行列式计算

by zyb

2018年12月24日



行列式

行列式 L( ○○ ○

- 1 行列式
  - 行列式
- 2 LUP分解
  - LUP分解

- 3 行列式计算
  - ■高斯消元求行列式
  - LUP分解求行列式
- 4 行列式在图论中的应用
  - 行列式在图论中的应用

●O 行列式

## 行列式

■ 设矩阵
$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

## 行列式

■ 设矩阵
$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$[a_{n,1} \quad a_{n,2} \quad \dots \quad a_{n,n}]$$

$$|A| = \sum_{(p_1,p_2,\dots,p_n)} (-1)^{\tau(p_1,p_2,\dots,p_n)} a_{(1,p_1)} a_{(2,p_2)} \dots a_{(n,p_n)}$$

$$p_1, p_2,\dots,p_n 为 一个排列$$

# 性质

# 性质

- 若 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B, (i \neq j), \quad$ 则|A| = -|B|。
- 若 $A \xrightarrow{k \times r_i + r_j \to r_j} B, (i \neq j), \quad$ 则|A| = |B|。

行列式 性质

0

- $\exists A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B, (i \neq j), \quad \emptyset |A| = -|B|.$
- 若 $A \xrightarrow{k \times r_i + r_j \to r_j} B, (i \neq j), \quad$ 则|A| = |B|。
- 若A为上三角或下三角矩阵,则 $|A| = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$

## 性质

- $\not \equiv A \xrightarrow{k \times r_i + r_j \to r_j} B, (i \neq j), \ \ \emptyset |A| = |B|.$
- 若A为上三角或下三角矩阵,则 $|A| = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$
- $|AB| = |A| \times |B|$

- 1 行列式 ■ 行列式
- 2 LUP分解
  - LUP分解

3 行列式计算

- 高斯消元求行列式
- LUP分解求行列式
- 4 行列式在图论中的应用
  - 行列式在图论中的应用

## LUP分解

■ 对于矩阵A, 它的一个LUP分解即

- 对于矩阵A, 它的一个LUP分解即
- 一个置换矩阵P, 一个单位下三角矩阵L, 一个上三角矩阵U

- 对于矩阵A, 它的一个LUP分解即
- 一个置换矩阵P, 一个单位下三角矩阵L, 一个上三角矩阵U
- 满足 PA = 1 U

## 伪代码

```
LUP-DECOMPOSITION(A)
    n = A.rows
   let \pi[1..n] be a new array
    for i = 1 to n
         \pi[i] = i
    for k = 1 to n
 6
          p = 0
 7
         for i = k to n
 8
              if |a_{ik}| > p
 9
                   p = |a_{ik}|
                   k' = i
10
11
         if p == 0
12
              error "singular matrix"
13
         exchange \pi[k] with \pi[k']
14
         for i = 1 to n
15
              exchange a_{ki} with a_{k'i}
16
         for i = k + 1 to n
17
              a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}
18
              for j = k + 1 to n
19
                   a_{ii} = a_{ii} - a_{ik}a_{ki}
```

- 1 行列式 ■ 行列式
- - LUP分解

3 行列式计算

- 高斯消元求行列式
- LUP分解求行列式
- 4 行列式在图论中的应用
  - 行列式在图论中的应用

高斯消元求行列式

行列式

## 主要思想

■ 根据行列式的性质, 用初等变换把矩阵变成上三角矩阵

行列式计算

**•**0

## 主要思想

■ 根据行列式的性质, 用初等变换把矩阵变成上三角矩阵

行列式计算

■ 上三角矩阵的行列式就等于对角线元素的乘积

#### 代码

```
≡inline double gauss() {
     double ans=1;
     for (int k=1;k<=n;k++) {</pre>
         double p=0:
         for (int i=k;i<=n;i++)
             if (abs(a[i][k])>p) p=abs(a[i][k]),k1=i;
         if(p==0) return 0;
         if (k1!=k) {
             for (int i=1; i <= n; i++) swap(a[k][i],a[k1][i]);
             ans=-1:
         ans*=a[k][k];
         for (int i=k+1;i<=n;i++) {
             double tmp=a[i][k]/a[k][k]:
             a[i][k]=0:
             for_{int_{j=k+1;j<=n;j++)}} a[i][j] = tmp*a[k][i];
     return ans;
```

## 主要思想

■ 对于矩阵A, 求出它的一个LUP分解。

行列式计算

00 •0

LUP分解求行列式

## 主要思想

- 对于矩阵A, 求出它的一个LUP分解。
- $|A| = \frac{|L| \times |U|}{|P|}$

LUP分解求行列式

## 主要思想

■ 对于矩阵A, 求出它的一个LUP分解。

行列式计算

00 •0

- $|A| = \frac{|L| \times |U|}{|P|}$
- 因为L是单位下三角矩阵, 所以|L|=1

## 主要思想

- 对于矩阵A, 求出它的一个LUP分解。
- $|A| = \frac{|L| \times |U|}{|P|}$
- 因为L是单位下三角矩阵,所以|L|=1
- 在LUP分解过程中,如果交换次数为偶数次,则|P|=|I|=1,否则|P|=-|I|=-1

行列式计算

•0

## 代码

```
inline double LUP() {
     double ans=1;
     for (int i=1;i<=n;i++) pi[i]=i;</pre>
     for (int k=1; k<=n; k++) {
         double p=0;
         for (int i=k;i<=n;i++)</pre>
             if (abs(a[i][k])>p) p=abs(a[i][k]),k1=i;
         if(p==0) return 0;
         if (k1!=k) {
             for (int i=1;i<=n;i++) swap(a[k][i],a[k1][i]);
             ans=-1:
             swap(pi[k],pi[k1]);
         ans*=a[k][k];
         for (int i=k+1;i<=n;i++) {</pre>
             double tmp=a[i][k]/a[k][k]:
             a[i][k]=tmp;
             for (int j=k+1; j <= n; j++) a[i][j]-=tmp*a[k][j];
     return ans:
```

- 行列式
   行列式
- 2 LUP分解 ■ LUP分解

- 3 行列式计算
  - ■高斯消元求行列式
  - LUP分解求行列式
- 4 行列式在图论中的应用
  - 行列式在图论中的应用

行列式计算

行列式在图论中的应用

行列式

## 行列式在图论中的应用

■ 求二分图完美匹配个数的奇偶性

行列式在图论中的应用

## 行列式在图论中的应用

- 求二分图完美匹配个数的奇偶性
- 等价于求邻接矩阵行列式的奇偶性

 LUP分解
 行列式计算

 00
 00

 00
 00

行列式在图论中的应用 ○●○○○○

行列式在图论中的应用

## 矩阵树定理

■ 对于无向图G, 求它的生成树个数。

## 矩阵树定理

- 对于无向图G, 求它的生成树个数。
- 对于无向图G,定义矩阵C为它的度数矩阵—邻接矩阵,即对于一条边(u,v),  $C_{u,u}$  + +,  $C_{v,v}$  + +,  $C_{u,v}$  -,  $C_{v,u}$  -

## 矩阵树定理

- 对于无向图G, 求它的生成树个数。
- 对于无向图G,定义矩阵C为它的度数矩阵—邻接矩阵,即对于一条边(u,v),  $C_{u,u}$  + +,  $C_{v,v}$  + +,  $C_{u,v}$  -,  $C_{v,u}$  -

行列式计算

■ 生成树个数等于C的任意一个余子式的绝对值。

行列式在图论中的应用

## 判断图是否存在完美匹配

■ 对于图G, 定义矩阵A(G), 对于G的每一条无向边(u,v), 则 $A(G)_{u,v} = x_{u,v}A(G)_{v,u} = -x_{u,v}$ 

行列式在图论中的应用

## 判断图是否存在完美匹配

■ 对于图G, 定义矩阵A(G), 对于G的每一条无向边(u,v), 则 $A(G)_{u,v} = x_{u,v}A(G)_{v,u} = -x_{u,v}$ 

行列式计算

■ x<sub>u,v</sub>是只与边(u,v)有关的未知数。

## 判断图是否存在完美匹配

■ 对于图G, 定义矩阵A(G), 对于G的每一条无向边(u,v), 则 $A(G)_{u,v} = x_{u,v}A(G)_{v,u} = -x_{u,v}$ 

- x<sub>u,v</sub>是只与边(u,v)有关的未知数。
- 如果 $|A(G)| \equiv 0$ ,则G不存在完美匹配。

行列式在图论中的应用

## 证明

行列式

■ 图G的一个环覆盖是用若干个环去覆盖G的所有节点, 且每 个节点恰好属于一个环

行列式在图论中的应用

## 证明

■ 图G的一个环覆盖是用若干个环去覆盖G的所有节点,且每 个节点恰好属于一个环

行列式计算

■ 图 G的一个偶环覆盖是用若干个长度为偶数的环去覆盖 G的 所有节点,且每个节点恰好属于一个环

■ 图G的一个环覆盖是用若干个环去覆盖G的所有节点、且每 个节点恰好属于一个环

- 图G的一个偶环覆盖是用若干个长度为偶数的环共覆盖G的 所有节点, 且每个节点恰好属于一个环
- G存在一个完美匹配, 当且仅当G存在偶环覆盖:

■ 图G的一个环覆盖是用若干个环去覆盖G的所有节点,且每 个节点恰好属于一个环

- 图 G的一个偶环覆盖是用若干个长度为偶数的环去覆盖 G的 所有节点,且每个节点恰好属于一个环
- G存在一个完美匹配, 当且仅当G存在偶环覆盖:
- => 一个完美匹配相当于用若干个长度为2的偶环覆盖了 所有节点

■ 图G的一个环覆盖是用若干个环去覆盖G的所有节点,且每 个节点恰好属于一个环

- 图 G的一个偶环覆盖是用若干个长度为偶数的环去覆盖 G的 所有节点,且每个节点恰好属于一个环
- G存在一个完美匹配,当且仅当G存在偶环覆盖:
- => 一个完美匹配相当于用若干个长度为2的偶环覆盖了 所有节点
- <= 如果存在一个偶环覆盖,对于每一个偶环,取出 第1,3,...,2k-1条边,这些边构成了一个完美匹配。

行列式在图论中的应用

## 证明

行列式

■ 设点数为n, n的任意一个排列P, 都相当于一个G的一个环 覆盖

行列式在图论中的应用

## 证明

■ 设点数为n, n的任意一个排列P, 都相当于一个G的一个环 覆盖

行列式计算

■ 如果(i, P<sub>i</sub>)这条边不存在,则对行列式的贡献为0

■ 设点数为n, n的任意一个排列P, 都相当于一个G的一个环 覆盖

- 如果(i, P<sub>i</sub>)这条边不存在,则对行列式的贡献为0
- 如果这个环覆盖中存在一个奇环,则对行列式的贡献为0

■ 设点数为n, n的任意一个排列P, 都相当于一个G的一个环 覆盖

- 如果(i, Pi)这条边不存在,则对行列式的贡献为0
- 如果这个环覆盖中存在一个奇环,则对行列式的贡献为0
- 如果 $|A(G)| \equiv 0$ ,则说明不存在偶环覆盖,即不存在完美匹配

 LUP分解
 行列式计算

 00
 00

行列式在图论中的应用

## 做法

■ |A(G)|是一个多项式,取值与所有的xu,v有关

- |A(G)|是一个多项式,取值与所有的x<sub>u,v</sub>有关
- 考虑随机化,对所有的未知数随机赋值,在一个大质数模域 下判断行列式是否等于()

## 做法

- |A(G)|是一个多项式,取值与所有的xu,v有关
- 考虑随机化,对所有的未知数随机赋值,在一个大质数模域 下判断行列式是否等于0

行列式计算

■ 若每次随机,得到的行列式均为0,则可以认为 $|A(G)| \equiv 0$