

用最大流证明 Hall 定理

Fancy

December 9, 2018

Hall 定理

设 G 为二部图, 其部集为 U 和 W , 且 $r = |U| \leq |W|$.

则 G 包含一个基数为 r 的匹配当且仅当 U 是友好的.

其中友好是指, $\forall X \subseteq U$ 且 $X \neq \emptyset$, 有 $|N(X)| \geq |X|$.

“ \Rightarrow ”

G 包含一个基数为 r 的匹配.

\Downarrow

$\forall X \subseteq U$ 且 $X \neq \emptyset$, 有 $|N(X)| \geq |X|$.

“ \Rightarrow ”

G 包含一个基数为 r 的匹配.

\Downarrow

$\forall X \subseteq U$ 且 $X \neq \emptyset$, 有 $|N(X)| \geq |X|$.

显然.

“ \Leftarrow ”

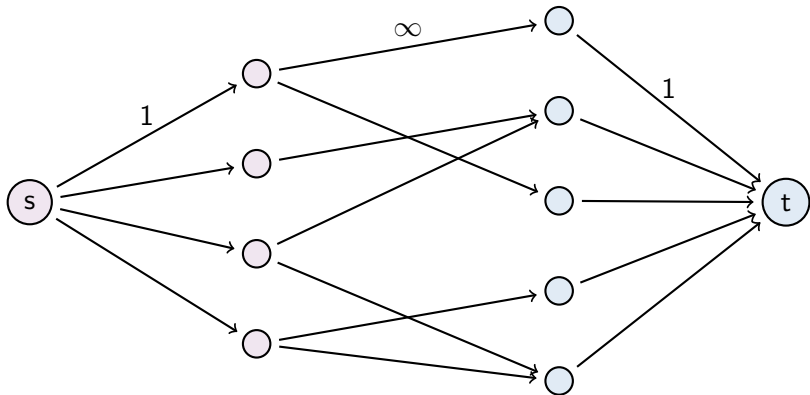
$\forall X \subseteq U$ 且 $X \neq \emptyset$, 有 $|N(X)| \geq |X|$.

\Downarrow

G 包含一个基数为 r 的匹配.

“ \Leftarrow ”

构造图 $G' = (V', E')$, 其中 $V' = V \cup \{s, t\}$,
 $E' = \{(s \xrightarrow{1} u_i) \cup (u_i \xrightarrow{\infty} w_j) \cup (w_j \xrightarrow{1} t)\}$.



“ \Leftarrow ”

G 包含一个基数为 r 的匹配.



G' 的最大流为 r .

“ \Leftarrow ”

G 包含一个基数为 r 的匹配.



G' 的最大流为 r .



$\maxflow(G') \leq r$ 且 $\maxflow(G') \geq r$.

“ \Leftarrow ”

$$\text{maxflow}(G') \geq r.$$



$$\text{mincut}(G') \geq r.$$

“ \Leftarrow ”

$$\text{maxflow}(G') \geq r.$$



$$\text{mincut}(G') \geq r.$$



$$\text{cut}(G') \geq r.$$

“ \Leftarrow ”

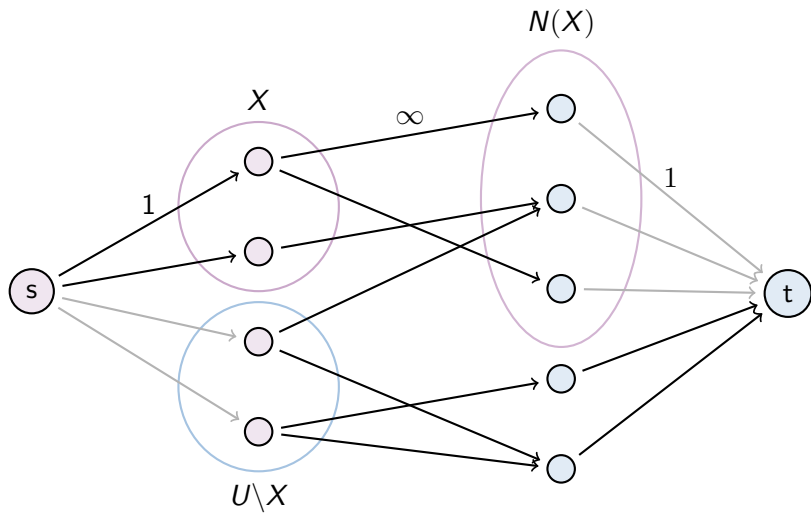
任取 G' 的一个割, 设两个割集为 S 和 T .

设 U 中有 k 个点在 S 中, 不妨设 $X = U \cap S$. 则 U 中有 $|U \setminus X| = r - k$ 个点在 T 中.

中间正无穷的边不会被割开中, 故 $N(X) \subseteq S$.

因此 $|cut(G')| \geq |U \setminus X| + |N(X)| \geq (r - k) + (k) = r$.

“ \Leftarrow ”



证毕

谢谢.