- 作业讲解
  - TJ第7章练习3、7、9、12
  - TC第31.7节练习1、2
  - TC第31章问题2、3

TC第31.7节练习2

- $0<d<\phi(n) \rightarrow 0<ed<e\phi(n)=3\phi(n) \rightarrow 0<ed=k\phi(n)+1<3\phi(n)$ $\rightarrow k=0, 1, 2 \rightarrow \phi(n)$至多有三个可能解
- $(p-1)(q-1)=\phi(n) \rightarrow pq-(p+q)+1=\phi(n) \rightarrow p+q=n+1-\phi(n)$
- 再由$pq=n \rightarrow p, q$是$x^2-(n+1-\phi(n))x+n=0$的两个根 → 求根公式（逐一尝试$\phi(n)$的可能解，直至找到p, q的整数可行解）

- 以上每一步都可在n的位数的多项式时间内完成

TC第31章问题2b

- $a = bq+r \rightarrow a \geq bq \rightarrow \lg a \geq \lg b+\lg q \rightarrow$
- $\mu(a,b) = (1+\lg a)(1+\lg b) \geq (1+\lg b+\lg q)(1+\lg b) \geq (1+\lg b)^2+\lg q(1+\lg b) \rightarrow \lg q(1+\lg b) \leq \mu(a,b)-(1+\lg b)^2 \leq \mu(a,b)-(1+\lg b)(1+\lg r) = \mu(a,b)-\mu(b,r) = \mu(a,b)-\mu(b,a \bmod b)$

- 还需证明$O(\lg q(1+\lg b)) \subseteq O(\lg b(1+\lg q))$
  - 实际上，$\lg q(1+\lg b), \lg b(1+\lg q) \in \Theta(\lg b \lg q)$

TC第31章问题3d

- 加法$\Theta(\beta)$，乘法$\Theta(\beta^2)$
  - 方法1：2^n次加法
  - 方法2：n次加法
  - 方法3：lgn次（矩阵）乘法 + lgn次（矩阵）加法

- 教材讨论
  - TJ第12、13、14章

问题1：general linear group

- 你能从矩阵和线性变换两个角度来解释general linear group吗？
  （群中的元素、运算分别是什么？）
  - all nxn invertible matrices, matrix multiplication
  - invertible linear transformations, composition
- 它为什么是一个群？

问题2：special linear group

- 什么是special linear group？
  - general linear group & det=1
- 它为什么是一个群？
- 它在二维空间上的几何意义是什么？
  - 保持面积不变

- 请你构造一个determinant=-1的矩阵，试试看它是不是也能保持面积不变
- 你觉得determinant=1和determinant=-1在几何意义上有什么区别？
  - “方向”不同
- 你能不能在更简单的一维空间上解释这一区别？
- 在更复杂的三维空间上呢？

问题3：orthogonal group和isometry

- 什么是orthogonal group？
  - general linear group & $A^{-1}=A^{t}$
- 它为什么是一个群？
- 它的几何意义是什么？
  - 保持距离/长度/内积不变…

- isometry group的几何意义是什么？
  - 保持距离不变

- 那么orthogonal group和isometry group有什么区别？
  - 是否保持原点不变
- 在几何意义上，你能举一个属于isometry group但不属于orthogonal group的变换吗？
  - translation

问题3：orthogonal group和isometry (续)

- 因此，在几何意义上，orthogonal group中都是一些什么样的线性变换？
  - rotation (围绕原点)
  - reflection (对称轴过原点/原点对称)

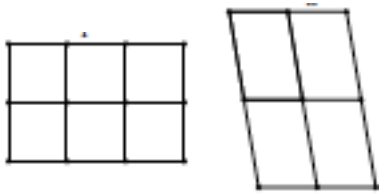
- orthogonal group中的矩阵的行列式有什么特征？
  - determinant=±1
- 因此，在几何意义上，orthogonal group和special linear group的交集special orthogonal group中还剩下哪些线性变换？
  - rotation (围绕原点)

- 顺便问一下，你能发现rotation和reflection之间的关系吗？
  - rotation = 两次reflection
- 现在你能抛开rotation，只用reflection来解释orthogonal group和special orthogonal group吗？
  - reflection生成orthogonal group
  - 偶数次reflection生成special orthogonal group

问题4：symmetry group和wallpaper group

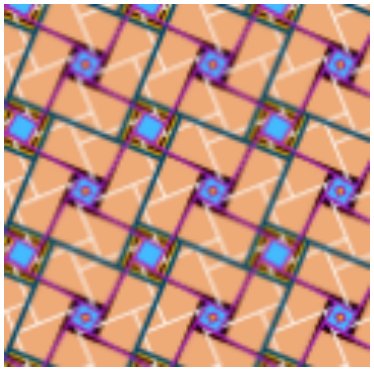
- 什么是symmetry group？
  - isometry group & some points fixed
- 刚才提到的这些群中，哪些是symmetry group？
  - general linear group
  - special linear group
  - orthogonal group
  - special orthogonal group

- 什么是wallpaper group？它和symmetry group有什么关系？
  - symmetry group的广义定义：some objects (e.g. points, patterns) fixed
- 如何理解“两张wallpaper对应同一个wallpaper group”？



问题4：symmetry group和wallpaper group (续)

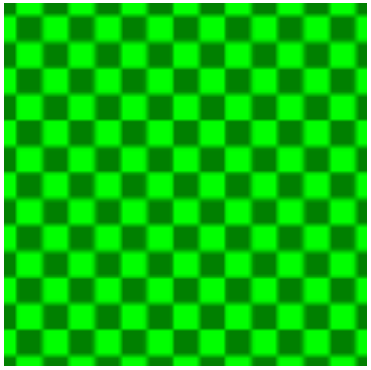
- 以下这些wallpaper对应同一个wallpaper group吗？

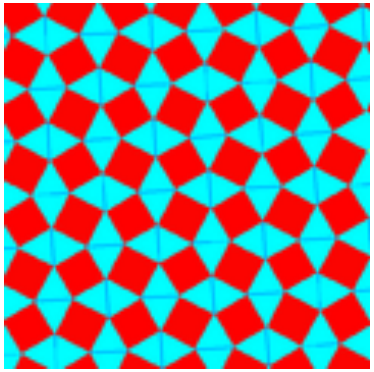


(不考虑颜色)

p4：2种90度转点，1种180度转点

现在你理解为什么说p4的point group与Z_4同构了吗？





p4m：四向对称轴；90度转点在对称轴上
p4g：两向对称轴；不在