高等代数 I 小测验 2
B 卷

2024 年 11 月 28 日

满分: 50 分

1. (8 分) 求以下齐次线性方程组的一个基础解系:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 9x_1 \qquad\qquad + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

2. (15 分) 简答题. 请直接写出下列问题的答案. (不需要给出解题过程或解释理由.)

   (a) 设 L 是空间中方程为 $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$ 的直线, Π 是包含直线 L 且经过点 $P(0,3,-1)$ 的平面. 求 Π 的一般方程 (即, 形如 $ax+by+cz+d=0$ 的方程).

   (b) 设 $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}, W = \mathbb{C}$. 请写出 $\mathbb{R}$-向量空间 $V \times W$ 的一组基.

   (c) 考虑 $\mathbb{R}$-向量空间 $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ 中的子空间 $U = \{f \in V \mid f(1) = f'(1) = 0\}$. 请写出 U 在 V 中的一个直和补.

3. (10 分) 判断正误. 正确的请解释理由, 错误的请举出反例.

   (a) 设 U, W 是向量空间 V 的子空间. 如果 $U+W$ 是直和, 则对于 V 的任意子空间 M, $(U \cap M) + (W \cap M)$ 也是直和.

   (b) 假设向量空间 V 是无限维的. 则对于 V 中的任意 (由有限多个向量构成的) 向量组 S 均有 $V \neq \operatorname{span}(S)$.

4. (5 分) 证明或举出反例: 若 L, M 都是向量空间 V 中的仿射集, 则 $L \cup M$ 也是 V 中的仿射集.

5. (12 分) 设 m, n 为正整数, $A, B \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) 证明: $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

(b) 举例说明: $\mathrm{rank}(A+B) < \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ 和 $\mathrm{rank}(A+B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ 的情况均有可能出现.

(c) 证明以下陈述等价:

  i. 等式 $\mathrm{rank}(A+B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ 成立.

  ii. 存在方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系 S 和方程组 $BX = 0$ 的一个基础解系 T 使得 $\mathbb{R}^{n\times 1} = \mathrm{span}(S \cup T)$, $S \cap T$ 构成 $(A+B)X = 0$ 的基础解系.