高等代数I小测2.

B卷 2024.11.28

1. 求基础解系

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0 \\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0 \\ 9x_1\qquad\quad+x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

解：$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 9 & & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ & -3 & 8 & -7 \\ & -6 & 16 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ & -3 & 8 & -7 \\ & & & \end{pmatrix}$

令x_3, x_4为自由变量，则有基础解系：

$$\left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{3}, 1, 0\right), \left(\frac{2}{9}, -\frac{7}{3}, 0, 1\right)$$

2. a) $L: \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{4}$，$\pi$包含$L$且过点$P(0,3,-1)$，求$\pi$的一般方程.

解：$\vec{v_1}=(-1,3,4)$，$\vec{v_2}=(2,-3,0)$，令π的法向量$\vec{n}=(a,b,c)$，则有

$\begin{cases} -a+3b+4c=0 \\ 2a-3b\qquad=0 \end{cases}$，令$a=3$，则有$\vec{n}=(3,2,-\frac{3}{4})$

π: $3(x-0)+2(y-3)-\frac{3}{4}(z+1)=0 \Leftrightarrow 12x+8y-3z-27=0$

b) $V=\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$，$W=\mathbb{C}$，写出$\mathbb{R}$空间$V\times W$的一组基.

解：V的一组基为$1, X, X^2$，W的一组基为$1, i$.

故$(1,0),(X,0),(X^2,0),(0,1),(0,i)$为$V\times W$的一组基.

c) $V=\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$，$U=\{f\in V: f(1)=f'(1)=0\}$，写出$U$在$V$中的直和补.

解：$U=\{A(x-1)^2: A\in\mathbb{R}[X]_{\leq 1}\}$ 故$W=\mathrm{span}\{1, x-1\}$是其一个直和补.

3. 判断正误

a) $U,W<V$，$U+W$是直和，则$\forall M<V$，$(U\cap M)+(W\cap M)$也是直和

T. 若$\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1'+\alpha_2'$，$\alpha_1,\alpha_1'\in U\cap M\subseteq U$，$\alpha_2,\alpha_2'\in W\cap M\subseteq W$.

由$U+W$是直和，$\alpha_1=\alpha_1'$，$\alpha_2=\alpha_2'$.

b) 设V是无限维的. 则$\forall S\subseteq V$, $|S|<\infty$, 均有 $V\neq \mathrm{span}(S)$.

T. $\dim(\mathrm{span}\, S)\leq |S|<\infty$, 故 $\mathrm{span}\, S<V$ 但不能相等.

4. 证明或举反例, 若L, M都是V中的仿射集, 则$L\cup M$也是V中仿射集.

F. 反例. $V=\mathbb{R}^2$, $L=\mathbb{R}\times\{0\}$, $M=\{0\}\times\mathbb{R}$,

$$L\cup M=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a,b\text{至少一个为零}\}.$$

若 $L\cup M=\alpha+U$, $\alpha\in\mathbb{R}^2$, $U<\mathbb{R}^2$.

则 $(1,0)=(2,0)-(1,0)\in U$

$(0,1)=(0,2)-(0,1)\in U$

$\Rightarrow U=\mathbb{R}^2$, 而 $L\cup M\neq\mathbb{R}^2$.

故$L\cup M$不是仿射集

5. $A, B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

a) 证: $\mathrm{rank}(A+B)\leq \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$

b) 举例: $\mathrm{rank}(A+B) \begin{smallmatrix}<\\=\end{smallmatrix} \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$ 均可出现

c) TFAE: i) $\mathrm{rank}(A+B)=\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$

ii) $\exists$方程组 $AX=0$的基础解系S与 $BX=0$的一个基础解系T, 使得 $\mathbb{R}^{n\times1}=\mathrm{span}(S\cup T)$. $S\cap T$构成$(A+B)X=0$的基础解系.

证: a) $\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&A\\&B\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A&A+B\\&B\end{pmatrix}$.

$$\mathrm{rank}(A+B)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&A+B\\&B\end{pmatrix}\geq\mathrm{rank}(A+B)$$

b) "<" $A=B=\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}$, $\mathrm{rank}(A+B)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=1$.

"=" $A=\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&\\&1\end{pmatrix}$, $\mathrm{rank}(A+B)=2$, $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=1$

c) i)$\Rightarrow$ii) 记 $N(A)$为$AX=0$的解空间. 则 $N(A+B)\supseteq N(A)\cap N(B)$.

于是有 $\dim N(A+B)\geq\dim(N(A)\cap N(B))=\dim N(A)+\dim N(B)-\dim(N(A)+N(B))$

化简得 $\dim(N(A)+N(B)) \geq \dim(N(A))+\dim N(B)-\dim N(A+B)$

$= n-\operatorname{rank}A+n-\operatorname{rank}B-(n-\operatorname{rank}A-\operatorname{rank}B)$

$= n$

故 $N(A)+N(B)=\mathbb{R}^{n\times 1}$.

对任意 S, T 分别为 $N(A)$ 与 $N(B)$ 中的一组基.

故 $S\cup T$ 可张成 $\mathbb{R}^{n\times 1}$，即 $\operatorname{Span}(S\cup T)=\mathbb{R}^{n\times 1}$

同时，由于上述不等式只能取等，故 $\dim N(A+B)=\dim(N(A)\cap N(B))$

即 $N(A+B)=N(A)\cap N(B)$,

取 S, T 为从 $N(A+B)$ 中的一组基 D 扩充出去的一组基

则 $S\cap T=D$，即 $S\cap T$ 为 $N(A+B)$ 的一组基，故为 $(A+B)X=0$ 的基础解系

iii) ⇒ i)

$n \leq |S\cup T| = |S|+|T|-|S\cap T| = n-\operatorname{rank}(A)+n-\operatorname{rank}(B)-(n-\operatorname{rank}(A+B))$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}(A+B)$