高等代数 I 小测验 1

B 卷

2024 年 10 月 17 日

满分: 50 分

1. (10 分) 求解以下线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}.$$

2. (15 分) 简答题. 请直接写出下列问题的答案. (不需要给出解题过程或解释理由.)

   (a) 设集合 X, Y, Z 满足 $|X| = |Y| = 2$, $|Z| = 3$. 则从 X 到 $\mathrm{Map}(Y, Z)$ 的单射共有 ____ 个.

   (b) 令 $A = \{1, 2\}$. 写出两个映射 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 和 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 使得 $f^{-1}(A)$ 是有限集, $g^{-1}(A)$ 是无限集.

   (c) 假设 K 是 $\mathbb{C}$ 的子域, 且存在 $a \in K$ 满足 $a^2 + a + 1 = 0$. 则下列结论一定成立的是 ____. (正确选项不一定只有一个.)

   (A) 方程 $x^2 + 9 = 0$ 在 K 中有解.

   (B) 如果 $\mathbb{R}$ 是 K 的子域, 则必然 $K = \mathbb{C}$.

   (C) 如果映射 $f : K \to \mathbb{R}$ 满足

   $$f(x+y) = f(x)+f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{对任意 } x, y \in K \text{ 成立},$$

   则 f 一定是常值映射.

   (D) 映射 $g : K \to K; x \mapsto x^3$ 一定不是单射.

3. (10 分) 判断正误. 正确的请解释理由, 错误的请举出反例.

(a) 若线性方程组 $AX = b_1$ 和 $AX = b_2$ 均有解, 则 $AX = b_1 + b_2$ 也有解.

(b) 设 f, g, h 都是非空集合 X 到自身的映射. 如果 $h = g \circ f$, 并且 f 是满射, g 是单射, 则 h 一定是可逆映射.

4. (9 分) 设 $f : X \to Y$ 为两个非空集合之间的映射. 证明下列陈述等价:

(i) f 是单射.

(ii) 对于 X 的任意子集 A 均有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

(iii) 对于 X 的任意子集 A, B 均有: $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ 成立当且仅当 $A \cap B = \emptyset$ 成立.

5. (6 分) 设 K 为 $\mathbb{C}$ 的一个子域. 证明: 如果对任意 $x \in K$ 均有 $x^3 \in \mathbb{Q}$, 则 $K = \mathbb{Q}$.

高代I小测1

B卷 甘 2024.10.17

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ & 2 & 2 & 1 & -1 \\ & 5 & 2 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ & 1 & -2 & -1 & 3 \\ & 0 & 12 & 6 & -14 \\ & 0 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ & 1 & -2 & -1 & 3 \\ & & 6 & 3 & -7 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $x_4 = s$, $s \in \mathbb{R}$.
则 $x_3 = -\frac{1}{6}(7+3s)$
$x_2 = \frac{2}{3}$, $x_1 = \frac{31}{6} + \frac{s}{2}$

2. a) $|Map(Y,Z)| = 3^2 = 9$. $X \to Map(Y,Z)$ 的单射数为 $A_9^2 = 72$

b) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}: x \to x$. $f^{-1}(A) = A$

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}: x \to 2\sin(\frac{\pi}{2}x)$. $g^{-1}(A) = \{1+4k : k \in \mathbb{Z}\}$

c) ABCD

~~A. 考虑集合 $\{a+b\omega : a,b \in \mathbb{Q}\}$ +c =S, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. 则S是一个域.~~

~~方程 $x^2+9=0$ 在 $\mathbb{C}$ 中有解 $3i$ 与 $-3i$.~~

A. 考虑集合 $\{a+b\omega+c\omega : a,b,c \in \mathbb{Q}\} =: S$, 其中 $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
易证S是一个域.
方程 $x^2+9=0$ 在 $\mathbb{C}$ 中的解为 $x = \pm 3i$. 可证这两个均不在S中.

B 令 $a \in K$ 且 $a^2+a+1=0$. 则 $(a+\frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$, 即 $[\frac{2}{\sqrt{3}}(a+\frac{1}{2})]^2 = -1$.
由于 $\mathbb{R} \subseteq K$, $a \in K$, $\frac{2}{\sqrt{3}}(a+\frac{1}{2}) \in K$. 故 $i \in K$. 所以 $\mathbb{C} = K$.

C. 若映射 $f: K \to \mathbb{R}$ 满足题述两式. 则有 $f(0+0) = f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$
且 $f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 0$ 或 1.
当 $f(1)=1$ 时, $f(a^2+a+1) = f^2(a)+f(a)+1 = 0$. 易知, $f(a)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无解.

3、a) 若 $A\mathbb{X}_1=b_1$，$A\mathbb{X}_2=b_2$，则 $A(\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2)=b_1+b_2$. 有解.

b) 取 $\mathbb{X}=\mathbb{Z}$，$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}: x\mapsto\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$，$g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}: x\to x$

$h=g\circ f: x\mapsto\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$ 不单，故不可逆

4. (i)⇒(ii) $\forall A\subseteq\mathbb{X}$，$\forall x\in f^{-1}(f(A))$，$\exists\, b\in f(A)$ st $f(x)=b$.

又由于 $b\in f(A)$，$\exists\, a\in A$，s.t. $b=f(a)$

由 f 单且 $b=f(x)=f(a)\Rightarrow x=a\in A$

反过来，$\forall x\in A$，$f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(\{f(x)\})$

$\subset f^{-1}(f(A))$

(ii)⇒(iii) 若 $f(A)\cap f(B)=\phi$，$\forall A,B\subset\mathbb{X}$.

故 $f(1)=0$. 此时 $\forall x\in K$, $f(x)=f(1)\cdot f(x)=0$

故 f 为常值函数.

D. 考虑 $g(a^2)$ 与 $g(a)$.

$g(a)=a^3=a(-a-1)=-(a^2+a)=1$.

$g(a^2)=a^6=a^3\cdot a^3=1=g(a)$

而 $a\neq a^2$ (不然, $a^2+a+1=2a+1=0$, $a=-\frac{1}{2}$, 矛盾)

故 g 一定不是单射.

3. a) 若 $AX_1=b_1$, $AX_2=b_2$, 则 $A(X_1+X_2)=b_1+b_2$. 故有解.

b) 取 $X=\mathbb{Z}$, $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$; $x\mapsto\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$, $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}: x\mapsto x$.

此时, $h=g\circ f$; $x\mapsto\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$, 不单. 故不可逆.

4. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\forall A\subseteq X$, $\forall x\in f^{-1}(f(A))$, $\exists b\in f(A)$ s.t. $f(x)=b$.

由于 $b\in f(A)$, $\exists a\in A$, s.t. $f(a)=b$

故 $b=f(a)=f(x)$. 由 f 单, $x=a\in A$.

反过来, $\forall x\in A$, $f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(\{f(x)\})\subseteq f^{-1}(f(A))$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 不妨设 A,B 均非空 (若为空, 结论显然成立)

若有 $f(A)\cap f(B)=\phi$. 反设 $A\cap B\neq\phi$, 则 $\exists x\in A\cap B$.

则 $f(x)\in f(A)$. $f(x)\in f(B)\Rightarrow f(x)\in f(A)\cap f(B)$, 矛盾!

若有 $A\cap B=\phi$. 由 (ii), $f^{-1}(f(A))\cap f^{-1}(f(B))=\phi$.

反设 $f(A)\cap f(B)\neq\phi$. 则 $\exists y\in f(A)\cap f(B)$. 且 $f^{-1}(y)\neq\phi$.

此时, 必 $f^{-1}(y)\subseteq f^{-1}(f(A))$, $f^{-1}(y)\subseteq f^{-1}(f(B))$. 与假设矛盾!

综上若有(ii), 则 $f(A)\cap f(B)=\phi\Leftrightarrow A\cap B=\phi$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 反设 f 不单, 即有 $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$.

取 $A=\{x_1\}$, $B=\{x_2\}$, 此时有, $A\cap B=\phi$,

$f(A)\cap f(B)\neq\phi$ ($f(x_1)=f(x_2)\in f(A)\cap f(B)$), 故矛盾.

5. 若 K 为 $\mathbb{C}$ 的子域，则 $\mathbb{Q} \subseteq K$.

假设 $\exists a \in K$，但是 $a \notin \mathbb{Q}$.

则 $(a+1)^3$ 与 $(a-1)^3$ a^3 均属于 $\mathbb{Q}$

故有 $6a = (a+1)^3 + (a-1)^3 - 2a^3 \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow a \in \mathbb{Q}$，矛盾！

故 $K = \mathbb{Q}$.