高代习题课

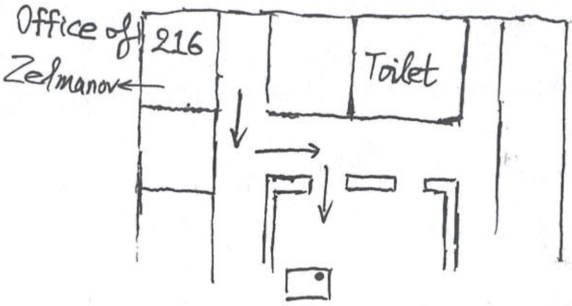
甘 2024.9.19

课前说明:

1. 本课程不设置考勤，同学可以自主选择时段上习题课，但是作业需交给规定的助教.

2. 作业提交截止时间为周三19:00，也请不要早于当周周四中午12:00. 若无特殊情况，迟交作未交处理.

3. 欢迎大家线下答疑，我的工位在南科大国际数学中心(台州楼2楼)



为避免大家跑空，请提前告知我答疑时间.(尽管大部分时间我都在工位)

4. 尽量交纸质版作业，方便助教批阅。若实在是要交电子版作业，请提交PDF格式.(我的邮箱：12432017@mail.sustech.edu.cn)

5. 习题课的讲义(手写)会于习题课后公布于我的个人主页上 Teaching 区域.(huangbinhe101.github.io)

6. 若在课堂上有任何逻辑，思路，计算上的错误，允许用恶狠严厉的语言顶撞老师.(笔误除外)

本节课主要内容:

- 域(数域) → 子域, 扩域
- 连加符号 Σ → 哑指标, 换序求和
- 连乘符号 Π

定义1.（封闭性）如果数集P有一运算，且P中数做运算的结果仍在P中，则称P对于这个运算是封闭的.

例2. 考虑复数全体构成的集合$\mathbb{C}$，为强调其对于通常意义下的加，减，乘除（非0）封闭，我们称其为复数域. 同理，称$\mathbb{Q}$（$\mathbb{R}$）为有理数域（实数域）

定义3. 若K是$\mathbb{C}$的子集，K包含0，1，并且K对于加减乘除四则运算封闭，则我们称K是$\mathbb{C}$的子域. 如果L也是$\mathbb{C}$的子域，并且K也是L的子集，那么我们说L是K（在$\mathbb{C}$中）的一个扩域，也称K是L（在$\mathbb{C}$中）的一个子域.

例4. 记$\mathbb{Q}(i)=\{a+bi: a,b\in\mathbb{Q}\}$. i为虚数单位. 则$\mathbb{Q}(i)$是$\mathbb{C}$的一个子域.

证：1. $\mathbb{C}=\{a+bi: a,b\in\mathbb{R}\}\supset\{a+bi: a,b\in\mathbb{Q}\}=\mathbb{Q}(i)$

2. $0=0+0\cdot i\in\mathbb{Q}(i)$ 且 $1=1+0\cdot i\in\mathbb{Q}(i)$

3. $\forall q_1,q_2\in\mathbb{Q}(i)$，不妨设$q_1=a_1+b_1i$，$q_2=a_2+b_2i$，其中$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Q}$.

① $q_1\pm q_2=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\cdot i$，由于$\mathbb{Q}$对于加减封闭，$q_1+q_2\in\mathbb{Q}(i)$

② $q_1q_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\cdot i$，由于$\mathbb{Q}$对于加减乘封闭 $q_1\cdot q_2\in\mathbb{Q}(i)$

③ 令$q_2\neq0$，即$a_2^2+b_2^2\neq0$. 则 $\frac{q_1}{q_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$

$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\cdot i$，由于$\mathbb{Q}$对于加减乘除封闭 $\frac{q_1}{q_2}\in\mathbb{Q}(i)$

由①②③知，$\mathbb{Q}(i)$对加减乘除四则运算封闭

综上，$\mathbb{Q}(i)$是$\mathbb{C}$的一个子域.

命题5. 复数域$\mathbb{C}$的任何子域都是有理域$\mathbb{Q}$的扩域.

证：任何子域均包含0，1两个元素，而任意有理数均可用0，1经过有限次运算（加减乘除）得到，故$\mathbb{Q}\subset$任何子域

• 若有一些数被以下标的形式标记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 那么我们可以记

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

事实上，该求和式的值与字母 i 的选取无关. 即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$ ，因此称 i 为哑指标

我们可以考虑映射 $a: [\![1, n]\!] \longrightarrow \mathbb{C} : i \longmapsto a(i) := a_i$ 并且若 $I \subset [\![1, n]\!]$，我们可以只选取下标在 I 中的数 a_i 求和. 记为 $\sum_{i \in I} a_i$. 若 $I = \phi$，约定 $\sum_{i \in \phi} a_i = 0$.

• 下面我们开始定义指标非数的求和.

如果 K 是一个有限集，而 $S: K \to [\![1, n]\!]$ 是已给的映射. 那么记号 $\sum_{k \in K} a_{S(k)}$ 可表示选自 $a_1, \cdots, a_n$ 的 $|K|$ 个数的求和（可重复）

命题6. 对任意双射 $\sigma: [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$，有 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}$.

证：我们对 n 进行归纳法.

当 $n = 1$ 时. $a_1 = a_1$ 显然成立.

假设对于 n，结论成立. 考虑双射 $\sigma: [\![1, n+1]\!] \longrightarrow [\![1, n+1]\!]$.

则存在唯一 $k \in [\![1, n+1]\!]$，s.t. $\sigma(k) = n+1$. 定义映射 $\sigma': [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i), & 1 \le i < k \\ \sigma(i+1), & k \le i \le n \end{cases}$$ 易证 σ' 是 $[\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ 的双射，因此

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} &= \sum_{i=1}^{k-1} a_{\sigma(i)} + a_{\sigma(k)} + \sum_{i=k+1}^{n+1} a_{\sigma(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{\sigma'(i)} + \sum_{i=k+1}^{n+1} a_{\sigma'(i-1)} + a_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{\sigma'(i)} + \sum_{i=k}^{n} a_{\sigma'(i)} + a_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma'(i)} + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i
\end{aligned}$$

故命题得证.

推论7. 假设有 mn 个数 a_{ij} 其中 $i\in\{1,\cdots,m\}$, $j\in\{1,\cdots,n\}$ 那么

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

证：这 mn 个数可写成以下形式

法I.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

前者求和是先求行的和，再求所有行的和的和

后者求和是先求列的和，再求所有列的和的和

两者均是所有数的和，只是顺序不一样，而 $\mathbb{C}$ 中的加法有交换律，所以两者相等.

法II. 令 $b:[\![1,mn]\!]\longrightarrow\mathbb{C}:(i-1)n+j\longmapsto a_{ij}$, $i\in[\![1,m]\!]$, $j\in[\![1,n]\!]$.

则 $\sum_{i=1}^{mn}b_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$.

构造 $\sigma:[\![1,mn]\!]\longrightarrow[\![1,mn]\!]:(i-1)n+j\longmapsto(j-1)m+i$, $i\in[\![1,m]\!]$, $j\in[\![1,n]\!]$

易证 σ 是一个双射. 所以由命题6,

$$\sum_{i=1}^{mn}b_i=\sum_{i=1}^{mn}b_{\sigma(i)}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

故命题得证.

- 与连加符号 Σ 类似，我们可以定义连乘符号 Π

下面只列出其相关性质，证明与上述的证明类似

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_i\cdot b_j=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\prod_{j=1}^{m}b_j\right)\qquad \prod_{i=1}^{n}(\lambda a_i)=\lambda^n\cdot\prod_{i=1}^{n}a_i$$

注8. 在 nm 为无限时，(求和项无限时，以上) 结论往往不对. 比如 $S=1+(-1)+1+(-1)+\cdots$