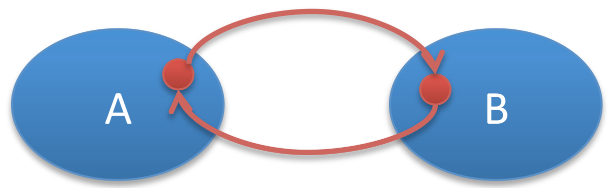
- 作业讲解
  - GC第7.1节练习1、2、4、5
  - GC第7.2节练习9、10、13、14、15

GC第7.1节练习5

7.5 Prove that a nontrivial digraph D is strong if and only if for every edge-cut S of the underlying graph G of D separating $V(G-S)$ into two sets A and B, there is an arc in D directed from A to B and an arc in D directed from B to A.

$\Rightarrow$

- strong → A、B各任取一点，互有通路



$\Leftarrow$

- 反证法：假设not strong → 存在a到b无通路，关键是如何构造A、B？
- 以a及其所有可达点作为A，其余作为B（至少包含b），则A到B无边，矛盾

GC第7.2节练习9

7.9 Prove that a tournament T is transitive if and only if every two vertices of T have distinct outdegrees.

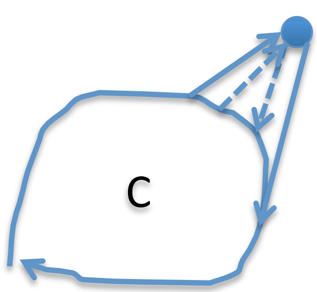
$\Rightarrow$

- 任取一条边(u,v)，则u可达v及v的所有可达点，则od(u)>od(v)，即任意两点出度不同

$\Leftarrow$

- 反证法，由定理7.6，T中包含圈，取最长圈C（设含n个点）
- 圈外任取一点，与圈中所有点之间的边必同向，否则：能造出更长圈，矛盾
- 因此，圈中的边和圈外的点对圈中各点的度贡献相同
- 剩余的边为圈中各点之间的边（扣除圈中的边），共n(n-1)/2-n条，仅靠这些边不足以使圈中各点出度不同，因为至少需要0+1+……+n−1=n(n-1)/2，矛盾

（也可以用数学归纳法）



GC第7.2节练习14

7.14 (a) Show that if an odd number of teams play in a round robin tournament, then it is possible for all teams to tie for first place.

- 造一个竞赛图，包含奇数个顶点，且所有顶点出入度相同
  - 围成圈，每个点指向其余点中顺时针的一半

GC第7.2节练习15

7.15 Prove that if T is a strong tournament of order $n \geq 3$, then T contains a cycle of length k for every integer k with $3 \leq k \leq n$.

- 由以下两个定理，“递归”（数学归纳法）可得：

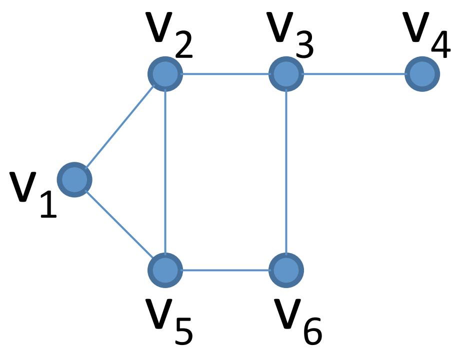
Theorem 7.11 *If T is a strong tournament of order $n \geq 4$, then there exists a vertex v of T such that $T - v$ is a strong tournament.*

Theorem 7.10 *A nontrivial tournament T is Hamiltonian if and only if T is strong.*

- 教材讨论
  - GC第8章第1节
  - GC第9章第1节
  - GC第10章第1、2、3节

问题1：独立、覆盖

- 你理解这些概念了吗？
  - 点独立集、点独立数α
  - 边独立集、边独立数α’
  - 点覆盖集、点覆盖数β
  - 边覆盖集、边覆盖数β’



问题1：独立、覆盖 (续)

- 以下这些图的α、α'、β、β'分别是多少？
  - P_{2n}
  - P_{2n+1}
  - C_{2n}
  - C_{2n+1}
  - K_{2n}
  - K_{2n+1}
  - $K_{m,n}$
  - 树

问题1：独立、覆盖 (续)

- 以下这些图的α、α’、β、β’分别是多少？

– P_{2n}	n	n	n	n
– P_{2n+1}	n+1	n	n	n+1
– C_{2n}	n	n	n	n
– C_{2n+1}	n	n	n+1	n+1
– K_{2n}	1	n	2n-1	n
– K_{2n+1}	1	n	2n	n+1
– $K_{m,n}$	max{m,n}	min{m,n}	min{m,n}	max{m,n}
– 树	≥n/2上取整	?	≤n/2下取整	?

问题1：独立、覆盖 (续)

- 教材上给出了两个等式
  - $\alpha + \beta = n$
  - $\alpha' + \beta' = n$
- 现在，再告诉你三个不等式，你能自己证明吗？（很简单，基于定义）
  - $\alpha' \leq \beta$
  - $\alpha \leq \beta'$
  - $\alpha' \leq \beta'$

问题1：独立、覆盖 (续)

- 教材上给出了两个等式
  - $\alpha+\beta=n$
  - $\alpha'+\beta'=n$
- 现在，再告诉你三个不等式，你能自己证明吗？（很简单，基于定义）
  - $\alpha'\leq\beta$
  - $\alpha\leq\beta'$
  - $\alpha'\leq\beta'$

设G有最小点覆盖集S、最大边独立集M：

- S是点覆盖集 ⇒ M中的每条边至少有一个端点在S中
- M是边独立集 ⇒ M中的每条边的端点互不相同

⇒ $\alpha'(G)=|M|\leq|S|=\beta(G)$

问题1：独立、覆盖 (续)

- 教材上给出了两个等式
  - $\alpha + \beta = n$
  - $\alpha' + \beta' = n$
- 现在，再告诉你三个不等式，你能自己证明吗？（很简单，基于定义）
  - $\alpha' \le \beta$
  - $\alpha \le \beta'$
  - $\alpha' \le \beta'$

最大点独立集I中顶点互不相邻 ⇒ 至少要用|I|=$\alpha(G)$条边才能覆盖I中所有顶点 ⇒ $\beta'(G) \ge \alpha(G)$

问题1：独立、覆盖 (续)

- 教材上给出了两个等式
  - $\alpha + \beta = n$
  - $\alpha' + \beta' = n$
- 现在，再告诉你三个不等式，你能自己证明吗？（很简单，基于定义）
  - $\alpha' \le \beta$
  - $\alpha \le \beta'$
  - $\alpha' \le \beta'$

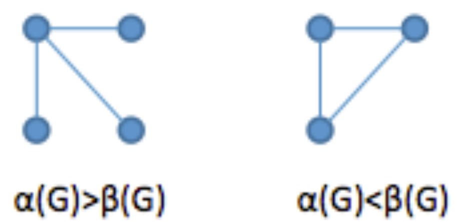
最大边独立集有$\alpha'(G)$条边 $\Rightarrow$ $v(G) \ge 2\alpha'(G)$ $\Rightarrow$ 覆盖$\ge 2\alpha'(G)$个顶点至少需要$\ge \alpha'(G)$条边 $\Rightarrow$ $\beta'(G) \ge \alpha'(G)$

问题1：独立、覆盖 (续)

- 你能给出α和β之间的大小关系吗？

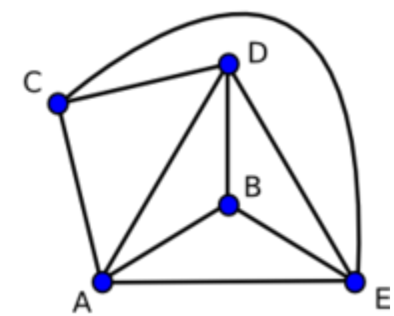
问题1：独立、覆盖 (续)

- 你能给出α和β之间的大小关系吗？



问题2：平面图

- 你理解这些概念了吗？
  - 可平面图 (planar graph)
  - 不可平面图 (nonplanar graph)
  - 平面图 (plane graph)
  - 区域/面 (region/face)
  - 外部区域/无限面/外部面 (exterior region, unbounded/outer face)
  - 边界 (boundary)
- 一些值得你思考的问题
  - 环边和重边对图的可平面性有没有影响？
  - 平面图可以有几个外部区域？
  - 每个非外部区域都可以在另一种画法中成为外部区域，怎么做到？

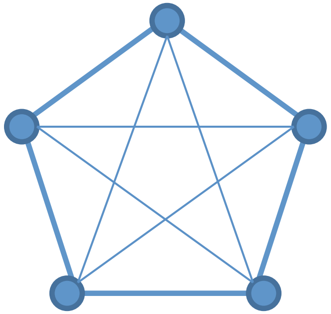


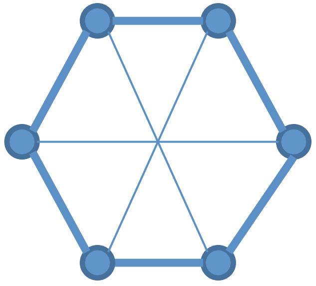
问题2：平面图 (续)

- 以下这些都是可平面图吗？
  如果是，请画出平面图
  如果不是，请说明原因（不需要严格证明）
  - K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6
  - $K_{1,n}$, $K_{2,n}$, $K_{3,n}$

问题2：平面图 (续)

- 以下这些都是可平面图吗？
  如果是，请画出平面图
  如果不是，请说明原因（不需要严格证明）
  - $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$
  - $K_{1,n}, K_{2,n}, K_{3,n}$





问题2：平面图 (续)

- 关于极大可平面图
  - 它的确切定义是什么？
  - 极大可平面图一定连通吗？
  - 极大可平面图可以有割点或割边吗？(当n≥3时)
  - 极大可平面图每个区域的边界有什么特征？

问题2：平面图 (续)

- 教材上给出了欧拉公式
  - n-m+r=2
- 你能将它扩展到非连通图吗？

问题2：平面图 (续)

- 教材上给出了欧拉公式
  - n-m+r=2
- 你能将它扩展到非连通图吗？
  - 设w为连通分支数
  - 则：$2w=\sum(n_i-m_i+r_i)=\sum n_i-\sum m_i+\sum r_i=n-m+r+(w-1)$
    即：n-m+r=w+1

问题3：染色

- 你理解这些概念了吗？
  - 正常染色 (proper coloring)
  - k色可染 (k-colorable)
  - 色数χ (chromatic number)

  - 边正常染色 (proper edge coloring)
  - 边k色可染 (k-edge-colorable)
  - 边色数χ’ (edge chromatic number)

问题3：染色 (续)

- 以下这些图的χ、χ’分别是多少？
  - P_{2n}
  - P_{2n+1}
  - C_{2n}
  - C_{2n+1}
  - K_{2n}
  - K_{2n+1}
  - $K_{m,n}$
  - 树

问题3：染色 (续)

- 以下这些图的χ、χ'分别是多少？
  - P_{2n}
  - P_{2n+1}
  - C_{2n}
  - C_{2n+1}
  - K_{2n}
  - K_{2n+1}
  - $K_{m,n}$
  - 树

P_{2n}	2 (Δ)	2 (Δ)
P_{2n+1}	2 (Δ)	2 (Δ)
C_{2n}	2 (Δ)	2 (Δ)
C_{2n+1}	3 (Δ+1)	3 (Δ+1)
K_{2n}	2n (Δ+1)	2n-1 (Δ)
K_{2n+1}	2n+1 (Δ+1)	2n+1 (Δ+1)
$K_{m,n}$	2	max{m,n} (Δ)
树	2	Δ

问题3：染色 (续)

- 你能证明χ和Δ的这个关系吗？
  - $\chi \leq \Delta + 1$
- 你能基于此给出一种用色较少的染色算法吗？
- 你能不能改进你的算法，使用色更少？

问题3：染色 (续)

- 你能证明χ和Δ的这个关系吗？
  - $\chi \le \Delta+1$
- 你能基于此给出一种用色较少的染色算法吗？
- 你能不能改进你的算法，使用色更少？
  - 顶点按度降序染色

$\chi \le \max_i \min\{deg(v_i)+1, i\} = 1+\max_i \min\{deg(v_i), i-1\} \le 1+\Delta$
并且：初期i较小，后期deg较小

问题3：染色 (续)

- χ、χ’和Δ的关系
  - χ≤Δ+1
    - χ≤Δ（除奇圈和完全图以外的连通简单图）
  - Δ≤χ’≤Δ+1
    - χ’=Δ（第一类图：绝大部分图）
    - χ’=Δ+1（第二类图：奇圈、K_{2n+1}等极少部分图）