# 高等代数习题课

[redacted] 2024.11.21.

2.2.7 $A\in M_{m\times n}(K)$，$B$是从$A$中选出$s$行得到的$s\times n$阵.

证明 $\operatorname{rank}B\geq \operatorname{rank}A+s-m$. 并说明 > 与 = 的情况均可能出现

证明：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是 $A$ 的行向量，$\operatorname{rank}A=r_1$，$\operatorname{rank}B=r_2$.

令 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_2}}$ 是 $B$ 的一个极大线性无关的行向量组.

将其扩充为 $A$ 的一个极大线性无关的行向量组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_2}},\alpha_{i_{r_2+1}},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$

其中 $\alpha_{i_{r_2+1}},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$ 在剩下的 $m-s$ 个行向量中选取.

故 $r_1-r_2\leq m-s$，即 $\operatorname{rank}B\geq \operatorname{rank}A+s-m$

例：考虑 $A=\begin{pmatrix}1&\\1&\\&1\end{pmatrix}$，$B_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$

$\operatorname{rank}A=2$，$\operatorname{rank}B_1=1$，$\operatorname{rank}B_2=2$.

$\Rightarrow \operatorname{rank}B_1=1=\operatorname{rank}A+2-3$

$\operatorname{rank}B_2=2>\operatorname{rank}A+2-3$

2.2.8 $r(A)\leq 1$，证：$\exists a_1,\cdots,a_m\in K$ 和 $b_1,\cdots,b_n\in K$，s.t.

$$A=(a_ib_j)_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$$

证：1. 若 $r(A)=0$，则 $A=0$，显然成立

2. 若 $r(A)=1$，则令其一非零行向量 $\alpha=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

其余行均为$\alpha$的倍数、不妨令第$i$行为 $a_i\alpha$.

则 $A=\begin{pmatrix}a_1\alpha\\a_2\alpha\\\vdots\\a_m\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)=(a_ib_j)$

2.2.9.(2) 解基础解系

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\&-1&-2&-2&-6\\&1&2&2&6\\&-1&-2&-2&-6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\&1&2&2&6\\&&&&\\&&&&\end{bmatrix}$$

令 $(x_3,x_4,x_5)=(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 则有

$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,-2,1,0,0),(1,-2,0,1,0),(5,-6,0,0,1)$

基础解系为 $(1,-2,1,0,0)^T$ $(1,-2,0,1,0)^T$ $(5,-6,0,0,1)^T$,

2.2.13. $A\in M_n(K)$, $b\in K^{n\times 1}$. $B=\begin{pmatrix}A&b\\b^T&0\end{pmatrix}$. 证明:如果 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$,则线性方程组 $AX=b$ 有解.

证:令 $A$ 的列向量组中一极大线性无关组为 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$.

则在 $B$ 的列向量组中 $\begin{pmatrix}\alpha_{i_1}\\b_{i_1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_{i_2}\\b_{i_2}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\alpha_{i_r}\\b_{i_r}\end{pmatrix}$ 依旧线性无关.

由于 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B$,上述为 $B$ 的列向量组的一个极大线性无关组.

因此 $\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$ 能被 $\begin{pmatrix}\alpha_{i_1}\\b_{i_1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\alpha_{i_r}\\b_{i_r}\end{pmatrix}$ 线性表出,进而 $b$ 能被 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出.

故 $AX=b$ 必有解.

2.2.14. $A\in M_{m\times n}(K)$, $B\in M_{m\times s}(K)$, 考虑 $X\in M_{n\times s}(K)$, $AX=B$.

1. 设 $C=(A\ B)$. 证明 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}A=\operatorname{rank}C$.
2. 利用矩阵的秩给出 $AX=B$ 有唯一解的充要条件.

证: 1) "$\Rightarrow$" $A$ 中极大线性无关的列向量组在 $C$ 的列向量中亦线性无关.

故 $\operatorname{rank}A\leq\operatorname{rank}C$.

又 $C=(A\ \ AX_0)=A(I_n\ \ X_0)$ ($X_0$ 为方程 $AX=B$ 的解)

故 $\operatorname{rank}A\geq\operatorname{rank}A(I_n\ X_0)=\operatorname{rank}C$

故 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}C$

"$\Leftarrow$" 由上述讨论可知,若 $\operatorname{rank}C=\operatorname{rank}A$,则 $A$ 中极大线性无关的列向量组亦为 $C$ 中极大的线性无关的列向量组.

因此它们能线性表出 $B$ 的所有列向量,即 $\exists X_0$ s.t. $AX_0=B$.

2) $A$ 列满秩且 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}C$.

2.2.15. 1) 找通解以及齐线方程的基础解系.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

$x_3=0$. 齐次线性方程的基础解系为

$$\eta_1=(0,\tfrac{1}{2},1,0,0),\ \eta_2=(0,-\tfrac{1}{2},0,1,0),\ \eta_3=(\tfrac{1}{3},\tfrac{5}{6},0,0,1)$$

一特解为 $\eta_0=(\frac{2}{3},\frac{1}{6},0,0,0)$. 故通解为 $\eta_0^T+k_1\eta_1^T+k_2\eta_2^T+k_3\eta_3^T$, $k_i\in K$, $i\in[1,3]$

2.2.16. $\gamma_0$是$AX=b$的一个特解. $\eta_1,\cdots,\eta_s$是齐次线性方程组的一个基础解系.

令 $\gamma_i=\gamma_0+\eta_i$. $i=1,\cdots,s$. 证: 任意$AX=b$的解$\gamma$, $\gamma=\sum_{i=0}^{s}c_i\gamma_i$, 且 $\sum_{i=0}^{s}c_i=1$.

证: $\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s=k_1\gamma_1+\cdots+k_s\gamma_s+(1-k_1-k_2-\cdots-k_s)\gamma_0$

故 $c_i=\begin{cases}k_i & i=1,2,\cdots,s\\ 1-\sum_{i=1}^{s}k_i & i=0\end{cases}$ 且 $\sum c_i=1$.

2.2.22. L 过点 $A(2,3,-5)$ 且与线 $l$: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$ 平行.

解: $L$: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+5}{4}$

2.2.30 直线$l$与平面$\pi$方程如下:

$l$: $\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$, 与 $l$: $\frac{x-13}{8}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$,

$\pi$: $x+2y-5z-11=0$. $\pi$: $x+2y-4z+1=0$.

判断$l$与$\pi$的位置关系.

解: 1) $\vec{l}=(2,-2,3)$, $\vec{n}=(1,2,-5)$

$\vec{l}\cdot\vec{n}=2-4-15\neq0$,

令 $x=2k+5$, $y=-2k-3$, $z=3k+1$, 代入$\pi$, 得

$-17k-17=0 \Rightarrow k=-1$

故$l$与$\pi$相交于点 $(3,-1,-2)$

2) $\vec{l}=(8,2,3)$, $\vec{n}=(1,2,-4)$

$\vec{l}\cdot\vec{n}=0$

$l$过点$(13,3,4)$, 代入$\pi$.

$13+2\times6-16+1\neq0$

故$l$与$\pi$平行, 不相交.

2.2.31. 平面直角坐标系中点 $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$

1) 证: $A,B,C$ 三点不共线 $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}$ 之秩为3.

2) 若 $A,B,C$ 三点不共线, $P(\alpha,\beta)$ 是三角形 $ABC$ 的外接圆圆心.

证明: 若 $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2$ 均为有理数, 则 $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$.

证: 1)

$A,B,C$ 三点不共线 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1x+a_2y+z=0 \\ b_1x+b_2y+z=0 \\ c_1x+c_2y+z=0 \end{cases}$ 只有零解.

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}=3$.

2) $P$ 为三角形 $ABC$ 三边中垂线交点.

中垂线方程为 $(b_2-a_2)(y-\frac{b_2+a_2}{2})+(b_1-a_1)(x-\frac{b_1+a_1}{2})=0$.

由于三点不共线, 故 $b_2-a_2$, $c_2-b_2$, $a_2-c_2$ 至多只有一个为0.

不妨设 $b_2-a_2\neq 0$, 则 $y=Ax+B$. 其中 $A,B$ 为 $a_1,b_1,a_2,b_2$ 的分式

代入其余两式中, 总可用加减乘除法解出 $x$, 进而解出 $y$.

上述过程只用到加减乘除且 $a_i,b_i\in\mathbb{Q}$, 故 $x,y\in\mathbb{Q}$.

# 高代习题课

甘 2024.11.28

思考题 2.7. $V$是$K$上向量空间，$\alpha\in V$，$c\in K$，证明：

1. $-(-\alpha)=\alpha$　　2. $c\alpha=0\Rightarrow c=0$ or $\alpha=0$

思考题 2.8　$W$是$K$上向量空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$为其中的向量组．TFAE：

1. $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关　2、0的表式是唯一的．

3、$\forall\beta\in W$且$\beta$能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$表出，则表达式唯一．

证：$1\Rightarrow2$．由定义．

$2\Rightarrow3$．若有 $\beta=a_1\alpha_1+\cdots+a_r\alpha_r=b_1\alpha_1+\cdots+b_r\alpha_r$，则

$$\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)\alpha_i=0$$

由2 $\Rightarrow a_i=b_i\ \ \forall i\in[\![1,r]\!]$．$\Rightarrow$表达式唯一．

$3\Rightarrow1$．0能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$表出$\Rightarrow 0=0\alpha_1+\cdots+0\cdot\alpha_r$表达式唯一．

由定义，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关

思考题 2.10．$Z=\{(a_n)\in K^{\mathbb{N}}:(a_n)$处几乎处处为$0\}$．求$Z$的一组基．

令 $\varepsilon_i=(0,\cdots,1,0,\cdots)$，仅有第$i$项为1，其余为0．

则 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,\cdots$为$Z$的一组基．

习题 2.3.1．1．$V=\mathbb{R}^2$，$(a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$，$k\boxdot(a_1,b_1)=(a_1,b_1)$

不是向量空间，虽然$(0,0)$为0向量，而$\forall$ $0\boxdot(a_1,b_1)=(a_1,b_1)\neq0$

对于$(a_1,b_1)\neq0$．

2．$V=\mathbb{R}^+$，$a\boxplus b=ab$，$k\boxdot a=a^k$．

是向量空间．

习题 2.3.3 令 $V=\mathbb{R}^2$，定义. $(a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)$

$k\boxdot(a_1,b_1)=(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a^2)$

1. 证明. $V$是$\mathbb{R}$向量空间

2. 令 $M=\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$，$N=\{(0,b):b\in\mathbb{R}\}$，$M,N$是否是$V$的子空间.

证

1. ① $(a_2,b_2)\boxplus(a_1,b_1)=(a_2+a_1,\ b_2+b_1+a_2a_1)=(a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)$

② $(0,0)\boxplus(a_1,b_1)=(a_1,b_1)$

③ $[(a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)]\boxplus(a_3,b_3)=(a_1+a_2+a_3\ ,\ b_1+b_2+b_3+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)$

$\Rightarrow (a_1,b_1)\boxplus[(a_2,b_2)\boxplus(a_3,b_3)]=[(a_2,b_2)\boxplus(a_3,b_3)]\boxplus(a_1,b_1)$

$=(a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+b_3+\sum_{1\le i<j\le 3}a_ia_j)$

$=[(a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)]\boxplus(a_3,b_3)$

④ $(a_1,b_1)\boxplus(-a_1,-b_1+a_1^2)=(a_1-a_1\ ,\ b_1-b_1+a_1^2+a_1\cdot(-a_1))=(0,0)$

⑤ $(kl)\boxdot(a_1,b_1)=(kla_1,\ klb_1+\frac{kl(kl-1)}{2}a_1^2)$

$k\boxdot(l\boxdot(a_1,b_1))=k\boxdot(la_1,\ lb_1+\frac{l(l-1)}{2}a_1^2)$

$=(kla_1,\ klb_1+\frac{kl(l-1)}{2}a_1^2+\frac{k(k-1)}{2}(la_1)^2)$

$=(kla_1,\ klb_1+\frac{kl(kl-1)}{2}a_1^2)$

⑥

$k\boxdot((a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2))=k\boxdot(a_1,b_1)\boxplus k\boxdot(a_2,b_2)$

⑦ $1\boxdot(a_1,b_1)=(a_1,b_1)$

⑧ $(k+l)\boxdot(a_1,b_1)=((k+l)a_1\ ,\ \frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a_1^2+(k+l)b_1)$

$=(ka_1,\ kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2)\boxplus(la_1\ ,lb_1+\frac{l(l-1)}{2}a_1^2)$

$=k\boxdot(a_1,b_1)\boxplus l\boxdot(a_1,b_1)$

2. $(1,0)\boxplus(1,0)=(2,1)\notin M$ 故 $M$不是子空间

$(0,0)\in N$, $(0,b_1)\boxplus(0,b_2)=(0,b_1+b_2)\in N$, $k\boxdot(0,b_1)=(0,kb_1)\in N$ $\Rightarrow N$是子空间

习题 2.3.4. $V\neq\phi$, 定义一个加法满足

a) 加法结合律 b) $\exists 0\in V$ st. $\forall v\in V, v+0=v$ c) $\forall v\in V$, $\exists u\in V$, st. $v+u=0$.

1. $\forall \alpha,\beta\in V$, $\alpha+\beta=0 \Rightarrow \beta+\alpha=0$

2. $\forall v\in V$, 均有 $0+v=v$.

证: 1. 对于 $\beta\in V$, $\exists \gamma\in V$ st. $\beta+\gamma=0$.

$$\alpha=\alpha+0=\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma=0+\gamma$$

$$\Rightarrow \beta+\alpha=\beta+(0+\gamma)=(\beta+0)+\gamma=\beta+\gamma=0$$

2. $\forall v\in V$, $v+0=0+v=v$..

习题 2.3.11 $V=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$. 定义加法: $+|_{\mathbb{R}}$ 为通常意义且

$$a+\infty=\infty+a=\infty,\quad a+(-\infty)=-\infty+a=-\infty$$

$$\infty+\infty=\infty,\ (-\infty)+(-\infty)=-\infty,\quad \infty+(-\infty)=-\infty+\infty=0$$

定义数乘: $\cdot|_{\mathbb{R}}$ 为通常意义且

$$\lambda\cdot\infty=\begin{cases}\infty & \lambda>0\\ 0 & \lambda=0\\ -\infty & \lambda<0\end{cases}\qquad \lambda\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty & \lambda>0\\ 0 & \lambda=0\\ \infty & \lambda<0\end{cases}$$

请问按照如上定义, 哪些性质成立 哪些不成立 (向量空间的8条)

解: ① $a+b=b+a$ 成立

② $(a+b)+c=a+(b+c)$ 不成立 $(-\infty+\infty)+8=0+8=8$

$-\infty+(\infty+8)=-\infty+\infty=0$

③ $0+a=a$ 成立

④ $\forall a\in V$, $\exists -a\in V$ st. $a+(-a)=0$ 成立

⑤ $(kl)a=k(la)$ 成立

⑥ $(k+l)a=ka+la$ 不成立 $(3-2)\infty=1\cdot\infty=\infty$

$3\infty-2\infty=\infty-\infty=0$

⑦ $\exists 1\in\mathbb{R}$, st. $\forall a\in V$. $1\cdot a=a$ 成立.

⑧ $k\cdot(a+b)=ka+kb$ 成立

习题 2.3.12. 在 $K^n$ 中下列子集合是否是子空间, 是则求维数 并给出基, 不是则求其合成的子空间.

3. $K=\mathbb{R}$, $V=\{(a_1,\cdots,a_n)\in K^n$: 有某个 $i$ st. $a_i>0\}$

解：不是子空间，$(1,\cdots,1)\in V$，$-(1,\cdots,1)=(-1,\cdots,-1)\notin V$.

由于 $\varepsilon_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$ 均属于 $V \Rightarrow K^n\subseteq\langle V\rangle \Rightarrow K^n=\langle V\rangle$.

$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为一组基.

习题 2.3.15 $U, W<V$，TFAE：

1) $U\cup W=U+W$ 2) $U\subseteq W$ 或 $W\subseteq U$ 3) $U\cup W$ 是子空间.

1) ⇒ 2) 若 $W\not\subseteq U$，即 $\exists w\in W$，$w\notin U$

则 $\forall u\in U$，$u+w\notin U$（否则 $w\in U-u=U$，矛盾）

但是 $u+w\in U+W=U\cup W \Rightarrow u+w\in W$

$\Rightarrow u\in W-w=W \Rightarrow U\subseteq W$.

2) ⇒ 3) 假设 $U\subseteq W$，$U\cup W=W<V$

若 $W\subseteq U$，$U\cup W=U<V$

3) ⇒ 1) 易证 $U\cup W\subseteq U+W$.（$0\in U$ & $0\in W$）

$\forall u+w\in U+W$，由 $u\in U\cup W$，$w\in U\cup W \xRightarrow{U\cup W\text{是子空间}} u+w\in U\cup W$

$\Rightarrow U+W\subseteq U\cup W \Rightarrow U+W=U\cup W$

习题 2.3.18 设 $w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\in\mathbb{C}$，定义 $\mathbb{Q}(w)=\{a+bw\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

1. 证明：$\mathbb{Q}(w)$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个扩域，而且 $\overline{w}\in\mathbb{Q}(w)$

2. 求 $\mathbb{Q}(w)$ 作为 $\mathbb{Q}$-向量空间的一组基.

3. 找出下列向量组的极大线性无关组.

a) $\frac{1}{2}$, $-3$, $4$

b) $1, w, w^2, w^3, w^4$

c) $w, \overline{w}, \sqrt{3}i$

证：1. 注意到 $w^3=1 \Rightarrow (w-1)(w^2+w+1)=0 \Rightarrow w^2+w+1=0$

故 $\mathbb{Q}(w)$ 对乘法封闭且 $\forall a+bw\in\mathbb{Q}(w)$，$b\neq0$，则 $ab-a^2-b^2<0$.

$$\frac{b-a+bw}{ab-a^2-b^2}\cdot(a+bw)=\frac{ab-a^2+b^2w+b^2w^2}{ab-a^2-b^2}=\frac{ab-a^2-b^2}{ab-a^2-b^2}=1.$$

$\Rightarrow \mathbb{Q}(w)$ 是 $\mathbb{Q}$ 的扩域，而 $\overline{w}=\frac{1}{w}\in\mathbb{Q}(w)$

2. $1, w$ 为 $\mathbb{Q}(w)$ 的一组基.（张成且线性无关）

3. a) $\frac{1}{2}$ b) $1, w$ c) $w, \overline{w}$