学院______ 专业、班______ 年级______ 学号______ 姓名______ 考试教室______

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

◉ A卷
○ B卷

2021 — 2022 学年 第 一 学期

开课学院：数统学院 课程号 考试日期：

考试方式：○开卷 ◉闭卷 ○其他 考试时间：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

分位数： $u_{0.95}=1.65$，$u_{0.975}=1.96$.

一、填空题（每空 3 分，共 42 分）

1. 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 $\frac{5}{12}$.

2. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $P(X>2)=$ $1-\frac{5}{2}e^{-1}$.

3. 已知随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim\Gamma(1,\lambda)$，Y 分别以概率 p，$1-p$ 取得-1 和 1，则 $Z=XY$ 的概率密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}(1-p)\lambda e^{-\lambda z}, & z\geq 0\\ p\cdot\lambda e^{\lambda z}, & z<0.\end{cases}$

4. 将一段长度为 L 的木棒从中随机折断，记两段中长度的较大值记为 X，较小值为 Y，则 (X,Y) 的联合分布函数为______，X 与 Y 的相关系数为 -1.

$$F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{L}, & 0\leq x\leq L,\ y>L.\\ \frac{y}{L}. & x>L.\ 0\leq y\leq L\\ \frac{x+y-L}{L}, & 0\leq x\leq L,\ 0\leq y\leq L,\ x+y\geq L.\\ 1, & x>L,\ y>L\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

5. 设 (X,Y) 的联合分布律如下表所示，当 X 与 Y 相互独立时，$\alpha\beta=$ $\frac{2}{81}$.

X	Y		
	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α $\frac{2}{9}$	β $\frac{1}{9}$

6. 将 n 只球相互独立地放入到 N 个盒子中，设每只球放入各个盒子是等可能的，则有球的盒子数 X 的数学期望 $EX=$ $N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]$

7. 设 $X_1,X_2,\dots,X_{2n}$ 是来自总体 $U(0,1)$ 中的 $2n$ 个样本，令随机变量 $Y_k=\begin{cases}4, & X_{2k-1}^2+X_{2k}^2<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，$k=1,2,\dots,n$，$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k$，则 $E\overline{Y}=$ π.

利用切比雪夫不等式和中心极限定理分别估计 n 至少取 2697 和 735 时，可以保证 $P\left\{\left|\overline{Y}-E\overline{Y}\right|\leq 0.1\right\}\geq 0.9$.

8. 设总体 $X\sim U(0,\theta)$（θ 为未知参数），则根据 $\hat{\theta}=X_{(n)}$ 可以构造一个 $\frac{1}{\theta}$ 的无偏估计量为 $\frac{n-1}{nX_{(n)}}$.

9. 设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（μ 已知，σ^2 未知）的样本，$P\{|X-\mu|<A\}=0.95$，则参数 A 的 $1-\alpha$ 双侧置信区间为 $\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}}\cdot u_{a/2},\ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}}\cdot u_{a/2}\right)$

10. 已知 X_1,X_2,X_3 相互独立且服从 $X\sim N(0,\sigma^2)$，则当 $k=$ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，统计量 $\frac{k(X_1+X_2+X_3)}{|X_2-X_3|}\sim$ $t(1)$.（填某一确定分布类型）

教务处制

1. $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$.

$P(AB)=0$. $P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$.

A、B、C 中恰好有一个事件发生的概率.

$P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$

① $P(A\bar{B}\bar{C})=P(A\cdot\overline{B\cup C})=P(A)-P(A(B\cup C))$

$=P(A)-(P(AB)+P(AC)-P(ABC))$

$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$

② $P(\bar{A}B\bar{C})=P(B\cdot\overline{A\cup C})=P(B)-P(B(A\cup C))$

$=P(B)-(P(AB)+P(AC)-P(ABC))$

$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$

③ $P(\bar{A}\bar{B}C)=P(C\cdot\overline{A\cup B})=P(C)-P(C(A\cup B))$

$=P(C)-(P(AC)+P(BC)-P(ABC))$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{12}$

$\therefore P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$. □

注意 $P(ABC)\le P(AB)=0$. 概率的单调性.

2. $X\sim P(\lambda)$. $E(X-1)(X-2)$

$=E(X^2-3X+2)$

$=(\lambda^2+\lambda)-3\lambda+2$

$=\lambda^2-2\lambda+2=1$ $\qquad P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$\lambda=1$, $P(X\ge 2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$

$=1-\frac{1^0}{0!}e^{-1}-\frac{1^1}{1!}e^{-1}-\frac{1^2}{2!}e^{-1}$

$=1-(1+1+\frac{1}{2})e^{-1}$

$=1-\frac{5}{2}e^{-1}$. □

3. $F_Z(z)=P(XY\le z)$

$=P(Y=-1)\cdot P(-X\le z)+P(Y=1)\cdot P(X\le z)$

$=p\cdot(1-F_X(-z))+(1-p)F_X(z)$.

$f_Z(z)=p\cdot(-1)f_X(-z)\cdot(-1)+(1-p)\cdot f_X(z)$

$=p\cdot f_X(-z)+(1-p)f_X(z)$.

$=\begin{cases}(1-p)\cdot\lambda e^{-\lambda z}, & z\ge 0\\ p\cdot\lambda e^{\lambda z}, & z<0\end{cases}$ □

4. 记两段中分别为 X_1,X_2, 则 $X=\max(X_1,X_2)$, $Y=\min(X_1,X_2)$.

$F_{(X,Y)}(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$

$=P(\max(X_1,X_2)\le x,\ \min(X_1,X_2)\le y)$

$=P(X_1\ge X_2)\cdot P(X_1\le x,\ \overset{L-X_1}{X_2}\le y)+P(X_1<X_2)\cdot P(\overset{L-X_1}{X_2}\le x,\ X_1\le y)$

$=\frac{1}{2}P(L-y\le X_1\le x)+\frac{1}{2}P(L-x\le X_1\le y)$.

① 若 $x+y<L$, 则 $L-y>x$, $L-x>y$. $F(x,y)=0$.

② 若 $x+y\ge L$. 则 $L-y\le x$, $L-x\le y$.

(1) 若 $x+y\ge L$ 且 $0\le x\le L$, $0\le y\le L$.

则 $0\le L-y\le x\le L$, $0\le L-x\le y\le L$.

从而 $F(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-(L-y)}{L}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y-(L-x)}{L}$

$=\frac{x+y-L}{L}$.

$x<0$. $-x>0$. $L-x>L$.

~~(2)~~ 若 $x+y\ge L$ 且 $x<0$. 此时必有 $y\ge L$.

$F(x,y)=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cancel{P(L-x\le X_1\le L)}=\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{L-(L-x)}{L}=\frac{x}{2L}}$ 0 0

同理, $x+y\ge L$ 且 $y<0$, 此时必有 $x\ge L$.

$F(x,y)=\cancel{\frac{1}{2}\cdot P(L-y\le X_1\le L)+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{y}{2L}}$ 0.

(3). 若 $x+y\ge L$ 且 $x>L$. 此时 y 不确定.

综上, $F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{L}, & 0\le x\le L,\ y>L\\ \frac{y}{L}, & x>L,\ 0\le y\le L\\ \frac{x+y-L}{L}, & 0\le x\le L,\ 0\le y\le L,\ x+y\ge L\\ 1, & x>L,\ y>L\\ 0, & 其它.\end{cases}$

~~$x+y\ge L$ $F(x,y)$~~

~~$x+y<L$~~

$x+y\le L$. $F(x,y)=0$. ①

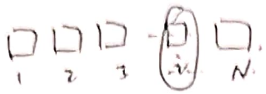
$x+y\ge L$.
- $x<0$. $y\ge L$. $0+0=0$. ②-(2).
- $x>L$. $y\le 0$. $0+0=0$.
- $x>L$. $0\le y\le L$ $\frac{1}{2}P(L-y\le X_1\le L)+\frac{1}{2}(0\le\ldots)=\frac{y}{L}$
- $x>L$ $y>L$. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.
- $0\le x\le L$. $0\le y\le L$ $\frac{x+y-L}{L}$. ②-(1).
- $0\le x\le L$ $y>L$. $\frac{1}{2}P(0\le X_1\le x)+\frac{1}{2}P(L-x\le\ldots)$ $=\frac{x}{2L}+\frac{x}{2L}=\frac{x}{L}$.

$\rho(X,Y)=\rho(X,L-X)$

$=\frac{Cov(X,L-X)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{D(L-X)}}=\frac{-DX}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DX}}=-1$. □

6. n个球 N个盒子 有球的盒子数X的期望EX

假设 $X_i=\begin{cases}1, & 第i个盒子有球\\ 0, & 第i个盒子无球\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,N$. 则 $X=\sum_{i=1}^{N}X_i$



$$P(X_i=0)=\frac{(N-1)^n}{N^n}=\left(1-\frac1N\right)^n.$$

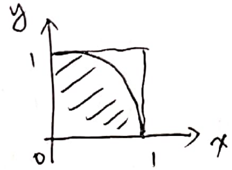
$$P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=1-\left(1-\frac1N\right)^n.$$

$$EX_i=0\times\left(1-\frac1N\right)^n+1\times\left[1-\left(1-\frac1N\right)^n\right]=1-\left(1-\frac1N\right)^n. \quad i=1,2,\cdots,N$$

$$EX=E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=\sum_{i=1}^{N}EX_i=N\left[1-\left(1-\frac1N\right)^n\right].$$ □

7. $Y_1=\begin{cases}4, & X_1^2+X_2^2<1\\ 0, & 其它.\end{cases}$ $Y_2=\begin{cases}4, & X_3^2+X_4^2<1\\ 0, & 其它.\end{cases}$ $\cdots$ 显然 $\{Y_k\}_{k=1}^{n}$ 彼此独立.

$$P(Y_k=4)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<1\\0<x<1\\0<y<1}}1\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}.\qquad P(Y_k=0)=1-\frac{\pi}{4}.$$



则 $EY_k=4\cdot\frac\pi4+0\cdot\left(1-\frac\pi4\right)=\pi$ $\quad EY_k^2=16\cdot\frac\pi4+0\cdot\left(1-\frac\pi4\right)=4\pi$.

$DY_k=EY_k^2-(EY_k)^2=4\pi-\pi^2$.

从而 $E\bar Y=E\left(\frac1n\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)=\frac1n\sum_{k=1}^{n}EY_k=\frac1n\cdot n\pi=\pi$. ✓

$D\bar Y=D\left(\frac1n\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)=\frac1{n^2}\sum_{k=1}^{n}DY_k=\frac1{n^2}\cdot n\cdot(4\pi-\pi^2)=\frac{4\pi-\pi^2}{n}$.

切比雪夫不等式. $P\{|\bar Y-E\bar Y|\le \underbrace{0.1}_{\varepsilon}\}\ge1-\frac{D\bar Y}{0.1^2}=1-\frac{4\pi-\pi^2}{0.01n}=1-\frac{100(4\pi-\pi^2)}{n}\ge0.9$.

$\frac{100(4\pi-\pi^2)}{n}\le0.1$. $\quad n\ge1000(4\pi-\pi^2)=2696.766$. $\quad n=2697$. ✓

中心极限定理. $P\{|\bar Y-E\bar Y|\le0.1\}=P\left\{\left|\frac{\bar Y-E\bar Y}{\sqrt{D\bar Y}}\right|\le\frac{0.1}{\sqrt{D\bar Y}}\right\}=2\Phi\left(\frac{0.1}{\sqrt{D\bar Y}}\right)-1\ge0.9$.

则 $\frac{0.1}{\sqrt{D\bar Y}}=\frac{0.1}{\sqrt{\frac{4\pi-\pi^2}{n}}}=0.1\sqrt{\frac{n}{4\pi-\pi^2}}\ge u_{0.95}$

$\sqrt{\frac{n}{4\pi-\pi^2}}\ge10u_{0.95}$. $\quad n\ge100\cdot u_{0.95}^2\cdot(4\pi-\pi^2)$

$=100\times1.65^2\times(4\pi-\pi^2)=734.1946$

$n=735$ ✓ □

8. $X\sim U(0,\theta)$. $\hat\theta=X_{(n)}$. 若 $T(X_{(n)})$ 是 $\frac1\theta$ 的无偏估计.

则 $ET(X_{(n)})=\frac1\theta$. $\quad f_{X_{(n)}}(x)=n\cdot f(x)\cdot(F(x))^{n-1}$

$=n\cdot\frac1\theta\left(\frac x\theta\right)^{n-1}$, $\quad 0<x<\theta$

从而 $E[T(X_{(n)})]=\int_0^\theta T(x)\cdot n\cdot\frac1\theta\cdot\left(\frac x\theta\right)^{n-1}dx$

$=\frac1{\theta^n}\int_0^\theta n\cdot T(x)\cdot x^{n-1}dx=\frac1\theta$.

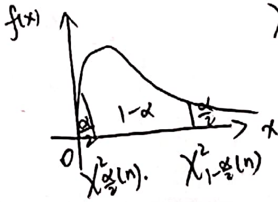
$\int_0^\theta n\cdot T(x)\cdot x^{n-1}dx=\theta^{n-1}$. 左右同时关于 θ 求导.

$n\cdot T(\theta)\cdot\theta^{n-1}=(n-1)\theta^{n-2}$. $\quad T(\theta)=\frac{n-1}{n\theta}$. $\quad T(X_{(n)})=\frac{n-1}{nX_{(n)}}$. □

9. $P\{|X-\mu|<A\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|<\frac A\sigma\right\}=2\Phi\left(\frac A\sigma\right)-1=0.95$. $\quad\frac A\sigma=u_{0.975}$.

$A=\sigma\cdot u_{0.975}$.

$\hat\sigma^2=$ $\quad\mu$已知. σ^2未知. $\quad\chi^2=\frac{nS_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$. 其中 $S_1^2=\frac1n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$



$\chi^2_{\frac\alpha2}(n)\le\frac{nS_1^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{1-\frac\alpha2}(n)$.

$\sqrt{\frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\frac\alpha2}(n)}}\le\sigma\le\sqrt{\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac\alpha2}(n)}}$.

从而A的 $1-\alpha$ 置信区间为:

$\left(\sqrt{\frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\frac\alpha2}(n)}}\cdot u_{0.975},\ \sqrt{\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac\alpha2}(n)}}\cdot u_{0.975}\right)$ 或

$\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac\alpha2}(n)}}\cdot u_{0.975},\ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac\alpha2}(n)}}\cdot u_{0.975}\right)$ □

10. $X_1, X_2, X_3 \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0,\sigma^2)$.

$$\frac{k(X_1+(X_2+X_3))}{|X_2-X_3|} \sim \_\_\_\_ .$$

解：记 $Y_1 = X_2+X_3$, $Y_2 = X_2-X_3$.

则 $Cov(X_2+X_3, X_2-X_3) = DX_2 - Cov(X_2,X_3) + Cov(X_3,X_2) - DX_3$

$= DX_2 - DX_3 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0.$

$\rho(X_2+X_3, X_2-X_3) = 0$. 二维正态分布中，$X_2+X_3$ 与 X_2-X_3 独立同分布于 $N(0,2\sigma^2)$.

且分别与 X_1 也独立.

$X_1+(X_2+X_3) \sim N(0, 3\sigma^2)$.

$X_2-X_3 \sim N(0, 2\sigma^2)$.

则
$$\frac{\dfrac{X_1+(X_2+X_3)}{\sqrt{3}\sigma} \sim N(0,1)}{\sqrt{\left(\dfrac{X_2-X_3}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \Big/ 1} \sim \chi^2(1)} = \frac{X_1+X_2+X_3}{|X_2-X_3|}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \sim t(1)$$

从而 $k = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{k(X_1+X_2+X_3)}{|X_2-X_3|} \sim t(1)$. ▨

二、见正面. 四. 见正面.

三. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1<x<0 \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(1) $F_Y(y) = P(Y\le y) = P(X^2 \le y)$.

$= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$. $y \ge 0$.

$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$. $y \ge 0$.

$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$. $y \ge 0$.

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0\le y\le 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1<y\le 4 \\ 0. & \text{其它}. \end{cases}$$

(2) $Cov(X,Y) = Cov(X,X^2)$

$= EX^3 - EX\cdot EX^2$

$EX = \int_{-1}^{0} x f_X(x)\,dx + \int_0^2 x f_X(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,dx + \int_0^2 \frac{x}{4}\,dx = \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$EX^2 = \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{2}\,dx + \int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$.

$EX^3 = \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{2}\,dx + \int_0^2 \frac{x^3}{4}\,dx$

$= -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$. 则 $Cov(X,Y) = \frac{7}{8} - \frac{1}{4}\times\frac{5}{6}$

$= \frac{2}{3}$.

(3). $F(-\frac{1}{2}, 4) = P(X\le -\frac{1}{2}, Y\le 4) = P(X \le -\frac{1}{2}, X^2 \le 4)$

$= P(-2 \le X \le -\frac{1}{2})$

$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

五. n次测量. μ已知. $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$. $Z_i = |X_i-\mu|$. $i=1,2,\dots,n$.

(1) $F_{Z_1}(z) = P(Z_1\le z) = P(|X_1-\mu|\le z) = P\left(\left|\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right| \le \frac{z}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1$, $z>0$.

$f_{Z_1}(z) = F_{Z_1}'(z) = 2f\left(\frac{z}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{\sigma} = \frac{2}{\sigma}f\left(\frac{z}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2}$

$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$, $z>0$.

(2). $EZ = \int_0^{+\infty} z\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,dz$ 或 $EZ = E|X-\mu| = E\cdot\sigma\cdot\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$.

$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,d\left(\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$.

$\hat{EZ} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{\sigma} = \bar{Z}$. 则 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\bar{Z}$.

(3). $L(\sigma^2; z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i)$

$= \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$, $z_i>0$.

$\ln L(\sigma^2; z_1, z_2, \dots, z_n) = n\ln 2 - n\ln\sqrt{2\pi} - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2$, $z_i>0$.

$\frac{d\ln L}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 0$.

从而 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$, 即 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}$. ▨

△ 两个重要结论. $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + n(\bar{X}-\mu)^2$.

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$.

二、（16分）设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}C(x+y), & 0<x,\ y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求：（1）常数C的值； 2'

（2）边缘密度函数$f_X(x),f_Y(y)$，并判断X,Y是否独立？ 5'

（3）$Z=X+Y$的密度函数$f_Z(z)$； 4'

（4）a取何值时，$E(Y-aX)^2$达到最小？并求其最小值。 5'

解：(1) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 C(x+y)\,dy=C=1$.

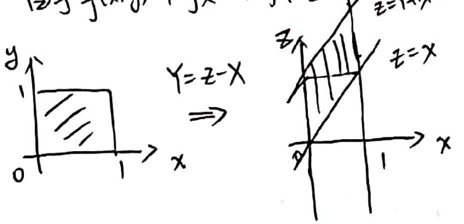
(2). $f(x,y)=x+y,\quad 0<x<1,\ 0<y<1$.

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_0^1(x+y)\,dy=x+\frac{1}{2},\quad 0\le x\le 1$.

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_0^1(x+y)\,dx=y+\frac{1}{2},\quad 0\le y\le 1$.

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，则 X 与 Y 不独立

(3).



$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx$

$$=\begin{cases}\int_{z-1}^{1} z\,dx=z(2-z), & 1\le z\le 2\\ \int_0^z z\,dx=z^2, & 0\le z<1\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

(4). $E(Y-aX)^2=\cancel{[E(Y-aX)]^2+D(Y-aX)}$

$=\int_0^1\int_0^1(y-aX)^2\cdot(x+y)\,dxdy \cdots 1'$

$=\frac{1}{12}(5a^2-8a+5)$.

则 $a=\frac{4}{5}$ 时. $\cdots 2'$

$[E(Y-aX)^2]_{min}=\frac{3}{20}\cdots 2'$

三、（14分）设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)$.

（1）证明：随机变量$Y=F(X)$服从分布$U(0,1)$； 3'

（2）若$X\sim\Gamma(1,\lambda)$，试根据（1）构造关于随机变量X的函数$Z=F(X)$具有分布函数$h(z)=z^n$，$0<z<1$. 并验证； 7'

（3）若X为连续型非负随机变量，证明：$EX=\int_0^{+\infty}[1-F(x)]dx$. 4'

解：(1) 证明：有$0<Y<1$ $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$ 单调不减性.

$=P(X\le F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y.\quad 0<y<1$.

从而 $Y=F(X)\sim U(0,1)$.

(2) 根据 (1). $U=F(X)\sim U(0,1)$. 则 $X=F^{-1}(U)\sim F(x)$. 其中 $U\sim U(0,1)$

2' ① 根据 X 构造 U. $U=1-e^{-\lambda X}\sim U(0,1)$. $X\ge 0$. 于是 $e^{-\lambda X}\sim U(0,1)$

2' ② 根据 U 构造. $h(z)=z^n,\ 0<z<1$. $Z=F^{-1}(U)=z^{\frac{1}{n}}\Big|_{z=U}=U^{\frac{1}{n}}$.

③ 代入. $Z=U^{\frac{1}{n}}=(e^{-\lambda X})^{\frac{1}{n}}=e^{-\frac{\lambda}{n}X}$.

3' 验证：$F_Z(z)=P(e^{-\frac{\lambda}{n}X}\le z)=P(X\ge-\frac{n}{\lambda}\ln z)=1-F_X(-\frac{n}{\lambda}\ln z)$

$=1-(1-e^{-\lambda\cdot(-\frac{n}{\lambda}\ln z)})=z^n,\quad 0<z<1$.

(3). $\int_0^{+\infty}[1-F(x)]\,dx=x(1-F(x))\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-xf(x)\,dx$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-F(x))+EX$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\int_0^x f(x)\,dx\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\int_x^{+\infty}\cancel{f(x)dx}\ f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}x\,f(t)\,dt$

$\le\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}tf(t)$

✓ (3) $\int_0^{+\infty}(1-F(t))\,dt$

4' $=\int_0^{+\infty}\left(1-\int_0^t f(x)\,dx\right)dt$

$=\int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty}f(x)\,dx\,dt$

$=$ 重积分换序

$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x f(x)\,dt$

$=\int_0^{+\infty}xf(x)\,dx$

$=EX$.

四、(9分) 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

(1) 求常数k_1，使得$\hat{\sigma}^2 = k_1 \sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计； 3'

(2) 求常数k_2，使得$\hat{\sigma} = k_2 \sum_{i=1}^{n}\left|X_i - \overline{X}\right|$为$\sigma$的无偏估计； 3'

(3) 求常数k_3，使得$\hat{\mu}^2 = \overline{X}^2 - k_3 S^2$为$\mu^2$的无偏估计. 3'

解: (1) $E\hat{\sigma}^2 = k_1 \sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1}-X_i)^2$

$= k_1 \sum_{i=1}^{n-1} [E(X_{i+1}-X_i)]^2 + D(X_{i+1}-X_i)]$.

$= k_1 \cdot 2(n-1)\sigma^2 = \sigma^2$. 则 $k_1 = \frac{1}{2(n-1)}$.

(2). $E\hat{\sigma} = k_2 \sum_{i=1}^{n} E|X_i - \overline{X}|$

$D(X_i - \overline{X}) = DX_i + D\overline{X} - 2\mathrm{cov}(X_i, \overline{X})$

$= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2\cdot\frac{\sigma^2}{n}$

$= \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

$= k_2 \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma \cdot \sum_{i=1}^{n} E\left|\frac{X_i-\overline{X}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma}\right|$.

$= k_2 \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sigma n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma$.

则 $k_2 = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$

(3) $E\hat{\mu}^2 = E\overline{X}^2 - k_3 ES^2$

$= (E\overline{X})^2 + D\overline{X} - k_3 ES^2$

$= \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - k_3\sigma^2 = \mu^2$. 则 $k_3 = \frac{1}{n}$. 四

五、(19分) 设总体X的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}, \lambda > 0, -\infty < \theta < +\infty.$$

其中λ, θ为未知参数.

求: (1) λ, θ的矩估计量$\hat{\lambda}_1$, $\hat{\theta}_1$； 3' 3'

(2) λ, θ的极大似然估计量$\hat{\lambda}_2$, $\hat{\theta}_2$； 4' 4'

(3) 若已知$P\{X > \nu_{0.5}\} = 0.5$，试根据$\hat{\lambda}_2$, $\hat{\theta}_2$求估计量$\hat{\nu}_{0.5}$. 5'

(3). $0.5 = P(X > \nu_{0.5}) = \int_{\nu_{0.5}}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}} dx$

$= e^{\frac{\theta - \nu_{0.5}}{\lambda}}$. 则 $\nu_{0.5} = \theta + \lambda \ln 2$.

$\hat{\nu}_{0.5} = \hat{\theta}_2 + \hat{\lambda}_2 \ln 2 = X_{(1)} + (\overline{X} - X_{(1)}) \cdot \ln 2$.

$= \ln 2 \cdot \overline{X} + (1-\ln 2) \cdot X_{(1)}$ 四

解: (1) $EX = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} x e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}} dx \overset{z=x-\theta}{\underset{dz=dx}{=\!=}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda}(z+\theta) e^{-\frac{z}{\lambda}} dz$

$= \int_{0}^{+\infty} z \cdot \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}z}\right) dz + \theta \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{z}{\lambda}} dz$

$= \lambda + \theta$.

$EX^2 = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda}(z+\theta)^2 e^{-\frac{z}{\lambda}} dz$

$= \int_{0}^{+\infty} z^2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}z}\right) dz + 2\theta \int_{0}^{+\infty} z \cdot \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}z}\right) dz + \theta^2 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e$

$= ((\lambda)^2 + \lambda^2) + 2\theta \cdot \lambda + \theta^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda\theta + \theta^2$.

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda\theta + \theta^2 - (\lambda^2 + 2\lambda\theta + \theta^2) = \lambda^2$.

则 $\hat{EX} = \hat{\lambda}_1 + \hat{\theta}_1 = \overline{X}$, $\hat{DX} = \hat{\lambda}_1^2 = M_2^*$. 从而 $\begin{cases} \hat{\lambda}_1 = \sqrt{M_2^*} \\ \hat{\theta}_1 = \overline{X} - \sqrt{M_2^*} \end{cases}$

(2). $L(\lambda, \theta; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$, $x_i \geq \theta$.

$\ln L = -n\ln\lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)$, $x_i \geq \theta$. L关于θ递增.

$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\lambda} = 0 \text{ 无解.} \end{cases}$

$x_{(n)} \geq x_{(n-1)} \geq \cdots \geq x_{(1)} \geq \theta$

$\hat{\theta}_2 = X_{(1)}$. $\hat{\lambda}_2 = \overline{X} - X_{(1)}$