

1. 直接法:

设曲面 $\Sigma: z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

若曲面由方程 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$ 给出，也可类似地把对面积的面积分化为相应的二重积分.

2. 利用奇偶性

若曲面 Σ 关于 xoy 面对称, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_{z\geq 0}} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & \text{当} f(x,y,z)\text{关于} z \text{为偶函数;}\\ 0, & \text{当} f(x,y,z)\text{关于} z \text{为奇函数.}\end{cases}$$

3．利用对称性

（二）对坐标的面积分（第二类面积分）

1．定义 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$

2．性质 $\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = -\iint_{-\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$（与积分曲面的方向有关）

3．计算

1）直接法:

（1）设有向曲面 $\sum : z = z(x,y),\quad (x,y)\in D_{xy}$，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}xdy$$

若有向曲面 $\sum$ 的法线向量与 z 轴正向夹角为锐角，即曲面的上侧，上式中取正号，否则取负号;

（2）设有向曲面 $\sum : x = x(y,z),\quad (y,z)\in D_{yz}$，则

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}ydz$$

若有向曲面 $\sum$ 的法线向量与 x 轴正向夹角为锐角，即曲面的前侧，上式中取正号，否则取负号;

（3）设有向曲面 $\sum : y = y(z,x),\quad (z,x)\in D_{zx}$，则

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}zdx$$

若有向曲面 $\sum$ 的法线向量与 y 轴正向夹角为锐角，即曲面的右侧，上式中取正号，否则取负号.

2)高斯公式:

设空间闭区域 Ω 由分片光滑闭曲面 $\sum$ 所围成，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oiint_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

3）补面用高斯公式.

2. 两类面积分的联系

$$\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

曲面积分计算

一．第一类曲面积分的计算

【例 1】(2000 年) 设 $S:x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有（ ）.

（A） $\iint_{S}x\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}x\,\mathrm{d}S$　　（B） $\iint_{S}y\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}x\,\mathrm{d}S$

（C） $\iint_{S}z\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}x\,\mathrm{d}S$　　（D） $\iint_{S}xyz\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}xyz\,\mathrm{d}S$

【例 2】(2012 年) 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$，则 $\iint_{\Sigma}y^2dS=$________.

【$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$】

【例 3】(1995 年) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分.　　【$\dfrac{32}{9}\sqrt{2}$】

二. 第二类曲面积分的计算

【例 1】(1988 年)设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算曲面积分

$I=\oiint\limits_{\Sigma} x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$ 【$\frac{12}{5}\pi$】

【例 2】(2005 年)设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\oiint xdydz+ydzdx+zdxdy=$ ______.

【$(2-\sqrt{2})\pi R^3$】

【例 3】(2008 年)设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz+xdzdx+x^2dxdy$

$=$ ________. 【4π】

【例 4】(2014 年)设 $\sum$ 是曲面 $z=x^2+y^2(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$ 【-4π】

第二节 多元积分应用

考 试 内 容 概 要

多元积分应用一览表

所求量 \ 几何形体	平面板	空间体	曲线	曲面
几何度量	面积：$S=\iint\limits_D d\sigma$	体积：$V=\iiint\limits_\Omega dV$	弧长 $L=\int_C ds$	面积 $S=\iint\limits_\Sigma dS$
质　　量	$m=\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma$	$m=\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)dV$	$m=\int_C f(x,y,z)ds$	$m=\iint\limits_\Sigma \rho(x,y,z)dS$
质　　心	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma}$	$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)dV}$	$\bar{x}=\dfrac{\int_C x\rho(x,y,z)ds}{\int_C \rho(x,y,z)ds}$	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_\Sigma x\rho(x,y,z)dS}{\iint\limits_\Sigma \rho(x,y,z)dS}$
转动惯量	$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)d\sigma$	$I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)$ $\rho(x,y,z)dV$	$I_x=\int_C (y^2+z^2)$ $\rho(x,y,z)ds$	$I_x=\iint\limits_\Sigma (y^2+z^2)$ $\rho(x,y,z)dS$

1. 变力作功：　　力 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$.

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy+Rdz.$$

2. 通量：　　向量场：$\boldsymbol{U}(x,y,z)=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$.

$$\text{通量：}\Phi=\iint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

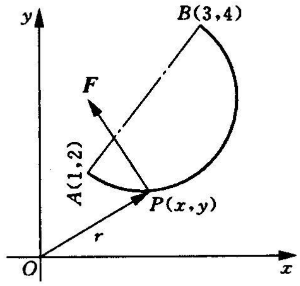
常考题型

形心和变力作功的计算

【例 1】(2010 年)设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $z=$ ________.

【$\dfrac{2}{3}$】

【例 2】（1990 年）质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受到变力 $\boldsymbol{F}$ 作用（见右图），$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于直线段 OP，且与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$.求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所作的功.　　　　【$2(\pi-1)$】



第三节 场论初步

考 试 内 容 概 要

1. 梯度：

设 $u(x,y,z)$ 具有一阶连续偏导数，则

$$\mathbf{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

2. 散度：

设有向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$，其中 P,Q,R 均具有一阶连续偏导数，则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

3. 旋度：

设有向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$，其中 P,Q,R 均具有一阶连续偏导数，则

$$\mathbf{rotA}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

梯度、散度、旋度的计算

【例 1】（1989 年）向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\mathbf{u}=$ ________.　　　　【2】

【例 2】（1993 年）设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=$ ________.

【$\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$】