

考试科目名称 计算机问题求解 (三)

考试日期: 2019 年 01 月 09 日 教师: 陶先平、马骏、魏恒峰

系 (专业): 计算机科学与技术系 年级: 2017 级

姓名: _____ 学号: _____ 成绩: _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八		
分数										

注意事项:

- 诚信考试, 不得作弊。
- 若对题意有疑问, 请及时提出。
- 题目不是按照难度排列的, 请注意合理分配时间。
- 不完整的解题思路甚至“感觉”也有可能成为得分点。
- 对于算法设计题:
 - 请先用自然语言阐述算法原理, 切勿只写伪代码。
 - 请明确阐述你设计的算法为什么是正确的 (要给出关键证明)。
 - 请明确阐述你设计的算法为什么是满足时间复杂度要求的 (尽管这可能很简单)。
- 符号说明: $\kappa(G)$: 图 G 的点连通度; $\lambda(G)$: 图 G 的边连通度。
- 提示: 试题后的提示仅作提示之用, 不排除其它解法。

题目 1

服务器上有 n 个请求等待处理。已知请求 i 的处理时长为 t_i 。当服务器处理某请求时, 其它尚未处理的请求需要等待, 每个请求的等待时间定义为在它之前的请求的处理时长之和。请设计算法计算最优的处理顺序, 使得所有请求的等待时间之和最小。

题目 2

给定带权无向连通图 $G = (V, E, w)$ (w 为权重函数) 与 G 中任一条边 $e = (u, v) \in E$ 。

证明: e 不属于 G 的任何最小生成树当且仅当 u, v 之间存在由权重均小于 $w(e)$ 的边构成的路径。

题目 3

给定无向连通图 $G = (V, E)$ 。

定义 (SCC 定向) 如果能对 G 的每条边确定一个方向, 使得定向后的有向图是强连通的, 则称 G 存在 SCC 定向。

- (1) 请证明 G 存在 SCC 定向当且仅当 G 中没有桥。
- (2) 假设 G 中没有桥, 请设计一个线性时间算法给出 G 的一种 SCC 定向。

要求: 如果你使用了图遍历框架, 伪代码中需要包含该框架代码。

题目 4

考虑带权无向连通图 G 。

定义 (瓶颈长度) G 中路径的瓶颈长度指的是该路径上最小的边权重。

定义 (瓶颈距离) G 中两点的瓶颈距离指的是该两点间所有路径中的最大瓶颈长度。

请设计算法求 G 中所有点对之间的瓶颈距离 (不必给出具体路径)。

(Your goal is to, for any s and t , find a path from s to t whose minimum edge weight is maximized.)

要求: 时间复杂度为 $O(n^3)$ (n 为 G 的顶点数)。请写出伪代码。

题目 5

(1) 请写出 Menger 定理 (无向图“点连通”或“边连通”版本)。

(2) 请使用 Menger 定理证明: 如果 G 是 3-正则图, 则 $\kappa(G) = \lambda(G)$ 。

(提示: 可使用教材中基于 Menger 定理证明的定理或推论, 但需明确说明。)

题目 6

中国象棋有“马走日”的规则。

证明或证伪: 对于任何 $n \in \mathbb{Z}^+$, 在 $4 \times n$ 的棋盘上, 不存在“马踏棋盘回路”(从某棋盘格开始, 遍历所有棋盘格一次且仅一次, 并回到起始棋盘格)。

(提示: 以 4×5 为例, 见图 1。)

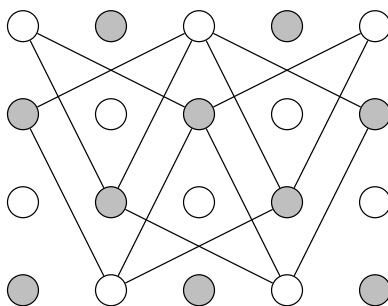


图 1: 灰白相间的棋盘。

题目 7

考虑无向连通图 G 上的双人游戏。在该游戏中, 两位玩家交替选择顶点。

游戏开始时, 先手玩家任选一个顶点。接下来, 每位玩家选择的顶点需要 (1) 与另一位玩家刚刚选择的顶点相邻 (2) 之前未被选过。(也就是说, 两位玩家选择的顶点构成一条简单路径。) 若无顶点可选, 则该玩家为输家, 另一玩家为赢家。

请解答并证明: 当 G 具有何种性质时, 后手玩家有必胜策略, 否则先手玩家有必胜策略。

题目 8 (附加题)

请设计一个线性时间算法判断有向图 G 是否含有有向奇圈。