高等代数习题课

艾　2024.10.31

习题 1.2.54. $A=(A_{ij})_{i,j=1}^{3}$，$A_{ij}\in M_n(K)$. 假设 A_{11} 可逆. 求 P, Q 使

$$PAQ=\begin{pmatrix} A_{11} & & \\ & B_{22} & B_{23} \\ & B_{32} & B_{33}\end{pmatrix}$$

解：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{右乘}\begin{pmatrix} I_n & & \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_n & \\ -A_{31}A_{11}^{-1} & 0 & I_n\end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{23} \\ & A_{32}-A_{31}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{33}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{左乘}\begin{pmatrix} I_n & -A_{11}^{-1}A_{12} & -A_{11}^{-1}A_{13} \\ & I_n & \\ & & I_n\end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{23} \\ & A_{32}-A_{31}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{33}\end{pmatrix}$$

故取 $P=\begin{pmatrix} I_n & & \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_n & \\ -A_{31}A_{11}^{-1} & & I_n\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} I_n & -A_{11}^{-1}A_{12} & -A_{11}^{-1}A_{13} \\ & I_n & \\ & & I_n\end{pmatrix}$ 即可

习题 1.2.56. $J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3\end{pmatrix}$，其中 $J_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1\end{pmatrix}$ $J_2=\begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & 1 \\ & & -1\end{pmatrix}$ $J_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2\end{pmatrix}$

求一个五次首一的多项式 $f(X)$，使 $f(J)=0$.

解：$f(J)=\begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & f(J_2) & \\ & & f(J_3)\end{pmatrix}$. 故需找 $f(X)$ 使 $f(J_i)=0$.

$J_1^n=(-1)^n\begin{pmatrix} 1 & -n \\ & 1\end{pmatrix}$，$J_2^n=(-1)^n\begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ & 1 & -n \\ & & 1\end{pmatrix}$，$J_3^n=\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ & 2^n\end{pmatrix}$

令 $f(X)=\sum_{i=0}^{5}a_iX^i$，$a_5=1$.

则有
$$\begin{cases} a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-1=0 \\ a_1-2a_2+3a_3-4a_4+5=0 \\ a_2-3a_3+6a_4-10=0 \\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4+32=0 \\ -a_1-4a_2-12a_3-32a_4-80=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & -32 \\ & 1 & -2 & 3 & -4 & -5 \\ & & 1 & 4 & 12 & -80 \\ & & 1 & -3 & 6 & 10\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 3 & 5 & -11 \\ & & 1 & & 3 & -2 \\ & & & 1 & 2 & -7 \\ & & & & 3 & -3\end{array}\right)$$

$\Rightarrow a_4=-1$，$a_3=-5$，$a_2=1$，$a_1=+8$，$a_0=4$

1.2.60. $A^3=I_n$，计算 $\begin{pmatrix} & -I_n \\ A & \end{pmatrix}^{2000}$，$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A \end{pmatrix}^{2000}$

$$\begin{pmatrix} & -I_n \\ A & \end{pmatrix}^{2000} = \begin{pmatrix} -A & \\ & -A \end{pmatrix}^{1000} = \begin{pmatrix} A^{1000} & \\ & A^{1000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A \end{pmatrix}^{2000} = \begin{pmatrix} A\cos\frac{\pi}{3} & -A\sin\frac{\pi}{3} \\ A\sin\frac{\pi}{3} & A\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}^{2000} = \begin{pmatrix} A^{2000}\cos\frac{2000\pi}{3} & -A^{2000}\sin\frac{2000\pi}{3} \\ A^{2000}\sin\frac{2000\pi}{3} & A^{2000}\cos\frac{2000\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^2\cos\frac{2\pi}{3} & -A^2\sin\frac{2\pi}{3} \\ A^2\sin\frac{2\pi}{3} & A^2\cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A^2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}A^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A^2 & -\frac{1}{2}A^2 \end{pmatrix}$$

1.2.62. $A, B \in M_n(K)$，$M=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$

1) 证：M 可逆 $\Leftrightarrow$ $A+B$ 和 $A-B$ 可逆

2) 当 M 可逆时，求 M^{-1}.

证：1) "$\Rightarrow$" M 可逆，故 $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{pmatrix}M = \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix}$ 可逆.

令后者逆矩阵为 $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$，则 $(A+B)(C_1+C_3)=I_n$

又 $A+B$ 为方阵，故 $A+B$ 可逆

对于 $\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}M$，可得 $A-B$ 可逆

"$\Leftarrow$"

$$M = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \\ \frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & \\ \frac{B-A}{2} & A-B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \\ \frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & \\ & A-B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \\ -\frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{pmatrix}$$

由于 $A+B$，$A-B$ 均可逆，则 $\begin{pmatrix} A+B & \\ & A-B \end{pmatrix}$ 也可逆

（逆矩阵为 $\begin{pmatrix} (A+B)^{-1} & \\ & (A-B)^{-1} \end{pmatrix}$）

且乘积中其余阵均为初等分块矩阵.

故 M 可逆

2) $$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \\ \frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A+B)^{-1} & \\ & (A-B)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \\ -\frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (A+B)^{-1}+(A-B)^{-1} & (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1} \\ (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1} & (A+B)^{-1}+(A-B)^{-1} \end{pmatrix}$$

思考题 2.1. V 是 K^n 的子空间 当且仅当 1. V 是非空集合
2. $\forall u,v\in V$, $\forall \lambda\in K$, $u+\lambda v\in V$.

证: "$\Rightarrow$"
1. $0\in V \Rightarrow V\neq\phi$
2. $\forall v\in V$, $\lambda\in K$, $\left.\begin{matrix}\lambda v\in V\\ u\in V\end{matrix}\right\}\Rightarrow u+\lambda v\in V$

"$\Leftarrow$" 1. $0+\lambda\cdot 0=0\in V$
2. 取 $\lambda=1$, 则有 $\forall u,v\in V$, $u+v\in V$
3. 取 $u=0$, 则有 $\forall \lambda\in K$, $v\in V$, $\lambda v\in V$.

思考题 2.2. 举例: 数目不同, 没有公共向量的两个向量组可能线性等价

$S=\{(1,0),(0,1)\}$, $T=\{(1,1),(1,2),(-1,-2)\}$ $(V=\mathbb{R}^2)$

习题 2.1.1. $\alpha_1=(0,-1,1,1)$, $\alpha_2=(1,-1,1,2)$ $\alpha_3=(0,1,1,2)$
$\alpha_4=(2,2,1,3)$, $\alpha_5=(0,1,-1,-1)$

设 $\beta=(3,1,4,8)$, 判断 β 是否属于 $\mathrm{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_5)$.

解: 令 $\beta=\sum_{i=1}^{5}\lambda_i\alpha_i$, 则有方程组

$$\begin{cases}\lambda_2+2\lambda_4=3\\ -\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+\lambda_5=1\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4-\lambda_5=4\\ \lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4-\lambda_5=8\end{cases}$$

方程组有解 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_5)=(2,1,1,1,1)$

故 $\beta\in\mathrm{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_5)$

习题 2.1.2 (3) $\alpha_1=(1,-1,0,0,0)$, $\alpha_2=(0,1,-1,0,0)$, $\alpha_3=(0,0,1,-1,0)$
$\alpha_4=(0,0,0,1,-1)$, $\alpha_5=(-1,0,0,0,1)$, 它们是否线性无关

解: 由于 $\sum_{i=1}^{5}\alpha_i=0$, 故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 线性相关.

习题 2.1.3. 证明：$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K^n$，

$$\mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathrm{span}(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_3)$$

证：$\forall \alpha \in \mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$\alpha = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \alpha_i$.

故 $\alpha = \frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}{2}(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1}{2}(\alpha_2+\alpha_3) + \frac{\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2}{2}(\alpha_3+\alpha_1)$

$\Rightarrow \alpha \in \mathrm{span}(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1)$

$\forall \alpha \in \mathrm{span}(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1)$，$\alpha = \sum_{i=1}^{3} k_i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_i)$.

则 $\alpha = (k_2+k_3)\alpha_1 + (k_1+k_3)\alpha_2 + (k_1+k_2)\alpha_3 \in \mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

习题 2.1.4. 设 $\{i_1, i_2, \cdots, i_s\}$ 是 $[\![1, n]\!]$ 的真子集，考虑 K^n 中

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in}) \quad i=1,2,\cdots,m$$

现从 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 中去掉第 $i_1, \cdots, i_s$ 个分量，得到一组 K^{n-s} 中的向量组 $\alpha_1', \cdots, \alpha_m'$

1. 证明：若 $\alpha_1', \cdots, \alpha_m'$ 线性无关，则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 也线性无关

2. 若 $\alpha_1', \cdots, \alpha_m'$ 线性相关，是否能判定 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 也线性相关.

证：若存在 $\lambda_i \in K$，$i=1,\cdots,m$，使得 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i = 0$.

则有 $\sum \lambda_i \alpha_i' = 0$。由于 $\{\alpha_i'\}$ 线性无关，$\lambda_i = 0 \ \forall i \in \{1,\cdots,m\}$

故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

不能判定：考虑 $\alpha_1 = (1, 0)$，$\alpha_2 = (1, 1)$.

忽略第2个分量，$\alpha_1' = 1$，$\alpha_2' = 1$ 线性相关

但 α_1, α_2 线性无关

高代习题课

甘 2024.11.7

思考题2.3. 证明：若 $U\subseteq V\subseteq K^n$（子空间），但 $U\neq V$，则 $\dim U<\dim V$

证：由于 U 是 V 的子空间，$\dim U\leq \dim V$.

若 $\dim U=\dim V$，即存在U的极大线性无关组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ $(m=\dim U)$

因为 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 也在 V 中线性无关，故也是 V 中的一组基.

因此 $\forall v\in V$，$\exists\, a_i\in K$，$i=1,\cdots,m$，s.t. $v=\sum_{i=1}^{m}a_i\xi_i$.

$\Rightarrow v\in U\Rightarrow V\subseteq U$ 与 $U\subsetneq V$ 矛盾！

故 $\dim U<\dim V$

思考题2.4. V 是 K^n 的子空间，$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}\subseteq V$. 证下列等价：

(i) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是一组基

(ii) $r=\dim V$ 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

(iii) $r=\dim V$ 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 V 的张成组.

证：(i) $\Rightarrow$ (ii) 由定义，显然.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 若不然，$\exists\, v\in V$，s.t. v 不被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,v$ 是一组线性无关组.

因此 $\dim V\geq r+1$，矛盾！

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 V 的张成组.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则取其极大线性无关组.

不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为极大线性无关组，其中 $s<r$.

则 $\forall v\in V$，v 能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，故能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 于是 $\dim V=s<r$ 矛盾！

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是组基.

习题 1.5. 找极大线性无关组.

3. $\alpha_1=(2,3,1,1)$，$\alpha_2=(4,6,2,2)$ $\alpha_3=(0,1,2,1)$ ， $\alpha_4=(0,-1,-2,-1)$.

解：α_1，α_3 为其极大线性无关组.

习题 1.9. 设 $1\le r<n$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_n$ 的一个极大线性无关组，

令 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ 且 $\alpha=\sum_{i=1}^{r}c_i\alpha_i$，$c_i\in K$ $\forall i$ 且 $\sum_{i=1}^{r}c_i\ne 1$

试求 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_n$ 中的一个极大线性无关组.

解：断言：$\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_r$ 线性无关

证明：若 $\sum_{i=1}^{r}a_i(\alpha-\alpha_i)=0$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}a_i(\alpha-\alpha_i)&=\sum_{i=1}^{r}a_i\Big(\sum_{j=1}^{r}c_j\alpha_j-\alpha_i\Big)\\&=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}(a_ic_j)\alpha_j-\sum_{i=1}^{r}a_i\alpha_i\\&=\sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{r}(a_jc_i)\alpha_i-a_i\alpha_i\Big)\\&=\sum_{i=1}^{r}\Big(\Big(\sum_{j=1}^{r}a_j\Big)c_i-a_i\Big)\alpha_i=0\end{aligned}$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，$\Big(\sum_{j=1}^{r}a_j\Big)c_i=a_i$ $\forall i\in[\![1,r]\!]$

把这些等式相加，$\Big(\sum_{j=1}^{r}a_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r}c_i\Big)=\Big(\sum_{j=1}^{r}a_j\Big)$.

由于 $\sum_{i=1}^{r}c_i\ne 1$，则 $\sum_{j=1}^{r}a_j=0$.

代回原式，则有 $\sum_{i=1}^{r}(-a_i)\alpha_i=0\Rightarrow a_i=0,\ \forall i\in[\![1,r]\!]$

故证毕.

又 $\alpha-\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}c_j\alpha_j-\alpha_i\in\operatorname{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$，$\forall i\in[\![1,r]\!]$

故 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_r$ 是 $\operatorname{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 的一个极大线性无关组，即一组基.

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_r$ 线性表出.

因此 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_r$ 可以线性表出 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_n$.

所以 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_r$ 是一个极大线性无关组.

习题 2.1.11. $r(S)=r$. (若未特殊说明, $r(S)$ 表示 S 的秩)

1) 证明: 若 S_0 是 S 中 r 个向量组成的线性无关组, 则 S_0 是 S 中极大线性无关组.

2) 证明: 若向量组 S' 中每个向量都可由 S 线性表出, 则 S' 的秩 $\le r$.

3) S_1 是 S 中 r 个向量组成的子向量组, 证明: 若 S 中每个向量都可用 S_1 线性表出, 则 S_1 是 S 中的极大无关组.

证: 1) 若 S_0 不是, 则可把 S_0 扩充成一个极大线性无关组.

于是 S 有一个极大线性无关组, 向量数目大于 r. 与 $r(S)=r$ 矛盾.

2) 由题 $span(S') \subseteq span(S)$, 故 $\dim span(S') \le \dim(span(S)) = r$.

因此, $r(S') = \dim span(S') \le r$.

3) 由(1) 若 S_1 线性无关, 则 S_1 是 S 的极大 ⋯.

现考虑若 S_1 线性相关, 则由 $r(S)=r$, 我们可以将 S_1 扩充成 S 的一个极大线性无关组, 设扩充的一个向量为 $\beta \in S$

则有 β 不能被 S_1 表出. 与题设矛盾. 故 S_1 线性无关.

习题 2.1.13. $a_i \in K$ 问, $\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \ne -1$, 则 $\eta_i := (1,\cdots,1)+(0,\cdots,a_i,0,\cdots 0)$ 线性无关.

证: 若 $\sum_{i=1}^{n} b_i \eta_i = 0$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \eta_i = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)(1,\cdots,1) + \sum_{i=1}^{n}(0,\cdots,0,b_i a_i,0,\cdots 0)$$

$$=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i = -b_1 a_1 = -b_2 a_2 = \cdots = -b_n a_n \quad \cdots (*)$$

若 $\sum_{i=1}^{n} b_i \ne 0$, 则 $\frac{1}{a_i} = \frac{-b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{-\sum_{j=1}^{n} b_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j} = -1 \text{. 矛盾!}$$

故 $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$. 代入式 $(*)$, 有 $a_i b_i = 0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.

又 $a_i \ne 0$, $\Rightarrow b_i = 0 \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \Rightarrow$ 线性无关.

思考题2.5. 设 $A\in M_{m\times n}(K)$. A经过有限多次初等行变换变成A', 记 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为A的列向量. $\alpha_1',\cdots,\alpha_n'$为$A'$的列向量.

1) 证明: $\{j_1,\cdots,j_s\}\subseteq[\![1,n]\!]$, $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_s}$线性无关$\Leftrightarrow$ $\alpha_{j_1}',\cdots,\alpha_{j_s}'$线性无关

2) 根据上小题, 给出一个极大无关组的计算方法.

证明: 1) 令 $A'=P_1\cdots P_r\cdot A$, 则有

$$\alpha_{j_i}'=P_1\cdots P_r\alpha_{j_i}$$

故 $\sum a_i\alpha_{j_i}'=0 \Leftrightarrow \sum a_i(P_1\cdots P_r\alpha_{j_i})=P_1P_2\cdots P_r\cdot(\sum a_i\alpha_{j_i})=0$

$\Leftrightarrow \sum a_i\alpha_{j_i}=0$.

故 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_s}$线性无关$\Leftrightarrow$ $\alpha_{j_1}',\cdots,\alpha_{j_s}'$线性无关.

2) 将$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$并成矩阵A, 再将A化为行最简形A'

再选取A'的列向量组的极大无关组 $\alpha_{j_1}',\cdots,\alpha_{j_s}'$

则$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的极大线性无关组为$\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_s}$.

思考题2.6. $A\in M_{m\times n}(K)$. 1. 证: $\mathrm{rank}(A)\le\min\{m,n\}$ (若$\mathrm{rank}(A)=\min\{m,n\}$, 则称$A$满秩)

2. 若$\mathrm{rank}(A)=m$, 则称A行满秩, $\mathrm{rank}A=n$ 则列满秩.

证明: a) A行满秩$\Leftrightarrow$ A有右逆; A列满秩$\Leftrightarrow$$A$有左逆.

b) A方阵, 则A行满秩$\Leftrightarrow$$A$列满秩.

答: 1. $\mathrm{rank}(A)\le m$ 并且 $\mathrm{rank}(A)\le n$ $\Rightarrow$ $\mathrm{rank}(A)\le\min\{m,n\}$

2. • 若A行满秩, 则A的行向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是行空间的一组基. (记$V=\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$)

令 $\varepsilon_i=(0,\cdots,\underset{i}{1},\cdots,0)$ 则ε_i, $i\in[\![1,m]\!]$是K^m空间的一组基.

又 $V\subseteq K^m$, 且 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$与$\{\varepsilon_i: i\in[\![1,m]\!]\}$为数量相同的线性无关组,

故$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$也为空间$K^m$的一组基. 因此 ε_i能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表出.

即存在 $P\in M_{m\times m}(K)$可逆, 使得 $P\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\vdots\\\varepsilon_m\end{pmatrix}=(I_m,0)$

$\Rightarrow A=P^{-1}(I_m,0)\Rightarrow A\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix}=P^{-1}(I_m,0)\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix}=I_m\Rightarrow\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix}$为$A$的右逆.

• 若A有右逆, 由思考题2.5(1), 可得行向量线性无关, 故行满秩.

列的情况可用转置，转化成对行向量的讨论.
故也成立.

(5) A为方阵，由推论 1.2.29.

A有右逆 $\Leftrightarrow$ A有左逆 故 A行满秩 $\Leftrightarrow$ A列满秩.

习题 2.2.2 求矩阵的秩：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解：断言：前 n-1 个行向量线性无关.（记行向量为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$）

若 $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \alpha_i = 0$，令 $\varepsilon_i = (0, \cdots, \overset{i}{1}, 0 \cdots 0)$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \alpha_i = \sum_{i=2}^{n-1} a_i (\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}) + a_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_n)$$

$$= (a_1 + a_2)\varepsilon_1 + (a_2 + a_3)\varepsilon_2 + \cdots + (a_{n-2} + a_{n-1})\varepsilon_{n-2} + a_{n-1}\varepsilon_{n-1} + a_1 \varepsilon_n$$

$$= 0$$

由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关，有

$a_1 = a_{n-1} = 0$，$\Rightarrow$ $a_2 = a_{n-2} = 0 \rightarrow \cdots \Rightarrow a_i = 0$，$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$

故证毕.

由于 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$，故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 是极大线性无关组. 故秩为 n-1.

习题 2.2.3. 根据参数 λ 的取值，讨论矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩的取值.

解. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ 2 & 5 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ & 1 & -1-2\lambda & \lambda+2 \\ & & -3(\lambda-3) & \lambda-3 \end{pmatrix}$

故当 $\lambda \neq 3$，秩为 3，当 $\lambda = 3$，秩为 2.