

迭代最近点算法综述

尹欢

摘要 点云数据的配准与拼接问题一直是计算机视觉、机器人等领域的研究难题。ICP 算法是目前国内外解决此类问题的主流算法，得到了广大研究者的关注。本文主要分析了标准 ICP 算法，并阐述了 ICP 算法各个步骤的完善与改进方案，对各个改进方案进行了比较与分析，最后提出了 ICP 算法目前存在的主要问题与未来的发展方向。

关键词：点云 ICP 算法 配准与拼接 机器人

1. 引言

点云数据的配准与拼接技术一直是计算机视觉、移动机器人、三维重建等领域的研究热点与难题。该技术的实质是将不同坐标系下的数据点云进行坐标变换，求得坐标变换参数 R （旋转矩阵）与 t （位移矩阵），使点云配准与拼接误差尽可能小。

目前国内外应用最广泛的方法是迭代最近点算法（Iterative Closet Point, ICP）。1992 年 Besl 和 Mckay 首先提出了 ICP 算法^[1]，该算法直接对点云数据进行处理，不需要预先将数据进行假设与分割，因此很快成为点云配准与拼接的一种主流的算法。

ICP 算法自诞生后，许多研究人员对其进行了很多有价值的改动，推动了这一算法的发展。这也使 ICP 算法衍化为不同的类型，比如 Minguez 等人提出的 Metric-based ICP 算法^[2]，Segal 等人提出的通用型 ICP^[3]等等。1994 年 Zhang 等人首先将 ICP 应用于室外移动机器人的地图构建^[4]；2015 年 Pomerleau 等人对相关领域内所使用的 ICP 算法进行了总结^[5]。

ICP 算法适用于各种类型传感器所获取的数据。从最早的二维医学图像拼接技术^[6]，到三维深度图像的配准^[7]，都有 ICP 算法的身影；此外，机器人领域的研究者将 ICP 算法应用于以 2D 与 3D 激光为传感器的 SLAM 问题中^{[8][9]}；ICP 算法也被用于处理 Kinect 传感器获取的 RGB-D 数据^[10]。

本文主要着眼于移动机器人领域内的 ICP 算法，主要针对 ICP 算法众多的改进方案进行阐述，最后对 ICP 算法存在的问题与发展趋势进行归纳与总结。

2. 标准 ICP 算法

本文中将 Besl 和 Mckay 提出的 ICP 算法^[1]称为标准 ICP 算法，该算法是通过不断迭代来最小化两个点集中的最近点的欧式距离平方和以求得点集之间的刚体变换。

标准 ICP 算法可以描述如下：

- 点集 P 中有 N_p 个数据点，用 $\{p_i\}$ 表示，称作目标点集（也称为场景数据集）；点集 X 中有 N_x 个数据点，用 $\{x_i\}$ 表示，称作参考点集（模型数据集）。假设 $N_x = N_p$ ，单点 \bar{p}_i 与单点 \bar{x}_i 互为最近点且一一对应。给定一个刚体变换可以用矢量表示为 $\bar{q} = [\bar{q}_R | \bar{q}_T]$ 。初始条件下，迭代次数 $k = 0$ ，目标点集位置 $P_0 = P$ 。

- 迭代执行下列步骤，直到计算结果在给定阈值 τ 下收敛。
 - a. 根据欧式距离，计算得到最近点集 $Y_k = C(P_k, X)$ ；
 - b. 计算配准的矢量 $(\bar{q}_k, d_k) = Q(P_0, Y_k)$ ，其中 $d(\bar{p}, X) = \min_{\bar{x} \in X} \|\bar{x} - \bar{p}\|$ ；
 - c. 将计算的矢量结果应用于目标点集 $P_{k+1} = \bar{q}_k(P_0)$ ；
 - d. 如果两次迭代的误差项满足 $d_k - d_{k+1} < \tau$ ，则终止迭代。

上述步骤中，关键是计算两个点集之间的配准的矢量。首先要计算所有的最近点的欧氏距离的平方和，如下所示：

$$f(\bar{q}) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|\bar{x}_i - R(\bar{q}_R) \bar{p}_i - \bar{q}_T\|^2$$

为了使上式最小化，首先计算目标点集与参考点集的质心：

$$\bar{\mu}_p = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{p}_i$$

$$\bar{\mu}_x = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \bar{x}_i$$

由此可得两个点集之间的协方差矩阵：

$$\Sigma_{px} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} [(\vec{p}_i - \vec{\mu}_p)(\vec{x}_i - \vec{\mu}_x)^T] = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} [\vec{p}_i \vec{x}_i^T] - \vec{\mu}_p \vec{\mu}_x^T$$

利用 Σ_{px} 的反对称矩阵 $A_{ij} = (\Sigma_{px} - \Sigma_{px}^T)_{ij}$ 来组成列矢量 $\Delta = [A_{23} \ A_{31} \ A_{12}]^T$ 。根据该矢量，可以组成一个 4×4 的矩阵 $Q(\Sigma_{px})$ ：

$$Q(\Sigma_{px}) = \begin{bmatrix} tr(\Sigma_{px}) & \Delta^T \\ \Delta & \Sigma_{px} + \Sigma_{px}^T - tr(\Sigma_{px})I_3 \end{bmatrix}$$

其中 I_3 是一个 3×3 的单位矩阵。 $Q(\Sigma_{px})$ 的最大特征值所对应的单位特征向量 $\vec{q}_R = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ 即为用四元数表示的最优旋转量。最优位移量即为：

$$\vec{q}_T = \vec{\mu}_x - R(\vec{q}_R)\vec{\mu}_p$$

由此可得两个点集之间的刚体变换 $\vec{q} = [\vec{q}_R \ | \ \vec{q}_T]$ 。

3. ICP 算法的改进

随着标准 ICP 算法的诞生，不断有新的改进算法出现并适用于不同的应用场合。Rusinkiewicz 等人^[11]将 ICP 算法划分为 6 个阶段：

- a. 选取点集中的点
- b. 配准目标点与参考点
- c. 确定对应点的权重
- d. 剔除一些特定点对
- e. 给点对的误差矩阵赋值
- f. 最小化误差矩阵

实际上，c 与 d 可以看作是一个步骤，因为剔除一个点对相当于权重赋零。某些阶段在标准 ICP 算法中并未出现，是在后续的改进中，增加了这些阶段。本章主要根据这些阶段以及 ICP 算法的特点，对 ICP 算法的众多改进方案进行归纳与总结。

3.1 给定初始变换值

部分场合下，ICP 算法对初始给定的刚体变换值较为敏感。这是因为 ICP 算法只能保证求得局部最优值，而不一定求得全局最优值。错误的初值可能会产生局部极值，对最后的计算结果产生影响。在 ICP 算法迭代之前，一般有两类方法可

以用来给定初始值。

- a. 通过外部传感器获得。比如移动机器人上搭载有各类传感器，它们所获取的值可以用来作为 ICP 算法的初值，比如轮式编码器、IMU 以及 GPS 之间的相互融合^{[12][13]}。
- b. 通过粗糙的配准算法来得到。粗糙的点云配准算法有点标记法^[14]、曲率配准法^[15]等等，在此基础上再进行更精准的 ICP 算法的配准；或者先通过压缩点云数据^{[16][17]}或者选取数据集中小部分^[18]先得到粗糙的结果，然后在完整的数据集上使用 ICP 算法得到最后的配准结果。

为了得到更为准确的结果，Simon 等人^[19]在初始值上加入了扰动，不同的初始值可以得到不同的计算结果，最后在其中选择最优的结果。这样可以避免目标函数陷入局部极值。

3.2 原始点云数据的采样与滤波

移动机器人在构建地图与自定位的过程中，要追求实时性。如果机器人搭载深度相机等传感器，获取的点云数据通常是很稠密的。如果直接使用 ICP 算法进行迭代求解会有巨大的计算量，增加运算的时间成本，因此在某些场合需要对原始点云数据进行采样与滤波。

如果不考虑点云的形貌与几何特征等因素，采样可以使用均匀采样^[20]、随机采样^[21]等方法。Sappa 等人则是直接选取边缘点作为采样点^[22]。此外，还可以根据点云数据的特征进行采样与滤波，比如点云数据的密度^[5]，以及激光点云数据的法向量特征^{[17][23]}等。根据法向量采样时要估计各个方向上的法向量，以此为基础每个方向上采样一定量的点，这样尽可能地保留了点云的几何特征。

传感器是点云数据最主要的噪声源，研究者针对不同的传感器设计了不同的噪声模型以去除点云数据集中异常的点。比如，图像上低饱和度的点通常是噪声点^[24]，需要在图像配准之前删除。在用双目相机构建地图时，Diebelet^[12]等人删除了相邻点之间距离过大或过小的点，保持了点云数据的均匀性。Yoshitaka 等人^[13]提出的 Intensity-ICP 考虑到了激光在物体上的反射强度，但是不同距离与角度会使反射强度不同，因此该方法只保留了距离激光传感器最近的点。

3.3 确定对应点集

目标点集与参考点集中的点需要互相对应，这是 ICP 算法的研究热点与难点，

也是目标函数建立的基础。早期的 ICP 算法^{[1][25]}直接采取最近的欧式距离来确定对应的点，这样虽然简便直观，容易计算，但是当点云的旋转变换较大时，容易产生错误的对应点，算法在迭代时容易陷入局部极值。

因此，除了传统的欧氏距离作为距离度量，研究者们还用不同的距离来描述“最近点”。比如在两点距离的定义上融入角度^[26]，Minguez 等人将 Metric-based ICP 算法^[2]与 ICP 算法进行了对比，在旋转变换较大的场合下前者的点云配准与拼接精度更高。

除了点到点（point to point）的距离度量，还有点到线（point to line）以及点到面（point to plane）等表征方法。点到线与点到面的方法都需要估计点云数据的法向量。Censi 等人^[27]首先提出了基于点到线距离的 ICP 算法（简称 PL-ICP 算法），而 Bosse 等人^[28]使用此方法完成了 2D 地图构建。通常情况下，PL-ICP 算法相对于传统 ICP 算法更符合实际环境，比如在室内大多数物体的表面曲率很小，激光传感器采样得到的点云沿着法向量的约束性很强。这也是为什么 PL-ICP 相比于传统 ICP 算法更容易收敛到最终结果，配准精度也更高。

基于点到面距离的 ICP 算法^{[29][30]}也得到了广泛应用。目标点集 P 中的点 p_i 的法线经过的参考点集的点 q_i 选作对应点，而两点之间的距离则是 p_i 到 q_i 所在切平面的距离^[31]。点到面的方法加快了 ICP 算法的收敛，但是很依赖于法向量的估计，所以在某些场合下不稳定。此外，Silva 等人^[32]还提出了 SIM（Surface Interpenetration Measure）的距离度量方法，并与传统的 MSE（Mean Squared Error）做了对比，该方法对噪声较为鲁棒。

ICP 算法的瓶颈之一就是耗费大量时间在空间搜索对应点上，为了提高 ICP 算法的搜索速度，有必要引入空间搜索算法。Godin 等人^[33]提出用最近邻域问题来加速搜索，具体思想是用上一次迭代的对应点作为当前搜索的估计，满足一定球形范围则作为对应点。目前，更为主流的方法是利用 k-d 搜索树解决此类 NN（Nearest Neighbor）问题，Nutcher 等人^[34]用 k-d 树加速了 ICP 算法的搜索速度。此外，Zinsser 等人^[35]将 ICP 算法中的 k-d 树搜索与其他搜索方法进行了对比，指出在准确度、速度以及存储空间上前者更有优势。

3.4 给定权重与剔除外点

标准 ICP 算法^[1]中，并没有考虑给定对应点对的权重大小，即默认所有点对

的权重相同。当配准的点队中有噪声或误匹配时，标准 ICP 算法很难收敛到正确的结果，所以需要给定不同的点对以不同的权重或者直接剔除错误的匹配。

点对的权重通常是根据两点之间的距离确定，最简单的方法是两点之间的距离越远，则点对的权重越小。Godin 等人^[36]提出的点对权重如下：

$$Weight = 1 - \frac{Dist(p_1, p_2)}{Dist_{max}}$$

或者点对的权重由两点之间的法向量决定^[36]，如下所示：

$$Weight = n_1 \cdot n_2$$

当两个法向量的方向越接近则表明该点对的可信度越高，权重也越大。

外点（误匹配的点对）的剔除是 ICP 算法的一个难点。一种简单的方法是用阈值法，即两点之间的距离超过一定值则剔除^[3]，这种方法简单直接，但是容易删除有效的配对点，因此不鲁棒。Dorai 等人^[37]提出相邻点对之间的距离差值大于一定阈值则删除该点对，Rusinkiewicz 等人^[11]在做对比实验时有定义如下点对会被剔除：

$$|Dist(p_1, p_2) - Dist(q_1, q_2)| < 0.1 \cdot \max(Dist(p_1, p_2), Dist(q_1, q_2))$$

Chetverikov 等人^[38]提出的 trimmed-ICP 算法在每次迭代时剔除一定比例 $n\%$ 的点对， $n\%$ 会随着迭代次数的增加而减小，但是每次迭代时需要将点对的距离进行排序，大大地增加了计算量。

3.5 目标函数的优化

目标函数的生成取决于点对关系的建立，点到点、点到线以及点到面等等不同的距离度量方法决定了不同的目标函数。

目标函数确定后，需要一种方法或框架来求解使其最小化的旋转与位移变量。点对之间用欧氏距离平方建立的目标函数可以用闭式求解来优化。常用的方法有 SVD 分解^[39]，单位四元数法^[40]，对偶四元数法^[41]以及正交矩阵法^[42]。Eggert 等人^[43]对比了上述四种方法，并指出他们之间的性能差异很小。

而点到面的度量方法融入了角度与方向，目标函数很难用闭式求解的方法来优化。一般可以用 Levenberg-Marquardt 方法来求解，或者将问题转化为线性问题进行考虑。此外，除了数学上的求解，还有利用直方图^[44]和投票^[45]的方法来求解目标函数。

4. 分析与总结

ICP 算法由于自身的简洁、稳定、易实现等性能，已经成为点云数据的配准与拼接的主流算法。一个优秀的算法自产生后也不断吸纳各个领域的技术与方法，使其不断地成长与完善。但目前 ICP 算法自身也存在以下几个问题：

- a. ICP 算法只考虑了点云数据的旋转与位移。但是实际工作中会存在点云尺度缩放问题，ICP 并不能有效地解决此类问题。
- b. 根据距离最近来搜索对应的点本身就是一种理想化的假设，很容易产生误匹配等问题，这也导致 ICP 算法在某些场合下对旋转变换的求解不是很准确。
- c. ICP 算法对最后计算结果的不确定度估计并没有很好的解决方案，并不能有效地估计出协方差矩阵，因此无法准确地判定计算结果是否有效。虽然有研究者提出了针对 ICP 算法不确定度的求解^{[46][47]}，但是效果并不理想，也没有得到广泛的应用。
- d. ICP 的计算量相对较大，耗时慢。每一次迭代都需要搜索最近点并优化目标函数，在移动机器人工作中对计算实时性要求很高，也会占用很有限的存储空间。如果通过采样与滤波的方法来减少点云数据又会牺牲计算结果的准确性，因此需要在准确性与速度上作出取舍。

近年来，ICP 算法的应用范围越来越广，“Iterative Closet Point”这个单词在 IEEE Xplore、Scopus 等检索平台中的引用量也在逐年增长^[5]。许多研究人员不断尝试将新的算法融入到 ICP 算法中，取得了卓有成效的结果。但是目前没有一种通用 ICP 算法能够满足所有的应用场合，ICP 算法仍需要不断地改进与完善，而这一领域也必将成为未来研究的热点。

参考文献:

- [1] Besl P J, Mckay H. A method for registration of 3-D shapes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.
- [2] Minguez J, Montesano L, Lamiroux F, et al. Metric-based iterative closest point scan matching for sensor displacement estimation[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2006, 22(5): 1047-1054.
- [3] Segal A, Haehnel D, Thrun S. Generalized-ICP[C]//Robotics: science and systems. 2009, 2(4).
- [4] Zhang Z. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces[J]. International Journal of Computer Vision, 1994, 13(2): 119-152.
- [5] Pomerleau F, Colas F, Siegwart R. A Review of Point Cloud Registration Algorithms for Mobile Robotics[J]. Foundations & Trends in Robotics, 2015, 4(1):1-104.
- [6] Maintz J B, Viergever M A. A survey of medical image registration.[J]. Medical Image Analysis, 1998, 2(1):1.
- [7] Bowyer K W, Chang K, Flynn P. A survey of approaches and challenges in 3D and multi-modal 3D+2D face recognition[J]. Computer Vision & Image Understanding, 2006, 101(1):1-15.
- [8] Thrun S, Burgard W, Fox D. A Probabilistic Approach to Concurrent Mapping and Localization for Mobile Robots[J]. Machine Learning, 1998, 31(1):29-53.
- [9] Nuchter A, Surmann H, Lingemann K, et al. 6D SLAM with an application in autonomous mine mapping[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA. IEEE, 2004:1998-2003 Vol.2.
- [10] Henry P, Krainin M, Herbst E, et al. RGB-D Mapping: Using Depth Cameras for Dense 3D Modeling of Indoor Environments[J]. International Journal of Robotics Research, 2012, 31(5):647-663.
- [11] Rusinkiewicz S, Levoy M. Efficient variants of the ICP algorithm[C]// International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling, 2001. Proceedings. IEEE, 2001:145-152.
- [12] Diebel J, Reuterswärd K, Thrun S, et al. Simultaneous localization and mapping with active stereo vision[C]// IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE Xplore, 2004:3436-3443 vol.4.
- [13] Yoshitaka H, Hirohiko K, Akihisa O, et al. Mobile Robot Localization and Mapping by Scan Matching using Laser Reflection Intensity of the SOKUIKI Sensor[C]// IEEE Industrial Electronics, IECON 2006 -, Conference on. IEEE Xplore, 2006:3018-3023.
- [14] Chua C S, Jarvis R. Point Signatures: A New Representation for 3D Object Recognition[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 25(1):63-85.
- [15] Feldmar J, Ayache N. Rigid, affine and locally affine registration of free-form surfaces[J]. International Journal of Computer Vision, 1996, 18(2):99-119.
- [16] Jost T, Hügli H. A Multi-Resolution Scheme ICP Algorithm for Fast Shape Registration[C]// International Symposium on 3d Data Processing Visualization and Transmission, 2002. Proceedings. IEEE, 2002:540-543.
- [17] Magnusson M, Nuchter A, Lorken C, et al. Evaluation of 3D registration reliability and speed - A comparison of ICP and NDT[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2009:3907-3912.

- [18] Stewart C V, Tsai C L, Roysam B. The dual-bootstrap iterative closest point algorithm with application to retinal image registration[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2003, 22(11):1379-1394.
- [19] Simon D A. Fast and accurate shape-based registration[C]// Carnegie Mellon University, 1996.
- [20] Masuda T. Generation of geometric model by registration and integration of multiple range images[C]// International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling, 2001. Proceedings. IEEE, 2001:254-261.
- [21] Masuda T, Yokoya N. A Robust Method for Registration and Segmentation of Multiple Range Images[J]. Computer Vision & Image Understanding, 1995, 61(3):295-307.
- [22] Sappa A D, Restrepo-Specht A, Devy M. Range Image Registration by using an Edge-Based Representation[J]. In Proceedings of the 9th International Symposium on Intelligent Robotic Systems, (SIRS '01, 2001.
- [23] Pomerleau F, Breitenmoser A, Liu M, et al. Noise characterization of depth sensors for surface inspections[C]// International Conference on Applied Robotics for the Power Industry. IEEE, 2012:16-21.
- [24] Druon S, Aldon M J, Crosnier A. Color Constrained ICP for Registration of Large Unstructured 3D Color Data Sets[C]// Information Acquisition, 2006 IEEE International Conference on. IEEE, 2006:249-255.
- [25] Pulli K. Multiview registration for large data sets[J]. digital identity management, 1999: 160-168.
- [26] Armesto L, Minguez J, Montesano L, et al. A generalization of the metric-based Iterative Closest Point technique for 3D scan matching[C]. international conference on robotics and automation, 2010: 1367-1372.
- [27] Censi A. An ICP variant using a point-to-line metric[C]. international conference on robotics and automation, 2008: 19-25.
- [28] Bosse M, Zlot R. Keypoint design and evaluation for place recognition in 2D lidar maps[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2009, 57(12): 1211-1224.
- [29] Bergevin R, Soucy M, Gagnon H, et al. Towards a general multi-view registration technique[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, 18(5): 540-547.
- [30] Gelfand N, Ikemoto L, Rusinkiewicz S, et al. Geometrically stable sampling for the ICP algorithm[C]. digital identity management, 2003: 260-267.
- [31] Jost T. Fast geometric matching for shape registration[D]. Université de Neuchâtel, 2002.
- [32] Silva L, Bellon O R P, Boyer K L. Precision Range Image Registration Using a Robust Surface Interpenetration Measure and Enhanced Genetic Algorithms[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 2005, 27(5):762-776.
- [33] Greenspan M, Godin G. A nearest neighbor method for efficient ICP[J]. digital identity management, 2001: 161-168.
- [34] Nuchter A, Lingemann K, Hertzberg J, et al. Cached k-d tree search for ICP algorithms[C]. digital identity management, 2007: 419-426.
- [35] Zinsser T, Schmidt J, Niemann H, et al. A refined ICP algorithm for robust 3-D correspondence estimation[C]. international conference on image processing, 2003.

- [36] Godin G. Three-dimensional registration using range and intensity information[J]. Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 1994, 2350:279-290.
- [37] Dorai C, Weng J, Jain A K. Optimal registration of object views using range data[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 1997, 19(10):1131-1138.
- [38] Chetverikov D, Stepanov D, Krsek P. Robust Euclidean alignment of 3D point sets: the trimmed iterative closest point algorithm[J]. Image & Vision Computing, 2005, 23(3):299-309.
- [39] Arun K S, Huang T S, Blostein S D. Least-squares fitting of two 3-d point sets.[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 1987, 9(5):698-700.
- [40] Horn B K P. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1987, 4(4):629-642.
- [41] Walker M W, Shao L, Volz R A. Estimating 3-D location parameters using dual number quaternions[J]. Cvgip Image Understanding, 1991, 54(3):358-367.
- [42] Berthold K. P. Horn. Closed-form solution of absolute orientation using orthonormal matrices[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1988, 5(7):1127-1135.
- [43] Eggert D W, Lorusso A, Fisher R B. Estimating 3-D rigid body transformations: a comparison of four major algorithms[J]. Machine Vision and Applications, 1997, 9(5):272-290.
- [44] Bosse M, Zlot R. Map Matching and Data Association for Large-Scale Two-dimensional Laser Scan-based SLAM[J]. International Journal of Robotics Research, 2008, 27(6):667-691.
- [45] Reyes-Lozano L, Medioni G, Bayro-Carrochano E. Registration of 3D Points Using Geometric Algebra and Tensor Voting[J]. International Journal of Computer Vision, 2007, 75(3):351-369.
- [46] Prakhya S M, Liu B, Yan R, et al. A closed-form estimate of 3D ICP covariance[C]// IAPR International Conference on Machine Vision Applications. 2015:526-529.
- [47] Barczyk M, Bonnabel S, Goulette F. Observability, Covariance and Uncertainty of ICP Scan Matching[J]. Eprint Arxiv, 2014.