学院________ 专业、班________ 年级________ 学号________ 姓名________ 考试教室________

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

◉ A卷
○ B卷

2021 — 2022 学年 第 一 学期

开课学院：数统学院 课程号：M 考试日期：

考试方式：○开卷 ◉闭卷 ○其他 考试时间：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

分位数： $u_{0.95}=1.65$，$u_{0.975}=1.96$.

一、填空题（每空 3 分，共 42 分）

1. 设A,B,C为三个随机事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则$A,B,C$中恰有一个事件发生的概率为______.

2. 设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，且已知$E[(X-1)(X-2)]=1$，则$P(X>2)$=__________.

3. 已知随机变量X与Y相互独立，$X\sim\Gamma(1,\lambda)$，Y分别以概率p，$1-p$取得-1 和 1，则$Z=XY$的概率密度函数为$f_Z(z)$=__________.

4. 将一段长度为L的木棒从中随机折断，记两段中长度的较大值记为X，较小值为Y，则(X,Y)的联合分布函数为_____，X与Y的相关系数为_____.

5. 设(X,Y)的联合分布律如下表所示，当X与Y相互独立时，$\alpha\beta$=______.

X	Y: 1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

6. 将n只球相互独立地放入到N个盒子中，设每只球放入各个盒子是等可能的，则有球的盒子数X的数学期望EX=_________.

7. 设$X_1,X_2,...,X_{2n}$是来自总体$U(0,1)$中的$2n$个样本，令随机变量
$$Y_k=\begin{cases}4, & X_{2k-1}^2+X_{2k}^2<1\\ 0, & 其它\end{cases},\ k=1,2,...,n,\quad \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k$$
则$E\overline{Y}$=_________.
利用切比雪夫不等式和中心极限定理分别估计n至少取______和_______时，可以保证$P\left\{\left|\overline{Y}-E\overline{Y}\right|\le 0.1\right\}\ge 0.9$.

8. 设总体$X\sim U(0,\theta)$（θ为未知参数），则根据$\hat{\theta}=X_{(n)}$可以构造一个$\dfrac{1}{\theta}$的无偏估计量为__________.

9. 设$X_1,X_2,...,X_n$是来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$（μ已知，σ^2未知）的样本，$P\{|X-\mu|<A\}=0.95$，则参数A的$1-\alpha$双侧置信区间为__________.

10. 已知X_1,X_2,X_3相互独立且服从$X\sim N(0,\sigma^2)$，则当k=_____时，统计量$\dfrac{k(X_1+X_2+X_3)}{|X_2-X_3|}\sim$__________.（填某一确定分布类型）

二、（16 分）设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} C(x+y), & 0<x,\ y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：（1）常数C的值；

（2）边缘密度函数$f_X(x),f_Y(y)$，并判断X,Y是否独立？

（3）$Z=X+Y$的密度函数$f_Z(z)$；

（4）a取何值时，$E(Y-aX)^2$达到最小？并求其最小值。

三、（15 分）设随机变量X的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -1<x<0 \\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

令$Y=X^2$，$F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数，求：

（1）Y的概率密度函数$f_Y(y)$；　（2）$\operatorname{cov}(X,Y)$；　（3）$F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$.

四、（15 分）设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases},\ \lambda>0,\ -\infty<\theta<+\infty.$$

其中 λ,θ 为未知参数.

求：（1）λ,θ 的矩估计量 $\widehat{\lambda_1},\ \widehat{\theta_1}$；

（2）λ,θ 的极大似然估计量 $\widehat{\lambda_2},\ \widehat{\theta_2}$；

（3）若已知 $P\{X>\nu_{0.5}\}=0.5$，试根据 $\widehat{\lambda_2},\ \widehat{\theta_2}$ 求估计量 $\hat{\nu}_{0.5}$.

五、（12 分）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2,...,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|\ (i=1,2,...,n)$，利用 $Z_1,Z_2,...,Z_n$ 估计 σ.

（1）求 Z_1 的概率密度函数；

（2）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

（3）求 σ 的极大似然估计量.