- 书面作业讲解
  - TJ第3章练习3、6、7、17、28、36、38、41、48、52
  - TJ第4章练习1、12、21、24、32
  - TJ第5章练习3、5、16、27、29
  - TJ第6章练习11、12、16、21
  - TJ第9章练习6、7、8、9

TJ第3章练习7

- 阿贝尔群应满足几个条件？
  - 运算封闭
  - 结合律、单位元、逆元
    - 证明单位元和逆元时，左、右运算都要证明
    - 严格来说，还要先说明单位元和逆元也在集合中
  - 交换律

TJ第3章练习36

- 证明子群的几种方法
  - 子集 & 群
  - 命题3.9
  - 命题3.10

TJ第4章练习1(e)

- G中不可能存在阶为无穷的元素a，否则a的每个正次幂都不相等，则存在$<a^1>$、$<a^2>$……无穷多个子群，矛盾。
  因此，G中每个元素都是有穷阶，而如果G有无穷多个元素，那么必然存在<a>、<b>……无穷多个子群（因为每个都只包含有穷多个元素），矛盾。

TJ第4章练习12

- How about n generators?
  - 利用推论4.7

In number theory, Euler's totient function (or Euler's phi function), denoted as $\varphi(n)$ or $\phi(n)$, is an arithmetic function that counts the positive integers less than or equal to n that are relatively prime to n. (These integers are sometimes referred to as totatives of n.) Thus, if n is a positive integer, then $\varphi(n)$ is the number of integers k in the range $1 \le k \le n$ for which the greatest common divisor $\gcd(n, k) = 1$.[1][2]

$\varphi(n)$ is even for $n \geq 3$.

TJ第4章练习24

- pq以内与pq互质的数：(p-1)(q-1)
  - 解法1：$\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n)$
  - 解法2：去掉p的倍数、q的倍数、0
    pq-(p-1)-(q-1)-1=pq-p-q+1=(p-1)(q-1)

TJ第4章练习32

- 由定理4.6：y的阶是n/1=n。
  而阶为n的元素一定是generator。

TJ第5章练习5

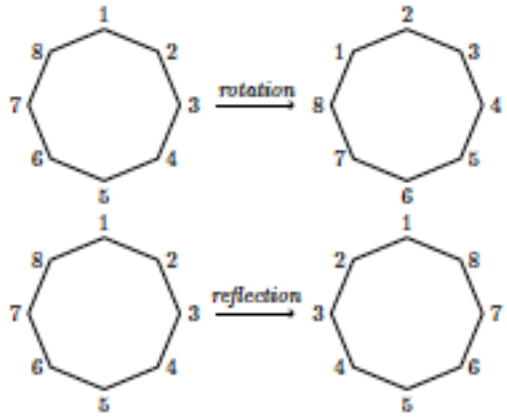

24
S_4
12
A_4
8
<(1 2 3 4),(1 3)>
<(1 2 4 3),(1 4)>
<(1 3 2 4),(1 2)>
6
<(1 2 3),(1 2)>
<(1 2 4),(1 2)>
<(1 3 4),(1 3)>
<(2 3 4),(2 3)>
<(1 2 3 4)>
<(1 2 4 3)>
<(1 3 2 4)>
4
<(1 3),(2 4)>
<(1 4),(2 3)>
<(1 2),(3 4)>
<(1 2)(3 4),(1 3)(2 4)>
3
<(1 2 3)>
<(1 2 4)>
<(1 3 4)>
<(2 3 4)>
<(1 3)(2 4)>
<(1 4)(2 3)>
<(1 2)(3 4)>
2
<(1 2)>
<(1 3)>
<(2 3)>
<(1 4)>
<(2 4)>
<(3 4)>
1
<e>

TJ第5章练习29

Recall that the ***center*** of a group G is

$$Z(G) = \{g \in G : gx = xg \text{ for all } x \in G\}.$$

Find the center of D_8. What about the center of D_{10}? What is the center of D_n?



- Dn中的元素
  - rotation: $r^1, r^2, \ldots, r^n=id$
  - reflection: $s, r^1s, r^2s, \ldots, r^{n-1}s$

- rotation之间总是可交换的
- 如果center包括rotation r^i，则它和reflection r^js可交换表明：
  - $\underline{r^ir^j}s=r^jsr^i=r^jsr^iss=r^j(sr^is)s=r^j(srs)^is=\underline{r^jr^i}s$ → $i+j=_nj-i$ → $2i=_n0$ → $i=0$（即id）或n为偶数且$i=n/2$（即$r^{n/2}$）
- 如果center包括reflection r^is，则它和reflection r^js可交换表明：
  - $r^isr^js=r^jsr^is$ → $2i=_n2j$
    并不能和任意r^js可交换

TJ第6章练习16

- g的order为2：gg=e，即g是自己的逆元。
  除了order为2的元素以外，只有e是自己的逆元。
  剩余元素都不是自己的逆元：成对出现。
  而|G|=2n，所以order为2的元素必为奇数个。

- 任取一个order为2的元素，与e构成order为2的子群。

TJ第6章练习21

- 如果直接用Sylow第一定理，这题就失去意义了。

- 任取元素a（非单位元），由推论6.6：a的order为$p^k(1\le k\le n)$。
  取b = a的p^{k-1}次幂：$b^p=e$，因此b的order为p（不可能再小了，因为必须是p的幂）。
  由b可以生成一个p阶循环子群。

- 教材讨论
  - TJ第2章
  - CS第2章第2节

问题1：数学归纳法和良序原理

- 什么是良序原理？
- 你有哪些手段证明“对于任意自然数n，某命题都成立”？

- 你能用其中某种方法证明莱曼引理吗？
  $8a^4+4b^4+2c^4=d^4$没有正整数解

问题1：数学归纳法和良序原理

- 什么是良序原理？
- 你有哪些手段证明“对于任意自然数n，某命题都成立”？
  - 数学归纳法
  - 良序原理（反证法：不成立的那些自然数的集合没有最小元）
- 你能用其中某种方法证明莱曼引理吗？
  $8a^4+4b^4+2c^4=d^4$没有正整数解

问题1：数学归纳法和良序原理

- 什么是良序原理？
- 你有哪些手段证明“对于任意自然数n，某命题都成立”？
  - 数学归纳法
  - 良序原理（反证法：不成立的那些自然数的集合没有最小元）
- 你能用其中某种方法证明莱曼引理吗？
  $8a^4+4b^4+2c^4=d^4$没有正整数解

假设所有解中，(a,b,c,d)使abcd最小
发现d是偶数，将$d=2d'$代入：$4a^4+2b^4+c^4=8d'^4$
发现c是偶数，将$c=2c'$代入：$2a^4+b^4+8c'^4=4d'^4$
发现b是偶数，将$b=2b'$代入：$a^4+8b'^4+4c'^4=2d'^4$
发现a是偶数，将$a=2a'$代入：$8a'^4+4b'^4+2c'^4=d'^4$
找到了新的解(a',b',c',d')且$a'b'c'd'<abcd$，矛盾

问题2：逆元、最大公约数、质数

Given an element b in Z_n, what can you say in general about the possible number of elements a such that $a \cdot_n b = 1$ in Z_n?

问题2：逆元、最大公约数、质数

Given an element b in Z_n, what can you say in general about the possible number of elements a such that $a \cdot_n b = 1$ in Z_n?

- 如果gcd(b,n)>1：找不到a
- 如果gcd(b,n)=1：有且只有一个a

Theorem 2.7 *If an element of Z_n has a multiplicative inverse, then it has exactly one inverse.*

Theorem 2.9 *A number a has a multiplicative inverse in Z_n if and only if there are integers x and y such that $ax + ny = 1$.*

Lemma 2.11 *Given a and n, if there exist integers x and y such that $ax + ny = 1$ then $\gcd(a, n) = 1$.*

问题2：逆元、最大公约数、质数 (续)

Either find an equation of the form $a \cdot_n x = b$ in Z_n that has a unique solution even though a and n are not relatively prime, or prove that no such equation exists. In other words, you are either to prove the statement that if $a \cdot_n x = b$ has a unique solution in Z_n, then a and n are relatively prime or to find a counter example.

问题2：逆元、最大公约数、质数 (续)

Either find an equation of the form $a \cdot_n x = b$ in Z_n that has a unique solution even though a and n are not relatively prime, or prove that no such equation exists. In other words, you are either to prove the statement that if $a \cdot_n x = b$ has a unique solution in Z_n, then a and n are relatively prime or to find a counter example.

- 如果gcd(a,n)=g>1
  - 如果g|b
    - $a \cdot_n x = b$有g个解α、α+n/g、α+2n/g……
      其中，α是$(a/g) \cdot_{n/g} x = (b/g)$的唯一解
      因为$(a/g) \cdot_{n/g} x = (b/g)$的解也是原方程的解
  - 否则
    - 很容易验证无解

问题3：欧氏算法

- 辗转相除法和这个引理之间有什么关系？

Lemma 2.13 *If j, k, q, and r are positive integers such that $k = jq + r$ then* $\gcd(j,k) = \gcd(r,j)$

- 辗转相除法的迭代计算到什么时候终止？
- 请使用辗转相除法计算gcd(210,126)，并求出一组r和s使得210r+126s=gcd(210,126)

问题3：欧氏算法

- 辗转相除法和这个引理之间有什么关系？

Lemma 2.13 *If j, k, q, and r are positive integers such that $k = jq + r$ then* $\gcd(j,k) = \gcd(r,j)$

- 辗转相除法的迭代计算到什么时候终止？
- 请使用辗转相除法计算gcd(210,126)，并求出一组r和s使得210r+126s=gcd(210,126)

$$
\begin{aligned}
2415 &= 945 \cdot 2 + 525 \\
945 &= 525 \cdot 1 + 420 \\
525 &= 420 \cdot 1 + 105 \\
420 &= 105 \cdot 4 + 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
105 &= 525 + (-1) \cdot 420 \\
&= 525 + (-1) \cdot [945 + (-1) \cdot 525] \\
&= 2 \cdot 525 + (-1) \cdot 945 \\
&= 2 \cdot [2415 + (-2) \cdot 945] + (-1) \cdot 945 \\
&= 2 \cdot 2415 + (-5) \cdot 945.
\end{aligned}
$$