第一章　数学物理定解问题

1.1　基本概念

方程：含有未知量的等式。(Fig. 1.1)

定义 1.1.1: 偏微分函数

关于多元函数 $u(x, y, \cdots)$ 及其某些偏导数的关系式：

$$F(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \cdots, u_{xxx}, u_{xxy}, \cdots) = 0,$$

其中 F 是 x, y, $\cdots$, u 及 u 的有限多个偏导数的已知函数。

注. *偏微分方程 (1) 未知函数是多元函数，且未知数个数有限；(2) 包含未知函数的某些偏导数的方程。*

偏微分方程的研究集中在少数特殊类型的偏微分方程，一般性较少，个性多。

偏微分方程的解

偏微分方程的通解是含有自变量的任意函数

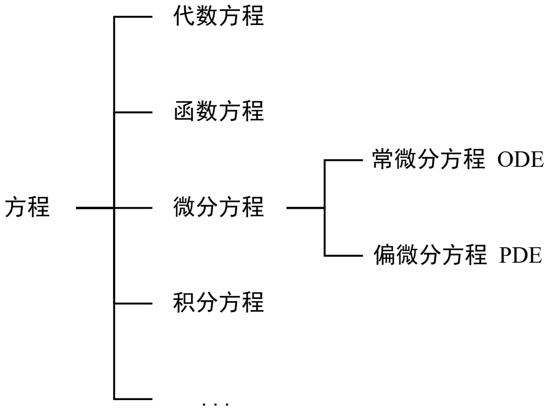

Fig. 1.1. 方程分类

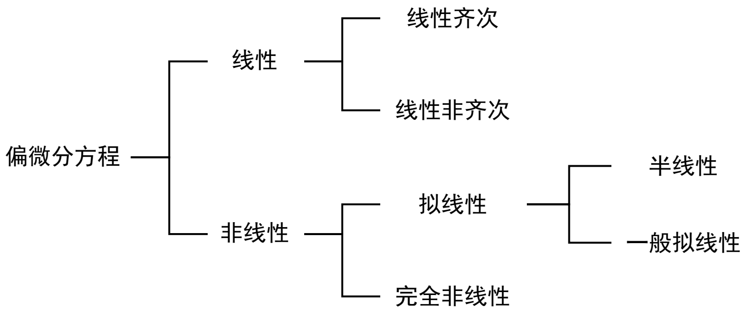

Fig. 1.2.　偏微分方程分类

偏微分方程的阶线性偏微分方程 (Fig. 1.2)：方程中实际所含未知数的各阶偏导数是线性的。

自由项：在线性偏微分方程中，不含 u 及它的偏导数的项。

线性方程中，自由项为 0 的是齐次偏微分方程，自由项不为 0 的是非齐次偏微分方程。

线性方程的叠加原理

非线性偏微分方程：不是线性的统称非线性。

拟线性偏微分方程：在非线性偏微分方程中，关于未知函数的所有最高阶偏导数都是线性的。

主部：在拟线性偏微分方程中，由最高阶偏导数组成的部分。

半线性：主部的系数都是常数或是自变量的已知函数。

完全非线性偏微分方程：既不是线性，也不是拟线性的偏微分方程。

1.2　二阶偏微分方程

二阶 PDE 的分类 (Fig. 1.3)

二阶线性 PDE 的判别式 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \begin{cases} > 0 & \text{双曲型} \\ = 0 & \text{抛物型} \\ < 0 & \text{椭圆型} \end{cases}$

二阶线性 PDE 的特征方程：

$$a_{11}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 - 2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_{22} = 0$$

- 二阶 PDE
  - 椭圆型
    - $\nabla^2 u = 0$ Laplace Eq.
    - $\nabla^2 u(x,y,z) = f$ Poisson Eq.
  - 抛物型 $u_t - a^2\nabla^2 u = f$ 扩散方程之类
  - 双曲型 $u_{tt} - a^2\nabla^2 u = f$ 波动方程之类

Fig. 1.3. 二阶 PDE

$*$ 二阶 PDE 化简的一个方法

原方程为 $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f$，则：

$$\begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{Q}^T\text{，其中 } \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix},$$

$$\overline{b_1} = (L-c)\xi, \quad \overline{b_2} = (L-c)\eta, \quad \overline{c} = c, \quad \overline{f} = f,$$

其中 $L = a_{11}\frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial^2 y^2} + b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + c$, $\overline{b_1}$ 等为新方程的对应参数。

$*$ 拉普拉斯 Laplace 算符:

一维 $\Delta_1 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2}$

二维 $\Delta_2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y^2}$

三维 $\Delta_3 = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z^2}$

四维 $\Delta_4 = \Box\cdot\Box = \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t^2}$。

(四维的 Laplace 算符就是达朗贝尔算符)

1.3 定解问题

$$\text{泛定方程} + \text{定解条件}\begin{cases}\text{初始条件}\\ \text{边界条件}\end{cases} = \text{定解问题}\begin{cases}\text{初值问题 (也叫做 Cauthy 问题)}\\ \text{边值问题}\\ \text{混合问题}\end{cases}$$

泛定方程 (描绘普遍规律的方程)；Cauthy 问题 (只有初始条件，没有 (无需) 边界条件)；条件可以为分段函数。

$*$ 对时间求导的阶数 = 所需的初始条件个数

守恒律：对任意的 Q，Q 内的该物质的变化率 = 净流入 + Q 内的总生成率

例如：$u_t = -\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} + f(x,t,u)$。

守恒律是对各种物理过程普适的方程 (共性)。

$$\text{偏微分方程} = \text{守恒律} + \text{本构关系 (特性定律)}$$

适定性：(1) 存在性；(2) 唯一性；(3) 稳定性。

三类典型的边界条件 (以热传导方程为例)

(1) 第一边值问题或狄利克雷问题

边界条件：

$$u|_\Gamma = \varphi(x,y,z,t), \quad \varphi \text{ 为定义在 } (x,y,z)\in\Gamma,\ 0\leqslant t\leqslant T \text{ 上的已知函数。}$$

$\varphi = 0$ 时称为齐次狄利克雷条件，对诺伊曼条件、罗宾条件同样。

(2) 第二边值问题或诺伊曼边值问题

$$(-\kappa\frac{\partial u}{\partial \nu})|_\Gamma = q(x,y,z,t), \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma = \varphi(x,y,z,t),$$

其中 $\varphi = -\frac{q}{\kappa}$ 是定义在 Γ，$0\leqslant t\leqslant T$ 上的已知函数。

$*$ 绝热边界 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_0} = 0$

(3) 第三边值问题或罗宾边值问题

$$(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u)|_\Gamma = \varphi(x,y,z,t).$$

其他边界条件

(1) 衔接条件：例如 $E_{1t} = E_{2t}$

(2) 周期性条件：对时间或空间或其他变量

(3) 自然 BC：无穷远和中心

(大多数物理过程是有界和有限的)

零边界条件 (齐次 BC) Vanishing boundary condition VBC；

非零边界条件 (非齐次 BC) non-Vanishing boundary condition NVBC。

方法：行波法 ☆；积分变换法☆；变分法；分离变量法 ☆；格林函数法 ☆；数值法