高代习题课

甘　2024.10.10

A.5.19.

$f(A)=\{a,b\}$,　$f^{-1}(B)=\{2,3,4\}$

$f^{-1}(f(A))=\{1,2,3\}$.　$f(f^{-1}(B))=\{b,c\}$

A.5.20.

① $\forall z\in Z$

$z\in(g\circ f)(A) \Leftrightarrow \exists x\in A$, s.t. $(g\circ f)(x)=z$

$\Leftrightarrow \exists x\in A$, s.t. $g(f(x))=z$

$\Leftrightarrow \exists b\in f(A)$ s.t. $g(b)=z$

$\Leftrightarrow z\in g(f(A))$

② $\forall x\in X$,

$x\in(g\circ f)^{-1}(C) \Leftrightarrow g\circ f(x)\in C$

$\Leftrightarrow g(f(x))\in C$

$\left(\Leftrightarrow \exists \underset{=f(x)}{b} \overset{\forall}{\in} f(X)\text{, s.t. } g(b)\in C\right)$

$\Leftrightarrow f(x)\in g^{-1}(C)$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(g^{-1}(C))$

A.5.21.

1. • $\forall a\in A$, $f(a)\in f(A) \Rightarrow a\in f^{-1}(f(A))$，故 $f^{-1}f(A))\supseteq A$

• $\forall a'\in f(f^{-1}(A'))$，存在 $x\in f^{-1}(A')$, s.t. $a'=f(x)$.

由于 $x\in f^{-1}(A')$ → ~~此时~~存在 $a''\in A'$ 使得 $f(x)=a''$,

故 $a'=a''\in A'$. 因此 $f(f^{-1}(A'))\subseteq A'$

• 令 $X=Y=\{0,1\}$. $A=A'=\{0\}$. 取 $f: X\to Y$, $f(x)=1$, $\forall x\in X$.

则 $f^{-1}f(A))=f^{-1}(1)=X\neq A$, $f(f^{-1}(A'))=f(\phi)=\phi\neq A'$

2. $\forall x \in X$,

$$x \in f^{-1}(A' \cap B') \Leftrightarrow f(x) \in A' \cap B'.$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in A' \text{ 且 } f(x) \in B'$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \text{ 且 } x \in f^{-1}(B')$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$$

$$x \in f^{-1}(A' \cup B') \Leftrightarrow f(x) \in A' \cup B'$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in A' \text{ 或 } f(x) \in B'$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \text{ 或 } x \in f^{-1}(B')$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$$

3. • $\forall y \in Y$, $y \in f(A \cap B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cap B$, s.t. $f(x) = y$.
$$\Rightarrow \exists x \in A \text{ s.t. } f(x) = y \text{ 且 } \exists x \in B \text{ s.t. } f(x) = y$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ 且 } y \in f(B)$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$$

• 取 $X = Y = \{0, 1\}$, $f: X \to Y$, $f(0) = f(1) = 0$.
令 $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, 则
$f(A \cap B) = f(\phi) = \phi$. $f(A) \cap f(B) = \{0\}$

• $\forall y \in Y$, $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B$, s.t. $f(x) = y$
$$\Leftrightarrow \exists x \in A, \text{ s.t. } f(x) = y \text{ 或 } \exists x \in B \text{ s.t. } f(x) = y$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ 或 } y \in f(B)$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

A.5.22. 若f是满射, 我们只需证明 $\forall B \subseteq Y$, $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$.
$\forall b \in B$, 由于f是$X \to Y$的满射, $\exists x_0 \in X$, s.t. $f(x_0) = b$.
故 $x_0 \in f^{-1}(B)$. 因此 $b = f(x_0) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow B \subseteq f(f^{-1}(B))$
反过来, $\forall y \in Y$, 取 $B = \{y\}$ 单点集, 则 $f^{-1}(B) \neq \phi$. 故 $\exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$. 故满.

A.5.28. (i)⇒(ii)：若 $g_1, g_2 : Z \to X$ s.t. 图交换.

则 $h = f \circ g_1 = f \circ g_2$. 即

$\forall z \in Z$，$f(g_1(z)) = f(g_2(z)) = h(z)$

由 f 单射，$g_1(z) = g_2(z)$. $\forall z \in Z$

故 $g_1 = g_2$

(ii)⇒(i)：若 $\exists x_1, x_2 \in X$ s.t. $f(x_1) = f(x_2) = y_0 \in Y$.

取 $h : Z \to Y$ 满足 $\forall z \in Z, h(z) = y_0$

此时，考虑 $g_1 : Z \to X$ 满足 $\forall z \in Z, g_1(z) = x_1$

$g_2 : Z \to X$ 满足 $\forall z \in Z, g_2(z) = x_2$.

易证 $f \circ g_1 = f \circ g_2 = h$.

由(ii)，$g_1 = g_2$ 故 $x_1 = x_2$.

A.5.29. 1. 若 $F(x_1) = F(x_2)$，即 $(x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2))$

故 $x_1 = x_2$ ⇒ F 单

2. $\forall y \in Y$，由 X 非空，$\exists x_0 \in X$. 故 $(x_0, y) \in X \times Y$.

此时，$p((x_0, y)) = y$. ⇒ p 满

3. $\forall x \in X$，$p \circ F(x) = p(F(x)) = p(x, f(x)) = f(x)$

故 $p \circ F = f$.

1.1.1 (1)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_1]{L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to 2L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}]{L_2 \to L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 + 2L_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

故解得 $x_4 = -\frac{4}{3}$，$x_3 = \frac{5}{3}$. $x_2 = 2$，$x_1 = 0$

思考题 A.3.

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \downarrow\gamma \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

(映射复合满足结合律)

$$\begin{aligned} \gamma\circ(g'\circ f') &= (\gamma\circ g')\circ f' \\ &= (g\circ\beta)\circ f' \\ &= g\circ(\beta\circ f') \\ &= g\circ(f\circ\alpha) \\ &= (g\circ f)\circ\alpha \end{aligned}$$

思考题 A.4

① 取 $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $f_1(x)=2^x$. 令 $g_1(x)=\log_2 x$. 易证 $g_1\circ f_1(x)=x$

但 f_1 不满，故无右逆

② 取 $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $f_2(x)=\begin{cases}\log_2|x| & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

令 $g_2(x)=\begin{cases}2^x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -2^x, & x<0\end{cases}$，则 $f_2\circ g_2(x)=\begin{cases}2^{\log_2|x|}=x & x>0\\ 0 & x=0\\ -2^{\log_2|x|}=x & x<0\end{cases}$.

故 g_2 是 f_2 的右逆，但 f_2 不单，故无左逆.

1.1.1.(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 & 2\\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 & 7\\ 9 & -9 & 6 & -16 & 2 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4\to L_4-9L_1]{L_2\to L_2-L_1,\ L_3\to L_3-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1\\ 0 & -7 & 4 & 1 & -2 & 5\\ 0 & -27 & 6 & 11 & -16 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4\to L_4-9L_2]{L_3\to 3L_3-7L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 8\\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4\to L_4-L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

故无解.

1.1.3

必要性：设非零解为 $x_1=x_1^0$，$x_2=x_2^0$，则有

$$\begin{cases} x_1^0 a_{11} + x_2^0 a_{12} = 0 \\ x_1^0 a_{21} + x_2^0 a_{22} = 0 \end{cases}$$，其中 x_1^0, x_2^0 不同为零.

不妨设 $x_1^0 \neq 0$，则

$$a_{11} = -\frac{x_2^0}{x_1^0} a_{12}, \quad a_{21} = -\frac{x_2^0}{x_1^0} a_{22}$$

此时，

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -\frac{x_2^0}{x_1^0}(a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22}) = 0$$

若 $x_1^0 = 0$，则 $x_2^0 \neq 0$. 此时 $x_2^0 a_{12} = x_2^0 a_{22} = 0$.

$$\Rightarrow a_{12} = a_{22} = 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

充分性：

若 a_{ij} 均为零，显然 x_1, x_2 可为任意值，故有非零解.

若存在一个 a_{ij} 不为零. 不失一般性，我们令 $a_{11} \neq 0$.

用高斯消元法，方程组等价于

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_2 = 1$，则有 $x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$，故有非零解.

1.1.4. (4)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 10 & -7 & 5 & -6 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 13 & -5 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 8 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故方程组等价于
$$\begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_4 - 5x_5 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -8x_5 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

故有非零解.

1.1.6.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -10 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -14 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故这三条直线有唯一交点.

2. l_4: $-10y=-3$，则 l_1, l_2, l_4 构成的增广矩阵为

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -10 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

故无解.

1.1.8.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & 1-\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & a & a+2 & 0 \end{vmatrix}$.

$\longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -6a+2 & 0 \end{vmatrix}$ 故取 $a=\frac{1}{3}$ 时，

方程有非零解. 令 $z=s$，则 $y=-7s$，$x=3s$. $s\in\mathbb{R}$.

故解为 $(3s, -7s, s)$, $s\in\mathbb{R}$.

1.1.9. (2) $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 & ① \\ x_1+bx_2+x_3=3 & ② \\ x_1+2bx_2+x_3=4 & ③ \end{cases}$

~~③-② 得，$bx_2=1$.~~

~~②-① 得~~

方程组 $\begin{cases} x_3+x_2+ax_1=4 \\ x_3+bx_2+x_1=3 \\ x_3+2bx_2+x_1=4 \end{cases}$ 的

增广矩阵为

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & -1 & 1-a & -2 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & b(1-a) & 1-2b \end{vmatrix}$

1° 当 $b=0$ 时，方程无解

2° 当 $b=\frac{1}{2}$ 时，方程组一定有非零解. 若 $a\neq 1$，
此时有唯一解 $(x_1, x_2, x_3)=(0,2,2)$
若 $a=1$，则有无穷个解，$(x_1,x_2,x_3)=(s,2,2-s)$, $s\in\mathbb{R}$

3° 当 $b\neq 0$ 且 $\neq\frac{1}{2}$ 时，若 $a=1$，则方程组无解.
若 $a\neq 1$，则有唯一解 $(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1-2b}{b(1-a)}, \frac{1}{b}, \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}\right)$

综上，当 $(a,b)\in \mathbb{R}\setminus\{1\}\times\mathbb{R}\setminus\{0\} \cup \{(1,\frac{1}{2})\}$ 时，方程组有非零解. 解如上.

1.1.10 方程组的增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & 1 & -1 & & a_3 \\ & & & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & & & & 1 & a_5 \end{array}\right) \xrightarrow{L_5 \to L_1+L_2+L_3+L_4+L_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & 1 & -1 & & a_3 \\ & & & 1 & -1 & a_4 \\ & & & & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{array}\right)$$

故 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0 \Leftrightarrow$ 方程组有解. 若满足，令 $x_5=s$，则有

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a_1+a_2+a_3+a_4+s,\ a_2+a_3+a_4+s,\ a_3+a_4+s,\ a_4+s,\ s),\ s\in\mathbb{R}.$$

1.1.11. 方程组系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_n \to \sum_{i=1}^{n-1} L_i\cdot(-1)^{i+1}+L_n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1+(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

故齐次方程组有非零解，当且仅当 n 为偶数. 此时通解为

$$x_i = (-1)^i s,\quad i=1,2,\cdots,n.\ 其中\ s\ 为任意实数.$$

1.1.13. 若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，则 x_{ij} 可取任意值，均为解.

若 a_i 不全为零，不妨设 $a_1,\cdots,a_r$ 不为零，$a_{r+1}=\cdots=a_n=0$.

此时 $\forall 1\le i,j,k,l\le r$，有 $\frac{x_{il}}{a_ia_l}=\frac{x_{kj}}{a_ka_j}$. 由于 $r\ge 1$，a_1 一定非零.

令 $\frac{x_{11}}{a_1a_1}=c$，c 为任意实数，则有 $x_{il}=a_ia_lc$，$\forall i,l\in\{1,\cdots,r\}$.

若 i,l 中有一个大于 r，则 $a_i=0$ 或 $a_l=0$.

$$a_1^2\cdot x_{il}=a_ia_lx_{11}=0 \Rightarrow x_{il}=0=a_ia_l\cdot c$$

因此，有 $x_{il}=a_ia_l\cdot c$. $\forall 1\le i,l\le n$

同时，易证上述 x_{il} 满足方程组，故为方程组通解.