- 大家是如何写出彼此一词不差的英文答案的？

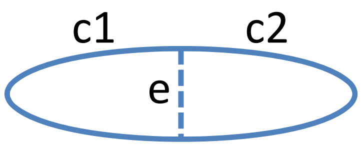
- 书面作业讲解
  - DW第4.1节练习3、4、6、8、10、14、19、36、37
  - DW第4.2节练习2、4、5、6、11、12

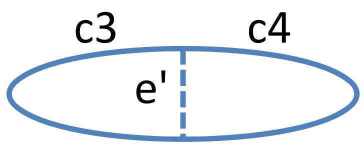
DW第4.1节练习3

- 如何将一个看似简单的证明写完整：
  1. G不是k-connected $\Rightarrow$ connectivity≤k-1 $\Rightarrow$ 让G-S不连通或仅含一个顶点的最小顶点集S满足|S|≤k-1
  2. 且G包含>k个顶点 $\Rightarrow$ 让G-S不连通的最小顶点集S满足|S|≤k-1 $\Rightarrow$ 存在separating set S满足|S|≤k-1
  3. G-S至少有2个连通分支 $\Rightarrow$ 将G-S的连通分支分为2组，反复从中删除顶点并加入S中直至|S|=k-1
     - 在这个过程中，避免将某组全部删光
     - 这是可以做到的，因为G包含≥k+1个顶点
  4. 得到separating set S满足|S|=k-1

DW第4.1节练习14

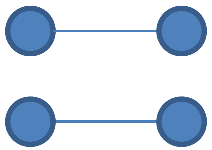
1. 从G中任删一条边e（是c1和c2的唯一公共边），G有绕开e的旁路（借道c1或c2），因此仍连通
2. 再从G中任删一条边e’（是c3和c4的唯一公共边）
   - 如果e’也在c1或c2上（但不可能同时在c1和c2上），则G有绕开e和e’的旁路（借道c2或c1），因此仍连通，得证
   - 如果e’不在c1或c2上，则绕开e的方式不变，且G也有绕开e’的旁路（借道c3或c4，而e不可能同时在c3和c4上），因此仍连通，得证

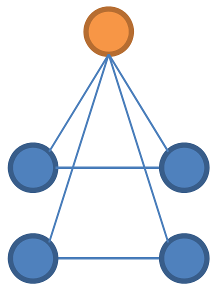




DW第4.1节练习19

- … for each n≥4 …
  - $G_k = G_{k-1} \vee k_1$



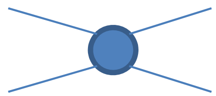


DW第4.2节练习2

- 要求利用第1问的结论来证明第2问：
  1. G有closed-ear decomposition ⇒ G=圈+耳+耳+……
  2. 圈是2-edge-connected
  3. 加耳保持2-edge-connected，因为加耳=加边+若干subdivision
     - 加边保持2-edge-connected
     - subdivision也保持2-edge-connected（第1问的结论）

DW第4.2节练习12

1. Menger定理 ⇒ 任取两点，之间至少有κ’条edge-disjoint path
2. 且3-regular graph ⇒ 这些path的内部不可能共点
3. 两点之间至少有κ’条vertex-disjoint path ⇒ κ≥κ’
4. 且κ≤κ’显然 ⇒ κ=κ’



- 教材讨论
  - TC第28章

问题1：线性方程组求解

- 怎样将线性方程组表示为矩阵形式？

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\,, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\,, \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\,.
\end{aligned}
$$

$$Ax = b$$

问题1：线性方程组求解 (续)

- LUP分解的矩阵表示是什么？

$$PA = LU$$

- 如何用它来改写线性方程组的矩阵表示？

$$Ax = b$$

$$\Downarrow$$

$$LUx = Pb$$

问题1：线性方程组求解 (续)

- L、U、P分别是怎样的矩阵？
  - L：unit lower-triangular matrix
  - U：upper-triangular matrix
  - P：permutation matrix

问题1：线性方程组求解 (续)

- 接下来做什么？

$$LUx = Pb$$

$$\Downarrow$$

$$y = Ux$$

$$Ly = Pb$$

$$\Downarrow$$

$$Ux = y$$

问题1：线性方程组求解 (续)

- 这样求解两次看似更复杂了，到底换来了什么好处？

$$LUx = Pb$$

$$\Downarrow$$

$$y = Ux$$

$$Ly = Pb$$

$$\Downarrow$$

$$Ux = y$$

问题1：线性方程组求解 (续)

- 你掌握forward/backward substitution了吗？

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1.4 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

问题1：线性方程组求解 (续)

- 你能归纳出x_i和y_i的通式吗？

$$
\begin{aligned}
y_1 \quad & = b_{\pi[1]}\,, \\
l_{21}y_1 + y_2 \quad & = b_{\pi[2]}\,, \\
l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + y_3 \quad & = b_{\pi[3]}\,, \\
& \ \vdots \\
l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + l_{n3}y_3 + \cdots + y_n & = b_{\pi[n]}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1,n-2}x_{n-2} + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n & = y_1\,, \\
u_{22}x_2 + \cdots + u_{2,n-2}x_{n-2} + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n & = y_2\,, \\
& \ \vdots \\
u_{n-2,n-2}x_{n-2} + u_{n-2,n-1}x_{n-1} + u_{n-2,n}x_n & = y_{n-2}\,, \\
u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n & = y_{n-1}\,, \\
u_{n,n}x_n & = y_n\,.
\end{aligned}
$$

问题1：线性方程组求解 (续)

LUP-SOLVE(L, U, π, b)

$n = L.rows$
let x be a new vector of length n
for $i = 1$ **to** n
    $y_i = b_{\pi[i]} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$
for $i = n$ **downto** 1
    $x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j\right) / u_{ii}$
return x

问题1：线性方程组求解 (续)

- 怎样从A得到L和U呢（不考虑permutation）？

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ v & A' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - vw^{\mathrm{T}}/a_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & U' \end{pmatrix} \\
&= LU \, ,
\end{aligned}
$$

问题1：线性方程组求解 (续)

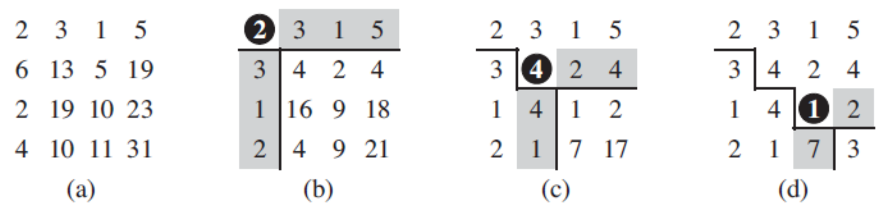
- 你能简要描述它的递归实现吗？

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ \nu & A' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu/a_{11} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & U' \end{pmatrix} \\
&= LU ,
\end{aligned}
$$

问题1：线性方程组求解 (续)

- 你能结合例子简要描述它的迭代实现吗？

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ v & A' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - vw^{\mathrm{T}}/a_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & U' \end{pmatrix} \\
&= LU ,
\end{aligned}
$$



问题1：线性方程组求解 (续)

- 为什么要permutation？
- 怎么将permutation表示为矩阵形式？

$$
\begin{aligned}
QA &= \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ \nu & A' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

问题1：线性方程组求解 (续)

- 你能简要解释接下来的每一步都在做什么吗？

$$
\begin{aligned}
QA &= \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ \nu & A' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$P'(A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1}) = L'U'$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} Q$$

$$
\begin{aligned}
PA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} QA \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'\nu/a_{k1} & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'\nu/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & P'(A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'\nu/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'\nu/a_{k1} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & U' \end{pmatrix} \\
&= LU ,
\end{aligned}
$$

问题1：线性方程组求解 (续)

LUP-DECOMPOSITION(A)

```
n = A.rows
let π[1..n] be a new array
for i = 1 to n
    π[i] = i
for k = 1 to n
    p = 0
    for i = k to n
        if |a_ik| > p
            p = |a_ik|
            k' = i
    if p == 0
        error "singular matrix"
    exchange π[k] with π[k']
    for i = 1 to n
        exchange a_ki with a_k'i
    for i = k + 1 to n
        a_ik = a_ik / a_kk
        for j = k + 1 to n
            a_ij = a_ij - a_ik a_kj
```

问题2：矩阵求逆

- 你能简要描述利用LUP分解求逆矩阵的思路吗？

$$AX = I_n$$

$$AX_i = e_i$$

问题2：矩阵求逆 (续)

- The proof of Theorem 28.2 suggests a means of solving the equation Ax=b by using LU decomposition without pivoting, so long as A is nonsingular.
- 第一步：$(A^{\mathrm{T}}A)x = A^{\mathrm{T}}b$
- 接下来怎么做？

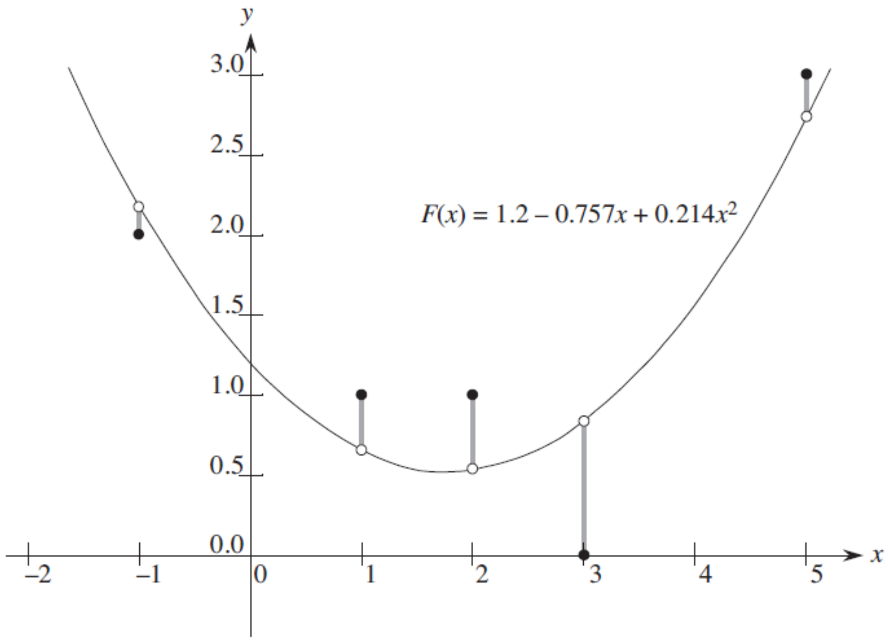
问题3：最小二乘法

- 最小二乘法想要解决的是一个什么问题？

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$$

$$\eta_i = F(x_i) - y_i$$

$$\|\eta\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2\right)^{1/2}$$



问题3：最小二乘法 (续)

- 你能简要解释接下来的每一步都在做什么吗？

$$\|\eta\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2\right)^{1/2}$$

$$\|\eta\|^2 = \|Ac - y\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j - y_i\right)^2$$

$$\frac{d\,\|\eta\|^2}{dc_k} = \sum_{i=1}^{m} 2\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j - y_i\right)a_{ik} = 0$$

$$(Ac - y)^{\mathrm{T}} A = 0$$

$$A^{\mathrm{T}}(Ac - y) = 0$$

$$A^{\mathrm{T}}Ac = A^{\mathrm{T}}y$$

$$c = \left((A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\right) y$$

问题4：求行列式

- 怎么求方阵A的行列式？

$$A = P^{-1}LU$$

$$\det(A) = \det(P^{-1})\det(L)\det(U) = (-1)^S \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} u_{ii}\right).$$