



南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等代数 I

开课单位: 数学系

考试时长: 120 分钟

命题教师: 胡勇

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
分值	32 分	18 分	8 分	10 分	18 分	8 分	5 分	1 分

本试卷共 (8) 大题, 满分 (100) 分.

考生答卷应使用中文.

答卷要求书写规范, 字迹清晰易辨认. 解题过程要求语句完整、逻辑通顺, 数学符号和术语使用规范.

以下总设 K 为 \mathbb{C} 的子域, m, n, r, s 表示正整数. 数学记号与课程讲义相同, 有疑问可以询问监考老师.

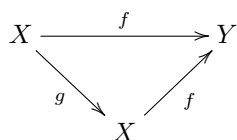
第一部分 (共 50 分)

对于这一部分的每一个问题, 考生只需直接写出每道题的答案, 而不必做任何解释.

第 1 大题 (本题共 32 分) 请直接写出以下问题的答案. (不需要做进一步解释.)

1. 写出一个满射 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.

2. 令 $X = \{0, -1, 1\}$, $Y = \{0, -1, -2\}$. 定义映射 $f: X \rightarrow Y$ 为 $f(x) = x^3 - x$. 能使图表



交换的映射 g 共有 ____ 个. (如果没有这样的 g , 可以写 0 个.)

3. 假设 \mathbb{C} 的子域 K 中存在一个元素 $\alpha \in K$ 满足 $\alpha^2 - \alpha + 4 = 0$. 则下列方程在 K 中一定有解的是 _____. (正确选项不一定只有一个.)

(A) $x^2 + x + 4 = 0$.

(B) $x^2 - 2x - 3 = 0$.

(C) $x^2 - 2\alpha x + \alpha - 5 = 0$.

(D) $x^3 - x^2 + 4\alpha = 0$.

4. 写出一个矩阵 X 满足 $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. 若 $(a, 6, 2)$ 属于 A 的行空间, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 请写出 $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ 中所有行最简形的初等矩阵.
7. 假设 A 是一个 10 阶方阵, 它满足 $A^4 - 2A^2 = 4I_{10} + 5A$. 请写出一个次数不超过 4 次的多项式 g 使得 $A^{-1} = g(A)$.
8. 设 $\alpha_1 = (2, 3, 1, 1)$, $\alpha_2 = (4, 6, 2, 2)$, $\alpha_3 = (0, 1, 2, 1)$, $\alpha_4 = (2, 4, 3, 1)$. 请写出向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中的两个不同的极大线性无关组.

第 2 大题 (本题共 18 分) 对下面每个论断, 说明其正确与否, 正确的可标记为 T, 错误的可标记为 F. (不需要解释理由.)

- 对于任意一个映射 $f: X \rightarrow Y$ 以及 X 的一个子集 A , 如果 A 是无限集, 则 $f^{-1}(f(A))$ 一定也是无限集.
- 设 A, B 是集合 X 的非空子集, C, D 是集合 Y 的非空子集. 则 $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$.
- 设 $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $b \in K^{n \times 1}$, V 是 $K^{n \times 1}$ 的子空间. 如果线性方程组 $AX = b$ 有解, 并且其解集包含在 V 中, 则 $b \in V$.
- 设 $\alpha \in K^{4 \times 1}$, $\beta \in K^{1 \times 4}$, $A = \alpha\beta$. 则存在常数 $c \in K$ 使得 $A^5 = cA$.
- 设 $A_1 \in \mathbf{M}_{m \times n}(K)$, $A_2 \in \mathbf{M}_{r \times s}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{m \times s}(K)$, $b_1 \in K^{m \times 1}$, $b_2 \in K^{r \times 1}$. 令 $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. 假设 $A_1X = b_1$ 和 $A_2X = b_2$ 都有解. 则 $AX = b$ 也一定有解.
- 假设 K^n 中的三个向量 v_1, v_2, v_3 中的任意两个线性无关, 则向量组 v_1, v_2, v_3 也线性无关.

第二部分 (共 50 分)

对于下面的每一个问题, 考生需要尽可能详尽地写出答题细节, 以使每道题的解答清晰完整.

第 3 大题 (本题共 8 分) 设 $a \in \mathbb{R}$, L_1, L_2, L_3 是平面内具有如下方程的直线:

$$L_1: ax - y + 2 = 0; \quad L_2: x - 2y - a = 0; \quad L_3: 2x + ay - 1 = 0.$$

假设 L_1, L_2, L_3 是两两不同的直线, 且交集 $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ 恰含一个点. 求 a 的所有可能取值.

第 4 大题 (本题共 10 分) 假设 V 是 K^n 的非空子集, 且对于任意 $u, v \in V$ 和任意 $\lambda \in K$, 均有 $u + \lambda v \in V$.

- 证明 V 是 K^n 的子空间.
- 假设 $\dim V = n - 1$, $\alpha \in K^n \setminus V$. 请问 $K^n = V \cup \text{span}(\alpha)$ 是否一定成立, 为什么?

第 5 大题 (本题共 18 分) 考虑二阶方阵 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. 对任意 $G \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, 证明: G 满足 $G^T J G = J$ 当且仅当其行列式 $\det(G)$ 等于 1.

2. 对任意 $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, 证明以下陈述等价:

(i) A 与 J 可交换, 即, $AJ = JA$.

(ii) 存在 $a, b \in \mathbb{R}$ 使得 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

(iii) 存在实系数多项式 f 使得 $A = f(J)$.

3. 设 $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 为模为 1 的复数构成的集合,

$$U := \{G \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \mid G \text{ 与 } J \text{ 可交换, 且 } G^T J G = J\}.$$

证明 S 与 U 之间存在一个双射.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. 计算 A^{2024} .

第 6 大题 (本题共 8 分) 设 $A \in \mathbf{M}_n(K), B \in \mathbf{M}_{n \times s}(K)$. 证明以下两个条件等价:

(i) 对于任意 $x \in \mathcal{C}(B)$ 均有 $Ax \in \mathcal{C}(B)$.

(这里 $\mathcal{C}(B)$ 表示矩阵 B 的列空间, 它是 $K^{n \times 1}$ 的子空间.)

(ii) 存在矩阵 $C \in \mathbf{M}_s(K)$ 使得 $AB = BC$.

第 7 大题 (本题共 5 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 $\mathbb{R}^{m \times 1}$ 中的一组线性无关的列向量, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 $\mathbb{R}^{n \times 1}$ 中的一组线性无关的列向量.

证明: 若有系数 $c_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$, 使得

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_{ij} \alpha_i \beta_j^T = 0,$$

则每个系数 c_{ij} 都必须为零.

第 8 大题 (本题共 1 分) 请写出一个闭区间 $[a, b]$ 使得 $|a - b| \leq 10$ 并且你在本试卷前面 7 个大题的总得分落在该区间内.

2024 年秋季学期高代 1 期中考试参考答案

第 1 大题 (本题共 32 分, 每小题 4 分.)

1. $f: z = x + yi \mapsto x$. (答案不唯一.)
2. 27.
3. ABCD.
4. $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
5. $a = -2$.
6. 仅有 I_3 这一个.
7. $g(X) = \frac{1}{4}(X^3 - 2X - 5) + c(4X^4 + 5X^3 + 2X - 1)$, 其中 c 可以是任意常数. (能写出一个正确的 g 即可得分.)
8. 从以下 4 种可能中任选 2 个即可: (1) α_1, α_3 ; (2) α_1, α_4 ; (3) α_2, α_3 ; (4) α_2, α_4 .

第 2 大题 (本题共 18 分, 每小题 3 分.)

1. T. 因为 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
2. F. 例如 $X = Y = \mathbb{R}$, $A = C = [0, 1]$, $B = D = [1, 2]$.
3. F. 例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \text{span}((1, -1)^T)$.
4. T. 因为 $A^{n+1} = \alpha(\beta\alpha)^n\beta = (\beta\alpha)^nA$.
5. F. 例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = A_2 = I_2$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
6. F. 例如 $n = 2$, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ 而 $v_3 = e_1 + e_2$.

第 3 大题 (本题共 8 分) 三条直线仅相交于一点, 这意味着方程组 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ 有且仅

有一个解. (至此可得 2 分.)

将增广矩阵做初等行变换可得

$$\begin{pmatrix} a & -1 & -2 \\ 1 & -2 & a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 9 & a^2 - 4a + 4 \\ 0 & a + 4 & 1 - 2a \end{pmatrix}.$$

(至此可再得 2 分.)

问题中的方程组有唯一解当且仅当 $(a+4)(a^2-4a+4)=9(1-2a)$. (至此可再得 2 分.)

化简整理即知, 最终的等价条件是 $a^3+6a+7=0$, 亦即, $(a+1)(a^2-a+7)=0$. 所以 $a=-1$. (至此可再得 2 分.)

第 4 大题 (本题共 10 分)

1. (本小题 6 分) 在题设条件中取 $\lambda=1$ 可知 V 关于加法封闭. (至此可得 2 分.)

因为 V 非空, 可以取定一个 $v_0 \in V$. 在题设条件中取 $u=v=v_0$ 及 $\lambda=-1$ 可知 $0 \in V$. (至此可再得 2 分.)

最后, 在题设条件中取 $u=0$ 可知 V 关于数乘封闭. 综上即知 V 是一个子空间. (至此可再得 2 分.)

2. (本小题 4 分) 否. (至此可得 1 分.)

事实上, 当 $n > 1$ 时 $K^n = V \cup \text{span}(\alpha)$ 一定不成立. 原因是: 当 $n > 1$ 时, V 中可以任取一个非零向量 u . 因为 $\alpha \notin V$, 所以 u 不可能是 α 的常数倍. 由此可以验证 $\alpha + u \notin V \cup \text{span}(\alpha)$. (至此可再得 3 分.)

第 5 大题 (本题共 18 分)

1. (本小题 3 分) 计算验证即可.

2. (本小题 6 分) (i) \Rightarrow (ii). 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. 计算验证可知 $AJ = JA$ 的充分必要条件是 $d=a$, $c=-b$.

(ii) \Rightarrow (iii). 若 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, 则 $A = aI_2 + bJ$. 也就是说 $A = f(J)$ 对于多项式 $f(X) = a + bX$ 成立.

(iii) \Rightarrow (i). 对于任意多项式 f , J 和 $f(J)$ 一定是交换的.

3. (本小题 4 分) 根据前两个小题的结果可知

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

(至此可得 2 分.) 因此, 映射

$$\psi: S \longrightarrow U; \quad z = x + yi \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

是一个双射. (至此可再得 2 分.)

4. (本小题 5 分) 注意到 $J^2 = -I_2$, $A = aI_2 + bJ$. 所以

$$A^{2024} = (aI_2 + bJ)^{2024} = \sum_{i=0}^{2024} \binom{2024}{i} (aI_2)^{2024-i} (bJ)^i = \sum_{i=0}^{2024} \binom{2024}{i} a^{2024-i} b^i J^i.$$

(至此可得 2 分.) 对 0 和 2024 之间的整数 i 区分奇偶性来分别计算 J^i 可知

$$J^i = \begin{cases} (-1)^k I_2 & \text{若 } i = 2k, \\ (-1)^k J & \text{若 } i = 2k + 1. \end{cases}$$

(至此可再得 1 分.) 所以

$$\begin{aligned} A^{2024} &= \sum_{i=0}^{2024} \binom{2024}{i} a^{2024-i} b^i J^i \\ &= \sum_{k=0}^{1012} (-1)^k \binom{2024}{2k} a^{2024-2k} b^{2k} I_2 + \sum_{k=0}^{1011} (-1)^k \binom{2024}{2k+1} a^{2023-2k} b^{2k+1} J \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\alpha = \sum_{k=0}^{1012} (-1)^k \binom{2024}{2k} a^{2024-2k} b^{2k}, \quad \beta = \sum_{k=0}^{1011} (-1)^k \binom{2024}{2k+1} a^{2023-2k} b^{2k+1}.$$

(至此可再得 2 分.)

第 6 大题 (本题共 8 分) 记 β_1, \dots, β_s 为 B 的列向量组.

(i) \Rightarrow (ii). 根据假设, 每个 $A\beta_j$ 可以写成 β_1, \dots, β_s 的线性组合. 故存在常数 $c_{ij} \in K, 1 \leq i, j \leq s$ 使得

$$\text{对于每个 } j \in [1, s], A\beta_j = c_{1j}\beta_1 + \dots + c_{sj}\beta_s = (\beta_1, \dots, \beta_s) \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{sj} \end{pmatrix}.$$

综合起来写成 (分块) 矩阵的形式即为

$$(*) \quad A(\beta_1, \dots, \beta_s) = (\beta_1, \dots, \beta_s)(c_{ij}).$$

这就是说, 若取 $C = (c_{ij})$ 则 $AB = BC$ 成立.

(ii) \Rightarrow (i). 按照上面 (*) 式的分块矩阵方式理解等式 $AB = BC$ 可知, 对于每个 $1 \leq j \leq s$, $A\beta_j$ 都是 β_1, \dots, β_s 的线性组合. 此即 $A\beta_j \in \mathcal{C}(B)$ 对每个 j 成立. 因此 $\text{span}(A\beta_1, \dots, A\beta_s) \subseteq \mathcal{C}(B)$. 对于任意 $x \in \mathcal{C}(B)$, x 是 β_1, \dots, β_s 的线性组合, 因而 Ax 是 $A\beta_1, \dots, A\beta_s$ 线性组合, 故 $Ax \in \text{span}(A\beta_1, \dots, A\beta_s) \subseteq \mathcal{C}(B)$.

(本题论证过程足够清晰, 表述准确, 不得出现太大的思路跳跃. 否则酌情扣分.)

第 7 大题 (本题共 5 分) 令 $B_i = \sum_{j=1}^s c_{ij}\beta_j$. 则题设条件表明 $\sum_{i=1}^r \alpha_i B_i^T = 0$. 令 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 为以 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为列向量组的 $m \times r$ 矩阵, $B = (B_1, \dots, B_r)^T$ 为以 B_1^T, \dots, B_r^T 为行向量组的 $r \times n$ 矩阵. 则

$$AB = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \begin{pmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_r^T \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i^T = 0.$$

于是 AB 的每一列为 0.

对于每个 $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, 乘积矩阵 AB 的第 j 列是 A 的列向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 的一个线性组合, 其中的组合系数就是 B 的第 j 列元素. 由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 故 B 的第 j 列元素必须全为 0. 由于这对每个 $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ 成立, 故可知 $B = 0$. 因此, 对于每个 i 均有 $\sum_{j=1}^s c_{ij} \beta_j = B_i = 0$. 再根据 β_1, \dots, β_s 的线性无关性即可得到 c_{ij} 均为 0.

证法二: 事实上, 若令 $C = (c_{ij}) \in \mathbf{M}_s(K)$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_s)^T$, 则以分块矩阵的角度可以看到

$$ACB = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(c_{ij}) \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \beta_s^T \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \alpha_i c_{ij} \beta_j^T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_{ij} \alpha_i \beta_j^T = 0.$$

由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关可知 A 列满秩, 由此可以推出 A 有左逆. 由 β_1, \dots, β_s 线性无关可知 B 行满秩, 由此可以推出 B 有右逆. 所以, 通过左乘 A 的一个左逆、右乘 B 的一个右逆可以推出 $C = 0$, 亦即, 每个 $c_{ij} = 0$.

第 8 大题 (本题共 1 分) 根据实际情况给分.