
第9讲

二维数据的插值与拟合模型

□ 常庚哲 丁友东

如果我们要描绘一个方桌或一座建筑物的形状,我们只要测量出其角点的位置与高度,用直线连接角点就行了.但如果要我们描绘出一个不规则的曲面,如一座山峰,一片海床面等等,问题就不会那么简单了.测量出足够密的样本点的高度值,尤其是有特殊特征,如山脊、峡谷等位置的高度值,用直线连接相邻样本点,在图纸上或计算机上就能恢复曲面的形状,但无疑这个工作量是相当巨大的.在这一章里,我们讨论一个更一般的情形:在一个平面区域里,随机地测量一些样本点的高度值,如何描绘出原有的空间曲面?这类问题是典型的二维数据的插值与拟合建模问题,它有两个基本特点:一是样本点是很有有限的,也就是并不“足够密”,因此无法直接通过样本点恢复出曲面的形状,需要设计出合理的模型,通过已知样本点,计算出其他未知点上的高度值;二是样本点是随机分布的,并不能现成地套用一维的建模方法,需要克服如何从“随机样本点”到“规则样本点”的过渡.同时,也正是因为这两个特点,建模的方法具有很大的灵活性.

在这一讲里,我们仍然从现实问题入手,讨论 AMCM-86 的 A 题的建模方法,从中可以领会到二维数据的拟合这一类问题的建模方法.内容是这样安排的,第 1 节先给出一些必备的数学理论

知识,第2节提出问题并作出合理的假设,同时对问题进行分析,最后在第3节,我们给出一种解法.

§1 双三次样条函数

设 $R: [a, b] \times [c, d]$ 是 xy 平面上的一个矩形区域. 在 x 轴和 y 轴上分别取定分割

$$\begin{aligned} \Delta x: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \\ \Delta y: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d. \end{aligned} \quad (1)$$

由此导出 R 上的一个矩形网格分割 $\Delta = \Delta x \times \Delta y$, 将 R 分成 mn 个子矩形

$$R_{ij}: [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

它的两条邻边长分别是

$$\begin{aligned} h_i &= x_i - x_{i-1} (i=1, \cdots, n), \\ g_j &= y_j - y_{j-1} (j=1, \cdots, m). \end{aligned}$$

直线 $x = x_i (i=0, 1, \cdots, n)$ 和直线 $y = y_j (j=0, 1, \cdots, m)$ 称为 Δ 分割的两族网格线. 网格线的交点 $(x_i, y_j) (i=0, 1, \cdots, n, j=0, 1, \cdots, m)$ 称为 Δ 分割的节点, 总共有 $(m+1)(n+1)$ 个节点, 见图 9-1.

设函数 $S(x, y)$ 定义在矩形域 R 上且满足下列条件:

(1) 在每个子矩形 $R_{ij} (i=1, \cdots, n; j=1, \cdots, m)$ 上, $S(x, y)$ 是一个关于 x 和 y 都是三次的多项式函数, 即

$$S(x, y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 b_{kl}^{ij} (x - x_{i-1})^k (y - y_{j-1})^l;$$

(2) 在整个 R 上, 函数 $S(x, y)$ 的偏导数 $\partial^{+\beta} S(x, y) / \partial x^\alpha \partial y^\beta (\alpha, \beta=0, 1, 2)$ 都是连续的.

则称 $S(x, y)$ 为双三次样条函数. 如果给定一数组 $\{s_{ij}\} (i=0, 1, \cdots, n; j=0, 1, \cdots, m)$, 双三次样条函数 $S(x, y)$ 还满足插值条件 $S(x_i, y_j) = s_{ij} (i=0, 1, \cdots, n; j=0, 1, \cdots, m)$, 就称 $S(x, y)$ 为插值双

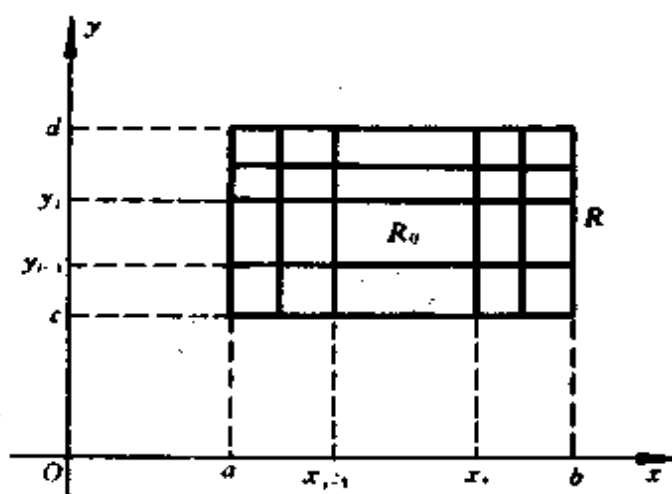


图 9-1 矩形分割 Δ

三次样条函数.

实际上,双三次样条函数是由两个一维三次样条函数作直积产生的.对任意固定的 $y_0 \in [c, d]$, $S(x, y_0)$ 是关于 x 的三次样条函数,同理,对任意固定的 $x_0 \in [a, b]$, $S(x_0, y)$ 是关于 y 的三次样条函数. $n+1$ 个节点的一维三次样条函数的全体构成 $(n+3)$ 维线性空间,所以要求出插值三次样条函数除了节点插值外,还要加上两个边界条件.对双三次样条函数,关于分割 Δ 的双三次样条函数的全体组成了 $(m+3)(n+3)$ 维线性空间,现在插值条件只有 $(m+1)(n+1)$ 个,还差 $2(m+1)+2(n+1)+4$ 个边界条件.常用的边界条件是:

(1) 矩形 R 的四条边界上所有节点处的一阶法向偏导数

$$\begin{cases} p_{\alpha j} = S'_x(x_\alpha, y_j) \quad (j=0, 1, \dots, m; \alpha=0, n), \\ q_{i\beta} = S'_y(x_i, y_\beta) \quad (i=0, 1, \dots, n; \beta=0, m). \end{cases} \quad (3)$$

(2) 矩形 R 的四个角点处的二阶混合偏导数

$$r_{\alpha\beta} = S''_{xy}(x_\alpha, y_\beta) \quad (\alpha=0, n; \beta=0, m). \quad (4)$$

给出了上面的条件后,我们有

定理 给定 xy 平面上的矩形区域 R , 分割 Δ 和 $(m+3)(n+3)$ 个常数 $s_{ij}, p_{\alpha j}, q_{i\beta}, r_{\alpha\beta} (i=0, 1, \dots, n; j=0, 1, \dots, m; \alpha=0, n; \beta=0, m)$

$=0, m)$, 则存在唯一的关于分割 Δ 的插值三次样条函数 $S(x, y)$ 满足插值条件及边界条件(3)和(4).

这个定理的证明并不难, 但属纯数学范畴, 在这我们不再引述. 我们关心的是如何求出插值双三次样条函数的具体表达式.

由定义, $S(x, y)$ 限制在单个子矩形 R_{ij} 上时为双三次多项式. 记 R_{ij} 四个顶点上的函数值为 $s_{ij}, s_{i-1,j}, s_{i,j-1}, s_{i-1,j-1}$, 两个方向的一阶偏导数为 $p_{i-1,j-1}, p_{i-1,j}, p_{i,j-1}, p_{ij}$ 和 $q_{i-1,j-1}, q_{i-1,j}, q_{i,j-1}, q_{ij}$ 以及二阶混合偏导数为 $r_{i-1,j-1}, r_{i-1,j}, r_{i,j-1}, r_{ij}$, 也就是给定了四阶方阵

$$[C]_{ij} = \begin{bmatrix} s_{i-1,j-1} & s_{i-1,j} & q_{i-1,j-1} & q_{i-1,j} \\ s_{i,j-1} & s_{ij} & q_{i,j-1} & q_{ij} \\ p_{i-1,j-1} & p_{i-1,j} & r_{i-1,j-1} & r_{i-1,j} \\ p_{i,j-1} & p_{ij} & r_{i,j-1} & r_{ij} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

又记

$$[(x-x_{i-1})] = [(x-x_{i-1})^3, (x-x_{i-1})^2, (x-x_{i-1}), 1],$$

$$[(y-y_{j-1})] = [(y-y_{j-1})^3, (y-y_{j-1})^2, (y-y_{j-1}), 1].$$

易验证, R_{ij} 上的双三次多项式可以唯一地写成

$$S(x, y) = [(x-x_{i-1})][A(h_i)][C]_{ij}[A(g_j)]^T[(y-y_{j-1})]^T, \quad (x, y) \in R_{ij}, \quad (6)$$

其中符号 T 表示矩阵的转置, $[A(h_i)]$ 为 4×4 矩阵

$$[A(h_i)] = \begin{bmatrix} 2/h_i^3 & -2/h_i^3 & 1/h_i^2 & 1/h_i^2 \\ -3/h_i^2 & 3/h_i^2 & -2/h_i & -1/h_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

这是因为从(6)可导出

$$s_{ij} = S(x_i, y_j), p_{ij} = S'_x(x_i, y_j), q_{ij} = S'_y(x_i, y_j), r_{ij} = S''_{xy}(x_i, y_j),$$

满足前面条件. 这样, $S(x, y)$ 在子矩形 R_{ij} 上的表示式(6)完全决定于矩阵 $[C]_{ij}$. 对 $[C]_{ij}$, 左上角 4 个元素 s_{ij} 由插值条件直接给出,

剩下的 12 个元素就要通过边界条件解连续性方程求得。

对于一元三次样条函数插值,我们可导出 m 连续性方程和 M 连续性方程,并讨论了其具体求解算法(见第 8 讲或有关书籍),这儿从略,只介绍算法思路。

首先,固定 $y=y_j(j=0,1,\cdots,m)$,则函数 $S(x,y_j)$ 是一维三次样条函数。如仍然记 $S(x_i,y_j)=s_{ij}$, $S'_x(x_i,y_j)=p_{ij}$, $S'_y(x_i,y_j)=q_{ij}$, $S''_{xy}(x_i,y_j)=r_{ij}$,则由 m 连续性方程有

$$\lambda_i p_{i-1,j} + 2p_{ij} + \mu_i p_{i+1,j} = 3 \left[\lambda_i \frac{s_{ij} - s_{i-1,j}}{h_i} + \mu_i \frac{s_{i+1,j} - s_{ij}}{h_{i+1}} \right] \\ (i=1,2,\cdots,n-1), \quad (8)$$

其中 $\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$, $\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$ 。

在边界上,我们已知切向 p_{0j} 和 p_{nj} ,由此即可解出 $p_{ij}(i=0,1,\cdots,n)$ 。分别对 $j=0,1,\cdots,m$,求解上 m 连续性方程就可求出 R 的所有节点 (x_i,y_j) 处沿 x 方向的一阶偏导数 $p_{ij}(i=0,1,\cdots,n;j=0,1,\cdots,m)$ 。

其次,固定 $x=x_i(i=0,1,\cdots,n)$, $S(x_i,y)$ 也是三次样条函数,由边界条件 q_{i0} 和 q_{im} 及 m 连续性方程

$$\lambda_j^* q_{i,j-1} + 2q_{ij} + \mu_j^* q_{i,j+1} = 3 \left[\lambda_j^* \frac{s_{ij} - s_{i,j-1}}{g_j} + \mu_j^* \frac{s_{i,j+1} - s_{ij}}{g_j} \right] \\ (j=1,2,\cdots,m-1). \quad (9)$$

式中 $\lambda_j^* = g_{j+1}/(g_j + g_{j+1})$, $\mu_j^* = g_j/(g_j + g_{j+1})$,即可解出 R 上所有节点 (x_i,y_j) 处沿 y 方向的一阶偏导数 $q_{ij}(i=0,1,\cdots,n;j=0,1,\cdots,m)$ 。

最后,我们来求解 r_{ij} 。在 R 的两条边界 $y=y_0$ 和 $y=y_m$ 上,函数 $S'_y(x,y_0)$ 和 $S'_y(x,y_m)$ 是关于 x 的三次样条函数,它们在各节点 x_i 处的函数值(实则为 $S(x,y_0)$ 和 $S(x,y_m)$ 的关于 y 的一阶偏导数值) $S'_y(x_i,y_0)=q_{i0}$, $S'_y(x_i,y_m)=q_{im}$ 已由(9)式求出,同样可导出 $S'_y(x,y_0)$ 和 $S'_y(x,y_m)$ 关于 x 的 m 连续性方程

$$\lambda_i r_{i-1,\beta} + 2r_{i\beta} + \mu_i r_{i+1,\beta} = 3 \left[\lambda_i \frac{q_{i\beta} - q_{i-1,\beta}}{h_i} + \mu_i \frac{q_{i+1,\beta} - q_{i\beta}}{h_{i+1}} \right] \\ (i=1, 2, \dots, n-1), \beta=0, m. \quad (10)$$

而边界条件 $r_{0\beta}$ 和 $r_{n\beta}$ ($\beta=0, m$) 已知, 由此即可解出边界上的 r_{i0} 和 r_{im} ($i=0, 1, \dots, n$). 然后固定 $x=x_i$, 同理函数 $S'_x(x_i, y)$ 是关于 y 的三次样条函数, $S'_x(x_i, y_j) = p_{ij}$ 已由(8)式求得, 由 $S'_x(x_i, y)$ 关于 y 的 m 连续性方程

$$\lambda_j^* r_{i,j-1} + 2r_{ij} + \mu_j^* r_{i,j+1} = 3 \left[\lambda_j^* \frac{p_{ij} - p_{i,j-1}}{g_j} + \mu_j^* \frac{p_{i,j+1} - p_{ij}}{g_{j+1}} \right] \\ (j=1, 2, \dots, m-1) \quad (11)$$

及(10)式求出的 r_{i0} 和 r_{im} , 就可解出 r_{ij} ($j=0, 1, \dots, m$). 这样就可确定出 R 的所有节点 (x_i, y_j) 处的二阶混合偏导数 r_{ij} ($i=0, 1, \dots, n; j=0, 1, \dots, m$).

至此, 所有的 s_{ij} , p_{ij} , q_{ij} 和 r_{ij} 均已求得, 再由(6)式就可得到 $S(x, y)$ 在每个子矩形 R_{ij} 上的表达式.

根据上面的讨论, 很容易设计出求 $S(x, y)$ 的具体算法.

§ 2 问题、假设与分析

对于二维数据的插值与拟合问题, 首先要考虑两个问题: 一是二维区域是任意区域还是规则区域, 目前我们讨论的数学方法基本上是基于规则区域的. 对于不规则区域, 就要经过预处理, 划分为规则区域或扩充为规则区域来讨论; 二是给定的数据是有规律分布的数据还是散乱的、随机分布的数据. 对于前者, 方法较多, 也比较成熟. 而对于后者, 没有固定的方法, 比较灵活, 但常常采用先从随机分布数据依一定规律恢复出规则分布点上的数据, 转化为前者用经典方法讨论的方法. 在这儿, 恢复规则点上的数据的方法多种多样, 只能充分应用已知信息和特有特征进行处理. 为了详细

地讲解二维数据拟合的建模方法,我们选用 AMCM-86A 题来具体讨论.

1. AMCM-86A 题 水道测量数据

表 9-1 给出了在以码为单位的直角坐标为 X, Y 的水面一点处以英尺计的水深 Z . 水深数据是在低潮时测得的.

表 9-1 水道测量数据在低潮时测得的水深

X (码)	Y (码)	Z (英尺)	X (码)	Y (码)	Z (英尺)
129.0	7.5	4	157.5	-6.5	9
140.0	141.5	8	107.5	-81.0	9
108.5	28.0	6	77.0	3.0	8
88.0	147.0	8	81.0	56.5	8
185.5	22.5	6	162.0	84.0	4
195.0	137.5	8	117.5	-38.5	9
105.5	85.5	8	162.0	-66.5	9

船的吃水深度为 5 英尺. 在矩形区域 $(75, 200) \times (-50, 150)$ 里的哪些地方船要避免进入.

2. 假设

由题目给出的信息是很少的,除了 14 个位置的水深外一无所知. 显然,题目要求我们找出水深不到 5 英尺的区域. 为了讨论的方便,下面两个假设是合理的:

(1) 所给数据是准确的;

(2) 讨论区域的海底曲面是光滑的,更确切地说,可以认为曲面的一阶、二阶导数是连续的. 因为我们可以认为讨论区域为浅水海域,由于长期的海水水流作用,形成的是以砾石或沙为主要组成部分的海底,不存在珊瑚礁、水底峡谷、山脊等不可意料的突变地

形.

另外, 只从 14 个已知数据点无法直接恢复曲面, 还必须从已知点出发, 推测出相邻区域位置上的水深值. 其中应该遵循的准则显然与地球科学 (geoscience) 相关, 但目前并无统一的推测方法, 总的来说, 我们给出如下第三条假设是较为合理的.

(3) 水深是一个按区域来划分的变量, 在某个位置的水深与其周围区域的水深是相互依赖的, 但这种依赖作用随距离的增大而减小. 就我们讨论的问题来说, 每一个给定数据点影响周围的每一个未知点, 一个给定数据点离未知点越近, 作用就越大.

3. 问题分析

根据假设, 海底曲面是连续光滑的, 不存在山崖、峡谷等突变地形, 很自然的想法是用某种光滑的拟合曲面去逼近已知的 14 个数据点, 例如二维 Lagrange 插值, 双三次样条函数等. 但要应用这些数学经典拟合方法, 我们必须知道 X - Y 平面里一个规则划分, 即一个矩形格子划分的节点上的水深值, 而我们只知 14 个随机分布的数据点, 所以必须由假设三给每一个格点分配一个水深值. 另一方面, 为了画出一个曲面, 实际上我们采用的仍是“以直代曲”的方法, 只要格点的密度足够大, 用直线连结各相邻格点的数据点, 即可大致反映曲面的形状. 因此, 也可以直接将讨论区域进行分割, 利用假设三求出各格子节点的水深值而略去用光滑曲面拟合的过程. 最后, 对拟合曲面进行等值线求交线, 深度小于 5 英尺的区域就是所要求的. 综上所述, 依据对假设三的具体的处理方式的不同与直接求格子节点值还是用光滑曲面拟合的选择的不同, 有不同的建模方法. 下面我们试提出其中两种方法.

(1) 反距离平方格式与双三次样条拟合

为了采用双三次样条函数插值, 根据第 1 节的介绍, 我们必须有一个矩形区域 $(75, 200) \times (-50, 150)$ 的矩形分割, 也就是一个

格子. 最简单的方法是将已知 14 个数据点的 X, Y 坐标分别依从小到大排列组成 X 方向和 Y 方向的一个分割(分别加上区间的两个端点), 从而组成一个不等距的分别有 16 个节点的分割(因为有两个数据点的 Y 坐标超出了 -50 的范围, 我们把矩形区域扩展为 $((75, 200) \times (-100, 150))$).

对于上面取定的分割, 我们只知其中 14 个节点的深度值, 所以必须求出其他节点的深度值. 由于我们对海底曲面所知不多, 只知逻辑上每个已知数据点在未知节点上均有一定的影响, 且近距离已知点比远距离已知点对未知点的深度影响大, 为此, 我们采用加权平均格式, 用带有距离平方的逆权来表示对近距离已知点有更重要的作用. 但是, 仅用一个加权平均逼近未知点并不能反映已知点的趋向, 例如, 考虑一个一维例子: 一条直线上有两个已知点 Q_1 和 Q_2 , Q_2 的水深为 8 米, Q_1 在 Q_2 右边 4 米, 有水深 4 米, G 点在 Q_1 右边 4 米, 推测 Q_1, Q_2 两点对 G 的影响. 人们自然希望水深的变化是有规律的, G 应受 Q_1 影响更大, 且呈现相似的变化规律, 因此, G 的水深应小于 4 米, 但如记 Z_G 为 G 点的水深, 用加权平均法计算就有

$$Z_G = \frac{Z_{Q_1} \cdot \frac{1}{\overline{GQ_1}^2} + Z_{Q_2} \cdot \frac{1}{\overline{GQ_2}^2}}{\frac{1}{\overline{GQ_1}^2} + \frac{1}{\overline{GQ_2}^2}} = 4.8(\text{米}),$$

其中 \overline{AB} 表示 A, B 两点的距离, $Z_G = 4.8$ 米与期望是相反的, 所以必须对加权平均格式加以修正.

我们假定任两个给定点之间的深度变化对未知点的深度均构成影响, 反映了深度变化的线性趋势. 为此, 对推测未知点的水深的加权平均格式中, 引入趋向项. 而且由于近距离点影响更大, 因而水深变化趋势近距离点作用更强. 对于一维的情形, 前面例子中的 Z_G 的计算格式作如下修正:

$$Z_G = \frac{Z_{Q_1} \cdot \frac{1}{\overline{GQ_1}^2} + Z_{Q_2} \cdot \frac{1}{\overline{GQ_2}^2} + Z_{Q_1 Q_2} \cdot \frac{1}{\overline{GQ_1}^2 + \overline{Q_1 Q_2}^2}}{\frac{1}{\overline{GQ_1}^2} + \frac{1}{\overline{GQ_2}^2} + \frac{1}{\overline{GQ_1}^2 + \overline{Q_1 Q_2}^2}},$$

其中 $\overline{Q_1 Q_2}$ 称为已知节点分离距离, $Z_{Q_1 Q_2}$ 为 Q_1, Q_2 水深对 G 的线性趋势水深值,由水深的变化率易算得 $Z_{Q_1 Q_2} = 0$,从而有 $Z_G = 3.4$ 米,这样的结果是较为合理的。

对于二维的区域, G 点不在 $\overline{Q_1 Q_2}$ 线上,我们从 G 点向 $\overline{Q_1 Q_2}$ 的连线上作一垂线,交于 P 点, Q_1, Q_2 点对 P 点的影响同一维情形,而 G 离 P 越近,越接近于一维情形, G 离 P 越远,影响就越小,所以加权因子还要体现在反比于 \overline{GP} 的某种方式上,例如,我们这时采用

$$Z_G = \frac{Z_{Q_1} \cdot \frac{1}{\overline{GQ_1}^2} + Z_{Q_2} \cdot \frac{1}{\overline{GQ_2}^2} + Z_{Q_1 Q_2 P} \cdot \frac{1}{\overline{GP}^2 + \overline{GQ_1}^2 + \overline{Q_1 Q_2}^2}}{\frac{1}{\overline{GQ_1}^2} + \frac{1}{\overline{GQ_2}^2} + \frac{1}{\overline{GP}^2 + \overline{GQ_1}^2 + \overline{Q_1 Q_2}^2}}.$$

综合起来,我们作出了如下推测:

① 每一个已知点数据均对每一未知点水深以反比于距离平方方式产生影响;

② 对任两个已知数据点之间的水深变化,对每一未知点均构成影响,其对某一特定点的水深变化的作用沿这两个特定已知点之间的直线线性传播;

③ 任两个已知数据点的水深的变化对特定未知点的水深的影响依赖于三个距离:

- 1° 特定点与连结已知点的直线间的垂直距离;
- 2° 最近的已知点与特定未知点间的距离;
- 3° 两个已知数据点间的分离距离.

如果我们记 Q_1, \dots, Q_N 为已知数据点的位置, G 为未知节点, P_{ij}^G 为 G 到 Q_i, Q_j 连线的垂线与连线的交点, $Z(Q_i, Q_j, G)$ 为 $Q_i,$

Q_i 的水深变化对 G 点构成的趋势水深, 并规定 $Z(Q_i, Q_j, G)$ 即为 Q_i 点的水深, 则有计算公式

$$Z_G = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Z(Q_i, Q_j, G) \cdot \frac{1}{\overline{GP_{ij}^G} + \overline{Q_i G}^2 + \overline{Q_i Q_j}^2}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\overline{GP_{ij}^G} + \overline{Q_i G}^2 + \overline{Q_i Q_j}^2)^{-1}}$$

这儿我们约定了 $i \neq j$ 时, Q_i 比 Q_j 离 G 更近, 而 $i = j$ 时, $\overline{GP_{ij}^G} = \overline{Q_i Q_j} = 0$

依照上式就可以算出所有未知格点上的水深值, 然后用第一节中介绍的双三次样条插值方法(规定边界上的一阶偏导数和二阶混合偏导数为 0)就可求出海底拟合曲面。

(2) 极小曲率差分迭代方法

由前面的分析, 我们可以直接对区域作一较细的分割, 求出分割节点上的水深值, 使该区域海底能被直接描绘, 而不需经过光滑曲面拟合。由于海水的自然腐蚀作用, 海底曲面总是趋向于形成一个总曲率极小的地形, 同时, 为了讨论的方便, 对讨论区域进行分割(等距分割)后, 我们把不在节点上的已知数据点作一微小修正, 移至最靠近的节点上, 由曲面的连续性, 我们认为这么做是不会太大地影响讨论的结果的。

首先, 对讨论区域作一矩形分割, 因为所给数据有两个越出范围, 我们改为对 $(75, 200) \times (-100, 150)$ 进行分割, 每 5 码为一个节点, 把区域分成由 25×50 节点组成的格子。同时, 对所给已知数据作一修改, 如表 9-2。

其次, 为了得到差分方程, 我们改用一个与样条拟合等价的微分方程, 这个微分方程可从极小化曲率和描述一张薄纸在点力作用下的行为中导出。

表 9-2

原始坐标		调整坐标		水 深	原始坐标		调整坐标		水 深
X	Y	X	Y	Z	X	Y	X	Y	Z
129.0	7.5	130.0	10.0	4	157.5	-6.5	160.0	-5.0	9
140.0	141.5	140.0	140.0	8	107.5	-81.0	110.0	-80.0	9
108.5	28.0	110.0	30.0	6	77.0	3.0	75.0	5.0	8
88.0	147.0	90.0	145.0	8	81.0	56.5	80.0	55.0	8
185.5	22.5	185.0	25.0	6	162.0	84.0	160.0	85.0	4
195.0	137.5	195.0	140.0	8	117.5	-38.5	120.0	-40.0	9
105.5	85.5	105.0	85.0	8	162.0	-66.5	160.0	-65.0	9

令 u 表示坐标为 (x, y) 处的水深, f_n 为在点 (x_n, y_n) 处的点力, $n=1, \dots, N$. 在二维的情形, 微分方程为

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \begin{cases} f_n, & x=x_n, y=y_n; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

边界条件包括矩形域四条边上作用力为零, 切线零混合矩及 $u(x_n, y_n) = w_n, n=1, \dots, N$ 为已知数据. 海底曲面 $u(x, y)$ 的总平方曲率为

$$C(u) = \iint \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dx dy,$$

离散化后有

$$C = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (C_{ij})^2,$$

其中 C_{ij} 为 (x_i, y_j) 处的曲率. 离散化后, C_{ij} 为 u_{ij} 及其相邻格点值的函数, 二维时, 最简单的曲率逼近表示式是(内点上)

$$C_{ij} = (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij})/h^2,$$

其中 h 为分割节点间距, 这儿 h 为 5 码. 在边界和角点上 C_{ij} 还有

其他表示式.

极小化总曲率,就是让 u_{ij} 处的曲率 C_{ij} 的导数为零,例如在内点上得到关于 u_{ij} 的差分方程

$$u_{i+2,j} + u_{i,j+2} + u_{i-2,j} + u_{i,j-2} + 2(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - 8(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + 20u_{ij} = 0.$$

最后,把已知数据按调整后坐标代入差分方程中,把所有的差分方程按 u_{ij} 写成矩阵形式 $AU=b$. 我们并不直接解矩阵线性方程组,而是改写为迭代形式,先给定 $U=\{u_{ij}\}$ 一个初值,进行迭代,直至其一致误差小于某精度为止. 然后把最后得到的 $\{u_{ij}\}$ 描绘在坐标图上或按“以直代曲”的计算机绘图法画成曲面形状就得到海底曲面的轮廓.

§ 3 水道测量数据的 IDW 解法

根据假设,我们应该用低次的光滑曲面去拟合已知数据,例如双三次样条函数. 但是,已知数据是随机分布的,因此必须先由已知数据推测出讨论区域的规则分割节点上的水深值. 在前一节中讨论了采用反距离平方格式来产生这些规则节点的值,这儿我们改用一种地球科学中用得较多的 IDW (inverse distance weighting) 方法.

1. 首先扩大讨论区域为 $(75, 200) \times (-100, 150)$, 作 5×5 的正规等距分割, X, Y 方向的节点步长分别为 25 码和 50 码, 记节点位置及其水深值为 (X_i, Y_j) 和 Z_{ij} . ($i=0, 1, \dots, 5, j=0, 1, \dots, 5$).

2. IDW 方法是地球科学中常用的计算机插值技术,最早可见于 60 年代的地质轮廓描述和矿产探测的有关文献中. IDW 的基本思想是估计已知数据点对推测点的影响,假定推测点的值为周围已知点的值的线性组合. 由前面假定,每个已知点对推测点的影响反比于它们的距离的某种方式,这儿我们用距离的 p 次方.

设已知点 (x_i, y_i) 的值为 $z_i (i=1, \dots, N)$, 推测点 (x, y) 的值为 z , 则

$$z = \sum_{i=1}^N C_i \cdot z_i,$$

其中 $C_i = K/D_i^p, 1/K = \sum_{i=1}^N 1/D_i^p, D_i$ 为点 (x, y) 和点 (x_i, y_i) 之间的距离, 这儿的 K 起着规范化的作用。

对于用 IDW 推测出的未知点的值, 显然在已知点的值的范围之内, 因此, 只有靠近已知点的附近才会出现极值情况. 上式中的 p 反映了未知点对已知点的偏倚情况, p 越大, 表示未知点的值受近距离点的值的影响越大(相对于远距离点). 在我们这儿, $(x_i, y_i), z_i (i=1, \dots, 14)$ 都已给定, 由上式就可计算出分割节点 (x_i, y_j) 处的水深值 $Z_{ij} (i, j=0, 1, \dots, 5)$. 例如, 我们取 $p=3$, 就可得到 $Z_{ij} (i, j=0, 1, \dots, 5)$ (见表 9-3).

表 9-3 Z_{ij} 英尺

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	8.73	8.32	8.00	7.97	7.77	7.99
1	8.94	8.78	6.87	7.22	7.92	7.99
2	8.88	8.91	4.21	6.38	7.37	7.95
3	8.79	8.79	8.54	5.82	4.88	7.97
4	8.75	8.80	7.91	5.80	4.77	7.85
5	8.52	8.31	6.61	6.06	6.49	7.97

3. 取自然边界条件, 求插值双三次样条函数 $z(x, y)$. 根据第 1 节的讨论, 可求得分割节点上的一阶偏导数、二阶混合偏导数 p_{ij}, q_{ij} 和 $r_{ij} (i, j=0, 1, \dots, 5)$ 分别如表 9-4、表 9-5、表 9-6 所示. 最后可得到三次样条拟合的海底曲面为图 9-2, 其等值线图为图 9-3, 其中阴影部分就是水深不大于 5 英尺的区域, 轮船应避免进入.

表 9-4 p_{ij} 值

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0.006 0	0.018 9	-0.126 6	-0.040 5	0.006 4	-0.001 3
2	-0.005 9	-0.004 8	0.051 7	-0.028 7	-0.073 7	0.000 6
3	-0.000 4	0.001 6	0.120 0	-0.012 8	-0.076 4	-0.003 4
4	-0.008 0	-0.014 8	-0.087 9	0.010 4	0.067 4	0.000 8
5	0	0	0	0	0	0

表 9-5 q_{ij} 值

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	0	-0.010 5	-0.001 8	-0.003 3	0.001 1	0
1	0	-0.025 6	-0.021 9	0.019 6	0.006 7	0
2	0	-0.061 0	-0.036 2	0.053 9	0.010 1	0
3	0	0.004 0	-0.030 8	-0.058 9	0.047 0	0
4	0	-0.004 8	-0.031 3	-0.050 1	0.043 3	0
5	0	-0.021 7	-0.027 8	-0.002 2	0.029 2	0

表 9-6 r_{ij}

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	-0.001 7	-0.001 0	0.002 2	0	0

续 表

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5
2	0	0.000 9	-0.000 1	-0.002 1	0.001 0	0
3	0	0.001 8	0.000 1	-0.003 2	0.000 9	0
4	0	-0.001 2	0.000 1	0.002 5	-0.000 8	0
5	0	0	0	0	0	0

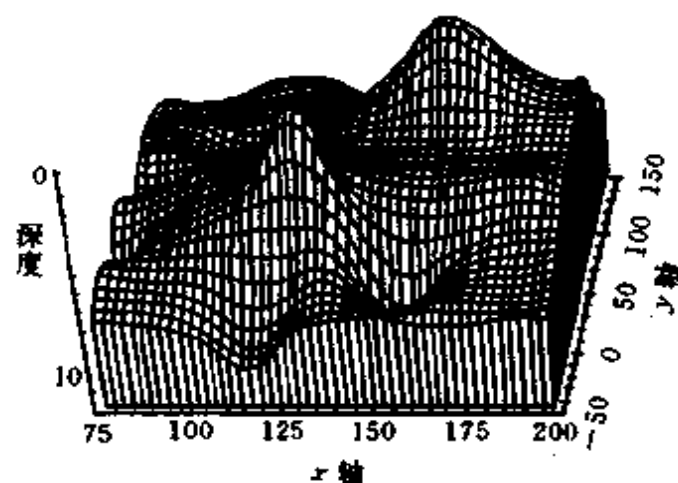


图 9-2 IDW 样条拟合海底曲面

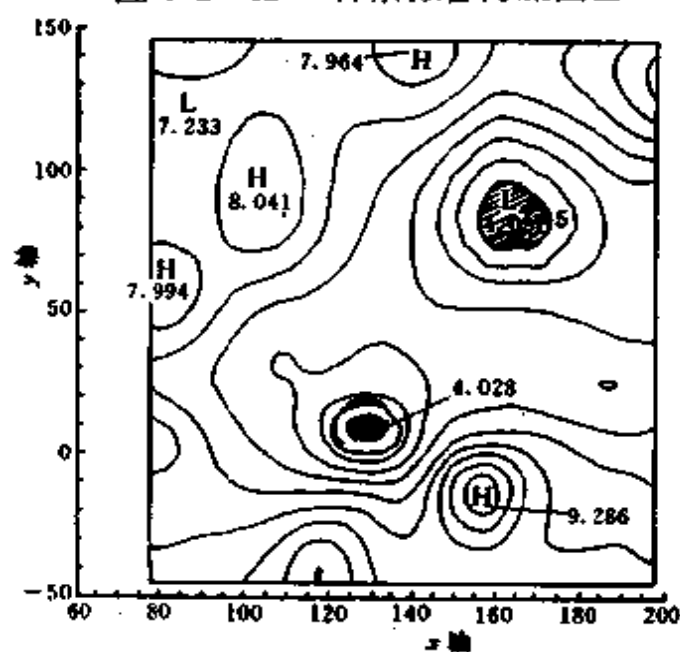


图 9-3 海底曲面的等值线图

上面给出了分割为 5×5 时的拟合曲面, 实际上, 分割越精细, 曲面越靠近通过已知数据点. 特别, 如果已知数据点的位置就在分割节点上, 拟合曲面就经过已知点. 当分割足够细时, 例如节点分离距离为 2 码时, 经 IDW 算出的节点水深值就足以描述海底曲面的形状, 而不再需要进行双三次样条拟合了, 图 9-4 和图 9-5 就是分离距离为 2 码时的 IDW 算出的海底曲面与等值线图.

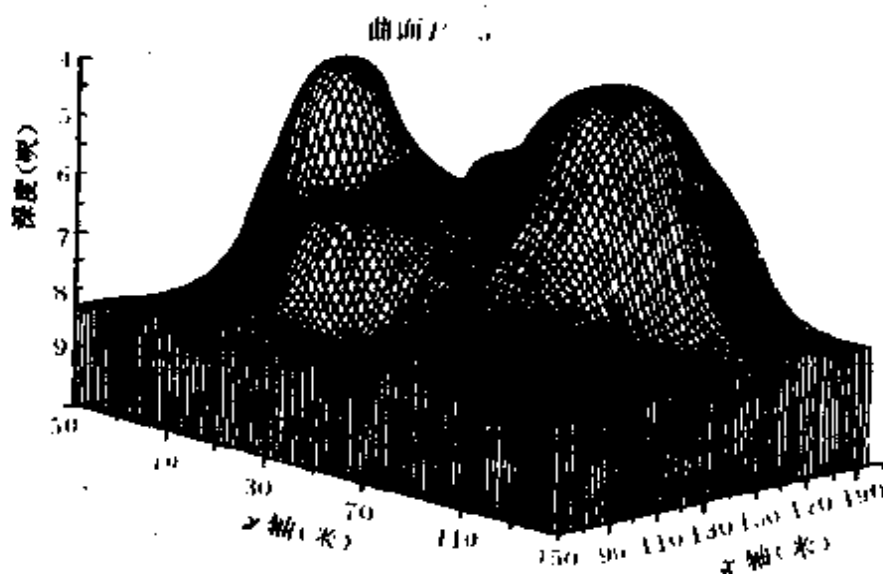


图 9-4 完全 IDW 拟合海底曲面

综上所述, 用 IDW 方法作为建模基础在于它很简单, 且易于理解. 双三次样条拟合是很有用的一种方法, 它具有局部性和连续光滑性. 缺点是 IDW 算出的节点水深值处于已知数据点的凸包之中, 它还不是“保山脊”(ridge preserving)的, 即相似已知点与不相似已知点具有相同的影响. 另一缺点是模型无法给出误差的解析估计.

由于问题给出的已知条件相当有限, 这就导致了建模方法的多样性与灵活性, 但总的思路是明确的. 先求分割节点的推测值再用样条拟合, 可以套用现有的理论, 如果有样条拟合的软件包者更可以带来方便, 且保证了拟合曲面的光滑性. 直接用差分法或用

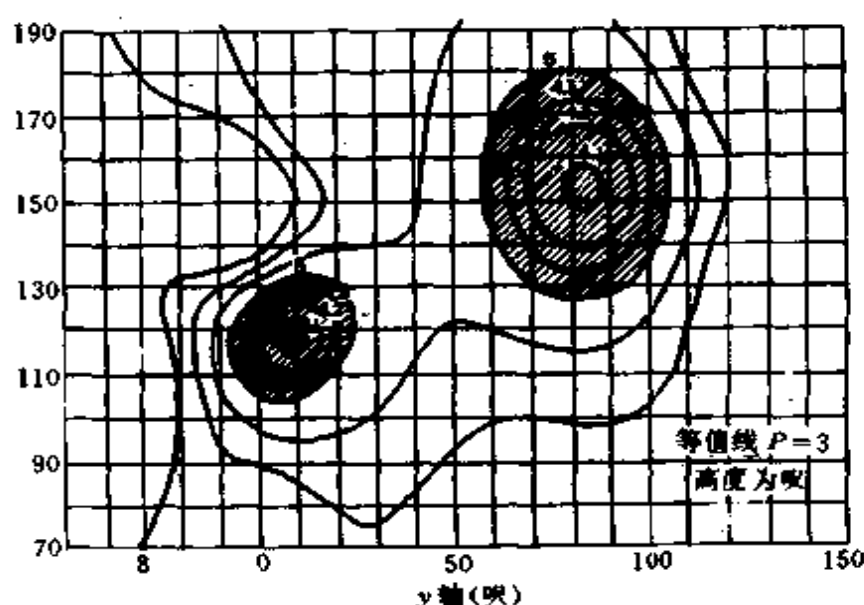


图 9-5 图 9-4 的等值线图

IDW 方法等求出足够精细分割的节点上的水深值,采用计算机绘图的“以直代曲”原理用直线连结相邻节点来描述曲面,计算量会比较大,但能更多地反映出已知数据点的影响。

参 考 文 献

- [1] 苏步青、刘鼎元,《计算几何》,上海科学技术出版社,1981.
- [2] Michael Holzrichter, Bryan Johns, Delaine Thompson, *Contouring of Hydrographic Data, Mathematical Modelling*, vol. 7, pp. 547—560, 1986.
- [3] David, Ho, Kurt Overlay, Lee Short, *Interpolating a Topographical Map of the Ocean Floor, Mathematical Modelling*, vol. 7, pp. 561—576, 1986.
- [4] Chris Jacobs, John Keltner, Brian Vant-Hall, *Contour Interpolation of Random Data, Mathematical Modelling*, Vol. 7, pp. 577—583, 1986.
- [5] Andrew Davies, Mark Kinoshita, Richard Vande Water, *Spline Analysis of Hydrographic Data, Mathematical Modelling*, Vol. 7, pp. 585—593, 1986.