

应用题：养鸡专业户

周涛

© 南京养鸡二厂

2019 年 3 月 4 日



问题

题干

某养鸡专业户养鸡 1000 只，用大豆和谷物饲料混合喂养。每天每只鸡平均吃混合饲料 0.5 公斤，其中应至少含有 0.1 公斤蛋白质和 0.002 公斤钙。已知每公斤大豆含有 50% 的蛋白质和 0.5% 的钙，价格 1 元/公斤；每公斤谷物含有 10% 的蛋白质和 0.4% 的钙，价格是 0.3 元/公斤。粮食部门每周只保证供应谷物饲料 2500 公斤，大豆供应不限。问如何搭配这两种饲料，才能使喂养成本最低？

客观世界中最简单的数量关系是均匀变化的关系。(这种关系即可归结于线性关系。)

——丘维声《高等代数》

问题

题干

某养鸡专业户养鸡 1000 只，用大豆和谷物饲料混合喂养。每天每只鸡平均吃混合饲料 0.5 公斤，其中应至少含有 0.1 公斤蛋白质，和 0.002 公斤钙。已知每公斤大豆含有 50% 的蛋白质和 0.5% 的钙，价格 1 元/公斤；每公斤谷物含有 10% 的蛋白质和 0.4% 的钙，价格是 0.3 元/公斤。粮食部门每周只保证供应谷物饲料 2500 公斤，大豆供应不限。问如何搭配这两种饲料，才能使喂养成本最低？

建模

$$\text{minimize} \quad x_1 + 0.3x_2;$$

$$x_1 + x_2 = 1000 \times 0.5 \times 7^*$$

$$0.5x_1 + 0.1x_2 \geq 1000 \times 0.1 \times 7$$

$$0.005x_1 + 0.004x_2 \geq 1000 \times 0.002 \times 7$$

$$x_2 \leq 2500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

求解 - 图解法

$$\min b = x_1 + 0.3x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 3500$$

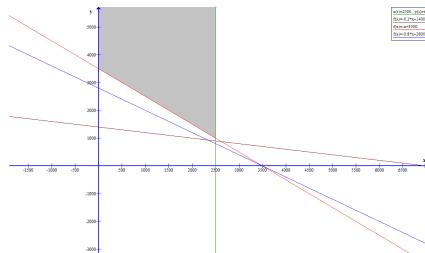
$$5x_1 + x_2 \geq 7000$$

$$5x_1 + 4x_2 \geq 14000$$

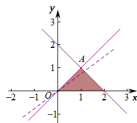
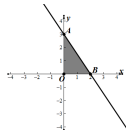
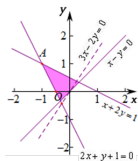
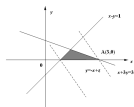
$$x_2 \leq 2500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

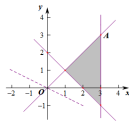
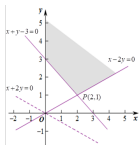
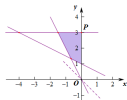
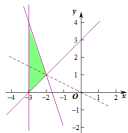
可行域为



线性规划 as 高考考点



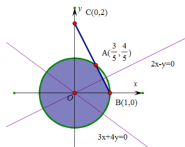
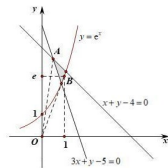
(a) 17 全国卷 I, 文 (b) 17 全国卷 I, 理 (c) 17 全国卷, 文 (d) 17 全国卷, 理



(e) 17 山东卷, 理 (f) 17 天津卷, 理 (g) 17 浙江卷 (h) 17 北京卷

延申: 非线性规划 (NLP)

① 约束为非线性, 目标函数为线性



② 约束为线性, 目标函数为非线性, 其中目标函数为二次函数的规划问题, 称为二次规划。

- 实例: 投资组合 (portfolio) 问题 (收益率的稳定 \rightarrow 最小化方差 \rightarrow 二次)

求解 -MATLAB-linprog

linprog

Solve linear programming problems

R2018b

[collapse all in page](#)

Linear programming solver

Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_x f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \leq b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \leq x \leq ub. \end{cases}$$

f , x , b , beq , lb , and ub are vectors, and A and Aeq are matrices.

Note

`linprog` applies only to the solver-based approach. For a discussion of the two optimization approaches, see [First Choose Problem-Based or Solver-Based Approach](#).

求解 -MATLAB-linprog

linprog

Solve linear programming problems

R2018b

[collapse all in page](#)

Linear programming solver

Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_x f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \leq b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \leq x \leq ub. \end{cases}$$

f , x , b , beq , lb , and ub are vectors, and A and Aeq are matrices.

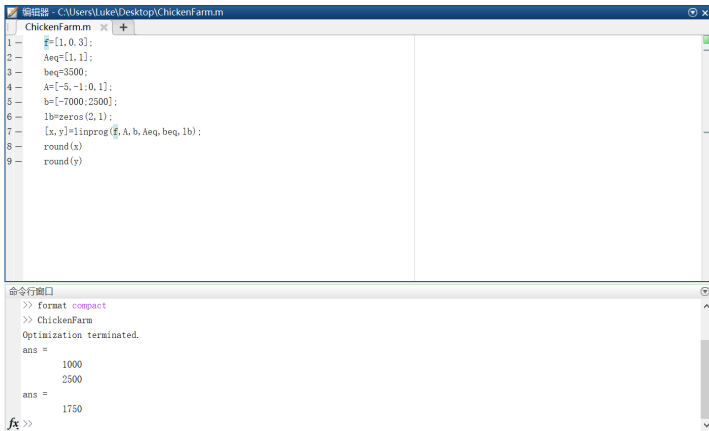
i Note

`linprog` applies only to the solver-based approach. For a discussion of the two optimization approaches, see [First Choose Problem-Based or Solver-Based Approach](#).

Syntax

```
x = linprog(f,A,b)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)
x = linprog(problem)
[x,fval] = linprog( __ )
[x,fval,exitflag,output] = linprog( __ )
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog( __ )
```


求解 -MATLAB-linprog



The image shows a MATLAB environment with an editor window and a command window. The editor window, titled 'ChickenFarm.m', contains the following code:

```
1 f=[1, 0, 3];
2 Aeq=[1, 1];
3 beq=3500;
4 A=[-5, -1; 0, 1];
5 b=[-7000; 2500];
6 lb=zeros(2, 1);
7 [x, y]=linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb);
8 round(x)
9 round(y)
```

The command window, titled '命令行窗口', shows the execution of the script:

```
>> format compact
>> ChickenFarm
Optimization terminated.
ans =
    1000
    2500
ans =
    1750
fx >>
```

求解 -MATLAB-linprog-Algorithms

All Algorithms	
Algorithm	<p>Choose the optimization algorithm:</p> <ul style="list-style-type: none">• 'dual-simplex' (default)• 'interior-point-legacy'• 'interior-point' <p>For information on choosing the algorithm, see Linear Programming Algorithms.</p>

求解 -MATLAB-linprog-Algorithms

All Algorithms	
Algorithm	<div>Choose the optimization algorithm:</div> <ul style="list-style-type: none">• 'dual-simplex' (default)• 'interior-point-legacy'• 'interior-point' <div>For information on choosing the algorithm, see Linear Programming Algorithms.</div>

e.g.

Set options to use the 'interior-point' algorithm.

```
options = optimoptions('linprog','Algorithm','interior-point');
```

Set options to use the 'dual-simplex' algorithm.

```
options = optimoptions('linprog','Algorithm','dual-simplex');
```

求解 -EXCEL

南京养鸡二厂						
	大豆	谷物				
单位价格	1	0.3		MINIMIZE	总开销	0
			总量	0	=	3500
蛋白质含量	0.5	0.1	蛋白质总量	0	>=	700
钙含量	0.005	0.004	钙总量	0	>=	14
购买量	0	0	<=	2500		

求解 - EXCEL

南京养鸡二厂						
	大豆	谷物				
单位价格	1	0.3		MINIMIZE	总开销	0
			总量	0	=	3500
蛋白质含量	0.5	0.1	蛋白质总量	0	>=	700
钙含量	0.005	0.004	钙总量	0	>=	14
购买量	0	0	<=	2500		

“规划求解”使用的求解方法

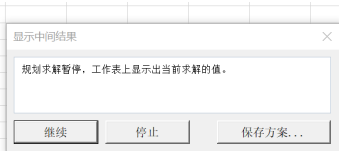


您可以在“规划求解参数”对话框中选择以下三种算法或求解方法中的任意一种：

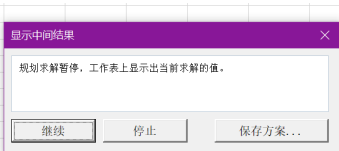
- **广义简约梯度 (GRG) 非线性** 用于平滑非线性问题。
- **LP Simplex** 用于线性问题。
- **进化** 用于非平滑问题。

求解 - EXCEL

南京养鸡二厂						
	大豆	谷物				
单位价格	1	0.3		MINIMIZE	总开销	1400
			总量	1400	=	3500
蛋白质含量	0.5	0.1	蛋白质总量	700	>=	700
钙含量	0.005	0.004	钙总量	7	>=	14
购买量	1400	0	<=	2500		

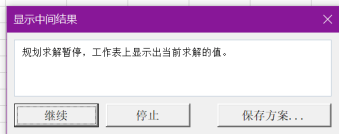


南京养鸡二厂						
	大豆	谷物				
单位价格	1	0.3		MINIMIZE	总开销	2800
			总量	2800	=	3500
蛋白质含量	0.5	0.1	蛋白质总量	1400	>=	700
钙含量	0.005	0.004	钙总量	14	>=	14
购买量	2800	0	<=	2500		

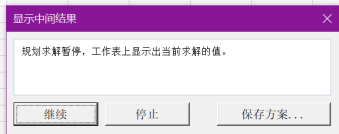


求解 - EXCEL

南京养鸡二厂						
单位价格	大豆	谷物		MINIMIZE	总开销	3500
	1	0.3				
			总量	3500	=	3500
蛋白质含量	0.5	0.1	蛋白质总量	1750	>=	700
钙含量	0.005	0.004	钙总量	17.5	>=	14
购买量	3500	0	<=	2500		

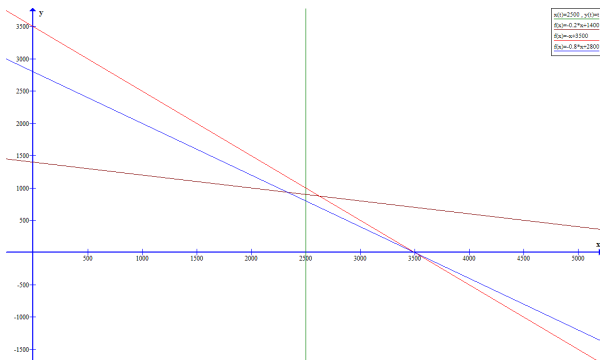


南京养鸡二厂						
单位价格	大豆	谷物		MINIMIZE	总开销	1750
	1	0.3				
			总量	3500	=	3500
蛋白质含量	0.5	0.1	蛋白质总量	750	>=	700
钙含量	0.005	0.004	钙总量	15	>=	14
购买量	1000	2500	<=	2500		




动起来?——动态视角

- 约束条件的右端不妨看作“资源”。右端值和左端实际值的差即为资源的“剩余量”，一般称“资源”剩余为 0 的约束为紧约束或有效约束。



动起来?——动态视角

- 约束条件的右端不妨看作“资源”。右端值和左端实际值的差即为资源的“剩余量”，一般称“资源”剩余为 0 的约束为紧约束或有效约束。
- 目标函数可以看作“效益”，成为紧约束的“资源”一旦增加，“效益”必然跟着增长。在保持解最优的情况下，某种“资源”增加 1 个单位时目标函数的增长（减少）量可以看作该“资源”的潜在价值，经济学上称为影子价格(Shadow Price)。

“影子价格是商品或生产要素可得性的任何变化所带来的福利增加”

——联合国工业发展组织有关文献

动起来?——动态视角

例:

南京养鸡二厂						
	大豆	谷物				
单位价格	1	0.3		MINIMIZE	总开销	1749.3
			总量	3500	=	3500
蛋白质含量	0.5	0.1	蛋白质总量	749.6	>=	700
钙含量	0.005	0.004	钙总量	14.999	>=	14
购买量	999	2501	<=	2501		

- 可见粮食部门供应的谷物的限量的影子价格为 0.7(元/公斤)

动起来?——动态视角

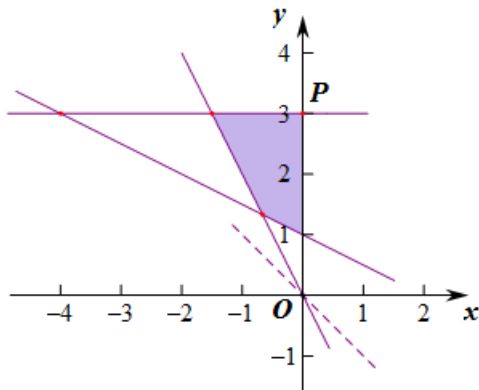
- 资源的影子价格实际上是一种机会成本。在纯**市场经济条件**下，当资源的**市场价格**低于**影子价格**时，可以买进这种资源，反之，可以卖出。随着资源的买进和卖出，它的影子价格也将随之发生改变，一直到影子价格与市场价格保持同等水平，才处于平衡状态。
- 当资源的影子价格为 0 时，表明该种资源未得到充分利用。当资源的影子价格不为 0 时，表明该种资源在生产中已耗费完毕。
- 可以利用影子价格计算产品的**隐含成本**（单位资源消耗量 \times 相应的影子价格后求和）。当产品产值大于隐含成本时，表明生产该产品有利，可计划安排生产；否则用这些资源生产别的产品更为有利。

动起来?——动态视角

- 目标函数的系数发生变化时（假定约束条件不变），最优解和最优值会如何改变？
- 对目标函数系数变化的影响的讨论，通常称为对目标函数系数的敏感性分析(Sensitivity analysis of the objective function)。

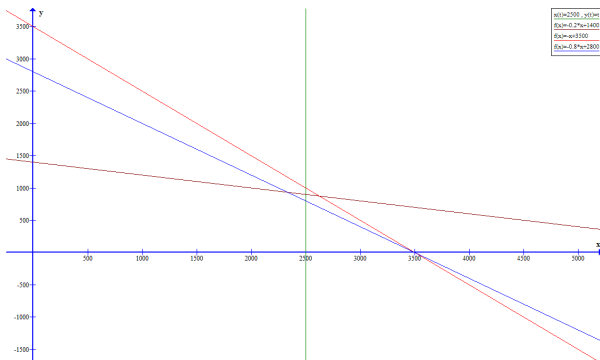
动起来?——动态视角

例:



动起来?——动态视角

- 影子价格的作用（即在最优解下“资源”增加 1 个单位时“效益”的增量）是有限制的。对于影子价格在什么条件下才有意义的讨论，通常称为对资源右端项的敏感性分析。



动起来?——动态视角

Microsoft Excel 16.0 敏感性报告

工作表: [工作簿1.xlsx]Sheet1

报告的建立: 2019/3/3 20:13:42

可变单元格

单元格	名称	终 值	递减 成本	目标式 系数	允许的 增量	允许的 减量
\$C\$12	购买量 大豆	1000	0	1	1E+30	0.7
\$D\$12	购买量 谷物	2500	-0.7	0.3	0.7	1E+30

约束

单元格	名称	终 值	阴影 价格	约束 限制值	允许的 增量	允许的 减量
\$F\$10	钙总量	15	0	14	1	1E+30
\$F\$7	总量	3500	1	3500	1E+30	100
\$F\$9	蛋白质总量	750	0	700	50	1E+30

- 《数学模型（第五版）》 姜启源 等 编 高等教育出版社
- 《Linear and Nonlinear Programming》 David G. Luenberger
等 著 Springer
- MIT 公开课程 Optimization Methods in Management Science
https://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-053-optimization-methods-in-management-science-spring-2013/lecture-notes/MIT15_053S13_lec6.pdf