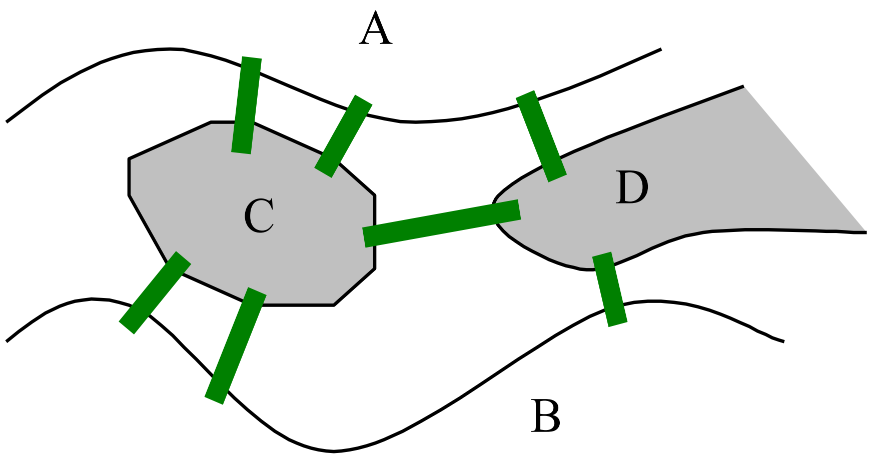
计算机问题求解 -论题 3.6
图的基本概念

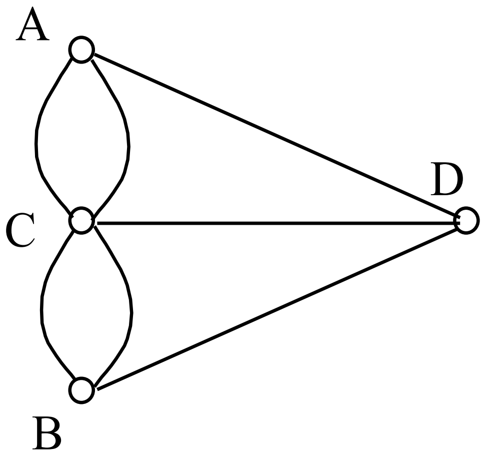
陶先平

2016年9月29日

Königsberg七桥问题

- 问题的抽象：
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”



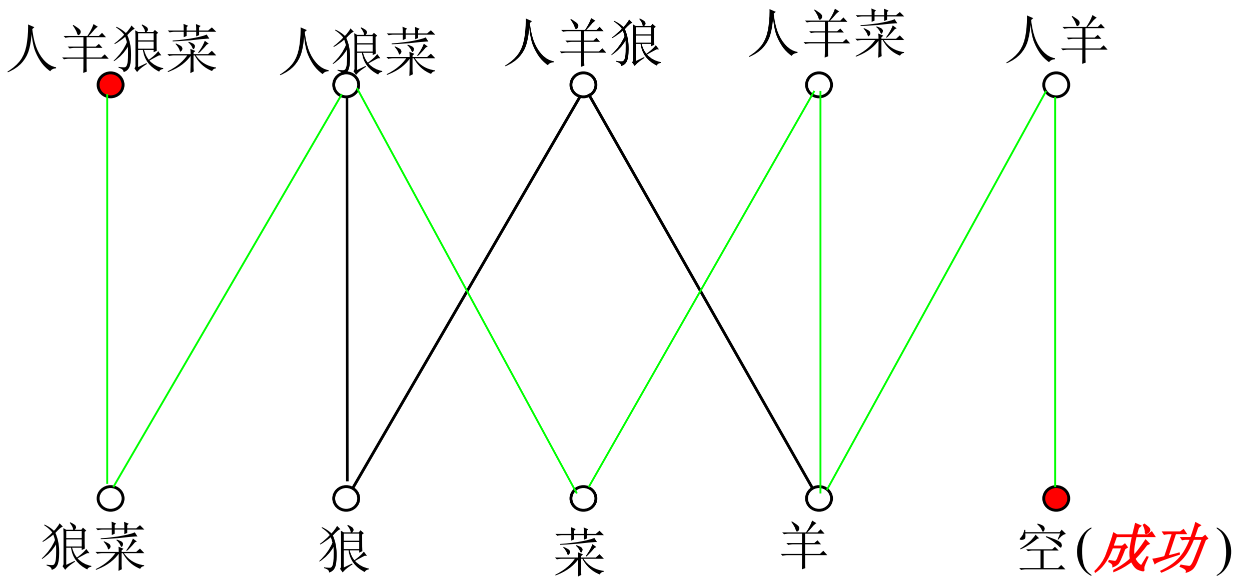


“巧渡河”问题

- 问题：人、狼、羊、菜用一条只能同时载两位的小船渡河，“狼羊”、“羊菜”不能在无人在场时共处，当然只有人能架船。
- 图模型：顶点表示“原岸的状态”，两点之间有边当且仅当一次合理的渡河“操作”能够实现该状态的转变。
- 起始状态是“人狼羊菜”，结束状态是“空”。
- 问题的解：找到一条从起始状态到结束状态的尽可能短的通路。

“巧渡河”问题的解

- 注意：在“人狼羊菜”的16种组合种允许出现的只有10种。



考试时间编排问题

- 问题：排考试时间，一方面要总时间尽可能短(假设教室没问题)，另一方面一个同学所选的任意两门课不能同时间。
- 图模型：每门课程对应一个顶点。任意两点相邻当且仅当对应的两门课程有相同的选课人。
- 解：用不同颜色给顶点着色。相邻的点不能同颜色。则最少着色数即至少需要的考试时间段数(可以将颜色相同的点所对应的课程安排在同一时间)。

如何定义图这个数学概念？

What we have drawn in Figure 1.1 is called a graph. Formally, a **graph** G consists of a finite nonempty set V of objects called **vertices** (the singular is **vertex**) and a set E of 2-element subsets of V called **edges**. The sets V and E are the **vertex set** and **edge set** of G,

$$G = (V, E)$$

$$E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$$

如果要定义有向图？

有向图和无向图之间的本质区别是什么？

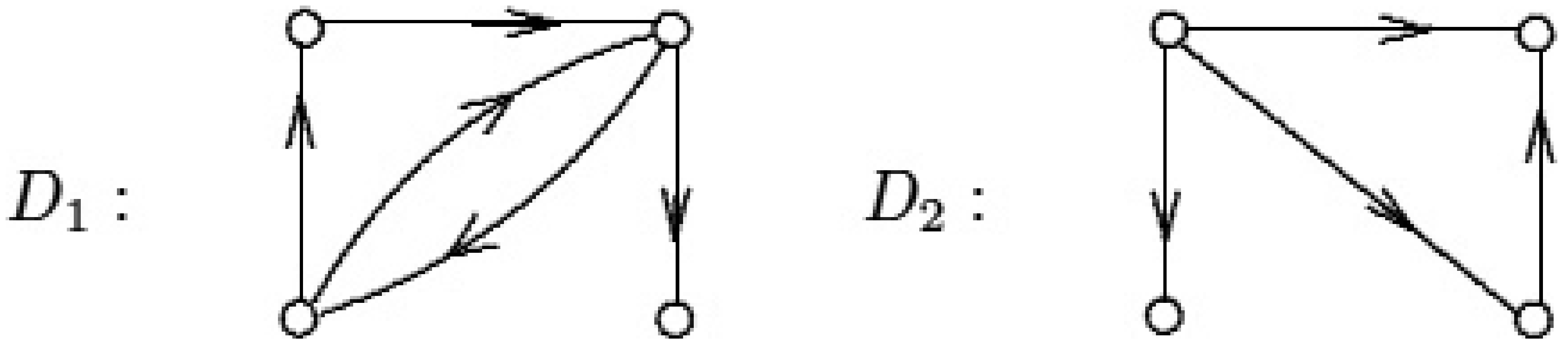


Figure 1.37: Digraphs

无向图是有向图的特殊类，简化表达为无向图

如何用图进行问题建模？

- 构造图节点
  - 确定什么作为图节点？
- 构造图中的边
  - 确定什么作为图中的边？
- 用图中数学语言重述待解问题
  - 从自然语言到形式（数学）语言

Theorem 1.6 *If a graph G contains a $u-v$ walk of length l, then G contains a $u-l$ path of length at most l.*

Proof. Among all $u-v$ walks in G, let

$$P = (u = u_0, u_1, \ldots, u_k = v)$$

be a $u-v$ walk of smallest length k. Therefore, $k \leq l$. We claim that P is a $u-v$ path. Assume, to the contrary, that this is not the case. Then some vertex of G must be repeated in P, say $u_i = u_j$ for some i and j with $0 \leq i < j \leq k$. If we then delete the vertices $u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_j$ from P, we arrive at the $u-v$ walk

$$(u = u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i = u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k = v)$$

whose length is less than k, which is impossible. Therefore, as claimed, P is a $u-v$ path of length $k \leq l$.

∎

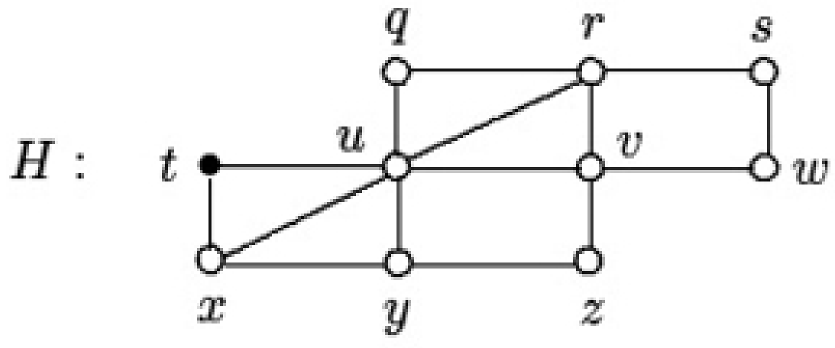
图中定理的证明，多用如此的构造法

图的连通性和牢固程度是图结构的重要特性

Theorem 1.10 *Let G be a graph of order 3 or more. Then G is connected if and only if G contains two distinct vertices u and v such that $G - u$ and $G - v$ are connected.*

这个定理给了你什么直观感觉？

如果需要找到某个点到其它点的距离，你有什么办法？



(a)

Figure 1.19: Distances from a given vertex

如果需要找到某个连通图的直径，你有什么办法？

Theorem 1.12 *A nontrivial graph G is a bipartite graph if and only if G contains no odd cycles.*

直观上看，这个结论是否合理？

- 证明思路：
  - 从任意一点出发，按距离值的奇偶性将节点进行划分；
  - 证明所有的边都跨两个子集
    - 反证法

图中的参数

- 我们讨论一个图的“参数”， 主要目的是什么？你应该记住的参数有哪些？

$$0 \leq \delta(G) \leq \deg v \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$

图第一定理（握手定理）

Theorem 2.1 (The First Theorem of Graph Theory) *If G is a graph of size m, then*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m.$$

图的连通性

- 直觉上，图的连通性和边数(size)有什么关系？
- 随着边数的增长，什么时候，图必定是连通的？
- 当我们将边数转换为点度和时，结论如何？

为什么说这个结论很sharp？

Theorem 2.4 *Let G be a graph of order n. If*

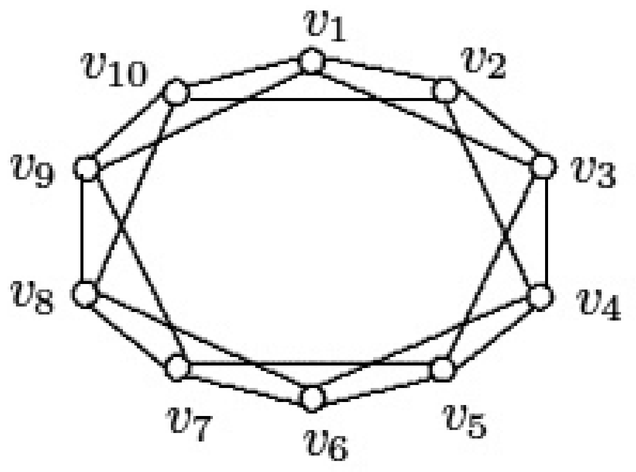
$$\deg u + \deg v \geq n - 1$$

for every two nonadjacent vertices u and v of G, then G is connected and $\operatorname{diam}(G) \leq 2$.

Theorem 2.6 *Let r and n be integers with $0 \le r \le n-1$. There exists an r-regular graph of order n if and only if at least one of r and n is even.*

1，为什么r和n都是奇数时，这个图不可能是r-regular的？

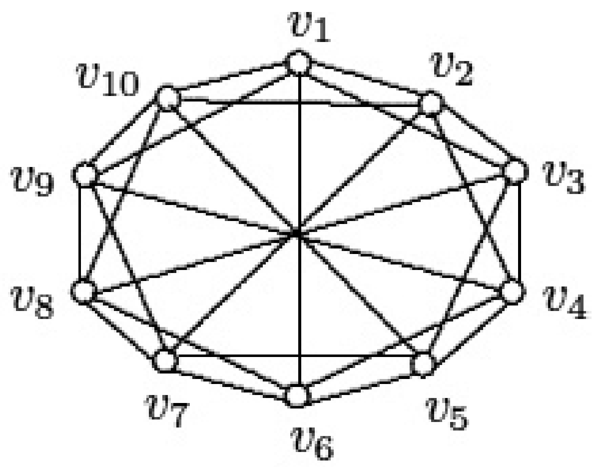
2，当r或者n中有一个为偶数时，构造r-regular图



First, assume that r is even. Then $r = 2k \le n - 1$ for some nonnegative integer $k \le (n-1)/2$. For each i ($1 \le i \le$ n), we join v_i to $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{i+k}$ and to $v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_{i-k}$. If we think of arranging the vertices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ cyclically, then each vertex v_i is adjacent to the k vertices that immediately follow v_i and the k vertices that immediately precede v_i. Thus $H_{r,n}$ is r-regular.

Theorem 2.6 *Let r and n be integers with $0 \le r \le n - 1$. There exists an r-regular graph of order n if and only if at least one of r and n is even.*

Second, assume that r is odd. Then $n = 2l$ is even. Also, $r = 2k + 1 \le n - 1$ for some nonnegative integer $k \le (n - 2)/2$. We join v_i to the $2k$ vertices described above as well as to v_{i+l}. In this case, we again think of arranging the vertices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ cyclically and joining each vertex v_i to the k vertices immediately following it, the k vertices immediately preceding it and the unique vertex "opposite" v_i. Thus $H_{r,n}$ is r-regular. For $r = 5$ and $n =$



为什么一定存在？

度数序列

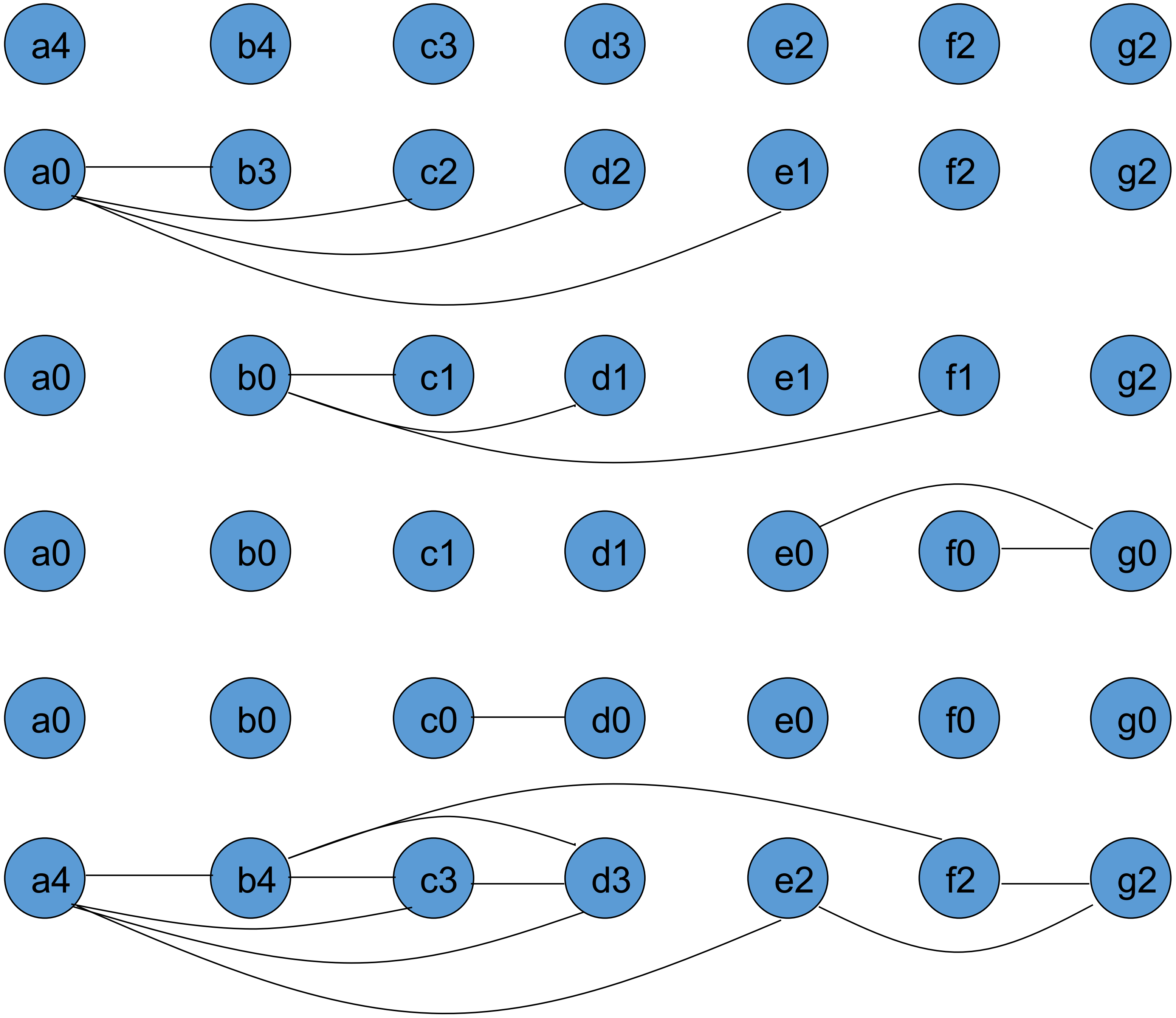
- 图的度数序列及非负整数序列的可图化
  - 非负整数序列($d_1,d_2,...,d_n$)是图的度数序列当且仅当其各项之和为偶数。
    - 必要性显然。
    - 可以用构造法证明充分性

    注意：奇数顶点成对出现。构造图如下：

    奇数顶点两两相连。度数还小于相应的d_i的顶点上加上相应数量的环

度序列可简单图化：

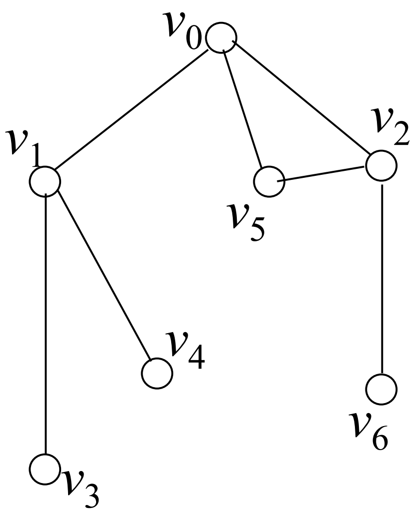
- Havel定理：
  - 度序列排成不增序：$d_1 \geq d_2 >= \ldots >= d_n$，则d可简单图化当且仅当$d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots d_{(d1+1)} - 1, d_{(d1+2)}, d_{(d1+3)}, \ldots d_n)$可简单图化
  - 说明：把d排序以后，找出度最大的点(设度为d_1)，把它和度次大的d_1个点之间连边，然后这个点就可以不管了，一直继续这个过程，直到建出完整的图，或出现负度等明显不合理的情况。


a4 b4 c3 d3 e2 f2 g2
a0 b3 c2 d2 e1 f2 g2
a0 b0 c1 d1 e1 f1 g2
a0 b0 c1 d1 e0 f0 g0
a0 b0 c0 d0 e0 f0 g0
a4 b4 c3 d3 e2 f2 g2

构造法，是利用图论解题时的重要方法！

但是我们必须注意构造过程中的“一般性”

用图中点相邻矩阵表示无向图



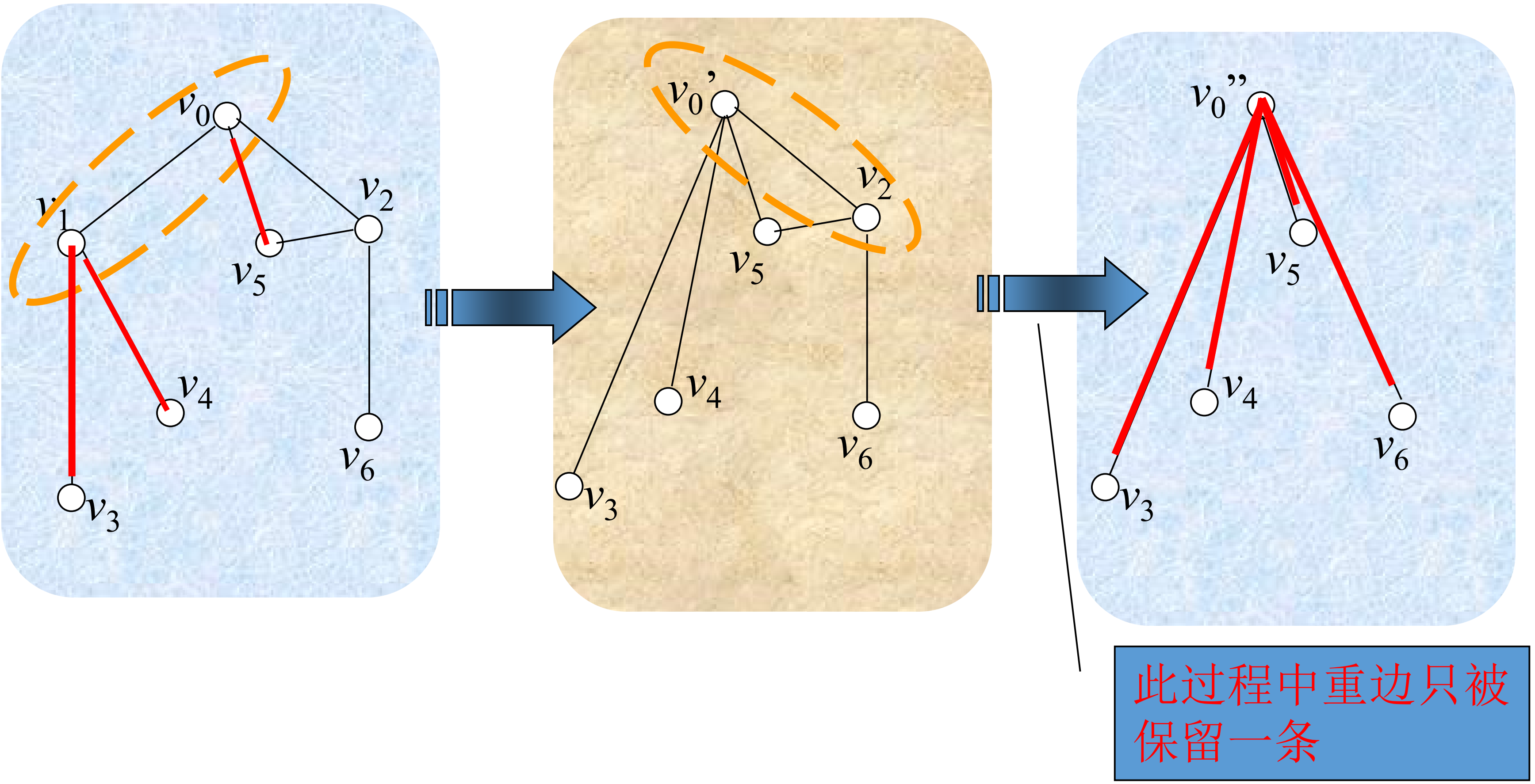
$$
\begin{array}{c}
\\
v_0\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Theorem 2.13 *Let G be a graph with vertex set $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ and adjacency matrix $A = [a_{i\,j}]$. Then the entry $a_{ij}^{(k)}$ in row i and column j of A^k is the number of distinct $v_i - v_j$ walks of length k in G.*

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} a_{tj} = a_{i1}^{(k)} a_{1j} + a_{i2}^{(k)} a_{2j} + \ldots + a_{in}^{(k)} a_{nj}.$$

上式中的每个乘法的结果表示了什么？其中的加法又表示了什么？

Merging Two Vertices



Matrix Operation for Merging

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Merging v_0 and v_1

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_0' & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_0' \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Merging v_0’ and v_2

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_0'' & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_0'' \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Open topics

- 战争时期我们需要将n个通讯基站连接起来以保障通讯安全。为提高安全性，每个基站都有k个对外信道（当敌人破坏其中一条或k-1条时，基站仍能工作）。请你设计基站连接方案，使得整个通讯系统最为坚固。
- 你能写出一个算法，找到一个连通图的直径吗？提示：节点的merge对你可能有帮助