向量空间与待余除法

黄斌和

2024.11.14

一. 检验下列集合对于运算是否构成向量空间.

1) 次数为 $n(n \geq 1)$ 的多项式构成的集合，多项式之间的加法和数乘运算.

2) 设 A 为一个 n 阶实矩阵, A 的实系数多项式 $f(x)$ 的全体, 对于矩阵加法与数乘运算.

3) $\mathbb{R}^2$ 对于下面定义的运算:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2),$$

$$k \circ (a_1, b_1) = \left(k a_1, k b_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2 \right).$$

4) $\mathbb{R}^{\{*, \star, \#\}} := \{f : \{*, \star, \#\} \to \mathbb{R}\}$, 对于函数加法与数乘运算.

二. 向量空间的直和

1. $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是向量空间 V 的子空间. 证明下列条件等价:

1) $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是直和.

2) 对于每个 $i = 1, 2, \cdots, n$ 均有

$$V_i \cap \left(\sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \neq i}} V_j \right) = \{0\}.$$

3) 对于每个 $i = 2, \cdots, n$ 均有

$$V_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} V_j \right) = \{0\}$$

.

2. 根据有限直和的定义尝试推导无穷直和的定义.

三. 待余除法

1. 对于整数环 Z, 定义映射 $N:\mathbb{Z}\backslash\{0\}\to\mathbb{N}; x\mapsto|x|$. 证明对于任意 $a,b\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$, 存在整数 q,r 使得

$$a=bq+r,$$

而且 $r=0$ 或者 $N(r)<N(b)$.

2. 对于任意整系数多项式环 $\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{N}$, 定义映射 $\deg:\mathbb{Z}[x]\backslash\{0\}; f(x)\mapsto\deg(f)$. 证明对于任意 $f(x),g(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $g(x)\neq 0$, 存在多项式 $q(x),r(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

而且 $r(x)=0$ 或者 $\deg(r)<\deg(g)$.

3. 证明对于高斯整环 $\mathbb{Z}[i]:=\{a+bi:a,b\in\mathbb{Z}\}$, i 为虚数单位. 存在映射 $N:\mathbb{Z}[i]\backslash\{0\}\to\mathbb{N}$ 满足: 对于任意 $a,b\in\mathbb{Z}[i]$, $b\neq 0$, 存在 $q,r\in\mathbb{Z}[x]$ 使得

$$a=qb+r,$$

而且 $r=0$ 或者 $N(r)<N(b)$.