- 教材答疑和讨论
  - UD第14、15、16、17章

# 问题1：函数的基本概念

- 你理解这些基本概念了吗？
  - 定义域 (domain)
  - 陪域 (codomain)
  - 值域 (range)

  - 单射 (injective/one-to-one)
  - 满射 (surjective/onto)
  - 双射 (bijective)

- 你能从日常生活中举出函数的例子吗？
  它们的定义域/陪域/值域分别是什么？
  - 非单射、非满射
  - 单射、非满射
  - 满射、非单射
  - 双射

# 问题1：函数的基本概念 (续)

- 什么叫做函数相等？包括哪几个方面？

# 问题1：函数的基本概念 (续)

- 什么叫做函数相等？包括哪几个方面？

- Two functions $f:A\rightarrow B$ and $g:A\rightarrow B$ are equal if and only if $f(x)=g(x)$ for all $x\in A=dom(f)=dom(g)$.
  - 关系相同，因此
    - 定义域相同
    - 值域相同

# 问题2：函数基本概念的求解与证明

- 结合Example 14.8（第一版的13.7），你能说出求解函数值域的一般步骤吗？
- 你能运用这组步骤来严谨地求解以下函数的值域吗？

The function $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = 1/x$.

# 问题2：函数基本概念的求解与证明(续)

- 如何证明一个函数是单射？
- 如何证明一个函数是满射？
- 如何证明一个函数是双射？
- 你能严谨地证明以下函数是双射吗？
  - The function $f: R\backslash\{1\} \rightarrow R\backslash\{1\}$ defined by $f(x)=(x+1)/(x-1)$

# 问题3：函数的复合

- 你能简要证明这些定理吗？
  - If f and g are one-to-one, then $g \circ f$ is one-to-one.
  - If $g \circ f$ is one-to-one, then f is one-to-one. （而g未必）
  - If f and g are onto, then $g \circ f$ is onto.
  - If $g \circ f$ is onto, then g is onto. （而f未必）

# 问题3：函数的复合

- 你能简要证明这些定理吗？
  - If f and g are one-to-one, then g◦f is one-to-one.
  - If g◦f is one-to-one, then f is one-to-one. （而g未必）
  - If f and g are onto, then g◦f is onto.
  - If g◦f is onto, then g is onto. （而f未必）

- 你能从日常生活中举出函数复合的例子吗？
  - f单射、g单射
  - f单射、g非单射、g◦f单射
  - f满射、g满射
  - f非满射、g满射、g◦f满射
  - f双射、g双射

# 问题4：反函数

- 什么是反函数？

- 如何求解反函数？
  你能根据定义求解以下函数的反函数吗？
  - The function f: R\{1} → R\{1} defined by $f(x)=(x+1)/(x-1)$

# 问题4：反函数

- 什么是反函数？

Let $f : A \to B$ be a bijective function. The **inverse** of $f$ is the function $f^{-1} : B \to A$ defined by

$$f^{-1}(y) = x \text{ if and only if } f(x) = y.$$

- 如何求解反函数？
你能根据定义求解以下函数的反函数吗？
  - The function f: R\{1} → R\{1} defined by f(x)=(x+1)/(x-1)

# 问题4：反函数 (续)

- 除了定义，还有什么证明手段？

- 你能用它来重新证明吗？
  - The function f: $R\backslash\{1\} \rightarrow R\backslash\{1\}$ defined by $f(x)=(x+1)/(x-1)$

# 问题4：反函数 (续)

- 除了定义，还有什么证明手段？

*Let* $f : A \to B$ *be a bijective function. Then*

*If* $g : B \to A$ *is a function satisfying* $f \circ g = i_B$ *or* $g \circ f = i_A$*, then* $g = f^{-1}$.

- 你能用它来重新证明吗？
  - The function f: R\{1} → R\{1} defined by f(x)=(x+1)/(x-1)

# 问题4：反函数 (续)

- 除了这个定理之外

*Let* $f : A \to B$ *be a bijective function. Then*

*If* $g : B \to A$ *is a function satisfying* $f \circ g = i_B$ *or* $g \circ f = i_A$*, then* $g = f^{-1}$.

- 书上还给出了另一个很相似的定理

*Let* $f : A \to B$ *and* $g : B \to C$ *be functions.*

*Suppose now that* $f : A \to B$ *and* $g : B \to A$*. If* $f \circ g = i_B$ *and* $g \circ f = i_A$*, then* $g = f^{-1}$.

- 你能看出它们的区别和联系吗？

# 问题5：函数的像

- 对于$f:X \rightarrow Y$和$x \in X$, $y \in Y$
  - $f(x)$和$f(\{x\})$有什么区别？
  - $f^{-1}(y)$和$f^{-1}(\{y\})$有什么区别？

# 问题5：函数的像 (续)

- 以下这些定理都成立吗？
  如果成立，你能给出证明吗？
  如果不成立，你能举出反例吗？

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$
$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

# 问题5：函数的像 (续)

- $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
  这个证明错在哪儿？

*Not a proof.* It follows from Theorem 17.5 that $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. To show the reverse set inclusion, we let $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. By definition of intersection, $y \in f(A_1)$ and $y \in f(A_2)$. Therefore, $y = f(x)$ for some $x$ in $A_1$ and $y = f(x)$ for some $x \in A_2$. Since $x \in A_1$ and $x \in A_2$, we see that $x \in A_1 \cap A_2$. Thus $y = f(x)$ where $x \in A_1 \cap A_2$, so $y \in f(A_1 \cap A_2)$. This proves that $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$, and the nonfact is established! $\boxed{?}$

# 问题5：函数的像 (续)

- 你能不能用图示的方式解释为什么以下这些定理都是不成立的？

$$f(f^{-1}(C)) = C;$$
$$f^{-1}(f(A)) = A;$$
$$f(A) = f(B) \text{ implies that } A = B;$$
$$f^{-1}(C) = f^{-1}(D) \text{ implies that } C = D.$$