South China University of Technology

本科毕业设计（论文）

一些仿射李代数的 r 矩阵实现

学　　院	数学学院
专　　业	数学与应用数学
学生姓名	黄斌和
学生学号	202030323177
指导老师	常智华
提交日期	2024 年 5 月 28 日

华南理工大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名： 日期： 2024 年 5 月 25 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保存并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许学位论文被查阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存、汇编学位论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

作者签名： 日期： 2024 年 5 月 25 日

指导教师签名：常智华 日期：2024年5月27日

作者联系电话：15874099320 电子邮箱：1010401852@qq.com

摘　要

Faddeev, Reshetikhin, Takhtajan 给出了李代数的量子包络代数的 RTT 实现. 在这一实现中, 量子包络代数的生成元满足的生成关系可以由简洁的 RTT 关系给出. 受量子包络代数研究的启发, 流代数也有相应的 r 矩阵实现. 相应的 r 矩阵由 Casimir 元给出.

我们将其扩展到仿射李代数上, 得到了相应的 r 矩阵实现. 并具体考虑了流代数 $\mathfrak{sl}_2[z]$ 与仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ 在伴随表示上的 r 矩阵实现.

关键词: r 矩阵实现; 包络代数; 流代数; 仿射李代数

Abstract

Faddeev, Reshetikhin, Takhtajan gave the RTT-presentation of a quantum enveloping algebra of a Lie algebra. In this presentation, the generative relations that the generators of a quantum enveloping Lie algebra satisfy can be written by the belief RTT-relations. Inspired by studies of quantun enveloping algebras, there is also the corrospending r-matrix presentation of a current algebra. The corrosponding r-matrix is given by the Casimir element.

Extending this to the affine Lie algebra, we obtain the corrosponding r-matrix presentation. And we make a specific considerarion of the r-matrix presentations of a current algebra $\mathfrak{sl}_2[z]$ and a affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ on the adjoint representation.
Keywords: r-matrix presentation; enveloping algebra; current algebra; affine Lie algebra

目　录

第一章　绪论

1.1　引言

李代数是起源于 19 世纪后期的一类很重要的非结合代数. 如今, 随着其理论的不断发展与完善, 李代数结构在数学与理论物理相关领域广泛运用. 由于非结合的性质, 研究李代数本身有时并不方便, 常用的方法是探究其泛包络代数的性质.

1.2　国内外研究现状和相关工作

泛包络代数可以看作是李代数张量代数的商代数, 并且由 Poincaré-Birkhoff-Witt 定理 (下简称 PBW 定理), 泛包络代数中的元素可以用李代数中元素显式地表达出来.

许多对数学对象的表述从表面上看是截然不同的, 但实际上却是等价的. 不同的表述代表着不同的观点. 在某些方面, 其中一些的表述比另一些更好, 这取决于你感兴趣的是什么. 对于由生成元和生成关系实现的代数结构来说，也是这样: 不同的生成元和生成关系实现的结构可能是相同的, 哪一种实现方法最合适取决于对该代数结构的使用.

Yangian 是仿射型量子化包络代数的两个重要类之一 (另外一类是量子仿射代数). 文献 [8] 分析了复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Yangian 的三种不同的实现方法: Drinfeld 的原始 (或 J) 实现, r 矩阵 (或 RTT) 实现, 以及 Drinfeld 的“新”(或流) 实现. Drinfeld 在文献 [4] 中给出的 Yangian 的原始实现, 这一实现方便将标准李双代数结构量子化到半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的多项式流代数上, 并且它通常用于理论物理学家的工作中. 我们将其称为 J 实现. 然而, 这种实现对于 $\mathfrak{g}$ 的 Yangian 的表示的研究是不方便的, 这也是 Drinfeld 研究新实现方法的动机. 这种新的实现方法我们称之为流实现. Yangian 的第三种实现方法起源于理论物理的量子逆散射方法, 并导出了所谓的 r 矩阵实现, 有时也被称为 FRT 实现 (见 [6]).

这三个关于 Yangian 的实现方法是等价的. 文献 [4] 中的定理 6 证明, J 实现与 RTT 实现是等价的, 主要思路如下: 从 J 实现下的 Yangian $Y(\mathfrak{g})$ 的有限维不可约表示 V 出发, 我们可以构造一个 Hopf 代数, 称为扩张 Yangian(记其为 $X(\mathfrak{g})$), 它由被称为 RTT 关系的三元矩阵关系定义. 利用 $Y(\mathfrak{g})$ 的泛 R 矩阵的存在性, 构造一个满的 Hopf 代数态射 $\tilde{\Phi}: X(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow Y(\mathfrak{g})$. 该态射的核由拟群中心序列 (grouplike central series) $c(u) \in X(\mathfrak{g})[[u^{-1}]]$ 的系数生成. 也就是说, $c(u)$ 的系数是中心元, 并且 $\Delta(c(u)) = c(u) \otimes c(u)$, 其中 Δ 为 $X(\mathfrak{g})$ 的余积, 商代数 $X(\mathfrak{g})/\mathrm{Ker}\tilde{\Phi}$, 记作 $Y_R(\mathfrak{g})$, 它即为 Yangian 的 r 矩阵实现.

文献 [5] 的定理 1 表明, J 实现与流实现是等价的. 当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 时, 文献 [5] 给出了流实现和 RTT 实现之间显式的同构. 文献 [2] 在 $\mathfrak{gl}_n$ 的 Yangian 的流实现和 RTT 表示之

间进行插值: 通过 n 的划分得到了 Yangian 的抛物实现, 其中一种极端情况即 RTT 实现, 另一种极端情况是流实现. 因此, $\mathfrak{sl}_2$ 的 Yangian 的 RTT 实现与流实现是同构的.

文献 [2] 中 RTT 实现与流实现之间的等价公式来自 RTT 实现中生成元矩阵的高斯分解. 最近, 这种方法已经成功地推广到正交辛李代数的 Yangian: 参见 [11].

文献 [16] 提供了一个思路, 用 r 矩阵实现单李代数的多项式流代数泛包络代数. 不仅如此, 我们还能将此方法拓展运用在单李代数的 loop 代数上.

1.3 本文的论文结构与章节安排

本文共分为四章, 各章节内容安排如下:

第一章绪论: 介绍与论文主题相关的国内外研究现状和相关数学结构的起源.

第二章预备知识: 概述本文中常用到的代数结构, 如李代数、多项式流代数等并阐明有关数学记号.

第三章流代数 $\mathfrak{g}[z]$ 的 r 矩阵实现: 先证明包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 同构于扩张包络代数的商代数 $U_\rho(\mathfrak{g})$, 进而证明流代数 $\mathfrak{g}[z]$ 与 $\mathfrak{g}_\rho[z]$ 同构 (推论3.8), 从而得到流代数的 r 矩阵实现. 并具体考虑了流代数 $\mathfrak{sl}_2[z]$ 的 r 矩阵实现.

第四章仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的 r 矩阵实现: 简单介绍仿射李代数的构造. 并证明了包络代数 $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ 同构于一个有明确生成元与生成关系的结合代数 (推论4.13). 并具体计算仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ 的 r 矩阵实现.

第二章　预备知识

2.1　单李代数与泛包络代数

若未特殊说明, 本文的讨论均在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行. 我们先给出李代数和其包络代数的定义.

定义 2.1. *李代数是线性空间 $\mathfrak{g}$ 并配备有一个李括号运算 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, 写作 $(x,y)\mapsto[x,y]$, 满足:*

1. *李括号运算是双线性的, 即对于任意 $a,b\in\mathbb{C}$ 和 $x,y,z\in\mathfrak{g}$, 有 $[ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z]$ 和 $[z,ay+bz]=a[x,y]+b[x,z]$;*
2. *李括号运算是反对称的, 即 $[x,y]=-[y,x]$ 对任意 $x,y\in\mathfrak{g}$;*
3. *李括号运算满足 Jacobi 恒等式, 即 $[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$ 对任意 $x,y,z\in\mathfrak{g}$.*

例 2.2. *任意结合代数 A 可以看作是一个李代数, 其李括号运算定义为 $[x,y]:=xy-yx$, $\forall x,y\in A$.*

若 V 是一个线性空间, 令线性空间

$$T^nV:=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{n},$$

我们可以自然地定义乘法 $T^nV\times T^mV\to T^{n+m}V$, 即直接将两个张量用张量积连接. 于是我们考虑线性空间

$$TV=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}T^nV,$$

容易验证, 上述乘法即为 TV 上的结合乘法 (见 [10] 第五章). 因此 TV 是一个结合代数.

定义 2.3. *李代数 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数为商代数 $U(\mathfrak{g}):=T\mathfrak{g}/I$, 其中 I 为由 $[x,y]-x\otimes y-y\otimes x$ 生成的双边理想.*

可以验证, 映射 $i:\mathfrak{g}\to U(\mathfrak{g}):x\mapsto x+I$ 是一个嵌入映射. 并且泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 满足以下泛性质: 对于任意结合代数 A 以及李代数同态 $h:\mathfrak{g}\to A$(见例2.2), 存在唯一结合代数同态 $\phi:U(\mathfrak{g})\to A$ 使得 $h=\phi\circ i$.

PBW 定理给出了泛包络代数明确的显式表述.

定理 2.4 (Poincaré-Birkhoff-Witt 定理)**.** *若 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 那么 $\{e_1^{i_1}\cdots e_n^{i_n}+I:i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{Z}_{\geq0}\}$ 是 $U(g)$ 的一组基.*

证明参见教材 [10] 的 17.4 小节, 这里不做赘述.

2.2 多项式流代数

本文中统一规定 $\mathfrak{g}$ 为有限维的复单李代数，并且具有不变的非退化对称双线性型 $(\cdot,\cdot)$, 其中不变的双线性型是指其满足 $([a,b],\ c)=(a,[b,c])$. 因此, 我们可以选定 $\mathfrak{g}$ 的一组标准正交基 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 其中 Λ 是大小为 $\dim\mathfrak{g}$ 的指标集. 设 $\{\alpha_{\lambda\nu}^{\gamma}\}_{\lambda,\nu,\gamma\in\Lambda}$ 为满足下列公式的结构常数,

$$[X_\lambda,X_\nu]=\sum_{\gamma\in\Lambda}\alpha_{\lambda\nu}^{\gamma}X_\gamma. \tag{2.1}$$

特别地, 对于所有 $\lambda,\ \nu,\ \gamma\in\Lambda,\ \alpha_{\lambda\nu}^{\gamma}$, 有 $\alpha_{\lambda\nu}^{\gamma}=-\alpha_{\nu\lambda}^{\gamma}=\alpha_{\lambda\gamma}^{\nu}$, 其中第二个等式来源于双线性型的不变性.

记 Ω 和 ω 为 Casimir 元

$$\Omega=\sum_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\otimes X_\lambda\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\quad 和\quad \omega=\sum_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda^2\in U(\mathfrak{g}), \tag{2.2}$$

并且令 $c_{\mathfrak{g}}$ 为 ω 在伴随表示中的特征值. 这里记 $U(g)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数. 更一般的, 记号 $U(\mathfrak{a})$ 用于代表任意复李代数 $\mathfrak{a}$ 的包络代数, 并且记 Δ 为 $U(\mathfrak{a})$ 中的标准余积, $\Delta(a)=a\otimes 1+1\otimes a$, 对于 $a\in U(\mathfrak{a})$.

复李代数 $\mathfrak{a}$ 的多项式流代数, 作为线性空间, 即为 $\mathfrak{a}[z]=\mathfrak{a}\otimes\mathbb{C}[z]$, 其中等价地, $\mathfrak{a}[z]$ 是多项式函数 $\mathbb{C}\to\mathfrak{g}$ 组成的线性空间, 配备点态的李括号运算. 如果 $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$ 是复单李代数, 则其包络代数 $U(\mathfrak{g}[z])$ 同构于由生成元 $\{X_\lambda z^r:\lambda\in\Lambda,r\geq 0\}$ 生成的结合代数, 并且有生成关系

$$[X_\lambda z^r,X_\mu z^s]=\sum_{\gamma\in\Lambda}\alpha_{\lambda\mu}^{\gamma}X_\gamma z^{r+s},\quad 对于\lambda,\mu\in\Lambda\ 和\ r,s\geq 0. \tag{2.3}$$

李代数 $\mathfrak{a}[z]$ 是分次的: $\mathfrak{a}=\bigoplus_{k\geq 0}\mathfrak{a}z^k$, 其中 $\mathfrak{a}z^k=\mathfrak{a}\otimes\mathbb{C}z^k$. 如果 $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$ 是单李代数, 那么 $\mathfrak{g}[z]$ 由 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}z$ 张成的李代数.

除了李代数结构之外, $\mathfrak{g}[z]$ 还具有上边缘李双代数的结构, 由下列经典 r 矩阵决定

$$r_{\mathfrak{g}}=\sum_{\lambda\in\Lambda,k\geq 0}X_\lambda v^k\otimes X_\lambda u^{-k-1}\in\mathfrak{g}[v]\widehat{\otimes}\mathfrak{g}((u^{-1})).$$

即, 李双代数余交换子 $\delta:\mathfrak{g}[z]\to\mathfrak{g}[z]\otimes\mathfrak{g}[z]\cong\mathfrak{g}[u,v]$ 定义为

$$\delta(f(z))(u,v)=[f(v)\otimes 1+1\otimes f(u),r_{\mathfrak{g}}]\quad\forall f(z)\in\mathfrak{g}[z].$$

注意到 $r_{\mathfrak{g}}$ 可以代表 $\frac{\Omega}{u-v} = \sum_{k\geq 0} \Omega v^k u^{-k-1} \in (\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}) \otimes (\mathbb{C}[v])[[u^{-1}]]$, 并且 $r_{\mathfrak{g}}$ 是 r 矩阵, 这样的表述暗示着它是经典 Yang-Baxter 方程的一个具有谱参数的解.

我们这里给出一个特例帮助理解. 取单李代数 $\mathfrak{g}$ 为特殊线性李代数 $\mathfrak{sl}_2$. 它有一个自然的 Killing 二次型: $(a,b) \coloneqq \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, a \cdot \mathrm{ad}\, b)$, 其中 $a,\ b \in \mathfrak{sl}_2$, $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_2)$ 是 $\mathfrak{sl}_2$ 的伴随表示. 同时, 易证它是非退化的对称双线性型. $\mathfrak{sl}_2$ 有一组常用的基:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

并且 $[h,e] = 2e,\ [h,f] = -2f,\ [e,f] = h$, 但他们不是标准正交的. 通过施密特正交化可知,

$$X_1 = \frac{h}{2\sqrt{2}}, \quad X_2 = \frac{e+f}{2\sqrt{2}}, \quad X_3 = \frac{\mathrm{i}(e-f)}{2\sqrt{2}}$$

是 $\mathfrak{sl}_2$ 的一组标准正交基, 其中 i 是虚数单位. 且有 $[X_1, X_2] = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} X_3,\ [X_1, X_3] = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} X_2,\ [X_2, X_3] = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} X_1$. 所以这组标准正交基对应的结构常数 $\{\alpha_{\lambda\nu}^{\gamma}\}_{1\leq\lambda,\nu,\gamma\leq 3}$ 满足等式:

$$\alpha_{21}^3 = -\alpha_{12}^3 = \alpha_{13}^2 = -\alpha_{31}^2 = \alpha_{23}^1 = -\alpha_{32}^1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},$$

其余 $\alpha_{\lambda\nu}^{\gamma}$ 为零.

带入公式可知 $\omega = \sum_{i=1}^{3} X_i^2 = \frac{h^2}{8} + \frac{ef}{4} + \frac{fe}{4}$, 并且可以验证 ω 的特征值 $c_{\mathfrak{sl}_2} = 1$.

2.3 矩阵, 级数和一些记号

以下的所有线性空间以及代数都假设在复数域 $\mathbb{C}$ 上, 并且我们将在本文接下来的部分中保持这一假设.

设 W 是任意线性空间, V 是维数为 N 的有限维线性空间, 且令 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ 为 V 的一组基. 令 $\{E_{ij}\}_{1\leq i,j\leq N}$ 为 $\mathrm{End}\, V$ 中关于这组基的矩阵单位. 我们将会经常在空间 $(\mathrm{End}\, V)^{\otimes m} \otimes W$ 中进行探讨 $(m \geq 1)$. 给定 $A = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \otimes a_{ij} \in \mathrm{End}\, V \otimes W$ 和 $1 \leq k \leq m$, 我们令

$$A_k = \sum_{i,j=1}^{N} 1^{\otimes(k-1)} \otimes E_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-k)} \otimes a_{ij} \in (\mathrm{End}\, V)^{\otimes m} \otimes W.$$

相似地, 如果 $\mathscr{A}$ 是一个含幺代数, $B = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ 且 $1 \leq k < l \leq m,\ m \geq 2$, 那么我们记 B_{kl} 为

$$B_{kl} = \sum_{i=1}^{r} 1^{\otimes(k-1)} \otimes a_i \otimes 1^{\otimes(l-k-1)} \otimes b_i \otimes 1^{\otimes(m-l)} \in \mathscr{A}^{\otimes m}.$$

如果 $B = B(u)$ 依赖于形式参数 u, 我们将上式记为 $B_{kl}(u)$.

对于任意两个向量空间 W_1 和 W_2, 令 $\sigma_{W_1,W_2} : W_1 \otimes W_2 \to W_2 \otimes W_2$ 是置换算子, 定义为对于任意 $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, $\sigma_{W_1,W_2}(w_1 \otimes w_2) = w_2 \otimes w_1$. 在计算中, 我们会省去下标, 简写为 $\sigma = \sigma_{W_1,W_2}$. 潜在的向量空间经常可以从文中清楚得到. 给定 $R \in W_1 \otimes W_2$, 我们记 $\sigma(R) \in W_2 \otimes W_1$ 为 R_{21}.

第三章 流代数 $\mathfrak{g}[z]$ 的 r 矩阵实现

3.1 李代数的伴随表示及其扩张

令有限维 $\mathfrak{g}$ 模 V 有一个李代数同态 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, $N = \dim V$. 假设 V 不同构于 N 个平凡表示的直和.

与上一章节类似, 我们固定 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$, 并且令 $\{E_{ij}\}_{1\leq i.j\leq N}$ 表示这组基对应的矩阵单位. 设 Ω_ρ 为 Ω 在 $\rho \otimes \rho$ 下的像:

$$\Omega_\rho = (\rho \otimes \rho)(\Omega).$$

由于 $\mathfrak{g}$ 是单的且 $\mathrm{Ker}\,(\rho) \subsetneq \mathfrak{g}$, 所以同态 ρ 是单射. 进而可知, $\{X_\lambda^\bullet = \rho(X_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是线性无关的并且线性生成一个同构于 $\mathfrak{g}$ 的子李代数 $\rho(\mathfrak{g})$. 李代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 本身有一个自然的伴随表示 $\tilde{\varrho} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$. 将其限制在 $\rho(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$ 上, 可以得到一个 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示

$$\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V)),$$

我们把得到的 $\mathfrak{g}$ 模记为 $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{gl}(V))$, 当他被视为 $U(\mathfrak{g})$ 模时, 我们也采用同样的记号.

空间 $\mathrm{span}\{X_\lambda^\bullet\}_{\lambda\in\Lambda}$ 同构于 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示, 同时是 $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{gl}(V))$ 的子模. 所以我们也把

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{span}\{X_\lambda^\bullet\}_{\lambda\in\Lambda}$$

看作是 $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{gl}(V))$ 的 $\mathfrak{g}$ 子模 (不仅仅是线性空间).

同时我们把 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 的基 $\{X_\lambda^\bullet\}_{\lambda\in\Lambda}$, 根据不可约子模分解, 扩充为 $\mathrm{End}\,V$ 的一组基 $\{X_\lambda^\bullet\}_{\lambda\in\Lambda^\bullet}$. 考虑扭结子的子空间 $\mathcal{E}_\mathfrak{g} = \mathrm{End}_\mathfrak{g}\,V$. 作为 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 的子模, $\mathcal{E}_\mathfrak{g}$ 同构于一些 $\mathfrak{g}$ 的平凡表示 $\mathbb{C}_\mathfrak{g}$ 的直和. 由于 $\mathcal{E}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 是平凡的, 所以直和 $\mathcal{E}_\mathfrak{g} \oplus \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 也是 $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{gl}(V))$ 的子模. 由完全可约性, 存在 $\mathcal{E}_\mathfrak{g} \oplus \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 的补子模, 记为 W'. 令

$$W' = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$$

是它的一个不可约子模分解, 并且令 $W = \mathcal{E}_\mathfrak{g} \oplus W'$. 综上所述, 我们有 $\mathfrak{g}$ 模分解

$$\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{gl}(V)) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \oplus W = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{E}_\mathfrak{g} \oplus W' = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{E}_\mathfrak{g} \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m.$$

注意到, 由定义, 每一个 $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{gl}(V))$ 平凡子表示都由与 $\rho(\mathfrak{g})$ 交换的同态组成, 所以包含于 $\mathcal{E}_\mathfrak{g}$. 特别地, 这意味着 $W_i \ncong \mathbb{C}_\mathfrak{g}$, 对于 $1 \leq i \leq m$. 令 $\mathcal{J}$ 和 $\Lambda_i, 1 \leq i \leq m$, 为指标集, 使

得 $\{X_\lambda^\bullet\}_{\lambda\in\mathcal{J}}$ 是 $\mathcal{E}_\mathfrak{g}$ 的一组基, $\{X_\lambda^\bullet\}_{\lambda\in\Lambda_i}$ 是 W_i 的一组基. 我们令

$$\Lambda^c = \mathcal{J}\sqcup\Lambda_1\sqcup\cdots\sqcup\Lambda_m \quad \text{和} \quad \Lambda^\bullet = \Lambda\sqcup\Lambda^c.$$

最后, 我们定义一族复系数 $\{c_{ij}^\lambda,\ a_{ij}^\lambda : \lambda\in\Lambda^\bullet, 1\le i,j\le N\}$ 满足下列等式:

$$X_\lambda^\bullet = \sum_{i,j=1}^N c_{ij}^\lambda E_{ij} \quad \text{和} \quad E_{ij} = \sum_{\lambda\in\Lambda^\bullet} a_{ij}^\lambda X_\lambda^\bullet. \tag{3.1}$$

3.2 $U_\rho(\mathfrak{g})$ 和扩张包络代数 $U_\mathcal{J}(\mathfrak{g})$

我们首先给出 $U_\mathcal{J}(\mathfrak{g})$ 的定义, 它可以被视为泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的扩张.

定义 3.1. *扩张包络代数 $U_\mathcal{J}(\mathfrak{g})$ 是一个含幺结合 $\mathbb{C}$ 代数, 生成元 $\{F_{ij}^\mathcal{J}\}_{1\le i,j\le N}$ 在 $(\mathrm{End}V)^{\otimes 2}\otimes U_\mathcal{J}(\mathfrak{g})$ 中满足关系:*

$$[F_1^\mathcal{J}, F_2^\mathcal{J}] = [\Omega_\rho, F_2^\mathcal{J}], \tag{3.2}$$

其中 $F^\mathcal{J} = \sum_{i,j=1}^N E_{ij}\otimes F_{ij}^\mathcal{J}\in \mathrm{End}V\otimes U_\mathcal{J}(\mathfrak{g})$, Ω_ρ 规定为 $\Omega_\rho\otimes 1$.

由 (3.1) 可知, $F^\mathcal{J} = \sum_{i,j=1}^N\sum_{\lambda\in\Lambda^\bullet} a_{ij}^\lambda X_\lambda^\bullet\otimes F_{ij}^\mathcal{J} = \sum_{\lambda\in\Lambda^\bullet} X_\lambda^\bullet\otimes\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^\lambda F_{ij}^\mathcal{J}$. 若令 $X_\lambda^\mathcal{J} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^\lambda F_{ij}^\mathcal{J}$, $\lambda\in\Lambda^\bullet$, 可得 $F^\mathcal{J} = \sum_{\lambda\in\Lambda^\bullet} X_\lambda^\bullet\otimes X_\lambda^\mathcal{J}$.

给定任意向量空间 W 和 $A = E_{ij}\otimes a_{ij}\in\mathrm{End}V\otimes W$, 定义

$$\omega(A) = \sum_{i,j=1}^N \omega(E_{ij})\otimes a_{ij}\in\mathrm{End}V\otimes W, \quad \text{其中} \quad \omega(E_{ij}) = \rho(\omega)(E_{ij}),$$

再令 $\nabla : \mathrm{End}V\otimes\mathrm{End}V\to\mathrm{End}V$ 为映射的复合乘法.

为了探究 $U_\mathcal{J}(\mathfrak{g})$ 与 $U(\mathfrak{g})$ 的关系, 我们需要以下引理.

引理 3.2. *令 $K = \sum_{i,j=1}^N E_{ij}\otimes k_{ij}\in\mathrm{End}V\otimes U_\mathcal{J}(\mathfrak{g})$ 使得 $K = \sum_{\lambda\in\Lambda^c} X_\lambda^\bullet\otimes X_\lambda^\mathcal{J}$. K 满足下列命题:*

1. *K 的系数 k_{ij} 是中心元.*

2. *$[\Omega_\rho, K_2] = [\Omega_\rho, K_1] = 0$ 而且 $\omega(K) = 0$.*

3. *对于所有 $\lambda\in\Lambda^c/\mathcal{J}$, $X_\lambda^\mathcal{J} = 0$. 特别地, $K = \sum_{\lambda\in\mathcal{J}} X_\lambda^\bullet\otimes X_\lambda^\mathcal{J}$*

证明. (1) 由定义和等式 (3.1) 可知, $k_{ij} = \sum_{\lambda\in\Lambda^c} c_{ij}^\lambda X_\lambda^\mathcal{J}$. 设 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda^\bullet}\subset(\mathrm{End}V)^*$ 是 $\{X_\lambda^\bullet\}_{\lambda\in\Lambda^\bullet}$ 的对偶基. 注意到, $[\Omega_\rho, F_2^\mathcal{J}]\in\mathrm{ad}(\mathfrak{g})\otimes\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{gl}(V))\otimes U_\mathcal{J}(\mathfrak{g})$. 任取 $\lambda\in\Lambda^c, \mu\in\Lambda^\bullet$,

把 $f_\lambda \otimes f_\mu \otimes \mathrm{id}$ 作用在等式 (3.2) 两边, 可以得到

$$[X_\lambda^{\mathcal{J}}, X_\mu^{\mathcal{J}}] = 0, \qquad \forall \lambda \in \Lambda^c,\ \mu \in \Lambda^\bullet, \tag{3.3}$$

即 $X_\lambda^{\mathcal{J}},\ \lambda \in \Lambda^c$ 是中心元. 所以 k_{ij} 为中心元的线性组合, 也是中心元.

(2) 注意到, 由于 W 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{gl}(V))$ 的 $\mathfrak{g}$ 子模, 故

$$\begin{aligned}
[\Omega_\rho, K_2] &= \left[\sum_{\gamma\in\Lambda} X_\gamma^\bullet \otimes X_\gamma^\bullet \otimes 1, \sum_{\lambda\in\Lambda^c} I \otimes X_\lambda^\bullet \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}}\right] \\
&= \sum_{\gamma\in\Lambda,\lambda\in\Lambda^c} X_\gamma^\bullet \otimes [X_\gamma^\bullet, X_\lambda^\bullet] \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}} \\
&\in \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \otimes W \otimes U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g}).
\end{aligned}$$

同理, $[\Omega_\rho, F_2^{\mathcal{J}} - K_2] \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \otimes U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$. 取定 $\gamma \in \Lambda, \lambda \in \Lambda^c$, 作用 $f_\gamma \otimes f_\lambda \otimes 1$:

$$\begin{aligned}
(f_\gamma \otimes f_\lambda \otimes 1)[\Omega_\rho, K_2] &= (f_\gamma \otimes f_\lambda \otimes 1)([\Omega_\rho, F_2^{\mathcal{J}}] - [\Omega_\rho, F_2^{\mathcal{J}} - K_2]) \\
&= (f_\gamma \otimes f_\lambda \otimes 1)[\Omega_\rho, F_2^{\mathcal{J}}] \\
&= (f_\gamma \otimes f_\lambda \otimes 1)[F_1^{\mathcal{J}}, F_2^{\mathcal{J}}] \\
&= [X_\gamma^{\mathcal{J}}, X_\lambda^{\mathcal{J}}] = 0
\end{aligned}$$

其中最后一个等号根据 (3.3) 得出. 于是 $[\Omega_\rho, K_2] = 0$. 置换算子作用于上式, 可得到 $[\Omega_\rho, K_1] = 0$.

由上述两个等式可以计算得

$$\begin{aligned}
\omega(K) &= \sum_{\gamma\in\Lambda,\lambda\in\Lambda} [X_\gamma^\bullet, [X_\gamma^\bullet, X_\lambda^\bullet]] \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}} \\
&= \sum (X_\gamma^\bullet [X_\gamma^\bullet, X_\lambda^\bullet] \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}} - [X_\gamma^\bullet, X_\lambda^\bullet] X_\gamma^\bullet \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}}) \\
&= (\nabla \otimes 1)([\Omega_\rho, K_2] - [\Omega_\rho, K_1]) = 0
\end{aligned}$$

(3) 由于 Casimir 元是泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 中的中心元, 故 ω 在 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{gl}(V))$ 上是 $\mathfrak{g}$ 模同态. 因此在不可约表示 W_i , $1 \le i \le m$, ω 是非零数乘映射, 设在 W_i 中的数乘倍数为 $c_i \neq 0$. 于是

$$\omega(K) = \omega\left((\sum_{\lambda\in\mathcal{J}} + \sum_{\lambda\in\Lambda^c/\mathcal{J}}) X_\lambda^\bullet \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda\in\Lambda^c/\mathcal{J}} \omega(X_\lambda^\bullet \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\sum_{\lambda\in\Lambda_i} X_\lambda^\bullet \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}} \right) \\
&= \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_i \\ 1\le i\le m}} X_\lambda^\bullet \otimes c_i X_\lambda^{\mathcal{J}} = 0
\end{aligned}
$$

令 $c_\lambda = c_i$, 当 $\lambda \in \Lambda_i$. 作用 $c_\lambda^{-1} \cdot f_\lambda \otimes 1$, $\lambda \in \Lambda^c/\mathcal{J}$ 可得 $X_\lambda^{\mathcal{J}} = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda^c/\mathcal{J}$. □

下面这个引理给出了 K 的两个等价定义并且证明了存在一个 $U(\mathfrak{g}) \to U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$ 的同态.

引理 3.3. 矩阵 $F^{\mathcal{J}}$ 和 K 满足等式

$$
[\Omega_\rho, F_2^{\mathcal{J}}] = [F_1^{\mathcal{J}}, F_2^{\mathcal{J}}] = [F_1^{\mathcal{J}}, \Omega_\rho], \tag{3.4}
$$

$$
K = F^{\mathcal{J}} - c_{\mathfrak{g}}^{-1}\omega(F^{\mathcal{J}}) = F^{\mathcal{J}} - 2c_{\mathfrak{g}}^{-1}(\nabla \otimes 1)[F_1^{\mathcal{J}}, F_2^{\mathcal{J}}]. \tag{3.5}
$$

同时, 映射 $X_\lambda \mapsto -X_\lambda^{\mathcal{J}}, \lambda \in \Lambda$ 可以扩张成同态 $\iota_{\mathcal{J}} : U(\mathfrak{g}) \to U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$.

证明. $\sigma \otimes 1$ 作用在 (3.2) 两边, 可得 $-[F_1^{\mathcal{J}}, F_2^{\mathcal{J}}] = [\Omega_\rho, F_1^{\mathcal{J}}]$, 即等式 (3.4).

由 Casimir 元的特殊性质,

$$
\omega(F^{\mathcal{J}}) = \omega\left(\sum_{\lambda\in\Lambda+\Lambda^c} X_\lambda^\bullet \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}} \right) = \omega\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^\bullet \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}} \right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c_{\mathfrak{g}} X_\lambda^\bullet \otimes X_\lambda^{\mathcal{J}}
$$

同时, 由等式 (3.4),

$$
(\nabla \otimes 1)[F_1^{\mathcal{J}}, F_2^{\mathcal{J}}] = \frac{1}{2}(\nabla \otimes 1)([\Omega_\rho, F_2^{\mathcal{J}}] - [\Omega_\rho, F_1^{\mathcal{J}}]) = \frac{1}{2}\omega(F^{\mathcal{J}})
$$

所以 $K = F^{\mathcal{J}} - c_{\mathfrak{g}}^{-1}\omega(F^{\mathcal{J}}) = F^{\mathcal{J}} - 2c_{\mathfrak{g}}^{-1}(\nabla \otimes 1)[F_1^{\mathcal{J}}, F_2^{\mathcal{J}}]$.

对于引理的第二部分, 首先我们需要考察映射 $X_\lambda \mapsto X_\lambda^{\mathcal{J}}$ 的线性扩张是否是良定义的. 令 $F = F^{\mathcal{J}} - K$, 从引理3.2与等式 (3.4) 中可知, $[F_1, F_2] = [\Omega_\rho, F_2]$. 任取 $\lambda, \mu \in \Lambda$, 在上式两边作用 $f_\lambda \otimes f_\mu \otimes 1$, 可得

$$
[X_\lambda^{\mathcal{J}}, X_\mu^{\mathcal{J}}] = \alpha_{\lambda\gamma}^{\mu} X_\gamma^{\mathcal{J}} = -\alpha_{\lambda\mu}^{\gamma} X_\gamma^{\mathcal{J}}.
$$

因此, 映射 $X_\lambda \mapsto -X_\lambda^{\mathcal{J}}$ 可以扩张成一个结合代数同态 $\iota_{\mathcal{J}} : U(\mathfrak{g}) \to U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$. □

实际上, 在这一引理中, 利用第一同构定理, 我们可以得出包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 同构于

$U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$ 的商代数. 但是由于 $\iota_{\mathcal{J}}$ 的核难以求出, 所以我们考虑另外一种思路: 先定义一个代数 $U_\rho(\mathfrak{g})$ 为 $U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$ 的商代数, 然后证明再其与包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 同构.

定义 3.4. *设 $U_\rho(\mathfrak{g})$ 是 $U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$ 的商代数, 商掉由中心矩阵 K 系数生成的双边理想. 等价地, $U_\rho(\mathfrak{g})$ 是由生成元 $\{F_{ij}\}_{1\le i,j\le N}$ 与生成关系:*

$$[F_1, F_2] = [\Omega_\rho, F_2] \tag{3.6}$$

$$F = c_{\mathfrak{g}}^{-1}\omega(F) \tag{3.7}$$

生成的复含幺结合代数, 其中 $F = \sum_{i,j=1}^N E_{ij}\otimes F_{ij} \in \mathrm{End}V\otimes U_\rho(\mathfrak{g})$.

命题 3.5. *$U_\rho(\mathfrak{g})$ 同构于包络代数 $U(\mathfrak{g})$. 同构映射 ϕ_ρ 为*

$$\phi_\rho : U_\rho(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}),\ F \mapsto -(\rho\otimes 1)\Omega. \tag{3.8}$$

证明. 令 $\mathcal{F} = \sum_{i,j=1}^N E_{ij}\otimes\mathcal{F}_{ij} = -(\rho\otimes 1)\Omega$. 由 (3.1), $\mathcal{F}_{ij} = \phi_\rho(F_{ij}) = -\sum_{\lambda\in\Lambda} c_{ij}^\lambda X_\lambda$.

(1) ϕ_ρ 是一个同态. 注意到, 对于任意 $X\in\mathfrak{g}$, $[\Omega,\Delta(X)] = 0$. 这意味着, 在 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 中, 我们有等式 $[\Omega_{13},\Omega_{23}] = -[\Omega_{12},\Omega_{23}]$. 同态 $\rho\otimes\rho\otimes 1$ 作用在该式两边, 我们可得到关系

$$[\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2] = [\Omega_\rho,\mathcal{F}_2] \in (\mathrm{End}V)^{\otimes 2}\otimes\mathfrak{g}.$$

因此, 映射 (3.8) 保持关系 (3.6).

因为我们有 $\mathcal{F}_{ij} = -\sum_{\lambda\in\Lambda} c_{ij}^\lambda X_\lambda \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{g}$ 和 ω 在 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 上的作用是倍数为 $c_{\mathfrak{g}}$ 的数乘, 所以关系 $F = c_{\mathfrak{g}}^{-1}\omega(F)$ 成立. 同时也说明, ϕ_ρ 是一个同态.

(2) ϕ_ρ 是一个同构. 任意 $\lambda\in\Lambda^\bullet$, 定义 X_λ^ρ 是 $X_\lambda^{\mathcal{J}}$ 在商映射 $q: U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U_\rho(\mathfrak{g})$ 下的像. 由生成关系可知,$X_\lambda^\rho = 0,\ \lambda\in\Lambda^c$. 令 $\psi = q\circ\iota_{\mathcal{J}} : U(\mathfrak{g}) \to U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$, 其中 $\iota_{\mathcal{J}} : U(\mathfrak{g}) \to U_\rho(\mathfrak{g})$ 是引理3.3中的代数同态. 易知 $\phi_\rho(X_\lambda^\rho) = -X_\lambda$ 且 $q(X_\lambda^{\mathcal{J}}) = X_\lambda^\rho$, 于是 $\phi_\rho\circ\psi = \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})}$ 且 $\psi\circ\phi_\rho = \mathrm{id}_{U_\rho(\mathfrak{g})}$. 因此, ϕ_ρ 是一个代数同构. □

上述命题说明, 包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 同构于扩张包络代数 $U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$ 的商代数, 并且定义3.4可以看作是 $U(\mathfrak{g})$ 的实现.

3.3 包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 的 r 矩阵实现

这一节我们以单李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 为例, 用上一节所提到的实现方法, 具体地写出包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 的 r 矩阵实现.

回顾第二章对 $\mathfrak{sl}_2$ 的讨论, 对于 Killing 二次型, $\mathfrak{sl}_2$ 有一组标准正交基 $\{X_\lambda\}_{1\le\lambda\le 3}$,

基之间的李括号运算为:

$$[X_1, X_2] = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} X_3,\ [X_1, X_3] = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} X_2,\ [X_2, X_3] = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} X_1.$$

令 $\rho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_2)$ 是 $\mathfrak{sl}_2$ 的伴随表示, 易知 $\{X_\lambda^\bullet = \rho(X_\lambda)\}_{1\le\lambda\le 3}$ 为伴随表示的一组基. 选取 $\mathfrak{sl}_2$(作为表示空间) 的一组基 $\{X_\lambda\}_{1\le\lambda\le3}$, 于是 $X_\lambda^\bullet \in \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \cong \mathrm{Mat}_3$ 对应的矩阵为

$$X_1^\bullet = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2^\bullet = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3^\bullet = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令复系数 $\{c_{ij}^\lambda : 1 \le \lambda, i, j \le 3\}$ 满足 $X_\lambda^\bullet = \sum_{i,j=1}^3 c_{ij}^\lambda E_{ij},\ 1 \le \lambda \le 3$. 则有

$$c_{23}^1 = -c_{32}^1 = c_{31}^2 = -c_{13}^2 = c_{12}^3 = -c_{21}^3 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \tag{3.9}$$

其余均为零.

由上一节可知, 含幺复结合代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 有生成元 $\{F_{ij}\}_{1\le i,j\le3}$ 和生成关系:

$$[F_1, F_2] = [\Omega_\rho, F_2], \tag{3.10}$$

$$F = \omega(F), \tag{3.11}$$

其中 $F = \sum_{i,j=1}^3 E_{ij} \otimes F_{ij} \in \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_\rho(\mathfrak{sl}_2)$. 并且包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2) \cong U_\rho(\mathfrak{sl}_2)$.

把常系数 (3.9) 带入生成关系 (3.10), 我们可以计算出下面所示的李括号乘法表.

表 1: 生成关系 (3.10)

$[\cdot,\cdot]$	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{31}	F_{32}	F_{33}
F_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_{12}	$-\frac{1}{2}F_{12}-\frac{1}{2}F_{21}$	$\frac{1}{2}F_{11}-\frac{1}{2}F_{22}$	$-\frac{1}{2}F_{23}$	$\frac{1}{2}F_{11}-\frac{1}{2}F_{22}$	$\frac{1}{2}F_{12}+\frac{1}{2}F_{21}$	$\frac{1}{2}F_{13}$	$-\frac{1}{2}F_{32}$	$\frac{1}{2}F_{31}$	0
F_{13}	$-\frac{1}{2}F_{13}-\frac{1}{2}F_{31}$	$-\frac{1}{2}F_{32}$	$\frac{1}{2}F_{11}-\frac{1}{2}F_{33}$	$-\frac{1}{2}F_{23}$	0	$\frac{1}{2}F_{21}$	$\frac{1}{2}F_{11}-\frac{1}{2}F_{33}$	$\frac{1}{2}F_{12}$	$\frac{1}{2}F_{13}+\frac{1}{2}F_{31}$
F_{21}	$\frac{1}{2}F_{12}+\frac{1}{2}F_{21}$	$-\frac{1}{2}F_{11}+\frac{1}{2}F_{22}$	$\frac{1}{2}F_{23}$	$-\frac{1}{2}F_{11}+\frac{1}{2}F_{22}$	$-\frac{1}{2}F_{12}-\frac{1}{2}F_{21}$	$-\frac{1}{2}F_{13}$	$\frac{1}{2}F_{32}$	$-\frac{1}{2}F_{31}$	0
F_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_{23}	0	$-\frac{1}{2}F_{13}$	$\frac{1}{2}F_{12}$	$-\frac{1}{2}F_{31}$	$-\frac{1}{2}F_{23}-\frac{1}{2}F_{32}$	$\frac{1}{2}F_{22}-\frac{1}{2}F_{33}$	$\frac{1}{2}F_{21}$	$\frac{1}{2}F_{22}-\frac{1}{2}F_{33}$	$\frac{1}{2}F_{23}+\frac{1}{2}F_{32}$
F_{31}	$\frac{1}{2}F_{13}+\frac{1}{2}F_{31}$	$\frac{1}{2}F_{32}$	$-\frac{1}{2}F_{11}+\frac{1}{2}F_{33}$	$\frac{1}{2}F_{23}$	0	$-\frac{1}{2}F_{21}$	$-\frac{1}{2}F_{11}+\frac{1}{2}F_{33}$	$-\frac{1}{2}F_{12}$	$-\frac{1}{2}F_{13}-\frac{1}{2}F_{31}$
F_{32}	0	$\frac{1}{2}F_{13}$	$-\frac{1}{2}F_{12}$	$\frac{1}{2}F_{31}$	$\frac{1}{2}F_{23}+\frac{1}{2}F_{32}$	$-\frac{1}{2}F_{22}+\frac{1}{2}F_{33}$	$-\frac{1}{2}F_{21}$	$-\frac{1}{2}F_{22}+\frac{1}{2}F_{33}$	$-\frac{1}{2}F_{23}-\frac{1}{2}F_{32}$
F_{33}	0	0	0	0	0	0	0	0	0

整理可得,

$$\begin{gathered}F_{12}+F_{21}=0, \quad F_{23}+F_{32}=0, \quad F_{13}+F_{31}=0, \\ [F_{12}, F_{23}]=\frac{1}{2}F_{13}, \quad [F_{23}, F_{31}]=\frac{1}{2}F_{21}, \quad [F_{31}, F_{12}]=\frac{1}{2}F_{32}, \\ F_{11}=F_{22}=F_{33}.\end{gathered} \tag{3.12}$$

这可以看作是扩张包络代数 $U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{sl}_2)$ 的生成关系.

把常系数 (3.9) 带入生成关系 (3.11) 可得:

$$F=\begin{pmatrix}2F_{11}-F_{22}-F_{33} & 2F_{12}+F_{21} & 2F_{13}+F_{31} \\ F_{12}+2F_{21} & -F_{11}+2F_{22}-F_{33} & 2F_{23}+F_{32} \\ F_{13}+2F_{31} & F_{23}+2F_{32} & -F_{11}-F_{22}+2F_{33}\end{pmatrix} \tag{3.13}$$

综合表1和关系 (3.13), 我们得出下面的等价定义.

命题 3.6. *对于复数域 $\mathbb{C}$ 上单李代数 $\mathfrak{sl}_2$, 它的包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 同构于含幺结合代数 $U_\rho(\mathfrak{sl}_2)$, 生成元 F_{21}, F_{32}, F_{13} 满足关系:*

$$[F_{21}, F_{32}]=\frac{1}{2}F_{13}, \quad [F_{32}, F_{13}]=\frac{1}{2}F_{21}, \quad [F_{13}, F_{21}]=\frac{1}{2}F_{32}. \tag{3.14}$$

由同构映射 $\phi_\rho: F\mapsto -(\rho\otimes 1)\Omega$, 可以得出:

$$\begin{aligned}\phi_\rho: F_{21} &\mapsto \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}X_3 \\ F_{32} &\mapsto \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}X_1 \\ F_{13} &\mapsto \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}X_2\end{aligned}$$

因此, $\phi_\rho^{-1}(h)=-4\mathrm{i}F_{32}$, $\phi_\rho^{-1}(e)=-2F_{21}-2\mathrm{i}F_{13}$, $\phi_\rho^{-1}(f)=2F_{21}-2\mathrm{i}F_{13}$. 容易验证, 包络代数满足的关系可以由 (3.14) 给出.(例如: $[\phi_\rho^{-1}(e), \phi_\rho^{-1}(f)]=-8\mathrm{i}[F_{13}, F_{21}]=\phi_\rho^{-1}(h)$.)

3.4 李代数 $\mathfrak{g}_{\mathcal{J}}$, $\mathfrak{g}_\rho$ 和他们的多项式流代数

本节中, 定理3.7能证明结合代数 $U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$ 同构于李代数 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{z}_{\mathcal{J}}$ 的包络代数, 其中李代数 $\mathfrak{z}_{\mathcal{J}}$ 是维数为 $\dim \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}V$ 的交换李代数. 注意到, 前一节中, 命题3.8意味着流代数 $\mathfrak{g}_\rho[z]$ 和 $\mathfrak{g}[z]$ 是同构的. 所以相似地, 我们可以证明 $\mathfrak{g}_{\mathcal{J}}[z]\cong(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{z}_{\mathcal{J}})[z]$. 前者的表述可导出所谓的 $\mathfrak{g}[z]$ 的 r 矩阵实现, 在本节中我们将阐明这一点.

定义 $\mathfrak{g}_\rho\subset \mathrm{Lie}(U_\rho(\mathfrak{g}))$ 是由生成元 $\{X_\lambda^\rho\}_{\lambda\in\Lambda}$ 生成的子李代数, 或者等价地, 是由 $\{F_{ij}\}_{1\le i,j\le N}$ 生成的子李代数.

于是命题3.8意味着 (3.6) 和 (3.7) 可以视为定义 $\mathfrak{g}_\rho$ 的生成关系而且 $\phi_\rho|_{\mathfrak{g}_\rho}$ 是李代数 $\mathfrak{g}_\rho \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ 的同构. 因此, $U(\mathfrak{g}_\rho) \cong U_\rho(\mathfrak{g})$, 并且以后我们利用这一事实, 统一记号为 $U_\rho(\mathfrak{g})$, 而不是 $U(\mathfrak{g}_\rho)$.

现在我们回到对 $U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$ 的研究. 定义 $\mathfrak{z}_{\mathcal{J}}$ 是有基为 $\{\mathcal{K}_\lambda^{\mathcal{J}}\}_{\lambda\in\mathcal{J}}$ 的交换李代数. 并且包络代数 $U(\mathfrak{z}_{\mathcal{J}})$ 实际上就是 $\mathbb{C}[\mathcal{K}_\lambda^{\mathcal{J}} : \lambda \in \mathcal{J}]$. 我们记矩阵 $\sum_{\lambda\in\mathcal{J}} X_\lambda^\bullet \otimes \mathcal{K}_\lambda^{\mathcal{J}} \in \mathrm{End}V \otimes \mathfrak{z}_{\mathcal{J}}$ 为 $\mathscr{K}^{\mathcal{J}}$.

命题 3.7. 映射 $F^{\mathcal{J}} \mapsto F + \mathscr{K}^{\mathcal{J}}$ 可以延拓成代数同态

$$\phi_{\mathcal{J}} : U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathcal{K}_\lambda^{\mathcal{J}} : \lambda \in \mathcal{J}] \otimes U(\mathfrak{g}_\rho). \tag{3.15}$$

证明. 因为 $\mathscr{K}^{\mathcal{J}} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathfrak{z}_{\mathcal{J}}$, $[\Omega_\rho, \mathscr{K}_2^{\mathcal{J}}] = 0$. 由于 $\mathscr{K}^{\mathcal{J}}$ 是中心的, 而且 F 满足 (3.6), 所以 $F + \mathscr{K}^{\mathcal{J}}$ 满足 $U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$ 的生成条件 (3.2). 所以映射 $F^{\mathcal{J}} \mapsto F + \mathscr{K}^{\mathcal{J}}$ 可以延拓成代数同态

$$\phi_{\mathcal{J}} : U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathcal{K}_\lambda^{\mathcal{J}} : \lambda \in \mathcal{J}] \otimes U(\mathfrak{g}_\rho).$$

为了证明 $\phi_{\mathcal{J}}$ 是一个同构, 我们寻找它的逆. 由于 K 的系数是中心的, $\mathscr{K}^{\mathcal{J}} \mapsto K$ 给出一个代数同态 $\psi_{\mathfrak{z}_{\mathcal{J}}} : \mathbb{C}[\mathcal{K}_\lambda^{\mathcal{J}} : \lambda \in \mathcal{J}] \to U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g}) : \mathcal{K}_\lambda^{\mathcal{J}}$. 令 $\iota = \iota_{\mathcal{J}} \circ \phi_\rho : U(\mathfrak{g}_\rho) \to U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$. 因为 $[\iota(X), \psi_{\mathfrak{z}_{\mathcal{J}}}(Y)] = 0$ 对于 $X \in U(\mathfrak{g}_\rho)$, $Y \in \mathbb{C}[\mathcal{K}_\lambda^{\mathcal{J}} : \lambda \in \mathcal{J}]$, 所以

$$\psi_{\mathcal{J}} = \psi_{\mathfrak{z}_{\mathcal{J}}} \otimes \iota : \mathbb{C}[\mathcal{K}_\lambda^{\mathcal{J}} : \lambda \in \mathcal{J}] \otimes U(\mathfrak{g}_\rho) \to U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$$

是一个代数同态, 而且满足 $\psi_{\mathcal{J}}(\mathscr{K}^{\mathcal{J}}) = K$ 和 $\psi_{\mathcal{J}}(F) = \mathcal{F}$, 其中 $\mathcal{F}$ 和之前的定义一样, 等于 $F^{\mathcal{J}} - K$. 由于 $\phi_{\mathcal{J}}$ 可由 $\phi_{\mathcal{J}}(K) = \mathscr{K}^{\mathcal{J}}$ 与 $\phi_{\mathcal{J}}(\mathcal{F}) = F$ 完全决定, 所以 $\psi_{\mathcal{J}} = \phi_{\mathcal{J}}^{-1}$. □

定义 $\mathfrak{g}_{\mathcal{J}} \subset \mathrm{Lie}(U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g}))$ 是由 $\{F_{ij}^{\mathcal{J}}\}_{1\le i,j\le N}$ 生成的子李代数. 那么, 限制 $\phi_{\mathcal{J}}|_{\mathfrak{g}_{\mathcal{J}}}$(见 (3.15)) 和它与 $\mathrm{id} \otimes \phi_\rho$(见 (3.8)) 可以得出下列同态

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_\rho \oplus \mathfrak{z}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}_{\mathcal{J}}, \tag{3.16}$$

并且我们有 $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{J}}) \cong U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$. 因此, 我们统一记号为 $U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g})$.

推论 3.8. 映射

$$\phi_\rho^z : F^{(r)} \mapsto -(\rho \otimes 1)(\Omega z^r), \quad \forall r \ge 0,$$

是 $\mathfrak{g}_\rho[z] \to \mathfrak{g}[z]$ 的同构, 其中, 对于每个 $r \ge 0$, $F^{(r)} = \sum_{i,j=1}^N E_{ij} \otimes F_{ij} z^r \in \mathrm{End}V \otimes \mathfrak{g}_\rho[z]$ 而且 $\Omega z^r = \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \otimes X_\lambda z^r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}[z]$.

特别地, $U(\mathfrak{g}[z])$ 同构于由 $\{F_{ij}^{(r)} = F_{ij}z^r : r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 1 \leq i,j \leq N\}$ 生成的复含幺结合代数, 生成关系为:

$$[F_1^{(r)}, F_2^{(s)}] = [\Omega_\rho, F_2^{(r+s)}], \quad \forall r,s \geq 0, \tag{3.17}$$

$$F^{(r)} = c_{\mathfrak{g}}^{-1}\omega(F^{(r)}), \quad \forall r \geq 0. \tag{3.18}$$

证明. 根据流代数的定义, 容易验证 ϕ_ρ^z 是李代数同态. 下证明它是同构.

已知流代数是分次的, 即 $\mathfrak{g}_\rho[z] = \bigoplus_{r\geq 0}\mathfrak{g}_\rho z^r$, $\mathfrak{g}[z] = \bigoplus_{r\geq 0}\mathfrak{g}z^r$. 作为线性空间, 线性变换 $\sigma_{\mathfrak{g}}^{rs} : Xz^r \mapsto Xz^s$, $X \in \mathfrak{g}$, 任意 $r,s \geq 0$, 可以得到 $\mathfrak{g}z^r \cong \mathfrak{g}z^s$. 同理, 作为线性空间, 线性变换 $\sigma_{\mathfrak{g}_\rho}^{rs}$, 任意 $r,s \geq 0$, 可得到 $\mathfrak{g}_\rho z^r \cong \mathfrak{g}_\rho z^s$. 于是 $\phi_\rho^z|_{\mathfrak{g}_\rho z^r} = \sigma_{\mathfrak{g}}^{0r} \circ \phi_\rho \circ \sigma_{\mathfrak{g}_\rho}^{r0}$ 为双射, 于是 ϕ_ρ^z 为代数同构.

$U(\mathfrak{g}[z])$ 的生成元与生成关系可由命题3.5与多项式流代数的定义得到. □

注 3.9. 关系 (3.17) 和 (3.18) 可以视为定义 $U(\mathfrak{g}_\rho[z])$ 的生成关系. 忽略关系 (3.18), 可以得到 $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{J}}[z])$ 的定义.

引入生成矩阵

$$F(u) = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \otimes F_{ij}(u) \in \mathrm{End}V \otimes (\mathfrak{g}_\rho[z])[[u^{-1}]], \quad \text{其中} F_{ij}(u) = \sum_{r\geq 0} F_{ij}^{(r)} u^{-r-1} \in (\mathfrak{g}_\rho[z])[[u^{-1}]].$$

利用这个记号, 我们可以, 用与其标准李双代数结构相关联的, 经典 r 矩阵 $\frac{\Omega}{u-v}$ 表达 $\mathfrak{g}[z]$ 的定义关系 (或者更精确地, $\mathfrak{g}_\rho[z]$ 的定义关系).

命题 3.10. 定义关系 (3.17) 和 (3.18) 与下列关系等价:

$$[F_1(u), F_2(v)] = \left[\frac{\Omega_\rho}{u-v}, F_1(u) + F_2(v)\right], \tag{3.19}$$

$$F(u) = c_{\mathfrak{g}}^{-1}\omega(F(u)). \tag{3.20}$$

若只有关系 (3.19), 可以看作是 $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{J}}[z])$ 的定义关系.

证明. 显然, 关系 (3.18) 和关系 (3.20) 等价. 为了证明 (3.17) 和 (3.19) 等价, 我们需要展开

$$(u-v)^{-1} = \sum_{p\geq 0} v^p u^{-p-1} \in (\mathbb{C}[v])[[u^{-1}]], \tag{3.21}$$

把 (3.19) 看作是空间 $(\mathrm{End}V)^{\otimes 2} \otimes U(\mathfrak{g}_\rho[z])[[v^\pm, u^{-1}]]$ 上的等式. 比较等式两边 $v^s u^{-r}$ 项的系数, $s \in \mathbb{Z}$ 且 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

用 (3.21) 展开 (3.19), 我们可得

$$\sum_{r,s\geq 0}[F_1^{(r)}, F_2^{(s)}]v^{-s-1}u^{-r-1} = \sum_{p,a\geq 0}\Big([\Omega_\rho, F_1^{(a)}]v^p u^{-p-a-2} + [\Omega_\rho, F_2^{(a)}]v^{p-r-1}u^{-p-1}\Big), \quad (3.22)$$

比较两边 $v^{-s-1}u^{-r-1}$ 的系数, $s, r \geq 0$, 我们可得到 (3.17):

$$[F_1^{(r)}, F_2^{(s)}] = [\Omega_\rho, F_2^{(r+s)}] \quad \forall r, s \geq 0.$$

同时, 我们可以通过比较剩余的系数, $v^s u^{-r}$ 的系数, 来保证除了上述关系式外, 没有另外的关系. 如果 $0 \leq r < 2$ 或者 $s > r-2$, 两边 $v^s u^{-r}$ 的系数都是零. 否则, 有

$$0 = [\Omega_\rho, F_1^{(r-s-2)}] + [\Omega_\rho, F_2^{(r-s-2)}].$$

他们也可以通过 (3.17) 得出 (与引理3.3的 (3.4) 推出 (3.2) 类似). □

3.5 包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2[z])$ 的 r 矩阵实现

在3.3节中, 我们已经用 r 矩阵的方法实现了包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$. 在本节中, 我们将更进一步, 用 r 矩阵实现的方法实现包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2[z])$. 在后文中会发现, r 矩阵方法对两者是兼容的.

本节中, 我们依旧采用之前讨论得到的 $\{X_\lambda\}_{1\leq\lambda\leq 3}$, 作为李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的一组标准正交基. 因此, $\{X_\lambda z^r : 1 \leq \lambda \leq 3,\ r \geq 0\}$ 是流代数 $\mathfrak{sl}_2[z]$ 的一组基. 同理,$\{hz^r, ez^s, fz^t : r, s, t \geq 0\}$ 也是 $\mathfrak{sl}_2[z]$ 的一组基.

根据命题3.8可知, 作为含幺结合代数, $U(\mathfrak{sl}_2[z])$ 有生成元 $\{F_{ij}^{(r)} = F_{ij}z^r : 1 \leq i, j \leq 3, r \geq 0\}$, 并且满足生成关系:

$$[F_1^{(r)}, F_2^{(s)}] = [\Omega_\rho, F_2^{(r+s)}], \quad \forall r, s \geq 0, \tag{3.23}$$

$$F^{(r)} = c_{\mathfrak{sl}_2}^{-1}\omega(F^{(r)}) = \omega(F^{(r)}), \quad \forall r \geq 0, \tag{3.24}$$

其中 $F^{(r)} = \sum_{i,j=1}^3 E_{ij} \otimes F_{ij}^{(r)} \in \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \otimes U(\mathfrak{sl}_2[z])$

将复系数 $\{c_{ij}^\lambda : 1 \leq \lambda, i, j \leq 3\}$(见 (3.9)) 带入生成关系 (3.23), 我们可以相似地得到以下所示的李括号运算表.

表 2: $U(\mathfrak{sl}_2[z])$ 的生成关系 (3.23)

$2[\cdot,\cdot]$	$F_{11}^{(s)}$	$F_{12}^{(s)}$	$F_{13}^{(s)}$	$F_{21}^{(s)}$	$F_{22}^{(s)}$	$F_{23}^{(s)}$	$F_{31}^{(s)}$	$F_{32}^{(s)}$	$F_{33}^{(s)}$
$F_{11}^{(r)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$F_{12}^{(r)}$	$-F_{12}^{(r+s)}-F_{21}^{(r+s)}$	$F_{11}^{(r+s)}-F_{22}^{(r+s)}$	$-F_{23}^{(r+s)}$	$F_{11}^{(r+s)}-F_{22}^{(r+s)}$	$F_{12}^{(r+s)}+F_{21}^{(r+s)}$	$F_{13}^{(r+s)}$	$-F_{32}^{(r+s)}$	$F_{31}^{(r+s)}$	0
$F_{13}^{(r)}$	$-F_{13}^{(r+s)}-F_{31}^{(r+s)}$	$-F_{32}^{(r+s)}$	$F_{11}^{(r+s)}-F_{33}^{(r+s)}$	$-F_{23}^{(r+s)}$	0	$F_{21}^{(r+s)}$	$F_{11}^{(r+s)}-F_{33}^{(r+s)}$	$F_{12}^{(r+s)}$	$F_{13}^{(r+s)}+F_{31}^{(r+s)}$
$F_{21}^{(r)}$	$F_{12}^{(r+s)}+F_{21}^{(r+s)}$	$-F_{11}^{(r+s)}+F_{22}^{(r+s)}$	$F_{23}^{(r+s)}$	$-F_{11}^{(r+s)}+F_{22}^{(r+s)}$	$-F_{12}^{(r+s)}-F_{21}^{(r+s)}$	$-F_{13}^{(r+s)}$	$F_{32}^{(r+s)}$	$-F_{31}^{(r+s)}$	0
$F_{22}^{(r)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$F_{23}^{(r)}$	0	$-F_{13}^{(r+s)}$	$F_{12}^{(r+s)}$	$-F_{31}^{(r+s)}$	$-F_{23}^{(r+s)}-F_{32}^{(r+s)}$	$F_{22}^{(r+s)}-F_{33}^{(r+s)}$	$F_{21}^{(r+s)}$	$F_{22}^{(r+s)}-F_{33}^{(r+s)}$	$F_{23}^{(r+s)}+F_{32}^{(r+s)}$
$F_{31}^{(r)}$	$F_{13}^{(r+s)}+F_{31}^{(r+s)}$	$F_{32}^{(r+s)}$	$-F_{11}^{(r+s)}+F_{33}^{(r+s)}$	$F_{23}^{(r+s)}$	0	$-F_{21}^{(r+s)}$	$-F_{11}^{(r+s)}+F_{33}^{(r+s)}$	$-F_{12}^{(r+s)}$	$-F_{13}^{(r+s)}-F_{31}^{(r+s)}$
$F_{32}^{(r)}$	0	$F_{13}^{(r+s)}$	$-F_{12}^{(r+s)}$	$F_{31}^{(r+s)}$	$F_{23}^{(r+s)}+F_{32}^{(r+s)}$	$-F_{22}^{(r+s)}+F_{33}^{(r+s)}$	$-F_{21}^{(r+s)}$	$-F_{22}^{(r+s)}+F_{33}^{(r+s)}$	$-F_{23}^{(r+s)}-F_{32}^{(r+s)}$
$F_{33}^{(r)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表中 $r, s \geq 0$. 整理可得, 对任意 $r, s \geq 0$, 我们有

$$
\begin{gathered}
F_{12}^{(r)} + F_{21}^{(r)} = 0, \qquad F_{23}^{(r)} + F_{32}^{(r)} = 0, \qquad F_{13}^{(r)} + F_{31}^{(r)} = 0, \\
[F_{21}^{(r)}, F_{32}^{(s)}] = \frac{1}{2} F_{13}^{(r+s)}, \quad [F_{32}^{(r)}, F_{13}^{(s)}] = \frac{1}{2} F_{21}^{(r+s)}, \quad [F_{13}^{(r)}, F_{21}^{(s)}] = \frac{1}{2} F_{32}^{(r+s)}, \\
F_{11}^{(r)} = F_{22}^{(r)} = F_{33}^{(r)}.
\end{gathered} \tag{3.25}
$$

表中除了关系式 (3.25) 中的三个李括号和其衍生的李括号非零, 其余的李括号均为零. 并且关系式 (3.25) 可以单独地看作是包络代数 $U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{g}[z])$ 的生成关系.

将复系数 $\{c_{ij}^{\lambda} : 1 \leq \lambda, i, j \leq 3\}$ 带入生成关系 (3.24), 可得, 对于任意 $r \geq 0$:

$$
F^{(r)} = \begin{pmatrix} 2F_{11}^{(r)} - F_{22}^{(r)} - F_{33}^{(r)} & 2F_{12}^{(r)} + F_{21}^{(r)} & 2F_{13}^{(r)} + F_{31}^{(r)} \\ F_{12}^{(r)} + 2F_{21}^{(r)} & -F_{11}^{(r)} + 2F_{22}^{(r)} - F_{33}^{(r)} & 2F_{23}^{(r)} + F_{32}^{(r)} \\ F_{13}^{(r)} + 2F_{31}^{(r)} & F_{23}^{(r)} + 2F_{32}^{(r)} & -F_{11}^{(r)} - F_{22}^{(r)} + 2F_{33}^{(r)} \end{pmatrix} \tag{3.26}
$$

综合关系式 (3.25) 和 (3.26), 通过简单的计算, 我们可以得到具体的 $U(\mathfrak{sl}_2[z])$ 的 r 矩阵实现:

命题 3.11. *对于复数域 $\mathbb{C}$ 上的多项式流代数 $\mathfrak{sl}_2[z]$, 它的包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2[z])$ 是由生成元 $\{F_{21}^{(r)}, F_{32}^{(r)}, F_{13}^{(r)} : r \geq 0\}$ 生成的含幺结合代数, 满足生成关系:*

$$
[F_{21}^{(r)}, F_{32}^{(s)}] = \frac{1}{2} F_{13}^{(r+s)}, \quad [F_{32}^{(r)}, F_{13}^{(s)}] = \frac{1}{2} F_{21}^{(r+s)}, \quad [F_{13}^{(r)}, F_{21}^{(s)}] = \frac{1}{2} F_{32}^{(r+s)}, \quad \forall r, s \geq 0. \tag{3.27}
$$

由同构映射 $\phi_{\rho}^{z} : F^{(r)} \mapsto -(\rho \otimes 1)(\Omega z^r)$, 可以得出, 对任意 $r \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\phi_{\rho}^{z} : F_{21}^{(r)} &\mapsto \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} X_3 z^r \\
F_{32}^{(r)} &\mapsto \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} X_1 z^r \\
F_{13}^{(r)} &\mapsto \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} X_2 z^r
\end{aligned}
$$

并且, 我们可以通过同构 ϕ_ρ^z 的逆映射, 找到常用的基 $\{hz^r, ez^s, fz^k : r,s,k \geq 0\}$ 在 r 矩阵实现中的对应元素:

$$\phi_\rho^{z-1}(hz^r) = -4\mathrm{i}F_{32}^{(r)}, \quad \phi_\rho^{z-1}(ez^s) = -2F_{21}^{(s)} - 2\mathrm{i}F_{13}^{(s)}, \quad \phi_\rho^{z-1}(fz^k) = 2F_{21}^{(k)} - 2\mathrm{i}F_{13}^{(k)}.$$

显然, 在这组基下, 包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2[z])$ 满足的关系可以由 (3.27) 给出.(例如: $[\phi_\rho^{z-1}(ez^s), \phi_\rho^{z-1}(fz^k)] = 4\mathrm{i}[F_{21}^{(s)}, F_{13}^{(k)}] - 4\mathrm{i}[F_{13}^{(s)}, F_{21}^{(k)}] = \phi_\rho^{z-1}(hz^{s+k})$.)

容易验证, 当 $r = s = 0$ 时, 关系式 (3.25) 和 (3.26) 退化成包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 的生成关系 (3.12) 和 (3.13). 这里可以体现出一个重要事实, 包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 可以被视为包络代数 $U(\mathfrak{sl}_2[z])$ 的子代数. 并且他们的 r 矩阵实现是相兼容的.

第四章 仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的 r 矩阵实现

在本章中, 我们依旧默认 $\mathfrak{g}$ 为复数域上的有限维单李代数. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 Killing 二次型下的一组标准正交基.

4.1 loop 代数和仿射李代数

为了得到仿射李代数的定义, 我们先引入 loop 代数相关的概念.

定义 4.1. 令 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ 为洛朗多项式环, 即关于 t 和 t^{-1} 的多项式 *(*注意不是洛朗级数*)*. 我们定义 *loop* 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 为 $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$. 规定

$$[X\otimes t^n, Y\otimes t^m]=[X,Y]\otimes t^{n+m}\quad \forall X,Y\in\mathfrak{g},\ n,m\in\mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

容易验证, 上式满足李括号运算的条件, 所以 *loop* 代数是李代数.

注 4.2. 上述定义是从代数的角度给出的. 我们可以从 *loop* 代数的几何版本的定义中, 窥见其名称的由来*:* $\tilde{\mathfrak{g}}\coloneqq\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}^\infty(S^1)$, 其中 $\mathbb{C}^\infty(S^1)$ 是圆周流形 S^1 上的光滑函数代数. 因此, $\tilde{\mathfrak{g}}$ 中的元素可以视为 $S^1\to\mathfrak{g}$ 的光滑映射.

注意到, $\{X_\lambda^{(k)}=X_\lambda\otimes t^k:\lambda\in\Lambda,k\in\mathbb{Z}\}$ 是 loop 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的一组基. 因此, 等式 (4.1) 可以改写为:

$$[X_\lambda^{(n)},X_\mu^{(m)}]=[X_\lambda,X_\mu]\otimes t^{n+m}=\sum_{\gamma\in\Lambda}\alpha_{\lambda\mu}^\gamma X_\gamma^{(n+m)},\quad \forall\lambda,\mu\in\Lambda,\ n,m\in\mathbb{Z},$$

其中复系数 $\{\alpha_{\lambda\mu}^\gamma:\lambda,\mu,\gamma\in\Lambda\}$ 的定义见 (2.1).

我们现在考虑 loop 代数的 1 维中心扩张. 我们先引入 2 闭上链的概念.

定义 4.3. 设 ψ 是李代数 $\mathfrak{a}$ 上的双线性型, 如果 ψ 满足*:*

$$\psi(X,Y)=-\psi(Y,X), \tag{4.2}$$

$$\psi(X,[Y,Z])=\psi([X,Y],Z)+\psi(Y,[X,Z]), \tag{4.3}$$

我们称 ψ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个 *2* 闭上链 *(2-cocycle)*, 其中 $X,Y,Z\in\mathfrak{a}$. 在 $\mathfrak{a}$ 的全体 *2* 闭上链上, 我们定义等价关系*:* 对于 *2* 闭上链 ψ 和 ψ', 如果存在 $\mathfrak{a}$ 上的线性函数 φ 使得

$$\psi(X,Y)-\psi'(X,Y)=\varphi([X,Y]),\quad \forall X,Y\in\mathfrak{a}, \tag{4.4}$$

我们称 ψ 与 ψ' 等价.

例 4.4. 考虑 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上的双线性型 $\psi_0 : \tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathbb{C}$,

$$\psi_0(X^{(n)}, Y^{(m)}) = n\delta_{n+m,0}(X, Y), \forall X, Y \in \mathfrak{g},\ n, m \in \mathbb{C}, \tag{4.5}$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的 *Killing* 二次型. 容易验证, ψ_0 是 *loop* 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的 *2* 闭上链.

命题 4.5. *loop* 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的一维中心扩张与 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的 *2* 闭上链一一对应.

证明. 假设一维中心扩张为 $\tilde{\mathfrak{g}}' = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}c$, 即有

$$[c, X^{(n)}]_{\tilde{\mathfrak{g}}'} = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, n \in \mathbb{Z}.$$

令 $[X^{(n)}, Y^{(m)}]_{\tilde{\mathfrak{g}}'} = [X, Y]^{(n+m)} + B(X^{(n)}, Y^{(m)})c$, 其中 $B(\cdot,\cdot)$ 为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上的二元函数.

这里 B 不能是任意的, 它要使得这样定义的李括号运算满足双线性性, 反对称性和 Jacobi 恒等式的要求, 即 B 是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的一个 2 闭上链. 反过来, 给定一个 2 闭上链, 我们可以根据上述方法构造对应的一维中心扩张. 所以这两者是一一对应的. □

注 4.6. 对于单李代数, 由上述命题, 我们可以定义 *loop* 代数的一维中心扩张的等价, 即其对应的 *2* 闭上链在差一个常数倍的意义下等价.

本节的主要目标是证明命题4.9. 为了找到证明方法, 我们先考虑一个简单的类似命题.

命题 4.7. 单李代数 $\mathfrak{g}$ 的所有一维中心扩张 *(*在等价的意义下*)* 都是平凡的扩张.

证明. 只需要证明 $\mathfrak{g}$ 的任意 2 闭上链与零等价. 假设 $\psi(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 2 闭上链. 令 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, 考虑 $\mathfrak{g}$ 的一个三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathbb{C}x_\alpha,$$

其中 Φ 是 $\mathfrak{h}$ 对应的根系, 为了方便计算, 我们记 $h_\alpha = [x_\alpha, x_{-\alpha}]$. 于是映射 $x_\alpha \mapsto e$, $x_{-\alpha} \mapsto f$, $h_\alpha \mapsto h$ 使得 $\mathbb{C}\{x_\alpha, x_{-\alpha}, h_\alpha\}$ 作为 $\mathfrak{g}$ 的子代数与李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 同构.

对任意 $h \in \mathfrak{h}$ 和 $\alpha, \beta \in \Phi$, 由关系式 (4.3), 我们有

$$\psi(h, [x_\alpha, x_\beta]) = \psi([h, x_\alpha], x_\beta) + \psi(x_\alpha, [h, x_\beta]) = (\alpha+\beta)(h)\psi(x_\alpha, x_\beta).$$

当 $\alpha + \beta \neq 0$ 时, 存在 $h' \in \mathfrak{h}$, 使得 $(\alpha+\beta)(h') \neq 0$ 我们有

$$\psi(x_\alpha, x_\beta) = \frac{\psi(h', [x_\alpha, x_\beta])}{(\alpha+\beta)(h')} = \frac{\psi(h', x_{\alpha+\beta})}{(\alpha+\beta)(h')}. \tag{4.6}$$

从上式我们发现 $\frac{\psi(h',x_{\alpha+\beta})}{(\alpha+\beta)(h')}$ 的值和 h' 的取值无关. 当 $\alpha+\beta=0$ 时, $\psi(h,[x_\alpha,x_{-\alpha}])=0$, 即

$$\psi(h,h_\alpha)=0. \tag{4.7}$$

上述结果暗示我们考虑线性函数 $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$,

$$\begin{cases} \varphi(x_\alpha)=\frac{\psi(h',x_\alpha)}{\alpha(h')}, & \forall\alpha\in\Phi \\ \varphi(h_\alpha)=\psi(x_\alpha,x_{-\alpha}), & \forall\alpha\in\Phi \end{cases}$$

其中 h' 的选取与 α 有关, 且要求 $\alpha(h')\neq 0$. 由关系式 (4.6) 可知, $\varphi(x_\alpha)$ 与 h' 的选取无关.

由关系式 (4.7) 可以计算得 $\psi(X,Y)-\varphi([X,Y])=0$, $\forall X,Y\in\mathfrak{g}$, 即 ψ 等价于零. □

上一命题证明思路可以运用到命题4.9的证明中. 这里我们需要一个引理.

引理 4.8. *设 $\mathfrak{g}$ 的一个三角分解如命题4.7所示, ψ 是 loop 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的 2 闭上链. 则 $\psi(h_\alpha^{(n)},h_\beta^{(m)})=kn\delta_{n+m}(h_\alpha,h_\beta)$, k 为常数.*

证明. 对任意 $\alpha\in\Phi$, $n,m\in\mathbb{Z}$, 任取 $h\in\mathfrak{h}$ 使得 $\alpha(h)\neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \psi(x_\alpha^{(n)},x_\alpha^{(m)}) &= \frac{1}{2}\psi([h_\alpha^{(n)},x_\alpha^{(0)}],x_{-\alpha}^{(m)}) \\ &= \frac{1}{2}\psi(h_\alpha^{(n)},[x_\alpha^{(0)},x_{-\alpha}^{(m)}])-\frac{1}{2}\psi(x_\alpha^{(0)},[h_\alpha^{(n)},x_{-\alpha}^{(m)}]) \\ &= \frac{1}{2}\psi(h_\alpha^{(n)},h_\alpha^{(m)})+\psi(x_\alpha^{(0)},x_{-\alpha}^{(n+m)}), \end{aligned} \tag{4.8}$$

对任意 $\alpha,\beta\in\Phi$, $n,m,l\in\mathbb{Z}$, 我们有

$$\begin{aligned} \psi(h_\alpha^{(n)},h_\beta^{(m)}) &= \psi([x_\alpha^{(l)},x_{-\alpha}^{(n-l)}],h_\beta^{(m)}) \\ &= -\psi([h_\beta^{(m)},x_\alpha^{(l)}],x_{-\alpha}^{(n-l)})+\psi(x_\alpha^{(l)},[h_\beta^{(m)},x_{-\alpha}^{(n-l)}]) \\ &= \alpha(h_\beta)\left(\psi(x_\alpha^{(l+m)},x_{-\alpha}^{(n-l)})-\psi(x_\alpha^{(l)},x_{-\alpha}^{(n+m-l)})\right) \\ \text{由 (4.8)} \quad &= \frac{\alpha(h_\beta)}{2}\left(\psi(h_\alpha^{(l)},h_\alpha^{(n+m-l)})-\psi(h_\alpha^{(l+m)},h_\alpha^{(n-l)})\right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

当 $n\geq 0$ 时, 取 $l=1$, 我们有 $\psi(h_\alpha^{(n)},h_\beta^{(m)})=\frac{\alpha(h_\beta)}{2}\left(\psi(h_\alpha^{(1)},h_\alpha^{(n+m-1)})-\psi(h_\alpha^{(m+1)},h_\alpha^{(n-1)})\right)$. 我们可以从中看到递归式, 继续迭代 $n-1$ 之后, 有

$$\psi(h_\alpha^{(n)},h_\beta^{(m)})=\frac{\alpha(h_\beta)}{2}\left(n\psi(h_\alpha^{(1)},h_\alpha^{(n+m-1)})-\psi(h_\alpha^{(m+n)},h_\alpha^{(0)})\right).$$

注意到, 对任意 $h\in\mathfrak{h}$, $\psi(h^{(0)},h_\alpha^{(n)})=\psi(h^{(0)},[X_\alpha^0,X_{-\alpha}^{(n)}])=0$. 根据教材 [?] 第八章可知,

$\alpha(h_\beta) = \frac{2(h_\alpha, h_\beta)}{(h_\alpha, h_\alpha)}$. 令 $\tau_\alpha(n) = \psi(h_\alpha^{(1)}, h_\alpha^{(n-1)})$, 上式可化简为

$$\psi(h_\alpha^{(n)}, h_\beta^{(m)}) = n\frac{(h_\alpha, h_\beta)}{(h_\alpha, h_\alpha)}\tau_\alpha(n+m). \tag{4.10}$$

相似地讨论 $n < 0$ 的情况, 我们也可以得到上式.

特别地, 当 $\beta = \alpha$ 时, 由 ψ 的反对称性可得,

$$\psi(h_\alpha^{(n)}, h_\alpha^{(m)}) + \psi(h_\alpha^{(n)}, h_\alpha^{(m)}) = (n+m)\tau_\alpha(n+m) = 0.$$

所以 $\tau_\alpha(n+m) = \delta_{m+n,0}\tau_\alpha(0)$.

当 $n + m = 0$ 时, 由前式, 等式 (4.10) 和 ψ 的反对称性可得,

$$\psi(h_\alpha^{(n)}, h_\beta^{(-n)}) + \psi(h_\beta^{(-n)}, h_\alpha^{(n)}) = n\frac{(h_\alpha, h_\beta)}{(h_\alpha, h_\alpha)}\tau_\alpha(0) - n\frac{(h_\beta, h_\alpha)}{(h_\beta, h_\beta)}\tau_\beta(0) = 0,$$

即 $\frac{\tau_\alpha(0)}{(h_\alpha, h_\alpha)} = \frac{\tau_\beta(0)}{(h_\beta, h_\beta)}$. 说明对任意 $\alpha \in \Phi$, 该分式值均相同, 记其为常数 k.

于是我们有 $\psi(h_\alpha^{(n)}, h_\beta^{(m)}) = kn\delta_{n+m}(h_\alpha, h_\beta)$. □

命题 4.9. *loop 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的中心扩张等价于例4.4中的扩张.*

证明. 同理, 我们也只需证明 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的任意 2 闭上链与 $k\psi_0$ 等, k 为常数. 考虑 $\mathfrak{g}$ 的一个三角分解, 如命题4.7所示. 于是我们对 loop 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 有类似的分解,

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h}^{(0)} \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi \\ r\in\mathbb{Z}}} \mathfrak{g}_\alpha^{(r)} \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}^*} \mathfrak{h}^{(r)}.$$

假设 $\psi(\cdot, \cdot)$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的一个 2 闭上链. 类似命题4.7的证明, 我们先分析两个式子. 规定下文中 n, m, l 为任意整数.

对任意 $h \in \mathfrak{h}$, $\alpha, \beta \in \Phi$, 我们有

$$\psi(h^{(0)}, [x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}]) = \psi([h^{(0)}, x_\alpha^{(n)}], x_\beta^{(m)}) + \psi(x_\alpha^{(n)}, [h, x_\beta^{(m)}]) = (\alpha+\beta)(h)\psi(x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}),$$

当 $\alpha + \beta \neq 0$ 时, 存在 $h' \in \mathfrak{h}$, 使得 $(\alpha + \beta)(h') \neq 0$. 此时上式为

$$\psi(x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}) = \frac{\psi(h'^{(0)}, [x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}])}{(\alpha+\beta)(h')} = \frac{\psi(h'^{(0)}, x_{\alpha+\beta}^{(n+m)})}{(\alpha+\beta)(h')}. \tag{4.11}$$

从上式我们发现, $\frac{\psi(h'^{(0)}, x_{\alpha+\beta}^{(n+m)})}{(\alpha+\beta)(h')}$ 的值与 h' 的选取无关. 当 $\alpha+\beta = 0$ 时, 上式为 $\psi(h^{(0)}, [x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}]) =$

0, 即

$$\psi(h^{(0)}, h_\alpha^{(n+m)}) = 0. \tag{4.12}$$

对比关系式 (4.7),(4.6) 和关系式 (4.12),(4.11), 我们类似地考虑线性函数 $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_\alpha^{(n)}) = \frac{\psi(h'^{(0)}, x_\alpha^{(n)})}{\alpha(h')}, & \forall \alpha \in \Phi \\ \tilde{\varphi}(h_\alpha^{(n)}) = \psi(x_\alpha^{(0)}, x_{-\alpha}^{(n)}), & \forall \alpha \in \Phi \end{cases}$$

其中 h' 的选取只与 α 有关, 满足 $\alpha(h') \neq 0$. 由关系式 (4.11) 可知, $\tilde{\varphi}(x_\alpha^{(n)})$ 与 h' 的选取无关.

现在只需证明 (在数乘意义下): $\psi(X^{(n)}, Y^{(m)}) - \tilde{\varphi}([X^{(n)}, Y^{(m)}]) = \psi_0$ 对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 均成立. 下面分别考虑 $X, Y \in \{x_\alpha^{(n)}, h_\alpha^{(n)} : \alpha \in \Phi\}$ 的情况:

(1) $X = h,\ Y = x_\alpha$. 若 $\alpha(h) \neq 0$, 则 $\tilde{\varphi}([h^{(n)}, x_\alpha^{(m)}]) = \alpha(h)\frac{\psi(h^{(0)}, x_\alpha^{(m)})}{\alpha(h)} = \psi(h^{(n)}, x_\alpha^{(m)})$. 若 $\alpha(h) = 0$, 则 $\psi(h^{(n)}, x_\alpha^{(m)}) = \frac{1}{\alpha(h')}\psi(h^{(n)}, [h'^{(0)}, x_\alpha^{(m)}]) = 0$, 第二个等号用到了 ψ 满足关系式 (4.3). 所以 $\psi(h^{(n)}, x_\alpha^{(m)}) - \tilde{\varphi}([h^{(n)}, x_\alpha^{(m)}]) = 0 = \phi_0(h^{(n)}, x_\alpha^{(m)})$.

(2.1) $X = x_\alpha,\ Y = x_\beta,\ \alpha + \beta \neq 0$. 由于 $[x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}] = x_{\alpha+\beta}^{(n+m)}$, 所以

$$\psi(x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}) - \tilde{\varphi}([x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}]) = \frac{\psi(h^{(0)}, [x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}])}{(\alpha+\beta)(h)} - \frac{\psi(h'^{(0)}, [x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}])}{(\alpha+\beta)(h')} = 0,$$

其中 $h, h' \in \mathfrak{h}$ 使得 $\alpha(h), \alpha(h') \neq 0$. 此时 Killing 二次型 $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, 所以 $\psi(x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}) - \tilde{\varphi}([x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)}]) = 0 = \psi_0(x_\alpha^{(n)}, x_\beta^{(m)})$.

(2.2) $X = x_\alpha,\ Y = x_{-\alpha}$. 由关系式 (4.8) 和引理4.8,

$$\psi(x_\alpha^{(n)}, x_{-\alpha}^{(m)}) - \tilde{\varphi}([x_\alpha^{(n)}, x_{-\alpha}^{(m)}]) = \psi(x_\alpha^{(n)}, x_{-\alpha}^{(m)}) - \psi(x_\alpha^{(0)}, x_{-\alpha}^{(n+m)}) = \frac{1}{2}\psi(h_\alpha^{(n)}, h_\alpha^{(m)}) = kn\delta_{n+m}.$$

并且 $\phi_0(x_\alpha^{(n)}, x_{-\alpha}^{(m)}) = n\delta_{n+m,0}(x_\alpha, x_{-\alpha}) = n\delta_{n+m,0}$, 故满足要求.

(3) $X = h_\alpha,\ Y = h_\beta$. 此时, $\tilde{\varphi}([h_\alpha^{(n)}, h_\beta^{(m)}]) = 0$. 由引理4.8, $\psi(h_\alpha^{(n)}, h_\beta^{(m)}) - \tilde{\varphi}([h_\alpha^{(n)}, h_\beta^{(m)}]) = k\phi_0(h_\alpha^{(n)}, h_\beta^{(m)})$.

综上所述, 任意 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的 2 闭上链等价于 $k\psi_0$, k 为常数. □

注 4.10. 实际上, 将上一命题中的李代数 $\mathfrak{g}$ 的条件放宽成半单李代数, 该结论依然成立.

有了上述命题, 我们得以良好地给出仿射李代数的定义. 简单地说, 李代数 $\mathfrak{g}$ 的仿射李代数是其 loop 代数的一维中心扩张, 再加上一维导数扩张.

定义 4.11. 单李代数 $\mathfrak{g}$ 的仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 定义为

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

其中 $\mathbb{C}c$ 是 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的中心, 李括号运算满足

$$[X^{(n)}, Y^{(m)}] = [X, Y]^{(n+m)} + n\delta_{n+m,0}(X, Y)c,$$

$$[d, X^{(n)}] = kX^{(n)},\ \forall X, Y \in \mathfrak{g},\ n, m \in \mathbb{C}.$$

4.2 仿射李代数及其 r 矩阵实现

为了方便表示与 loop 代数相关的算式, 我们延拓上一章的记号: 对任意 $r \in \mathbb{Z}$, $F^{(r)} = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \otimes F_{ij}t^r \in \mathrm{End}V \otimes \tilde{\mathfrak{g}_\rho}$.

命题 4.12. 映射

$$\phi^t_\rho : F^{(r)} \mapsto -(\rho \otimes 1)(\Omega t^r), \quad \forall r \in \mathbb{Z}$$

是 $\tilde{\mathfrak{g}_\rho} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ 的同构, 其中 Ω 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的 *Casimir* 元, $\Omega t^r = \sum_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \otimes X_\lambda t^r \in \mathfrak{g} \otimes \tilde{\mathfrak{g}}$.

特别地, $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ 同构于由 $\{F^{(r)}_{ij} = F_{ij}t^r : r \in \mathbb{Z}, 1 \le i, j \le N\}$ 生成的复含幺结合代数, 满足生成关系:

$$\begin{aligned} [F^{(r)}_1, F^{(s)}_2] &= [\Omega_\rho, F^{(r+s)}_2], \quad \forall r, s \in \mathbb{Z}, \\ F^{(r)} &= c_{\mathfrak{g}}^{-1}\omega(F^{(r)}), \quad \forall r \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

证明. 把 ϕ^t_ρ 看作是 $\mathrm{End}V \otimes U(\tilde{\mathfrak{g}_\rho}) \to \mathrm{End}V \otimes U(\tilde{\mathfrak{g}})$ 上的映射, 它可以诱导出一个 $U(\tilde{\mathfrak{g}_\rho}) \to U(\tilde{\mathfrak{g}})$ 的映射, 易证其是满足生成关系且满足乘法, 即其为良定义的结合代数同态. 且我们可以证明其为双射.(参考推论3.8的证明.) 于是, ϕ^t_ρ 为李代数同构, 同时也可以扩张成 $U(\tilde{\mathfrak{g}_\rho}) \to U(\tilde{\mathfrak{g}})$ 的结合代数同构. □

推论 4.13. 仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的包络代数 $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ 同构于由 $\{F^{(r)}_{ij}, c, d : 1 \le i, j \le N, r \in \mathbb{Z}\}$ 生成的复含幺结合代数, 满足生成关系:

$$[F^{(r)}_1, F^{(s)}_2] = [\Omega_\rho, F^{(r+s)}_2] + r\delta_{r+s,0}C, \tag{4.14}$$

$$F^{(r)} = c_{\mathfrak{g}}^{-1}\omega(F^{(r)}), \tag{4.15}$$

$$[D, F^{(r)}] = rF^{(r)}, \tag{4.16}$$

其中 $r,s\in\mathbb{Z}$, $D=1\otimes d\in \mathrm{End}V\otimes\widehat{\mathfrak{g}}$, c 为中心元,

$$C=\Omega_\rho\otimes c=\sum_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda^{\bullet}\otimes X_\lambda^{\bullet}\otimes c\in(\mathrm{End}V)^{\otimes 2}\otimes\widehat{\mathfrak{g}}.$$

证明. 令满足推论所述条件的复含幺结合代数为 $U(\widehat{\mathfrak{g}_\rho})$, 构造 $U(\widehat{\mathfrak{g}_\rho})\to U(\widehat{\mathfrak{g}})$ 的映射

$$\widehat{\phi_\rho^t}:F^{(r)}\mapsto-(\rho\otimes 1)(\Omega t^r),\ d\mapsto d,\ c\mapsto c.$$

首先我们证明 $\widehat{\phi_\rho^t}$ 是良定义的. 由关系式 (3.1) 和基 $\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 的标准正交性可知,

$$\begin{aligned}
C&=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{1\leq i,j,k,l\leq N}c_{ij}^\lambda E_{ij}\otimes c_{kl}^\lambda E_{kl}\otimes c\\
&=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{1\leq i,j,k,l\leq N}E_{ij}\otimes E_{kl}\otimes c_{ij}^\lambda c_{kl}^\lambda c\\
&=\sum_{1\leq i,j,k,l\leq N}E_{ij}\otimes E_{kl}\otimes\left(\sum_{\lambda,\mu\in\Lambda}c_{ij}^\lambda c_{kl}^\mu(X_\lambda,X_\mu)c\right)\\
&=\sum_{1\leq i,j,k,l\leq N}E_{ij}\otimes E_{kl}\otimes\left(\sum_{\lambda,\mu\in\Lambda}(-c_{ij}^\lambda X_\lambda,-c_{kl}^\mu X_\mu)c\right)\\
&=\sum_{1\leq i,j,k,l\leq N}E_{ij}\otimes E_{kl}\otimes(\widehat{\phi_\rho^t}(F_{ij}),\widehat{\phi_\rho^t}(F_{kl}))c.
\end{aligned}$$

因此, 由仿射李代数的定义可知, 映射 $\widehat{\phi_\rho^t}$ 满足关系 (4.14) 和 (4.15). 关系式 (4.16) 显然满足. 故其为良定义的代数同态.

事实上, 可以把 $\widehat{\phi_\rho^t}$ 看作是 ϕ_ρ^t 的延拓. 类似命题4.12, 容易证明 $\widehat{\phi_\rho^t}$ 是双射. 综上所述, $\widehat{\phi_\rho^t}$ 为代数同构. □

4.3 包络代数 $U(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ 的 r 矩阵实现

本节中, 我们对仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ 进行分析, 并用上一节所提的方法 (推论4.13) 实现 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ 的包络代数.

依旧选用 $\mathfrak{sl}_2$ 的伴随表示与 Killing 二次型进行计算. $\{X_\lambda^{(r)},c,d:1\leq\lambda\leq 3,\ r\in\mathbb{Z}\}$ 为仿射李代数 $U(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ 的一组基, 其中

$$[X_\lambda^{(r)},X_\mu^{(s)}]=\sum_{1\leq\gamma\leq 3}c_{\lambda\mu}^\gamma X_\gamma^{(r+s)}+r\delta_{(\lambda,r),(\mu,-s)}c.$$

同时, $\{ht^r,et^s,ft^k:r,s,k\in\mathbb{Z}\}$ 也是 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ 的一组基.

由上一节命题4.12可知, 包络代数 $U(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ 同构于由 $\{F_{ij}^{(r)}, c, d : 1 \leq i,j \leq 3, r \in \mathbb{Z}\}$ 生成的复含幺结合代数, 满足生成关系:

$$[F_1^{(r)}, F_2^{(s)}] = [\Omega_\rho, F_2^{(r+s)}] + r\delta_{r+s,0}C, \tag{4.17}$$

$$F^{(r)} = \omega(F^{(r)}), \tag{4.18}$$

$$[D, F^{(r)}] = rF^{(r)}, \tag{4.19}$$

其中 $r, s \in \mathbb{Z}$, $D = 1 \otimes d \in \mathrm{End}V \otimes \widehat{\mathfrak{sl}_2}$, c 为中心元,

$$C = \sum_{1\leq\lambda\leq 3} X_\lambda^\bullet \otimes X_\lambda^\bullet \otimes c \in (\mathrm{End}V)^{\otimes 2} \otimes \widehat{\mathfrak{sl}_2}.$$

把 X_λ 对应的矩阵与复系数 c_{ij}^λ(见 (3.9)) 带入上式,

$$\begin{aligned} C = &- E_{12} \otimes E_{12} \otimes \frac{1}{2}c + E_{12} \otimes E_{21} \otimes \frac{1}{2}c + E_{21} \otimes E_{12} \otimes \frac{1}{2}c - E_{12} \otimes E_{21} \otimes \frac{1}{2}c \\ &- E_{13} \otimes E_{13} \otimes \frac{1}{2}c + E_{13} \otimes E_{31} \otimes \frac{1}{2}c + E_{31} \otimes E_{13} \otimes \frac{1}{2}c - E_{31} \otimes E_{31} \otimes \frac{1}{2}c \\ &- E_{23} \otimes E_{23} \otimes \frac{1}{2}c + E_{23} \otimes E_{32} \otimes \frac{1}{2}c + E_{32} \otimes E_{23} \otimes \frac{1}{2}c - E_{32} \otimes E_{32} \otimes \frac{1}{2}c \end{aligned} \tag{4.20}$$

再带入 (4.20) 把关系式 (4.17) 展开, 可得下表.

表 3: $U(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ 的生成关系 (4.17)

$2[\cdot,\cdot]$	$F_{11}^{(s)}$	$F_{12}^{(s)}$	$F_{13}^{(s)}$	$F_{21}^{(s)}$	$F_{22}^{(s)}$	$F_{23}^{(s)}$	$F_{31}^{(s)}$	$F_{32}^{(s)}$	$F_{33}^{(s)}$
$F_{11}^{(r)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$F_{12}^{(r)}$	$-F_{12}^{(r+s)} - F_{21}^{(r+s)}$	$F_{11}^{(r+s)} - F_{22}^{(r+s)}$ $-r\delta_{r+s,0}c$	$-F_{23}^{(r+s)}$	$F_{11}^{(r+s)} - F_{22}^{(r+s)}$ $+r\delta_{r+s,0}c$	$F_{12}^{(r+s)} + F_{21}^{(r+s)}$	$F_{13}^{(r+s)}$	$-F_{32}^{(r+s)}$	$F_{31}^{(r+s)}$	0
$F_{13}^{(r)}$	$-F_{13}^{(r+s)} - F_{31}^{(r+s)}$	$-F_{32}^{(r+s)}$	$F_{11}^{(r+s)} - F_{33}^{(r+s)}$ $-r\delta_{r+s,0}c$	$-F_{23}^{(r+s)}$	0	$F_{21}^{(r+s)}$	$F_{11}^{(r+s)} - F_{33}^{(r+s)}$ $+r\delta_{r+s,0}c$	$F_{12}^{(r+s)}$	$F_{13}^{(r+s)} + F_{31}^{(r+s)}$
$F_{21}^{(r)}$	$F_{12}^{(r+s)} + F_{21}^{(r+s)}$	$-F_{11}^{(r+s)} + F_{22}^{(r+s)}$ $+r\delta_{r+s,0}c$	$F_{23}^{(r+s)}$	$-F_{11}^{(r+s)} + F_{22}^{(r+s)}$ $-r\delta_{r+s,0}c$	$-F_{12}^{(r+s)} - F_{21}^{(r+s)}$	$-F_{13}^{(r+s)}$	$F_{32}^{(r+s)}$	$-F_{31}^{(r+s)}$	0
$F_{22}^{(r)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$F_{23}^{(r)}$	0	$-F_{13}^{(r+s)}$	$F_{12}^{(r+s)}$	$-F_{31}^{(r+s)}$	$-F_{23}^{(r+s)} - F_{32}^{(r+s)}$	$F_{22}^{(r+s)} - F_{33}^{(r+s)}$ $-r\delta_{r+s,0}c$	$F_{21}^{(r+s)}$	$F_{22}^{(r+s)} - F_{33}^{(r+s)}$ $+r\delta_{r+s,0}c$	$F_{23}^{(r+s)} + F_{32}^{(r+s)}$
$F_{31}^{(r)}$	$F_{13}^{(r+s)} + F_{31}^{(r+s)}$	$F_{32}^{(r+s)}$	$-F_{11}^{(r+s)} + F_{33}^{(r+s)}$ $+r\delta_{r+s,0}c$	$F_{23}^{(r+s)}$	0	$-F_{21}^{(r+s)}$	$-F_{11}^{(r+s)} + F_{33}^{(r+s)}$ $-r\delta_{r+s,0}c$	$-F_{12}^{(r+s)}$	$-F_{13}^{(r+s)} - F_{31}^{(r+s)}$
$F_{32}^{(r)}$	0	$F_{13}^{(r+s)}$	$-F_{12}^{(r+s)}$	$F_{31}^{(r+s)}$	$F_{23}^{(r+s)} + F_{32}^{(r+s)}$	$-F_{22}^{(r+s)} + F_{33}^{(r+s)}$ $+r\delta_{r+s,0}c$	$-F_{21}^{(r+s)}$	$-F_{22}^{(r+s)} + F_{33}^{(r+s)}$ $-r\delta_{r+s,0}c$	$-F_{23}^{(r+s)} - F_{32}^{(r+s)}$
$F_{33}^{(r)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

其中 $r, s \in \mathbb{Z}$. 整理可得,

$$\begin{aligned} &F_{12}^{(r)} + F_{21}^{(r)} = 0, \quad && F_{23}^{(r)} + F_{32}^{(r)} = 0, \quad && F_{13}^{(r)} + F_{31}^{(r)} = 0, \\ &[F_{12}^{(r)}, F_{23}^{(s)}] = \frac{1}{2}F_{13}^{(r+s)}, \quad && [F_{23}^{(r)}, F_{31}^{(s)}] = \frac{1}{2}F_{21}^{(r+s)}, \quad && [F_{31}^{(r)}, F_{12}^{(s)}] = \frac{1}{2}F_{32}^{(r+s)}, \\ &[F_{12}^{(r)}, F_{12}^{(-r)}] = -\frac{1}{2}rc, \quad && [F_{23}^{(r)}, F_{23}^{(-r)}] = -\frac{1}{2}rc, \quad && [F_{31}^{(r)}, F_{31}^{(-r)}] = -\frac{1}{2}rc, \\ & && F_{11}^{(r)} = F_{22}^{(r)} = F_{33}^{(r)}, \quad && \forall r, s \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

其余李括号均为零. 将复系数带入生成关系 (4.18), 可得, 对任意 $r \in \mathbb{Z}$:

$$F^{(r)} = \begin{pmatrix} 2F_{11}^{(r)} - F_{22}^{(r)} - F_{33}^{(r)} & 2F_{12}^{(r)} + F_{21}^{(r)} & 2F_{13}^{(r)} + F_{31}^{(r)} \\ F_{12}^{(r)} + 2F_{21}^{(r)} & -F_{11}^{(r)} + 2F_{22}^{(r)} - F_{33}^{(r)} & 2F_{23}^{(r)} + F_{32}^{(r)} \\ F_{13}^{(r)} + 2F_{31}^{(r)} & F_{23}^{(r)} + 2F_{32}^{(r)} & -F_{11}^{(r)} - F_{22}^{(r)} + 2F_{33}^{(r)} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

生成关系 (4.19) 显然与仿射李代数导数 d 的定义一致. 最后, 综合关系式 (4.21) 和关系式 (4.22), 我们得到以下 r 矩阵实现.

命题 4.14. *对于复数域 $\mathbb{C}$ 上的仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, 它的包络代数 $U(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ 是由生成元 $\{F_{21}^{(r)}, F_{32}^{(r)}, F_{13}^{(r)}, d, c : r \in \mathbb{Z}\}$ 生成的含幺结合代数, 满足生成关系:*

$$\begin{aligned} &[F_{21}^{(r)}, F_{32}^{(s)}] = \frac{1}{2}F_{13}^{(r+s)}, \quad [F_{32}^{(r)}, F_{13}^{(s)}] = \frac{1}{2}F_{21}^{(r+s)}, \quad [F_{13}^{(r)}, F_{21}^{(s)}] = \frac{1}{2}F_{32}^{(r+s)}, \\ &[F_{21}^{(r)}, F_{21}^{(-r)}] = -\frac{1}{2}rc, \quad [F_{32}^{(r)}, F_{32}^{(-r)}] = -\frac{1}{2}rc, \quad [F_{13}^{(r)}, F_{13}^{(-r)}] = -\frac{1}{2}rc, \\ &[d, F_{21}^{(r)}] = rF_{21}^{(r)}, \qquad [d, F_{32}^{(r)}] = rF_{32}^{(r)}, \qquad [d, F_{13}^{(r)}] = rF_{13}^{(r)}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

其中 $r, s \in \mathbb{Z}$, c 为中心元.

通过构造同构 $\widehat{\phi_\rho^t}$ 的逆, 我们可以找到 $\{ht^r, et^s, ft^k : r, s, k \in \mathbb{Z}\}$ 在上述实现中的对应元素:

$$\widehat{\phi_\rho^t}^{-1}(ht^r) = -4\mathrm{i}F_{32}^{(r)}, \quad \widehat{\phi_\rho^t}^{-1}(et^s) = -2F_{21}^{(s)} - 2\mathrm{i}F_{13}^{(s)}, \quad \widehat{\phi_\rho^t}^{-1}(ft^k) = 2F_{21}^{(k)} - 2\mathrm{i}F_{13}^{(k)}.$$

参考文献

[1] G. Bäuerle, E. Kerf, and A. Kroode. *Lie Algebras: Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics*. Bäuerle, Gerard G.A. Lie algebras. North-Holland, 1990.

[2] J. Brundan and A. S. Kleshchev. Parabolic presentations of the Yangian. *Communications in Mathematical Physics*, 254:191–220, 2004.

[3] R. Carter. *Lie Algebras of Finite and Affine Type*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2005.

[4] V. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 32:254–258, 1985.

[5] V. G. Drinfeld. A new realization of Yangians and quantized affine algebras. *Soviet Mathematics. Doklady*, 32:212–216, 1988.

[6] L. Faddeev, N. Reshetikhin, and L. Takhtajan. Quantization of Lie groups and Lie algebras. In *Algebraic Analysis*, pages 129–139. Academic Press, 1988.

[7] J. Fuchs. *Affine Lie Algebras and Quantum Groups: An Introduction, with Applications in Conformal Field Theory*. Cambridge University Press, 1995.

[8] N. Guay, V. Regelskis, and C. Wendlandt. Equivalences between three presentations of orthogonal and symplectic Yangians. *Letters in Mathematical Physics*, 109:327–379, 2018.

[9] A. Henderson. *Representations of Lie Algebras: An Introduction Through gln*. Australian Mathematical Society Lecture Series. Cambridge University Press, 2012.

[10] J. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.

[11] N. Jing, M. Liu, and A. Molev. Isomorphism between the R-matrix and Drinfeld presentations of Yangian in types B, C and D. *Communications in Mathematical Physics*, 361(3):827–872, 2018.

[12] V. G. Kac. *Infinite-Dimensional Lie Algebras*. Cambridge University Press, 3 edition, 1990.

[13] A. Molev. Yangians and their applications. Handbook of Algebra, pages 907–959. North-Holland, 2003.

[14] A. I. Molev. *Yangians and Classical Lie Algebras*. American Mathematical Society, 2007.

[15] A. Raina, V. Kac, and N. Rozhkovskaya. *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras.* Advanced Series In Mathematical Physics. World Scientific Publishing Company, 2013.

[16] C. Wendlandt. The R-matrix presentation for the Yangian of a simple Lie algebra. *Communications in Mathematical Physics*, 363:289–332, 10 2018.

致谢

首先衷心感谢常智华老师. 真心感谢常老师给予我的教诲, 给我提供了学习的机会. 至今, 老师严谨的治学态度, 授课时的谈笑风生, 修改我的学术文章时的认真细致, 仍然深深刻印在我脑海中, 挥之不去, 难以忘怀. 当我在学术上遇到难题时, 老师总是耐心地为我答疑解惑, 提供优秀的参考资料, 拓展介绍前沿的学术成果. 您传授我的数学专业知识, 让我终身受益.

其次, 感谢帮助我的所有同学, 班长和学习委员为我解答了很多我不熟悉的难题, 很多同学也为我送来相关资料和论文写作技巧, 让我体会到同学之间互帮互助, 团结奋进的真挚友情, 这种温暖、团结、进取的学习气氛, 让我感动, 让我一生铭记。

最后感谢我的家人, 是他们多年来对我学业的支持才让我走到这一步, 才使我得以顺利完成学业.