利用最大流证明 Hall 定理

董杨静

南京大学

2018 年 12 月 10 日

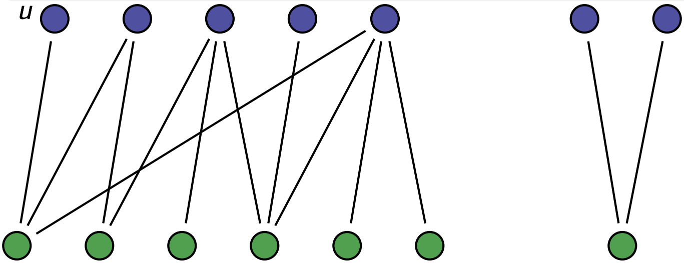
Hall 定理

定理

设有二分图 $G = (U, V, E)$，则存在一个大小为 $|U|$ 的匹配，当且仅当

$$\forall W \subset U, |W| \leq |N_G(W)|$$

$N_G(W)$ 表示与 W 相邻的点构成的集合



充分性证明

定理 (Hall 定理充分性)

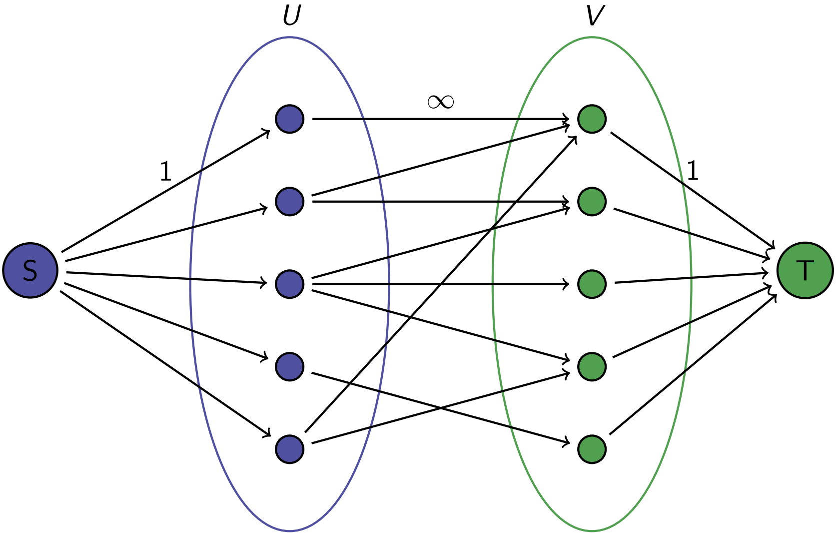
设有二分图 $G = (U, V, E)$，且存在一个大小为 $|U|$ 的匹配，则

$$\forall W \subset U, |W| \leq |N_G(W)|$$

证明.

设 G 的一个最大匹配为 $M \subset E$，则 $|M| = |U|$，所以 M 是一个双射。故 $\forall W \subset U, |N_G(W)| \geq |M(W)| = |W|$ □

最大匹配与最大流



定理

设 $G=(U,V,E)$ 是一个二分图，$G'=(U',V',E')$ 是相对应的流网络，若 G 中存在一个匹配 M，则 G' 中存在一个流 f 使得 $|M|=|f|$。若 G' 中存在一个流 f，则 G 中存在一个匹配 M 使得 $|M|=|f|$

证明.

算法导论 Lemma 26.9 $\square$

最大流最小割定理

定理

设有网络 $G = (U, E)$， s, t 分别为源点和汇点， f 是网络的一个流， 则以下命题等价：

- f 是最大流
- 残余网络 G_f 不包含增广路
- 存在最小割 (S, T)， 使得 $|f| = c(S, T)$

证明.

算法导论 Theorem 26.6 $\square$

Hall 定理必要性证明

- 已知 $\forall W \subset U, |W| \leq |N_G(W)|$

Hall 定理必要性证明

- 已知 $\forall W \subset U, |W| \leq |N_G(W)|$
- 要证明最大匹配大小为 $|U|$

Hall 定理必要性证明

- 已知 $\forall W \subset U, |W| \leq |N_G(W)|$
- 要证明最大匹配大小为 $|U|$
- 只需证最大流为 $|U|$

Hall 定理必要性证明

- 已知 $\forall W \subset U, |W| \leq |N_G(W)|$
- 要证明最大匹配大小为 $|U|$
- 只需证最大流为 $|U|$
- 已知最大流 $\leq |U|$

Hall 定理必要性证明

- 已知 $\forall W \subset U, |W| \leq |N_G(W)|$
- 要证明最大匹配大小为 $|U|$
- 只需证最大流为 $|U|$
- 已知最大流 $\leq |U|$
- 只需证最大流 $\geq |U|$

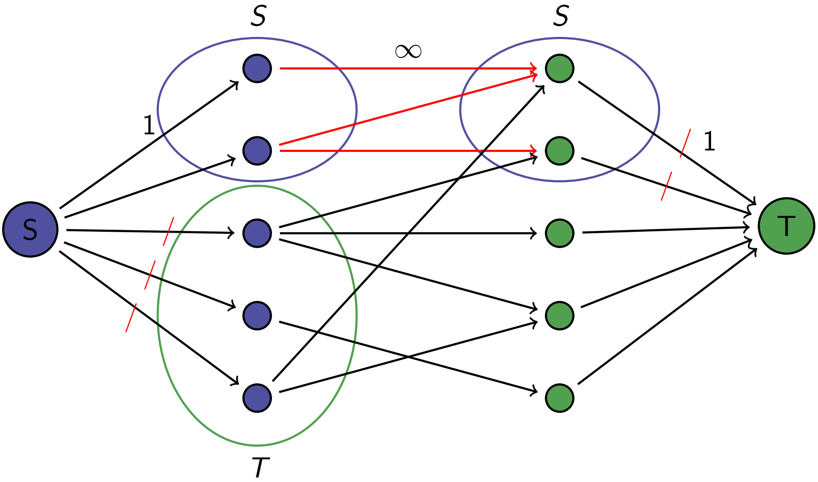
Hall 定理必要性证明

- 已知 $\forall W \subset U, |W| \leq |N_G(W)|$
- 要证明最大匹配大小为 $|U|$
- 只需证最大流为 $|U|$
- 已知最大流 $\leq |U|$
- 只需证最大流 $\geq |U|$
- 最大流等于最小割

Hall 定理必要性证明

- 已知 $\forall W \subset U, |W| \leq |N_G(W)|$
- 要证明最大匹配大小为 $|U|$
- 只需证最大流为 $|U|$
- 已知最大流 $\leq |U|$
- 只需证最大流 $\geq |U|$
- 最大流等于最小割
- 只需证最小割 $\geq |U|$

Hall 定理必要性证明



必要性证明

定理

设有二分图 $G=(U,V,E)$，且 (S,T) 是其流网络的一个最小割。定义 $W=U\cap S$，则 $N_G(W)\subset S$

证明.

反正法：假设存在 $(u,v)\in E, u\in W, v\in N_G(W)$，使得 $v\in T$，则由于 $u\in S$，有 (u,v) 是一条割边。又 (u,v) 流量上限是 $+\infty$，从而最小割是 $+\infty$。事实上很容易找出小于正无穷的割，故矛盾。 □

必要性证明

定理 (Hall 定理必要性)

设有二分图 $G=(U,V,E)$，且 $\forall W \subset U, |W| \le |N_G(W)|$
则存在一个大小为 $|U|$ 的匹配

证明.

设 (S,T) 是流网络的最小割。
设 $U \cap S = W$，则 $N_G(W) \subset S$，又 $U \setminus W \subset T$，故最小割

$$c(S,T) \ge |U \setminus W| + |N_G(W)| \ge |U \setminus W| + |W| = |U|$$

从而最大流 $|f| \ge |U|$。故 $|f| = |U|$，即存在大小为 $|U|$ 的匹配。 □

Hall 定理

定理

设有二分图 $G=(U,V,E)$，则存在一个大小为 $|U|$ 的匹配，当且仅当

$$\forall W\subset U, |W|\le |N_G(W)|$$

证明.

由之前的充分性和必要性证得。 □