

补充：

上次说到计算 *range* 可以将激光传感器距离地面的高度 u “补偿”进来，构成的新的距离函数。这个说法不准确有问题，和吕吉鑫博士讨论了一下，实际上是 *range* 主要考虑点云的高度信息，或者直接乘上 $u = (0, 0, 1)^T$ 。因为有 *suspension* 系统的移动机器人在行进过程中激光传感器相对于地面的高度不会变，而没有 *suspension* 系统的机器人对高度的估计不鲁棒。

论文：

Magnusson M, Andreasson H, Nüchter A, et al. **Appearance-Based Loop Detection from 3D Laser Data Using the Normal Distributions Transform**[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE Xplore, 2009:23-28.

一. 前言

这篇论文的闭环检测方法是利用了激光点云的局部特征。第一作者 Magnusson 的博士论文是《The Three-Dimensional Normal-Distributions Transform - an Efficient Representation for Registration, Surface Analysis, and Loop Detection》，该文有关于 NDT 在激光 SLAM 中更为详细的推导与论述，由于时间原因看不完很长很长的博士毕业论文，就以这篇 ICRA 入手，此外还有一篇同名的 JFR 期刊，实验内容更为丰富。该作者还有一篇更早的关于利用 NDT 特征进行点云配准的论文《Scan registration for autonomous mining vehicles using 3D - NDT》。

二. 方法简介

1. NDT 特征

激光点云的存储要占用大量的存储空间，因此提出统计一定空间内的点云信息来描述点云的分布。可以用只用均值向量 μ 和方差矩阵 Σ 来描述边长为 q 的立方体内的 n 个激光点的信息，即：

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\Sigma = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)(x_k - \mu)^T$$

其中， x_k 为一个激光点的三维坐标信息。

将点云空间离散化会带来其他问题，为了减小离散化的影响，小立方体之间是重叠的，即立方体单位的边长为 q ，而立方体中心之间的距离为 $\frac{q}{2}$ 。

2. 激光点云的外观描述

将方差矩阵进行分解，可以得到三个特征值 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ ，对应的三个特征向量为 e_1 ， e_2 和 e_3 。

按照人类对表面的分类描述，可以分为线、平面以及球面。规定一个阈值 $t_e \in (0,1)$ ，以及三条准则可以判断点云是属于哪一类分布，三条准则如下：

- 如果 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < t_e$ ，点云分布则为线性。
- 如果是非线性，而且 $\frac{\lambda_3}{\lambda_2} < t_e$ ，那么分布则为平面。
- 如果既不是线性也不是平面，作为球面分布，换言之，没有一个特征值是其其他特征值的 $\frac{1}{t_e}$ 倍之大。

这三个大类的分布还可以往下细分为子类，线性类和平面类可以根据分布方向分为 l 和 p 个子类，而球面可根据表面光滑程度分为 s 个子类。则一簇激光点云可以得到一个关于点云整体分布的外观描述向量：

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_s, f_{s+1}, \dots, f_{s+p}, f_{s+p+1}, \dots, f_{s+p+l})$$

其中， f_i 是属于第 i 类的立方体个数。

此外，从激光传感器到点云的距离长度也是一个重要的信息，以传感器为原点，将距离划分为若干区间 $R = \{r_1, \dots, r_r\}$ ，则外观描述向量可以演变为外观描述矩阵：

$$F = (\vec{f}_1^T \dots \vec{f}_r^T)^T$$

其中, \vec{f}_i 在 r_i 区间内所有所有 NDT 特征统计直方图, 即外观描述向量。

3. 旋转不变性

划分平面类和线性类的时候参考了方向, 所以构造的外观描述向量 F 本身不具有旋转不变性。

论文中采用了一种统计的方法, 平面绕 Z 与 Y 轴旋转, 统计直方图, 可以得到一系列外观描述矩阵组成的集合 \bar{F} , 在此集合中, 后续的激光点云的差异性度量可以保证外观描述的旋转不变性。也就是机器人的朝向不会影响观测得到的点云的外观描述。

目前, 我还没有理解文中具体的方法, 不能详细地阐述其中的原理。

4. 差异性度量

为了评估两个外观描述矩阵 F 和 G 的差异性, 我们将其归一化, 并计算每个行向量的欧氏距离之和, 然后对总和进行权重评估, 式子如下:

$$\sigma(F, G) = \sum_{i=1}^r \left(\left\| \frac{\vec{f}_i}{\|F\|_1} - \frac{\vec{g}_i}{\|G\|_1} \right\|_2 \right) \frac{\max(\|F\|_1, \|G\|_1)}{\min(\|F\|_1, \|G\|_1)}$$

最后一项就是权重项, 当两簇激光点云范围差异性很大 (一个很大, 一个很小), 那么包含的 NDT 立方体个数也会不同, 以此作为前一项的权重。

当给定两束激光点云 (S_1, S_2) 以及它们的外观描述矩阵集合 (\bar{F}, \bar{G}) , 尝试所有的参数并取最小的差量 σ 作为差异性描述, 即

$$\sigma'(\bar{F}, \bar{G}) = \min_{i,j} \sigma(F_i, G_j) \quad F_i \in \bar{F}, G_j \in \bar{G}$$

5. 参数选择

决定 NDT 特征以及闭环检测的参数如下:

- 子类的个数: s , p 以及 l

如果只采用平面特征即 $s = l = 0$, 会使激光点云误匹配率增高三分之一。

- 特征值比例阈值 t_e

该参数决定了线、平面以及球面的分类标准, 但是文中提出这是经验之选

- 距离范围限制 R

文中子区间选择是每隔 3m 划分一个区间

- 模糊比例阈值 t_a

该参数决定了旋转不变性的好坏，也是经验之选

- NDT 立方体边长 q

移动机器人一般是 0.5m 至 2m 之间，根据激光传感器的探测范围限制选择

- 闭环的最小长度 S

该长度是指经过多少簇点云才进行闭环检测，要根据实际情况选择

- 判断是否闭环的距离阈值 t_d

该参数应该是最重要的，决定了是否 SLAM 过程中的闭环。如果最后的两簇点云之间的差异性度量小于该阈值，则认为闭环。文中提出该参数可以根据 EM 算法逼近来得到，具体细节就不赘述了。

三. 个人杂谈

NDT 特征将表面分为线性、平面以及球面，很符合现实生活中人为对激光点云的分类。这种人为的分类也决定了划分种类的时候参数很难调整，进而导致了 NDT 特征很依赖参数，看起来不是那么“智能”。和图像特征 SURF、SIFT 等等比较，稀疏的点云提取特征目前还没有 gold-standard 的法则。

NDT 特征最早用于点云的配准，和图像特征点的作用类似。这里用于检测闭环，由于激光传感器可以 360 度扫描周围环境，所以对特征的旋转不变性要求很高，因此激光点云的局部特征很难提取，也决定了 3D 激光 SLAM 的闭环检测一直是个难点。

激光点云的全局分布特征比较（上一篇论文）和局部特征匹配是检测闭环的主要手段，二者各有优势与劣势。而 SegMatch 这种基于语义分割的匹配过于高级，也难以实现。但是我们人类其实是基于地图上的物体来定位自己的位置，因此知道是否自己“闭环”，所以个人认为 SLAM 中闭环问题最终还是要向语义方向发展，毕竟人类发明机器人的目的之一是替代人类完成一些复杂的工作，尤其是在室外复杂的环境之中。