BROOKS定理

裴明亮 151242033

BROOKS定理

- 设某连通图的最大度为Δ。若该图不是完全图或奇圈，则该图的染色数小于等于Δ。

注意

- 以下的k都代表Δ
- 以下讨论的G都是连通图，且不是完全图或奇圈。

K的范围

- k小于等于1时，则G为完全图
- k等于2时，则G为奇圈或者二部图（G为二部图当且仅当没有奇数圈以及点色数为2）
- 则讨论k大于等于3的情况

PROOF

- 基本思路：找到一种点的排序方法，使得每个点都最多只有k-1个序号比它小的邻点。

分情况

- 分为三种情况：
- 1、该图不是正则图
- 2、是正则图，且有割点
- 3、是正则图，且没有割点

若G不是正则图

- 那么能够找到一个点T，它的度小于k
- 以这个点T为起点，进行BFS，则得到一棵BFS树，添加进树的时间较早的节点的序号较大。则点T的序号为n
- 从序号大的点开始，在树中染色。每个点仅需使得自己以及比它在树中相邻的序号低的点两两之间的颜色不同就行了。
- 而自己以及比它在树中相邻的序号低的点最多有k个。

第一种情况的图

若G为正则图，且有割点

- 设这个割点为T，则对于T来说，它只要保证自己和任意一个连通分支之间的每个节点两两之间颜色不同
- 而与T相连的属于不同连通分支之间的点不需要颜色不同
- 对于每个连通分支来说，它和T的并集可以使用第一种情况中的方法得到染色方案，因为它和T的并集不是正则图

若G为正则图，且没有割点

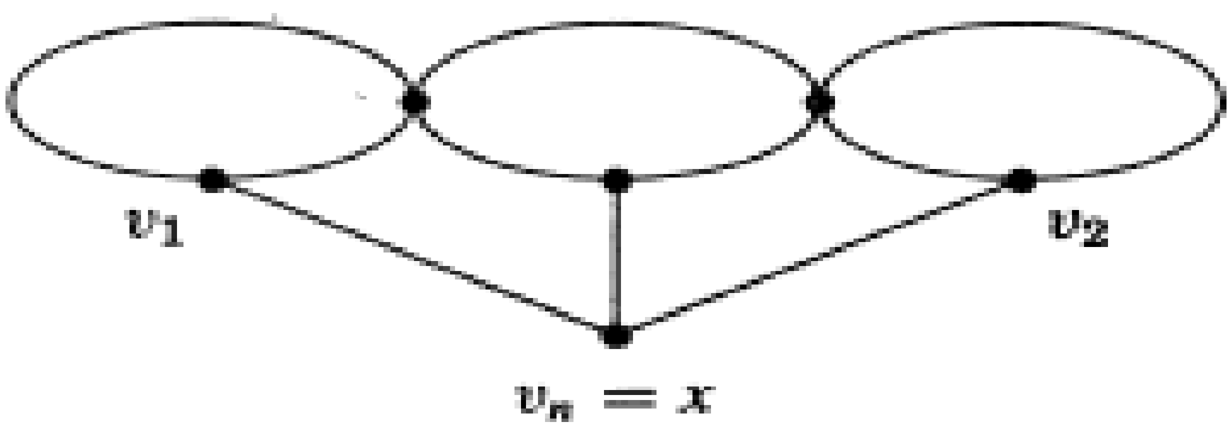
- 分两种情况，先随便找一个点x
- 1、G-x连通度大于等于2
- 2、G-x连通度等于1（为什么G-x连通度为0的情况没有?
- 证明的思路：找到v1，v2，u，使得u与v1相连，u与v2相连，v1与v2之间不相连，且G-v1-v2是连通的。
- 那不管v1染什么颜色，v2都不会受它的影响了（然后呢?

若G-X连通度大于等于2

- 使v1变为x，v2变为随便一个和x的距离为2的点
- （为什么v2是存在的？因为不存在割点
- 使u是v1到v2随便一个最短路径上的中间节点即可

若G-X连通度等于1

- 使得x为u，找到所有割点，并抹去他们的存在
- 则找到每个剩下来的连通分支
- 则x在每个连通分支中，至少与一点相连（不然会怎么样?
- 由于该正则图的k大于等于3，则一定能在这些点中找到不相接的一对点。



THANKS~