概率论与数理统计综合测试

分位数：$\Phi(1.96)=0.975, \mu_{0.99}=2.33, \mu_{0.995}=2.58, \chi^2_{0.975}(10)=20.48$

一、填空题(每空3分，共42分)

1.已知事件A,B,C相互独立，$ABC=\phi$，$P(A)=P(\overline{B})=P(\overline{C})>\dfrac{2}{3}$,且$P(A\cup B\cup C)=\dfrac{13}{16}$，则$P(A)=$______.

2.向目标独立射击到6次命中为止，每次命中的概率为$\dfrac{3}{4}$，则射击次数X的数学期望为_____.

3.在11张卡片分别写上$mathematics$这11个字母(每张卡片上写一个字母)，从中任意连抽4张，其排列结果为$math$的概率为______.

4.一条自动生产线连续生产n件产品不出故障的概率为$\dfrac{3^n}{n!}e^{-3},(n=0,1,2......)$，产品为优质品的概率为$\dfrac{1}{3}$.若各产品是否为优质品是相互独立的，则生产线在两次故障间生产k件优质品的概率为______.

5.两个1和四个2排列在一起，则两个1不相邻的概率为______.

6.总体$X\sim P(3), X_1,X_2......X_n$是来自$X$的简单随机样本,$Y=X_1^2+X_2^2+......+X_n^2$，则$D(Y)=$_____.

7.在三角形ABC中，$BC=2$，$AB\ge 2AC$，则该三角形面积的均值为_______.

8.已知X_1,X_2相互独立且均服从$N(1,1)$,则$E[\max(X_1,X_2)]=$______.

9.设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,3^2)$的简单随机样本,$X=m(3X_1-2X_2)^2+n(4X_3-X_4)^2$，则$X\sim\chi^2(2)$时，$m=$_____,$n=$_____.

10.已知$(X,Y$）的概率密度为$f(x,y)=\dfrac{1}{12\pi}e^{-\frac{1}{72}(9x^2+4y^2-8y+4)}(-\infty<x,y<+\infty)$,则$\dfrac{9X^2}{4(Y-1)^2}$服从_____.

11.已知$Y\sim N(\mu,1)$，$X=e^Y$,设0.50,0.80,1.25,2.00是来自总体X的简单随机样本值,则μ的置信度为0.95的置信区间为______,根据此结果求EX的置信度为0.95的置信区间为______.

12.在正态总体$X\sim N(\mu,1)$中抽取容量为100的样本，计算样本均值为5.32,设$\alpha=0.01$，假设H_0：$\mu=5$，H_1：$\mu=4.8$，则在此检验下犯第二类错误的概率为_______.

二、(15分)设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+y)e^{-(x+y)}, x,y,a>0 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$$

(1)求常数a;
(2)判断X与Y的独立性，并说明理由；
(3)求$Z=X+Y$的概率密度函数和数学期望.

三、(12分)二维随机变量(X,Y)在区域$\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{x},0\le x\le 1\}$上服从均匀分布，记$U=\begin{cases} 0, & X\le Y \\ 1, & Y\le X \end{cases}$，$V=\begin{cases} 0, & X\le 2Y \\ 1, & X\ge 2Y \end{cases}$，求$U$和$V$的相关系数.

四、(10分)从总体$X\sim N(u,1)$选取一组容量为n的简单随机样本，S^2为样本方差，证明:$\lim\limits_{n\to\infty}P\{1-\varepsilon<S^2<1+\varepsilon\}=1$.

五、(14分)设总体X的概率分布为$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1-\theta & \theta-\theta^2 & \theta^2 \end{pmatrix}$，其中$0<\theta<1$，从总体$X$中选取容量为$n$的简单随机样本，$N_i$表示样本中等于$i$的个数$(i=1,2,3)$.令$T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$($a_i$为未知常数).
(1)试求θ的极大似然估计量(用含N_i的式子表示);
(2)若T为θ的无偏估计量，求T的方差.

六、(7分)某种导线，要求其电阻的标准差不超过0.005Ω，现从一批导线中选取11根，测得$s=0.007\Omega$,设总体为正态分布，参数均未知.问在显著水平为$\alpha=0.025$下能否认为这批导线的标准差显著地增大？