- 教材讨论
  - TC第30章

问题1：多项式的表示

- 什么是coefficient representation？
  什么是point-value representation？
- 一个cr可以对应几个pvr？
  一个pvr可以对应几个cr？
  为什么？

问题1：多项式的表示(续)

- 基于这两种表示
  - 以下运算的时间复杂度是多少？
  - 你能基于此对比它们的优劣吗？

	coefficient representation	point-value representation
加法的时间		
乘法的时间		
求值的时间		

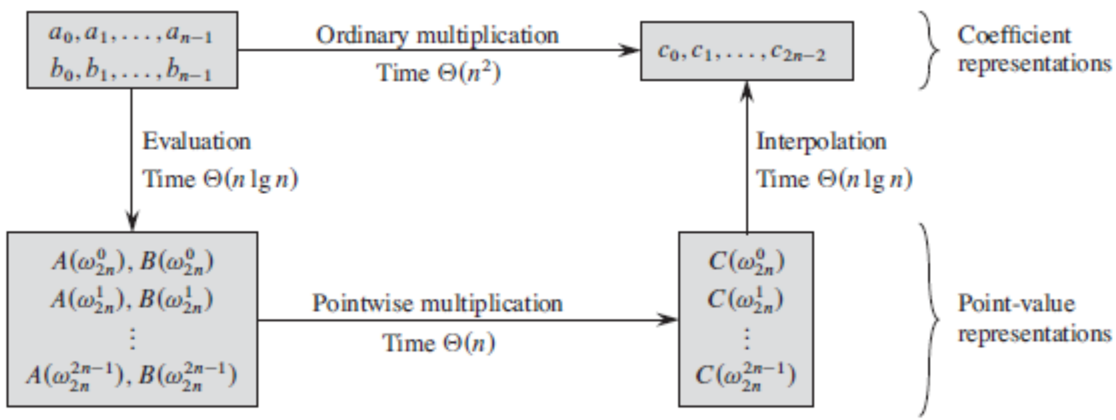
问题1：多项式的表示(续)

- 基于这两种表示
  - 以下运算的时间复杂度是多少？
  - 你能基于此对比它们的优劣吗？

	coefficient representation	point-value representation
加法的时间	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
乘法的时间	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
求值的时间	$\Theta(n)$	？

问题2：表示的转换

- 你理解这个流程了吗？
  - 目的是什么？
  - 手段是什么？



问题2：表示的转换 (续)

- DFT和FFT分别是什么意思？
  它们之间是什么关系？
- 你能阐述FFT的基本思路吗？
  - 目标是求什么？
  - 用什么策略来求？
  - halving lemma在这里起了什么作用？

问题2：表示的转换 (续)

- DFT和FFT分别是什么意思？
  它们之间是什么关系？

$$\begin{aligned} y_k &= A(\omega_n^k) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj} \end{aligned}$$

- 你能阐述FFT的基本思路吗？
  – 目标是求什么？

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \qquad \omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$$

  – 用什么策略来求？

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

$$\begin{aligned} A^{[0]}(x) &= a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{n-2} x^{n/2-1} \\ A^{[1]}(x) &= a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n/2-1} \end{aligned}$$

  – halving lemma在这里起了什么作用？

问题2：表示的转换 (续)

- 递归FFT的运行时间如何递归表示？
- 你还记得怎么解这种递归式吗？

```
RECURSIVE-FFT(a)
n = a.length                    // n is a power of 2
if n == 1
    return a
ω_n = e^{2πi/n}
ω = 1
a^[0] = (a_0, a_2, ..., a_{n-2})
a^[1] = (a_1, a_3, ..., a_{n-1})
y^[0] = RECURSIVE-FFT(a^[0])
y^[1] = RECURSIVE-FFT(a^[1])
for k = 0 to n/2 - 1
    y_k = y_k^[0] + ω y_k^[1]
    y_{k+(n/2)} = y_k^[0] - ω y_k^[1]
    ω = ω ω_n
return y                        // y is assumed to be a column vector
```

问题2：表示的转换 (续)

- 递归FFT的运行时间如何递归表示？
- 你还记得怎么解这种递归式吗？

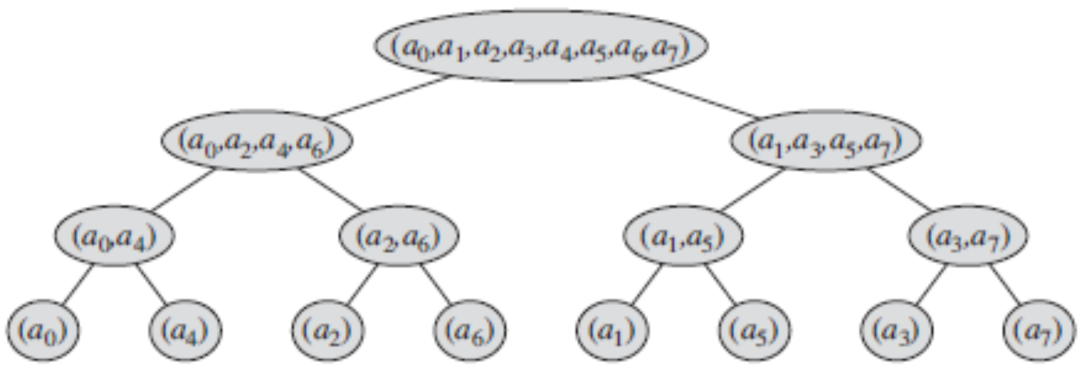
```
RECURSIVE-FFT(a)
n = a.length                // n is a power of 2
if n == 1
    return a
ω_n = e^{2πi/n}
ω = 1
a^[0] = (a_0, a_2, ..., a_{n-2})
a^[1] = (a_1, a_3, ..., a_{n-1})
y^[0] = RECURSIVE-FFT(a^[0])
y^[1] = RECURSIVE-FFT(a^[1])
for k = 0 to n/2 - 1
    y_k = y_k^[0] + ω y_k^[1]
    y_{k+(n/2)} = y_k^[0] - ω y_k^[1]
    ω = ω ω_n
return y                    // y is assumed to be a column vector
```

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

问题2：表示的转换 (续)

- 迭代FFT的基本思路是什么？
- 叶子的顺序是如何确定的？
你能给出直观解释吗？

```
BIT-REVERSE-COPY(a, A)
n = a.length
for k = 0 to n − 1
    A[rev(k)] = a_k
```



问题2：表示的转换 (续)

- 你理解interpolation的高效解法了吗？

$$a_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{-kj}$$

参照

$$\begin{aligned} y_k &= A(\omega_n^k) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj} \end{aligned}$$