

# 第二类曲面积分的计算方法

赵海林 张纬纬

**摘要** 利用定义法, 参数法, 单一坐标平面投影法, 分项投影法, 高斯公式, Stokes 公式, 积分区间对称性, 向量计算形式以及利用两类曲面积分之间的联系等方法进行求解.

**关键词** 第二类曲面积分 定义法 参数法 投影法 高斯公式 Stokes 公式 向量计算形式

## 1 引言

曲面积分是多元函数积分学的重要组成部分, 在曲面积分的计算中, 综合运用着一元积分与重积分计算思路、方法与技巧, 在第二型曲面积分的学习过程中, 必须在理解概念和性质的同时, 掌握求第二型曲面积分的方法和技巧. 由于第二型曲面积分的概念抽象费解, 计算方法灵活多变, 而且涉及的数学知识面广, 掌握起来有一定的难度, 而且是数学分析学习中的难点, 许多学生在求解这一类题型时感到相当困难, 因此本文给出了第二型曲面积分计算的几种方法, 并举例说明了这几种方法的应用, 力图使学生能计算第二型曲面积分, 并能进一步了解第一型曲面积分与第二型曲面积分, 曲面积分、曲线积分与重积分之间的密切联系, 让各种计算方法更加直观的呈现在读者面前, 体现了第二型曲面积分计算方法的应用.

## 2 预备知识

### 2.1 第二型曲面积分的概念

#### 2.1.1 流量问题(物理背景)

设稳定流动的不可压缩流体(假定密度为1)的速度为

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

$\Sigma$  是一光滑的有向曲面, 求单位时间内从曲面  $\Sigma$  一侧流向另一侧的流量  $\Phi$ .

若  $\Sigma$  为平面上面积为  $S$  的区域, 而流速  $\vec{v}$  是常向量,  $\vec{n}$  指定侧的单位法向量

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

则

$$\Phi = S |\vec{v}| \cos \theta = S \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}.$$

若  $\Sigma$  为曲面, 流速  $\vec{v}$  不是常向量, 则用下面的方法计算流量  $\Phi$ .

#### (1) 分割

将  $\Sigma$  任意分成小块  $\Delta S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\Delta S_i$  同时代表其面积.

(2) 近似

$\forall M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta S_i$ , 以点  $M_i$  处的流速  $\vec{v}_i = \vec{v}(M_i)$  和单位法向量  $\vec{n}_i$  分别代替  $\Delta S_i$  上其他各点处的流速和单位法向量, 得到流过  $\Delta S_i$  指定侧的流量的近似值:

$$\Delta \Phi \approx \Delta S_i \cdot \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i (i = 1, 2, \dots, n).$$

(3) 求和

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta S_i$$

(4) 取极限

$$\text{设 } \|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta S_i \text{ 的直径}\}, \text{ 则 } \Phi = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta S_i.$$

这种与曲面的侧有关的和式极限就是所要讨论的第二型曲面积分.

## 2.1.2 定义

设  $P, Q, R$  为定义在双侧曲面  $S$  上的函数, 在  $S$  所指定的一侧作分割  $T$ , 它把  $S$  分为  $n$  个小曲面  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , 分割  $T$  的细度  $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta S_i \text{ 的径}\}$ ,  $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta S_i \text{ 的直径}\}$ ,  $\Delta S_{i_{yz}}, \Delta S_{i_{zx}}, \Delta S_{i_{xy}}$ , 分别表示  $S_i$  在三个坐标面上的投影区域的面积, 他们的符号由  $S_i$  的方向来确定. 若  $S_i$  的法线正向与  $z$  轴正向成锐角时,  $S_i$  在  $xoy$  平面的投影区域的面积  $\Delta S_{i_{xy}}$  为正. 反之, 若  $S_i$  法线正向与  $z$  轴正向成钝角时, 他在平面的投影区域  $xoy$  的面积  $\Delta S_{i_{xy}}$  为负. 在各个小曲面  $S_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ .

$$\text{若 } \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{yz}} + \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{zx}} + \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{xy}} \text{ 存在,}$$

且与曲面  $S$  的分割  $T$  和  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  在  $S_i$  上的取法无关, 则称此极限为函数  $P, Q, R$ .

在曲面  $S$  所指定的一侧上的第二型曲面积分, 记作

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$$

或者

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + \iint_S Q(x, y, z) dzdx + \iint_S R(x, y, z) dxdy .$$

据此定义, 某流体以速度在单位时间内从曲面 $S$ 的负侧流向正侧的总流量为

$v = (P, Q, R)$ 在单位时间内从曲面 $S$ 的负侧流向正侧的总流量为

$$\Phi = \iint_S P(x, y, z) dxdz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$$

又若, 空间的磁场强度为 $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , 则通过曲面 $S$ 的磁通量

$$H = \iint_S P(x, y, z) dxdz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$$

若以 $-S$ 表示曲面 $S$ 的另一侧, 由定义易得

$$\begin{aligned} & \iint_{-S} P(x, y, z) dxdz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ &= -\iint_S P(x, y, z) dxdz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \end{aligned}$$

## 2. 2 第二型曲面积分的性质

**性质 1** (方向性) 设向量值函数 $\vec{v}$ 在定向的光滑曲面 $S$ 上的第二型曲面积分

存在. 记 $-S$ 为与 $S$ 取相反侧的曲面, 则 $\vec{v}$ 在 $-S$ 上的第二型曲面积分也存在, 且成立

$$\iint_{-S} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS . \text{ 注意这个等式两边的 } \vec{n} \text{ 是方向相反的.}$$

**性质 2** (线性性) 若 $\iint_S P_i dydz + Q_i dzdx + R_i dxdy$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) 存在, 则有

$$\iint_S \left( \sum_{i=1}^k c_i P_i \right) dydz + \left( \sum_{i=1}^k c_i Q_i \right) dzdx + \left( \sum_{i=1}^k c_i R_i \right) dxdy = \sum_{i=1}^k c_i \iint_S P_i dydz + Q_i dzdx + R_i dxdy ,$$

其中 $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) 是常数.

**性质 3** (曲面可加性) 若曲面 $S$ 是由两两无公共内点的曲面块 $S_1, S_2, \dots, S_k$ 所组成,

且

$$\iint_{S_i} P(x, y, z) dxdz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

存在, 则有

$$\iint_S P(x, y, z) dx dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

$$= \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} P(x, y, z) dx dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

### 2.3 第二型曲面积分的数量表达式

设  $\vec{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$

$\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ , 则

$$\vec{A}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS = (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

其中  $dS$  是曲面  $S$  的面积元素.

记  $\vec{dS} = \vec{n} \cdot dS = \{\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS\} = \{dy dz, dz dx, dx dy\}$ , 称  $dS$  为曲面  $S$  的面积微元向量. 则

$$\vec{A} \cdot \vec{n} dS = \vec{A} \cdot d\vec{S} = P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

从而

$$\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

即  $\iint_S \vec{A}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ ,  $dy dz$  是  $dS$  在  $yo z$  面上的投影;

$dz dx$  是  $dS$  在  $zox$  面上的投影;  $dx dy$  是  $dS$  在  $xoy$  面上的投影. 他们的取值可正、

可负、也可为零. 如当  $\cos \alpha < 0$  时,  $dx dy$  取符号.

特殊形式:

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz \text{ 称为 } P \text{ 对坐标 } y, z \text{ 的曲面积分;}$$

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx \text{ 称为 } Q \text{ 对坐标 } z, x \text{ 的曲面积分;}$$

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy \text{ 称为 } R \text{ 对坐标 } x, y \text{ 的曲面积分.}$$

### 2.4 介绍两类曲面积分之间的联系

与曲线积分一样, 当曲面的侧确定之后, 可以建立两种类型曲面积分的联系. 设  $S$  为光滑曲面, 并以上侧为正侧,  $R$  为  $S$  上的连续函数, 曲面积分在  $S$  的正侧进行. 因有

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{xy}} \quad (1)$$

由曲面面积公式  $\Delta S_i = \iint_{S_{i_{xy}}} \frac{1}{\cos \gamma} dx dy$ ，其中  $\gamma$  是曲面  $S_i$  的法线方向与  $z$  轴正向

的交角，它是定义在  $S_{i_{xy}}$  上的函数. 因为积分沿曲面正侧进行，所以  $\gamma$  是锐角. 又由  $S$

是光滑的，所以  $\cos \gamma$  在闭区域  $S_{i_{xy}}$  上连续. 应用中值定理，在  $S_{i_{xy}}$  内必存在一点，使

这点的法线方向与  $z$  轴正向的夹角  $\gamma_i^*$  满足等式  $\Delta S_i = \frac{1}{\cos \gamma_i^*} \Delta S_{i_{xy}}$  或

$$\Delta S_{i_{xy}} = \cos \gamma_i^* \cdot \Delta S_i.$$

于是  $R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{xy}} = R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i^* \Delta S_i$ .  $n$  个部分相加后得

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{xy}} = \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i^* \Delta S_i \quad (2)$$

现在以  $\cos \gamma_i$  表示曲面  $S_i$  在点  $(x_i, y_i, z_i)$  的法线方向与  $z$  轴正向夹角的余弦，则由

$\cos \gamma$  的连续性，可推得当  $\|T\| \rightarrow 0$  时，(2) 式右端极限存在. 因此由 (1) 式得到

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \iint_S Q(x, y, z) \cos \beta dS \quad (3)$$

这里注意当改变曲面的侧向时，左边积分改变符号，右边积分中角  $\gamma$  改为  $\gamma \pm \pi$ . 因而  $\cos \gamma$  也改变符号，所以右边积分也相应改变了符号.

同理可证：

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz &= \iint_S P(x, y, z) \cos \alpha dS \\ \iint_S Q(x, y, z) dz dx &= \iint_S Q(x, y, z) \cos \beta dS \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\alpha, \beta$  分别是  $S$  上的法线方向与  $x$  轴正向和与  $y$  轴正向的夹角. 一般地有

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dx dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \\ &= \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS \end{aligned} \quad (5)$$

这样在确定余弦函数  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  之后，由 (3), (4), (5) 式，

便建立了两种不同类型曲面积分的联系.

### 3 介绍第二型曲面积分的多种计算方法

在数学分析课程中, 有关曲面积分, 尤其是第二型曲面积分的计算是一个重点、也是一个难点问题, 学生在学习过程中往往对这一问题感到束手无策、无从下手. 这一方面是由于曲面积分计算本身的复杂性, 它既要考虑到曲面的形状及其投影区域, 又要注意到曲面的侧; 另一方面, 也表明学生对这一计算问题缺乏必要而又行之有效的办法. 第二型曲面积分常用的计算方法主要有定义法, 参数法, 单一坐标平面投影法, 分项投影法, 利用高斯公式求解, 利用 *stokes* 公式求解, 利用积分区间对称性, 向量法以及利用两类曲面积分之间的联系等方法进行求解.

#### 3.1 直接利用定义法进行计算

若  $R(x, y, z)$  在光滑有向曲面  $S: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$  上连续, 则

$\iint_S R(x, y, z) dx dy$  存在, 且有计算公式:

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy$$

其中  $D_{xy}$  表示  $S$  在  $xoy$  面上的投影区域, 当曲面取上侧时公式 (1) 的右端取 “+” 号, 取下侧时取 “-” 号. 这一公式表明, 计算曲面积分  $\iint_S R(x, y, z) dx dy$  时, 只要把其中变量  $z$  换为表示  $\Sigma$  的函数  $z = z(x, y)$ , 然后  $D_{xy}$  在  $S$  的投影区域上计算二重积分, 并考虑到符号的选取即可, 这一过程可总结成口诀: “一代二投三定向”.

类似地, 如果曲面  $\Sigma$  的方程  $y = y(z, x)$ , 则

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx$$

如果曲面  $\Sigma$  的方程为  $x = x(y, z)$ , 则

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz$$

**例 1** 计算积分:

$$\iint_S xyz dx dy$$

其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  在第一、八卦限的部分, 取球面外侧. (如图 1)

**解** 设  $S = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , 曲面在第一、八卦限部分的方程分别为:

$$\Sigma_1: z_1 = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \Sigma_2: z_2 = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

它们在  $xoy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  都是单位圆在第一象限的部分.

$$\begin{aligned} \therefore \iint_S xyz dx dy &= \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy + \iint_{\Sigma_2} xyz dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - \iint_{D_{xy}} (-xy \sqrt{1-x^2-y^2}) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 \cos \theta \sin \theta \sqrt{1-r^2} dr \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

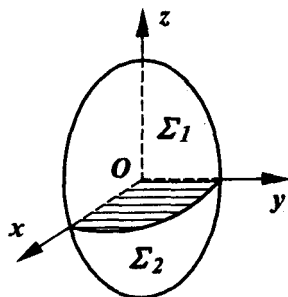


图1

计算第二型曲面积分时, 千万不能与二重积分等同或混淆, 第二型曲面积分是按一定规则化为投影区域上的二重积分进行计算的, 所以在计算过程中一定要牢记口诀: “一代二投三定向”. 请看下例:

**例2** 计算:

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

其中曲面  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  限于  $x^2 + y^2 - x \leq 0$ ,  $z \geq 0$  内的部分外侧 (如图2).

**解** 对于  $\iint_S x^2 dy dz$ , 要将  $S$  投影到  $yo z$  面上, 且  $S$  方程表示

为  $x = \sqrt{1-y^2-z^2}$ , 取前侧, 由  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 - x = 0$ , 消去  $x$  得

$y = \pm z\sqrt{1-z^2}$ , 因此投影区域  $D_{yz}$ :  $-z\sqrt{1-z^2} \leq y \leq z\sqrt{1-z^2}$ , 于是

$$\begin{aligned} & \iint_S x^2 dydz \\ &= \iint_{D_{yz}} (\sqrt{1-y^2-z^2})^2 dydz \\ &= 2 \int_0^1 dz \int_0^{z\sqrt{1-z^2}} (1-y^2-z^2) dy \\ &= 2 \int_0^1 [z(1-z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} z^3 (1-z^2)^{\frac{3}{2}}] dz \\ &= \frac{38}{105} \end{aligned}$$

计算  $\iint_S y^2 dzdx$ , 要将  $S$  投影到  $zox$  面上, 此时  $S$  方程表示为

$y = \pm\sqrt{1-x^2-z^2}$  (不是单值的), 再把  $S$  分为左片 (即  $y < 0$  的部分) 且取左侧和右片

(即  $y > 0$  的部分) 且取右侧,  $S$  在  $zox$  面上投影域为  $D_{zx}$ :  $\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$  (注意投影区域不是一条曲线), 因此

$$\begin{aligned} & \iint_S y^2 dzdx \\ &= \iint_{S_{左}} y^2 dzdx \\ &= \iint_{S_{右}} y^2 dzdx \\ &= \iint_{D_{zx}} -(\sqrt{1-x^2-z^2})^2 dzdx + \iint_{D_{zx}} (\sqrt{1-x^2-z^2})^2 dzdx \\ &= 0 \end{aligned}$$

对于  $\iint_S z^2 dxdy$ , 要将  $S$  投影到  $xoy$  面上, 投影域为  $D_{xy}$ :  $x^2 + y^2 \leq 0$ , 此时  $S$  方

程应为  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ , 且取上侧, 于是  $\iint_S z^2 dxdy = \iint_{D_{xy}} (\sqrt{1-x^2-y^2})^2 dxdy =$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} (1-r^2) r dr = \frac{5}{32} \pi, \text{ 故 } I = \frac{38}{105} + \frac{5}{32} \pi.$$



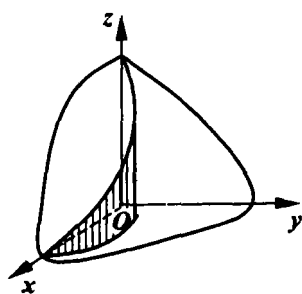


图 2

### 3.2 利用参数方程的计算方法

如果光滑曲面  $S$  由参数方程给出：

$$S: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

若在  $D$  上各点他们的函数行列式  $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  不同时为零，则分别有

$$\iint_S P dydz = \pm \iint_D P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv \quad (1)$$

$$\iint_S Q dzdx = \pm \iint_D Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv \quad (2)$$

$$\iint_S R dydz = \pm \iint_D R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \quad (3)$$

注 (1),(2),(3) 三式中的正负号分别对应曲面  $S$  的两个侧，特别当  $uv$  平面的正方向对应于曲面  $S$  所选定的正向一侧时，取正号，否则取负号。

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ &= \pm \iint_D P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv \\ & \quad \pm \iint_D Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv \\ & \quad \pm \iint_D R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \end{aligned}$$

(4)

例如若  $S$  为:  $z=z(x, y), (x, y) \in D$ , 则  $S$  可以看成参数为  $x, y$  的参数方程确定的曲面,

$$\text{则由于 } \frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} = -z_x, \frac{\partial(z, x)}{\partial(x, y)} = -z_y, \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1,$$

所以

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ &= \pm \iint_D P(x, y, z(x, y))(-z_x) + Q(x, y, z(x, y))(-z_y) + R(x, y, z(x, y)) dxdy \end{aligned}$$

由此可见, 只要确定一次符号且不需要向其它坐标平面进行投影, 从而比我们常用的方法更简便.

下面举例说明:

**例 1** 计算

$$\iint_S x^3 dydz,$$

其中  $S$  为椭圆面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的上半部分并选取外侧.

**解** 把曲面表示为参量方程:

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, y = b \sin \varphi \sin \theta, z = c \cos \varphi$$

$$(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

由(1)式有

$$\iint_S x^3 dydz = \pm \iint_{D_{\varphi\theta}} a^3 \sin^3 \varphi \cos^3 \theta \cdot J d\varphi d\theta,$$

其中

$$J = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} b \cos \varphi \sin \theta & b \sin \varphi \cos \theta \\ -c \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = bc \sin^2 \varphi \cos \theta,$$

积分是在  $S$  的正侧进行. 由上述的注, (4) 式右端正号, 即

$$\begin{aligned} & \iint_S x^3 dydz \\ &= \iint_{D_{\varphi\theta}} a^3 \sin^3 \varphi \cos^3 \theta \cdot bc \sin^2 \varphi \cos \theta d\varphi d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a^3 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta \\
 &= \frac{2}{5} \pi a^3 bc
 \end{aligned}$$

例 2 计算积分

$$\oiint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$S$  为曲面  $1 - \frac{z}{5} = \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9}$  的上侧.

解 取  $u = \varphi, v = z$ , 则  $x = \sqrt{R^2 - z^2} \cos \varphi$ ,  $y = \sqrt{R^2 - z^2} \sin \varphi$ ,  $z = z$

取  $S^*$  为曲面  $1 - \frac{z}{5} = \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9}$  的下侧. 则

$$\begin{aligned}
 \oiint_{S+S^*} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-R}^R \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{R^3} \cos \varphi & \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{R^3} \sin \varphi & \frac{z}{R^3} \\ -\sqrt{R^2 - z^2} \sin \varphi & \sqrt{R^2 - z^2} \cos \varphi & 0 \\ \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \cos \varphi & \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \sin \varphi & 1 \end{vmatrix} dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-R}^R \frac{1}{R} dz. \\
 &= 4\pi.
 \end{aligned}$$

从而

$$\oiint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi.$$

例 3 计算

$$\iint_S yzdzdx$$

其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的上半部分并取外侧为正向.

解 1  $S$  可表示为  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$   $(x, y) \in D$

其中

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

由于积分按  $S$  上侧进行, 且  $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ , 故 (4) 式应取正号,

而

$$B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_S yz dz dx &= \iint_D y \sqrt{1-x^2-y^2} \left[ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right] dx dy \\ &= \iint_D y^2 dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 \sin^2 \theta dr \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

**解 2** 由于  $S$  可表示为  $x = \sin \varphi \cos \theta, y = \sin \varphi \sin \theta, z = \cos \theta$ ,

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$J = \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} -\sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \end{vmatrix} = \sin^2 \varphi \sin \theta$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_S yz dz dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi \cdot J \cdot d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

本例计算虽然简单, 但不难看出用公式 (4) 计算时不必对  $S$  分划并讨论符号代之以在  $zOx$  平面上二重积分.

**例 4** 计算

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$$

其中,  $S$  是球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ , 且设积分是沿球面外侧.

**解**  $S$  可表示为

$$x-a=R \sin \varphi \cos \theta, y-b=R \sin \varphi \sin \theta, z-c=R \cos \varphi,$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

由于在第一象限积分按上侧积分, 而  $J = R^2 \sin \varphi \cos \varphi > 0$ , 故 (4) 应取正号.

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_S z^2 dx dy \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} (c + R \cos \varphi)^2 \cdot J \cdot d\theta \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi (c^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2cR \cos^2 \varphi \sin \varphi + R^2 \sin \varphi \cos^3 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{8\pi R^3 c}{3} \end{aligned}$$

因为

$$\iint_S x^2 dy dz = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} (a + R \sin \varphi \cos \theta)^2 R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta d\theta = \frac{8\pi R^3 a}{3}$$

$$\text{类似可求得 } I_3 = \iint_S y^2 dz dx = \frac{8\pi R^3 b}{3}, \text{ 所以 } I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c).$$

### 3.3 单一坐标平面投影法

设光滑曲面  $S: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$  ( $D_{xy}$  是  $S$  在  $xoy$  平面上的投影区域),

函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在  $S$  上连续,  $z = z(x, y)$  在  $D_{xy}$  上具有一阶连续偏导数, 则

$$\begin{aligned} &\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \\ &= \pm \iint_{D_{xy}} [P(x, y, z)(-z_x) + Q(x, y, z)(-z_y) + R(x, y, z)] dx dy, \end{aligned}$$

当  $S$  取上侧时, 上式右边取正号; 当  $S$  取下侧时, 上式右边取负号.

若  $S$  的方程为  $x = x(y, z), y = y(z, x)$ , 也有类似的公式:

$$\begin{aligned} &\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \\ &= \pm \iint_{D_{yz}} [P(x, y, z) + Q(x, y, z)(-x_y) + R(x, y, z)(-x_z)] dy dz; \end{aligned}$$

当  $S$  取前侧时, 上式右边取号; 当  $S$  取后侧时, 上式右边取负号.

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ &= \pm \iint_{D_{zx}} [P(x, y, z)(-y_x) + Q(x, y, z) + R(x, y, z)(-y_z)] dzdx. \end{aligned}$$

当  $S$  取右侧时, 上式右边取正号; 当  $S$  取左侧时, 上式右边取负号.

**例 1** 计算积分

$$\iint_S (y-z) dydz + (z-x) dzdx + (x-y) dxdy,$$

其中  $S$  为圆锥面  $x^2 + z^2 = y^2$  介于  $0 \leq y \leq h, z \geq 0$  部分的上侧.

**解**  $S$  的方程为  $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ , 取左侧, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_S (y-z)(-y_x) + (z-x) + (x-y)(-y_z) dzdx \\ &= \iint_S \left[ \frac{-x(y-z) - z(x-y)}{\sqrt{x^2 + z^2}} + (z-x) \right] dzdx \\ &= \iint_S 2(z-x) dzdx \\ &= -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^h r \cos \theta \cdot r dr \\ &= -\frac{4}{3} h^3. \end{aligned}$$

**例 2** 求

$$\iint_S (y-z) dydz + (z-x) dzdx + (x-y) dxdy,$$

其中  $S$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq h$ ) 部分的正侧.

**解**  $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq h$ ), 则  $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

又  $S$  在平面上的投影  $D: x^2 + y^2 \leq h^2$ . 因为  $S$  取下侧, 所以

$$\begin{aligned} I &= - \iint_D \left[ (y - \sqrt{x^2 + y^2}) \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (\sqrt{x^2 + y^2} - x) \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x - y) \right] dxdy \\ &= -2 \iint_D (x - y) dxdy \\ &= 0 \end{aligned}$$

最后一个等号用到二重积分的对称性质.

### 3.4 分项投影法

分项投影法是利用第二型曲面积分的线性性：

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_S Pdydz + \iint_S Qdzdx + \iint_S Rdx dy$$

分别将右式三项投影到  $yoz, zox, xoy$  平面上，由于

$$\iint_S Pdydz = \iint_{D_{yz}} Pdydz, \iint_S Qdzdx = \iint_{D_{zx}} Qdzdx, \iint_S Rdx dy = \iint_{D_{xy}} Rdx dy$$

分别投影直接计算二重积分，避免投影到一面上偏导的计算，此法非常实用，看似复杂，实则简单，非常实用。

计算中要注意原曲面与投影曲面一一对应，若不一一对应要分项投影，如一个完整的球投影到  $xoy$  平面上，上下半球曲面要分别投影计算，计算中注意利用方向性等性质以简化计算。

**例 1** 计算积分

$$\oiint_S yzdydz + zxdzdx + xydx dy,$$

其中  $S$  是四面体  $x + y + z = a (a > 0)$ ， $x = 0, y = 0, z = 0$  的表面，外法线是正向。

**解** 这是三个第二型曲面积分之和。首先计算第二型曲面积分  $\oiint_S xydx dy$ ，而曲面  $S$  是由四个有向的三角形区域：

$ABC$ (上)， $AOB$ (下)， $BOC$ (后)， $COA$ (左) 组成。其中  $BOC$  (后) 与  $COA$ (左) 在  $XY$  坐标面的面积微元  $dx dy = 0$ ， $ABC$ (上)， $AOB$ (下) 在  $XY$  坐标面的投影都是三角形区域  $D(x = 0, y = 0, x + y = a \text{ 围成})$ ，从而

$$\begin{aligned} \oiint_S xydx dy &= \iint_{ABC(上)} xydx dy + \iint_{AOB(下)} xydx dy + \iint_{BOC(后)} xydx dy + \iint_{COA(左)} xydx dy \\ &= \iint_D xydx dy - \iint_D xydx dy + 0 + 0. \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_S yzdydz = \iint_S zxdzdx = 0,$$

于是

$$\oiint_S yzdydz + zxdzdx + xydx dy = 0.$$

**例 2** 计算第二型曲面积分

$$I = \iint_S f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy,$$

其中  $S$  是平面六面体  $(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c)$  的表面并取外侧为正向,

$f(x), g(y), h(z)$  为  $S$  上的连续函数.

**解** 记  $S_1: x=a$  (前侧为正向),  $S_2: x=0$  (后侧为正向)

积分  $\iint_S f(x)dydz$  在另外四个面上的积分为零, 故

$$\iint_S f(x)dydz = \iint_{D_{yz}} f(a)dydz - \iint_{D_{yz}} f(0)dydz = bc[f(a) - f(0)]$$

由于变量的对称性, 类似可得

$$\iint_S g(y)dzdx = ac[g(b) - g(0)],$$

$$\iint_S h(z)dxdy = ab[h(c) - h(0)],$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_S f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy \\ &= bc[f(a) - f(0)] + ac[g(b) - g(0)] + ab[h(c) - h(0)] \end{aligned}$$

### 3.5 利用高斯公式 (Gauss) 化为三重积分的方法

格林公式建立了沿封闭曲线的曲线积分与二重积分的关系, 沿空间闭曲面的曲面积分和三重积分之间也有类似的关系, 这就是高斯公式.

**定理:** 设空间区域  $V$  由分片光滑的双侧封闭曲面  $S$  围成. 若函数  $P, Q, R$  在  $V$  上连续, 且有一阶连续偏导数, 则

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

其中  $S$  取外侧, 上式称为高斯公式.

**例 1** 计算曲面积分

$$I = \iint_S (x+y-z)dydz + [2y + \sin(z+x)]dzdx + (3z + e^{x+y})dxdy,$$

其中  $S$  为曲面  $|x-y-z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$  的外侧面, 外法线为正向.

**解** 由题意得知,  $P = x + y - z, Q = 2y + \sin(z+x), R = 3z + e^{x+y},$



利用高斯公式,  $\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \frac{\partial Q}{\partial y} = 2, \frac{\partial R}{\partial z} = 3$ , 则

$$I = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (1 + 2 + 3) dx dy dz = 6 \iiint_V dx dy dz.$$

其中,  $V$  为  $S$  包围的区域  $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| \leq 1$ . 作旋转变换

$u = x - y + z, v = y - z + x, w = z - x + y$ . 则  $V^*$  为  $S^*$  包围的区域  $|u| + |v| + |w| \leq 1$ , 而

$V^*$  是一个对称的八面体, 它在  $uvw$  平面的第一卦限部分为  $u + v + w = 1$  及坐标平面

$u = 0, v = 0, w = 0$  所围成的区域, 且有

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}} = \frac{1}{4}.$$

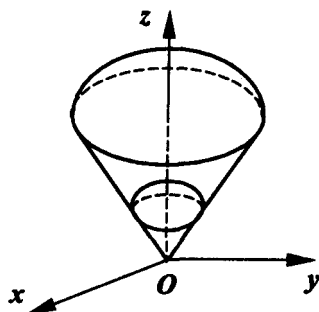
所以

$$I = 6 \iiint_{|u|+|v|+|w|\leq 1} \frac{1}{4} du dv dw = 6 \times \frac{1}{4} \times 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = 2.$$

**例 2** 设  $f(u)$  有连续导数, 计算

$$\oiint_S x^3 dy dz + \left[ \frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3 \right] dz dx + \left[ \frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3 \right] dx dy,$$

其中  $S$  为  $z > 0$  的锥面  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4$  所围立体的表面外侧(如图所示).



**解** 因为被积函数中含有抽象函数, 直接计算显然不可能, 又因为曲面  $S$  为闭曲面, 考虑用高斯公式.

$\because P = x^3, Q = \frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3, R = \frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3$  在所围区域  $V$  上满足高斯公式的条

件 ( $z=0$  的点不在  $V$  内), 故有

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V [3x^2 + \frac{1}{z^2} f'(\frac{y}{z}) + 3y^2 + \frac{1}{y} f'(\frac{y}{z})(-\frac{y}{z^2}) + 3z^2] dV \\ &= \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dV \\ &= 3 \iiint_V r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 r^4 dr \\ &= \frac{93}{5} (2 - \sqrt{2}) \pi. \end{aligned}$$

### 3.6 利用两类曲面积分之间的联系

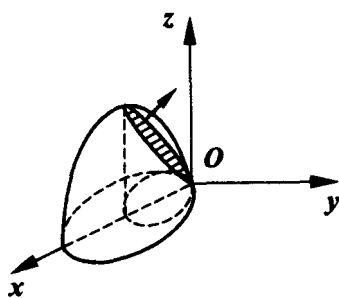
$$\begin{aligned} &\iint_S P(x, y, z) dx dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \\ &= \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS \end{aligned}$$

只要能够求出曲面的法向量 (而这对于一个已知曲面来说是很容易做到的), 就可以求出法向量的方向余弦, 从而将第二型曲面积分化为第一型曲面积分来处理, 请看下例:

**例 1** 计算积分

$$I = \iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy,$$

其中  $S$  为半球:  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ , ( $z > 0$ ) 被柱面  $x^2 + y^2 = 2rx$ , ( $R > 0$ ) 截下的部分. (如图所示)



**解**  $S$  的法向量为:  $\vec{n} = \{x-R, y, z\}$ , 方向朝上, 单位化得:

$$\vec{n}^\circ = \left\{ \frac{x-R}{\sqrt{(x-R)^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{(x-R)^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{(x-R)^2 + y^2 + z^2}} \right\} = \left\{ \frac{x-R}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right\}$$

所以

$$\cos \alpha = \frac{x-R}{R}, \quad \cos \beta = \frac{y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{R}.$$

由两类曲面积分之间的关系式，有

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy \\ &= \iint_S (y-z)\frac{x-R}{R} + (z-x)\frac{y}{R} + (x-y)\frac{z}{R} dS \\ &= \iint_S (z-y)dS \end{aligned}$$

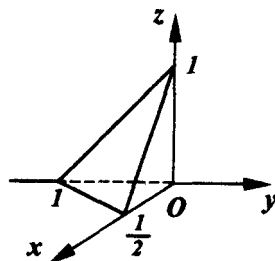
积分曲面关于  $y=0$  对称，所以

$$\begin{aligned} \iint_S ydS &= 0 \\ \iint_S zdS &= \iint_S R \cos \gamma dS = R \iint_S dxdy = R \iint_{D_{xy}} dxdy = R \cdot \pi r^2, \\ \therefore I &= \pi R r^2 \end{aligned}$$

例 2 计算

$$I = \iint_S [x - f(x, y, z)]dydz + [f(x, y, z) + y]dzdx + [3f(x, y, z) + z]dxdy,$$

其中  $f(x, y, z)$  为连续函数， $S$  是平面  $2x - y + z = 1$  在第四象限部分的上侧 (如图所示).



**解** 因被积函数中含有抽象函数，直接计算难以进行，化为第一类曲面积分，看能否消去抽象函数.

$S: 2x - y + z = 1$ ， $S$  上任一点法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}, \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

由第一类与第二类曲面积分的关系，有

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \{ [x - f(x, y, z)] \cos \alpha + [f(x, y, z) + y] \cos \beta + [3f(x, y, z) + z] \cos \gamma \} dS \\ &= \iint_S \{ [x - f(x, y, z)] \frac{2}{\sqrt{6}} + [f(x, y, z) + y] (-\frac{1}{\sqrt{6}}) + [3f(x, y, z) + z] \frac{1}{\sqrt{6}} \} dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_S (2x - y + z) dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_S dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{D_{xy}} \sqrt{6} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

**例 3** 计算闭曲面积分：

$$\oiint_S \frac{x}{r^3} dy dz + \frac{y}{r^3} dz dx + \frac{z}{r^3} dx dy,$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  外侧表面.

**解** 本题当然可化为二重积分来计算, 但将其化为第一类曲面积分来计算更为方便. 因为球面外侧法向量  $\vec{n} = \{2x, 2y, 2z\}$ , 其方向余弦

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \cos \beta = \frac{y}{r}, \cos \gamma = \frac{z}{r},$$

由第一、二类面积分的关系, 得

$$\begin{aligned}
 &\oiint_S \frac{x}{r^3} dy dz + \frac{y}{r^3} dz dx + \frac{z}{r^3} dx dy \\
 &= \oiint_S \left\{ \frac{x}{r^3} \cos \alpha + \frac{y}{r^3} \cos \beta + \frac{z}{r^3} \cos \gamma \right\} dS \\
 &= \oiint_S \frac{1}{r^2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) dS \\
 &= \oiint_S \frac{1}{r^2} dS \\
 &= \oiint_S \frac{1}{a^2} dS
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2$$

$$= 4\pi$$

注意：本题虽是第二类闭曲面积分，但不能应用高斯公式计算。

### 3.7 利用 Stokes 公式化为第二型曲线积分

斯托克斯(Stokes)公式是建立沿空间双侧曲面  $S$  的积分与沿  $S$  的边界曲线  $L$  的积分之间的联系。

**定理：** 设光滑曲面  $S$  的边界  $L$  是按段光滑的连续曲线，若函数  $P, Q, R$  在  $S$ （连同  $L$ ）上连续，且有一阶连续偏导数，则

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

其中  $S$  的侧与  $L$  的方向按右手法则确定。

若  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ ，则存在向量势  $\vec{a}$ ，使得  $\vec{v} = \operatorname{rota}$ ，故

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\delta = \iint_S (\operatorname{rota} \cdot \vec{n}) d\delta = \oint_C (\vec{a} \cdot \vec{\tau}) ds.$$

其中  $S$  为以  $C$  为边界线的分片光滑曲面，且  $S$  指定侧的单位向量  $\vec{n}$  与  $C$  的环行方向  $\vec{\tau}$  构成右手系。

**例 1** 计算

$$\iint_S (\operatorname{rota} \cdot \vec{n}) d\delta,$$

其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  的上半部分， $C$  是它的边界， $\vec{a} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} - z^2\vec{k}$ 。

**解** 边界曲线  $C$  为  $z = 0$  平面内一圆  $x^2 + y^2 = 9$ ，则

$$\iint_S (\operatorname{rota} \cdot \vec{n}) d\delta = \oint_C (\vec{a} \cdot \vec{\tau}) d\delta = \oint_C 2ydx + 3xdy - z^2dz.$$

令  $x = 3\cos\theta, y = 3\sin\theta, z = 0$ ，则

$$\text{原式} = 2 \int_0^{2\pi} (-9\sin^2\theta) d\theta + 3 \int_0^{2\pi} 9\cos^2\theta d\theta = 9\pi.$$

### 3.8 利用积分区间对称性的计算方法

若积分曲面  $S$  关于  $x, y, z$  具有轮换对称性，则

$$\iint_S f(x, y, z) dydz$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_S f(y, z, x) dz dx \\
 &= \iint_S f(z, x, y) dx dy \\
 &= \frac{1}{3} \iint_S f(x, y, z) dy dz + f(z, x, y) dx dy + f(y, z, x) dz dx.
 \end{aligned}$$

若曲面  $S$  关于  $xoy$  ( $yoz$  或  $zox$ ) 平面对称, 且  $S$  在  $xoy$  ( $yoz$  或  $zox$ ) 平面上半空间的部分曲面  $S_1$  取定为上侧 (前侧或右侧), 在  $xoy$  ( $yoz$  或  $zox$ ) 平面下半空间的部分曲面  $S_2$  取定为下侧 (后侧或左侧), 则

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & \iint_S f(x, y, z) dx dy = 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数,} \\
 & \iint_S f(x, y, z) dx dy = 2 \iint_{S_1} f(x, y, z) dx dy, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数;} \\
 \textcircled{2} \quad & \iint_S f(x, y, z) dy dz = 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数,} \\
 & \iint_S f(x, y, z) dy dz = 2 \iint_{S_1} f(x, y, z) dy dz, & f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数;} \\
 \textcircled{3} \quad & \iint_S f(x, y, z) dz dx = 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数,} \\
 & \iint_S f(x, y, z) dz dx = 2 \iint_{S_1} f(x, y, z) dz dx, & f(x, y, z) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数.}
 \end{aligned}$$

**例 1** 求第二型曲面积分

$$\iint_S \frac{1}{x} dy dz + \frac{1}{y} dz dx + \frac{1}{z} dx dy,$$

其中  $S$  为椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外侧.

**解** 注意到被积曲面关于  $x, y, z$  具有轮换对称性, 且可利用投影化为二重积分, 则有

$$\iint_S \frac{1}{x} dy dz + \frac{1}{y} dz dx + \frac{1}{z} dx dy = I_1 + I_2 + I_3,$$

令

$$I_3 = \iint_{S_1} \frac{dx dy}{z} + \iint_{S_2} \frac{dx dy}{z} = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy - \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{-c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy$$

则

$$I_3 = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{2}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy.$$

作广义极坐标变换  $x = ar \cos \theta$ ,  $y = br \sin \theta$ ; 则  $|J| = abr$ ,

$$I_3 = \frac{2}{c} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} abrd\theta dr = \frac{4ab\pi}{c}.$$

由轮换对称性知  $I_1 = \iint_S \frac{dydz}{x} = \frac{4bc\pi}{a}$ ,  $I_2 = \iint_S \frac{dzdx}{y} = \frac{4ac\pi}{b}$ , 故

$$I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi \left( \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right).$$

### 3.9 第二型曲面积分的向量计算形式

据第一型曲面积分与第二型曲面积分的关系:

$$\iint_S P dx dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] dS = \iint_S \bar{A} \cdot \bar{n} dS,$$

其中  $\bar{A} = \{P, Q, R\}$ ,  $\bar{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  为有向曲面  $S$  上点  $(x, y, z)$  处的单位法向量,  $dS$  是曲面的面积微元, 正好符合第二型曲面积分的物理意义. 又因为两个向量值函数的数量积  $\bar{A} \cdot \bar{n}$  是一个数值函数, 所以  $\iint_S \bar{A} \cdot \bar{n} dS$  是第一型曲面积分, 当

曲面  $S$  方程为  $z = f(x, y)$  上侧时, 单位法向量为

$$\bar{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \bar{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

, 曲面面积微元为  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$ , 这就是说在此计算过程中, 计算量较大

的因子  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$  肯定要被约去, 实际不需要计算, 所以第二曲面积分

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dx dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (P \cdot \bar{i} + Q \cdot \bar{j} + R \cdot \bar{k}) \cdot \left( -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \bar{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \bar{j} + \bar{k} \right) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \bar{A} \cdot \bar{n} dS \end{aligned}$$

整个过程只需计算一个二重积分, 计算量大大减小.

例 1 求

$$I = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的外侧.

**解** 此题如果采用将第二型曲面积分化二重积分计算, 则需要计算六个二重积分, 较为繁琐且运算量较大; 若利用高斯公式求, 被积函数的分母在原点等于零, 不能直接对球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  和它的边界  $S$  运用高斯公式, 因此需要以原点为中心, 某个充分小的正数  $\varepsilon$  为半径作球面  $S_\varepsilon: x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$ , 内侧为正, 用  $V_\varepsilon$  表示球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  与球面  $S_\varepsilon: x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$  围成的空间区域. 对空间区域  $V_\varepsilon$  和它的边界  $S \cup S_\varepsilon$ , 运用高斯公式, 最后可化为

$$I = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint_{S_\varepsilon} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

还是和原第二型曲面积分一样, 利用向量形式计算则较为方便.

$$I = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint_S \bar{A} \cdot \bar{n} dS,$$

其中

$$\bar{A} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}), \quad \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}),$$

$$I = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint_S \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) dxdy$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{1}{R^2} dxdy = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi$$

利用向量形式计算第二型曲面积分直接将第二型曲面积分转化为一个二重积分计算, 避免了传统计算方法对曲面侧的判定和高斯公式条件的限定, 且计算过程运

算量较大的因子  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$  可以不需计算, 所以其显著优点是物理意义明

确, 计算过程简单, 适用于所有的第二型曲面积分的计算, 值得掌握.



