高等代数I小测2.

B卷 甘 2024.11.28

1. 求基础解系

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0 \\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0 \\ 9x_1+x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

解：$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 9 & & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ & -3 & 8 & -7 \\ & -6 & 16 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ & -3 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

令 x_3, x_4 为自由变量，则有基础解系：

$$\left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{3}, 1, 0\right), \quad \left(\frac{2}{9}, -\frac{7}{3}, 0, 1\right)$$

2. a) $L: \frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$，$\pi$包含L且过点 $P(0,3,-1)$，求π的一般方程。

解：$\vec{v_1}=(-1,3,4)$，$\vec{v_2}=(2,-3,0)$，令π的法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，则有

$\begin{cases} -a+3b+4c=0 \\ 2a-3b=0 \end{cases}$，令 $a=3$，则有 $\vec{n}=(3,2,-\frac{3}{4})$

π: $3(x-0)+2(y-3)-\frac{3}{4}(z+1)=0 \Leftrightarrow 12x+8y-3z-27=0$

b) $V=\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$，$W=\mathbb{C}$，写出$\mathbb{R}$空间 $V\times W$ 的一组基。

解：V的一组基为 $1, X, X^2$，W的一组基为 $1, i$.

故 $(1,0), (X,0), (X^2,0), (0,1), (0,i)$ 为 $V\times W$ 的一组基.

c) $V=\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$，$U=\{f\in V: f(1)=f'(1)=0\}$，写出U在V中的直和补.

解：$U=\{A(x-1)^2: A\in\mathbb{R}[X]_{\leq 1}\}$ 故 $W=\mathrm{span}\{1, x-1\}$ 是其一个直和补.

3. 判断正误

a) $U,W<V$，$U+W$是直和，则 $\forall M<V$，$(U\cap M)+(W\cap M)$ 也是直和

T. 若 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1'+\alpha_2'$，$\alpha_1, \alpha_1'\in U\cap M\subseteq U$，$\alpha_2,\alpha_2'\in W\cap M\subseteq W$.

由$U+W$是直和，$\alpha_1=\alpha_1'$，$\alpha_2=\alpha_2'$.

b) 设 V 是无限维的. 则 $\forall S \subseteq V$, $|S| < \infty$, 均有 $V \neq \mathrm{span}(S)$.

T. $\dim(\mathrm{span}\, S) \leq |S| < \infty$, 故 $\mathrm{span}\, S < V$ 但不能相等.

4. 证明或举反例. 若 L, M 都是 V 中的仿射集, 则 $L \cup M$ 也是 V 中仿射集.

F. 反例. $V = \mathbb{R}^2$, $L = \mathbb{R} \times \{0\}$, $M = \{0\} \times \mathbb{R}$,

$$L \cup M = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \text{ 至少一个为零}\}.$$

若 $L \cup M = \alpha + U$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$, $U < \mathbb{R}^2$.

则 $(1,0) = (2,0) - (1,0) \in U$

$(0,1) = (0,2) - (0,1) \in U$

$\Rightarrow U = \mathbb{R}^2$, 而 $L \cup M \neq \mathbb{R}^2$.

故 $L \cup M$ 不是仿射集

5. $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

a) 证: $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$

b) 举例: $\mathrm{rank}(A+B) \lneqq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ 均可出现

c) TFAE: i) $\mathrm{rank}(A+B) = \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$

ii) $\exists$ 方程组 $AX=0$ 的基础解系 S 和 $BX=0$ 的一个基础解系 T, 使得 $\mathbb{R}^{n\times 1} = \mathrm{span}(S \cup T)$, $S \cap T$ 构成 $(A+B)X=0$ 的基础解系.

证: a) $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & A+B \\ & B \end{pmatrix}$.

rand(A) + $= \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & A+B \\ & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}(A+B)$

b) "<" $A = B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rank}(A+B) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = 1$.

"=" $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rank}(A+B) = 2$, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = 1$

c) i $\Rightarrow$ ii 记 $N(A)$ 为 $AX=0$ 的解空间. 则 $N(A+B) \supseteq N(A) \cap N(B)$.

于是有 $\dim N(A+B) \geq \dim(N(A) \cap N(B)) = \dim N(A) + \dim N(B) - \dim(N(A)+N(B))$

化简得 $\dim(N(A)+N(B)) \geq \dim(N(A)) + \dim N(B) - \dim N(A+B)$

$= n - \operatorname{rank} A + n - \operatorname{rank} B - (n - \operatorname{rank} A - \operatorname{rank} B)$

$= n$

故 $N(A)+N(B) = \mathbb{R}^{n\times 1}$.

对任意 S, T 分别为 $N(A)$ 与 $N(B)$ 中的一组基.

故 $S \cup T$ 可张成 $\mathbb{R}^{n\times 1}$, 即 $\operatorname{Span}(S\cup T) = \mathbb{R}^{n\times 1}$

同时, 由于上述不等式只能取等, 故 $\dim N(A+B) = \dim(N(A) \cap N(B))$

即 $N(A+B) = N(A) \cap N(B)$,

取 S, T 为从 $N(A+B)$ 中的一组基 D 扩充出去的一组基

则 $S \cap T = D$, 即 $S \cap T$ 为 $N(A+B)$ 的一组基, 故为 $(A+B)X=0$ 的基础解系

iii) ⇒ i)

$n \leq |S\cup T| = |S| + |T| - |S\cap T| = n - \operatorname{rank}(A) + n - \operatorname{rank}(B) - (n - \operatorname{rank}(A+B))$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

$\Leftrightarrow \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = \operatorname{rank}(A+B)$