高代习题课

甘 2024.10.16

PART Ⅰ. 错题解析

• 证明：$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \Leftrightarrow$ 方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=0 \end{cases}$ 有非零解.

证明1. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow[\times]{L_2 \to a_{12}L_1-a_{11}L_2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}) \end{pmatrix}$

初等行变换：（本质是可逆）
1. 交换两行
2. 某一行乘非零常数
3. 将某行乘常数加到另一行.

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，则原方程组与 $a_{11}x_1+a_{12}x_2=0$ 等价

故必有非零解.

非零解是非零向量，不保证某一变量不为零

若方程组有非零解，则存在 $x_2^0\neq 0$，s.t. 方程成立. 此时有，

$$(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2^0=0 \Rightarrow a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=0$$

证明2. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{a_{12}L_1-a_{11}L_2} (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2=0$

同理有 $(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_1=0$

若方程组有非零解，则有不全为零的 (x_1, x_2) s.t. 上述两方程成立.

故有 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，当 a_{ij} 均为0，易知方程有非零解.

当 a_{ij} 不全为0时，不妨令 a_{11} 不为0.

则有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to a_{12}L_1-a_{11}L_2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22} \end{pmatrix}$$

此时，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，故方程组有非零解.

综上 方程组有非零解等价于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$.

• 求解方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}.$$

解：

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to aL_3 - L_1]{L_2 \to aL_2 - L_1} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 0 & ab-1 & a-1 & 3a-4 \\ 0 & 2ab-1 & a-1 & 4a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ & ab-1 & a-1 & 3a-4 \\ & ab & 0 & a \end{pmatrix}$$

假初等行变换

$$\xrightarrow{L_2 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ & 1 & 1-a & 4-2a \\ & ab & & a \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - abL_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ & 1 & 1-a & 4-2a \\ & & ab(a-1) & a(2ab-4b+1) \end{pmatrix}$$

PART II. 第五周习题

习题 1.2.3. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & ac+b^2+ca \\ c+b+a & ca+b^2+ac & c^2+b^2+a^2 \\ 3 & a+b+c & c+b+a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+ac+c & b+ba+c & c+a^2+c \\ a+bc+b & b+b^2+b & c+ba+b \\ a+c^2+a & b+cb+a & c+ac+a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b-ac & a^2+b^2+c^2-ba-b-c & 2ac+b^2-a^2-2c \\ c(1-b) & 2(ac-b) & a^2+b^2+c^2-b-c-ba \\ 3-2a-c^2 & c(1-b) & b-ac \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} a+b+c & a+b+c & 3 \\ a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac & a+b+c \\ b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 & a+b+c \end{pmatrix}$$

$$A^T B^T = \begin{pmatrix} ac+a+c & bc+a+b & c^2+2a \\ ab+b+c & b^2+2b & bc+a+b \\ a^2+2c & ab+b+c & ac+a+c \end{pmatrix}$$

习题 1.2.5. 证明：① A, B 上三角，则 AB 上三角. ② AB 严格上三角，则 AB 严格上三角

证. ① 考虑矩阵 AB 中 i, j 号元素 $i>j$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=i}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

第一项中 $A_{ik}=0$ ($i>k$, A 上三角)，第二项中 $B_{kj}=0$ ($k\geq i>j$, B 上三角)

故 $(AB)_{ij}=0 \quad \forall\, i>j$，即 AB 上三角

② 将条件改为 $i\geq j$，类似讨论即可

习题 1.2.7 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，a 取何值时，存在三阶矩阵 $B\neq 0$，使得 $AB=0$.
并具体给出一个这样的 B.

解. 问题等价于 a 为何值时方程组 $AX=0$ 有非零解.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2\to L_2-2L_1 \\ L_3\to L_3-aL_1}]{L_1\to -L_1,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3a-1 \end{pmatrix}$$

故，当 $3a-1=0$，即 $a=\frac{1}{3}$ 时，方程组有非零解.
其中一个非零解为 $(3,-7,1)^T$.

故 $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

习题 1.2.8. 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}^n$，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$

归纳法可解得 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ & 1 \end{pmatrix}$

并且 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$

习题 1.2.9. 证明：$A+A^T$，AA^T，A^TA 都是对称阵，$A-A^T$ 反对称阵.

证.
$$(A+A^T)^T = A^T+A = A+A^T$$
$$(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T$$
$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$
$$(A-A^T)^T = A^T-A = -(A-A^T)$$

习题 1.2.16. $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中 λ_i 两两不同.
证明：与 D 可交换的，均为对角阵.

证. 假设 $A=(a_{ij})$ 与 D 可交换. 即 $\forall i,j\in[\![1,n]\!]$
$$(AD)_{ij} = a_{ij}\lambda_j = (DA)_{ij} = \lambda_i a_{ij}$$
当 $i\neq j$ 时，$(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}=0 \Rightarrow a_{ij}=0$

故 A 为对角阵.

习题 1.2.17.

A跟所有对角阵可交换 由1.2.16，故A为对角阵

令 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

$$AE_{ij}-E_{ij}A=\lambda_iE_{ij}-\lambda_jE_{ij}=0$$
$$\Rightarrow \lambda_i=\lambda_j \quad \forall i,j$$
$$\Rightarrow A=\lambda I_n$$

习题 1.2.18. A,B 为方阵，下列命题是否成立.

1. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
2. 若 $AB=B$ 且 B 非零，则 $A=I_n$
3. A,B,$A+B$ 均可逆，则 I_n+BA^{-1} 也可逆，逆矩阵为 $A(A+B)^{-1}$

证.

1. 不一定成立. 反例：$n=2$. $A=\begin{pmatrix} & 1\\ & \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}$.
$$(A+B)^2=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$$
$$A^2+2AB+B^2=0+2\begin{pmatrix}1 & \\ & \end{pmatrix}+0=\begin{pmatrix}2 & \\ & 0\end{pmatrix}$$

2. 不一定成立. 反例：
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \\ & \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}\neq I_2$$

3. $$I_n+BA^{-1}=AA^{-1}+BA^{-1}=(A+B)A^{-1}=(A(A+B)^{-1})^{-1}$$

习题 1.2.19. 若 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 是对称矩阵，$A^2=0$，则 $A=0$.

证：令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，考虑 A^2 的 (k,k) 元素，则有 $\sum_{i=1}^{n}a_{ki}a_{ik}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}^2=0$

$\Rightarrow \forall i,k,\ a_{ki}=0 \Rightarrow A=0$

习题 1.2.21.

1. 令 $n=\min\{m: A^m=0, m\geq 0\}$.

1°若 $n=0$，则 $A=0$，显然成立

2°若 $n\neq 0$，则 $A^{n-1}\neq 0$，则 $\exists \binom{x_1}{x_2}$ s.t. $A^{n-1}\binom{x_1}{x_2}=\binom{y_1}{y_2}\neq 0$.

且 $A\binom{y_1}{y_2}=A^n\binom{x_1}{x_2}=0$，故方程组有非零解

证.

2. 令 $S_1:=\{x\in\mathbb{R}^2: Ax=0\}$

先研究 S_1 的结构：

若 $x\in S_1$，则 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$，$A(\lambda x)=\lambda Ax=0$

故 $\lambda x\in S_1$.

若 $x_1, x_2\in S_1$，则 $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=0$

故 $x_1+x_2\in S_1$.

以下分情况考虑.

若 $S_1=\mathbb{R}^2$，则 $A=0$，故 $A^2=0$.

若 $\exists x_1\in\mathbb{R}^2$, s.t. $S_1=\{\lambda x_1:\lambda\in\mathbb{R}\}$,

取 $x_2\in\mathbb{R}^2$ 且 $x_2\notin S_1$，则 $y_2:=Ax_2\neq 0$.

y_2 可写成 x_1, x_2 的 $\mathbb{R}$-线性组合，即 $y_2=k_1x_1+k_2x_2$, $k_1, k_2\in\mathbb{R}$.

递有 $A^mx_2=A^{m-1}(k_1x_1+k_2x_2)=k_2A^{m-1}x_2 \Rightarrow A^mx_2=k_2^{m-1}k_1x_1+k_2^mx_2$

由于 $A^m=0$, $A^mx_2=0$，即 $k_2=0$，即 $y_2=k_1x_1$.

此时，$\forall x\in\mathbb{R}^2$，$x=a_1x_1+a_2x_2$, $a_1, a_2\in\mathbb{R}$,

$A^2x=A^2(a_1x_1+a_2x_2)=a_2Ay_2=a_2k_1Ax_1=0$.

故 $A^2=0$.

若 $S_1=\{0\}$ 下证此情况不满足题意.

对任意 $x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$，$Ax\neq 0$ ($S_1=\{0\}$) $\Rightarrow A^nx\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}$

特别地 $A^mx\neq 0$. 故与 $A^m=0$ 矛盾!

综上，若存在 $m\in\mathbb{N}$, s.t. $A^m=0$，则 $A^2=0$.

证. 由(1)知，$A=\begin{pmatrix} a & b\\ \lambda a & \lambda b\end{pmatrix}$，$\lambda\in\mathbb{R}$.

故 $A^m=\binom{1}{\lambda}(ab)\binom{1}{\lambda}(a,b)\cdots\binom{1}{\lambda}(a,b)$

$=\binom{1}{\lambda}(a+\lambda b)^{m-1}(a\ b)=(a+\lambda b)^{m-1}A$

$=0$

$\Rightarrow A=0$ 或 $a+\lambda b=0$.

$\Rightarrow A^2=0$