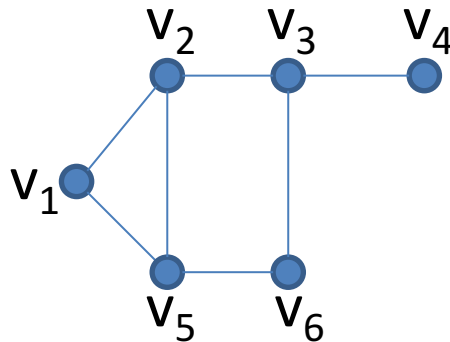


- 教材讨论
 - GC第8章第1节
 - GC第9章第1节
 - GC第10章第1、2、3节

问题1：独立、覆盖

- 你理解这些概念了吗？
 - 点独立集、点独立数 α
 - 边独立集、边独立数 α'
 - 点覆盖集、点覆盖数 β
 - 边覆盖集、边覆盖数 β'



问题1：独立、覆盖 (续)

- 以下这些图的 α 、 α' 、 β 、 β' 分别是多少？
 - P_{2n}
 - P_{2n+1}
 - C_{2n}
 - C_{2n+1}
 - K_{2n}
 - K_{2n+1}
 - $K_{m,n}$
 - 树

问题1：独立、覆盖 (续)

- 以下这些图的 α 、 α' 、 β 、 β' 分别是多少？

– P_{2n}	n	n	n	n
– P_{2n+1}	$n+1$	n	n	$n+1$
– C_{2n}	n	n	n	n
– C_{2n+1}	n	n	$n+1$	$n+1$
– K_{2n}	1	n	$2n-1$	n
– K_{2n+1}	1	n	$2n$	$n+1$
– $K_{m,n}$	$\max\{m,n\}$	$\min\{m,n\}$	$\min\{m,n\}$	$\max\{m,n\}$
– 树	$\geq n/2$ 上取整	?	$\leq n/2$ 下取整	?

问题1：独立、覆盖 (续)

- 教材上给出了两个等式
 - $\alpha + \beta = n$
 - $\alpha' + \beta' = n$
- 现在，再告诉你三个不等式，你能自己证明吗？（很简单，基于定义）
 - $\alpha' \leq \beta$
 - $\alpha \leq \beta'$
 - $\alpha' \leq \beta'$

问题1：独立、覆盖 (续)

- 教材上给出了两个等式
 - $\alpha + \beta = n$
 - $\alpha' + \beta' = n$
- 现在，再告诉你三个不等式，你能自己证明吗？（很简单，基于定义）
 - $\alpha' \leq \beta$
 - $\alpha \leq \beta'$
 - $\alpha' \leq \beta'$

设 G 有最小点覆盖集 S 、最大边独立集 M ：

- S 是点覆盖集 $\Rightarrow M$ 中的每条边至少有一个端点在 S 中
- M 是边独立集 $\Rightarrow M$ 中的每条边的端点互不相同

$$\Rightarrow \alpha'(G) = |M| \leq |S| = \beta(G)$$

问题1：独立、覆盖 (续)

- 教材上给出了两个等式
 - $-\alpha + \beta = n$
 - $-\alpha' + \beta' = n$
- 现在，再告诉你三个不等式，你能自己证明吗？（很简单，基于定义）
 - $-\alpha' \leq \beta$
 - $-\alpha \leq \beta'$
 - $-\alpha' \leq \beta'$

最大点独立集 I 中顶点互不相邻 \Rightarrow 至少要用 $|I|=\alpha(G)$ 条边才能覆盖 I 中所有顶点 $\Rightarrow \beta'(G) \geq \alpha(G)$

问题1：独立、覆盖 (续)

- 教材上给出了两个等式
 - $\alpha + \beta = n$
 - $\alpha' + \beta' = n$
- 现在，再告诉你三个不等式，你能自己证明吗？（很简单，基于定义）
 - $\alpha' \leq \beta$
 - $\alpha \leq \beta'$
 - $\alpha' \leq \beta'$

最大边独立集有 $\alpha'(G)$ 条边 $\Rightarrow v(G) \geq 2\alpha'(G) \Rightarrow$ 覆盖 $\geq 2\alpha'(G)$ 个顶点
至少需要 $\geq \alpha'(G)$ 条边 $\Rightarrow \beta'(G) \geq \alpha'(G)$

问题1：独立、覆盖 (续)

- 你能给出 α 和 β 之间的大小关系吗？

问题1：独立、覆盖 (续)

- 你能给出 α 和 β 之间的大小关系吗？



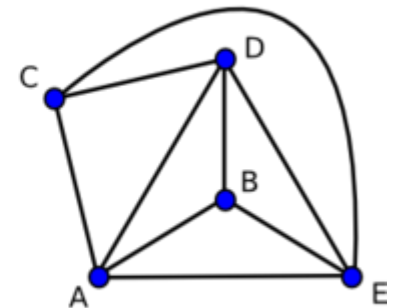
$$\alpha(G) > \beta(G)$$



$$\alpha(G) < \beta(G)$$

问题2：平面图

- 你理解这些概念了吗？
 - 可平面图 (planar graph)
 - 不可平面图 (nonplanar graph)
 - 平面图 (plane graph)
 - 区域/面 (region/face)
 - 外部区域/无限面/外部面 (exterior region, unbounded/outer face)
 - 边界 (boundary)
- 一些值得你思考的问题
 - 环边和重边对图的可平面性有没有影响？
 - 平面图可以有几个外部区域？
 - 每个非外部区域都可以在另一种画法中成为外部区域，怎么做到？

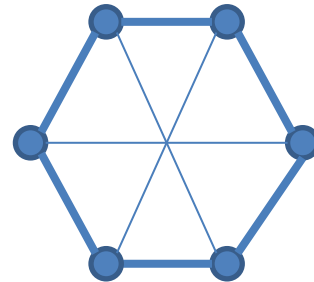
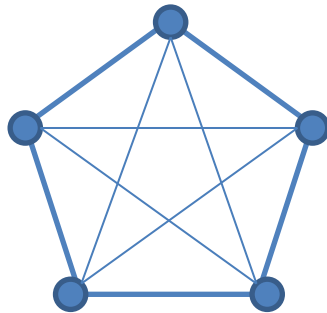


问题2：平面图 (续)

- 以下这些都是可平面图吗？
如果是，请画出平面图
如果不是，请说明原因（不需要严格证明）
 - $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$
 - $K_{1,n}, K_{2,n}, K_{3,n}$

问题2：平面图 (续)

- 以下这些都是可平面图吗？
如果是，请画出平面图
如果不是，请说明原因（不需要严格证明）
 - $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$
 - $K_{1,n}, K_{2,n}, K_{3,n}$



问题2：平面图 (续)

- 关于极大可平面图
 - 它的确切定义是什么？
 - 极大可平面图一定连通吗？
 - 极大可平面图可以有割点或割边吗？(当 $n \geq 3$ 时)
 - 极大可平面图每个区域的边界有什么特征？

问题2：平面图 (续)

- 教材上给出了欧拉公式
 - $n-m+r=2$
- 你能将它扩展到非连通图吗？

问题2：平面图 (续)

- 教材上给出了欧拉公式
 - $n-m+r=2$
- 你能将它扩展到非连通图吗？
 - 设 w 为连通分支数
 - 则： $2w=\sum(n_i-m_i+r_i)=\sum n_i-\sum m_i+\sum r_i=n-m+r+(w-1)$
即： $n-m+r=w+1$

问题3： 染色

- 你理解这些概念了吗？
 - 正常染色 (proper coloring)
 - k 色可染 (k -colorable)
 - 色数 χ (chromatic number)
 - 边正常染色 (proper edge coloring)
 - 边 k 色可染 (k -edge-colorable)
 - 边色数 χ' (edge chromatic number)

问题3：染色 (续)

- 以下这些图的 χ 、 χ' 分别是多少？
 - P_{2n}
 - P_{2n+1}
 - C_{2n}
 - C_{2n+1}
 - K_{2n}
 - K_{2n+1}
 - $K_{m,n}$
 - 树

问题3： 染色 (续)

- 以下这些图的 χ 、 χ' 分别是多少？

– P_{2n}	2 (Δ)	2 (Δ)
– P_{2n+1}	2 (Δ)	2 (Δ)
– C_{2n}	2 (Δ)	2 (Δ)
– C_{2n+1}	3 ($\Delta+1$)	3 ($\Delta+1$)
– K_{2n}	$2n$ ($\Delta+1$)	$2n-1$ (Δ)
– K_{2n+1}	$2n+1$ ($\Delta+1$)	$2n+1$ ($\Delta+1$)
– $K_{m,n}$	2	$\max\{m,n\}$ (Δ)
– 树	2	Δ

问题3：染色 (续)

- 你能证明 χ 和 Δ 的这个关系吗？
 - $\chi \leq \Delta + 1$
- 你能基于此给出一种用色较少的染色算法吗？
- 你能不能改进你的算法，使用色更少？

问题3：染色 (续)

- 你能证明 χ 和 Δ 的这个关系吗？
 - $\chi \leq \Delta + 1$
- 你能基于此给出一种用色较少的染色算法吗？
- 你能不能改进你的算法，使用色更少？
 - 顶点按度降序染色

$$\chi \leq \max_i \min\{\deg(v_i) + 1, i\} = 1 + \max_i \min\{\deg(v_i), i - 1\} \leq 1 + \Delta$$

并且：初期 i 较小，后期 \deg 较小

问题3：染色 (续)

- χ 、 χ' 和 Δ 的关系
 - $\chi \leq \Delta + 1$
 - $\chi \leq \Delta$ (除奇圈和完全图以外的连通简单图)
 - $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$
 - $\chi' = \Delta$ (第一类图：绝大部分图)
 - $\chi' = \Delta + 1$ (第二类图：奇圈、 K_{2n+1} 等极少部分图)