

- 教材讨论
 - TJ第12、13、14章

问题1: general linear group

- 你能从矩阵和线性变换两个角度来解释 general linear group 吗？
（群中的元素、运算分别是什么？）
 - all $n \times n$ invertible matrices, matrix multiplication
 - invertible linear transformations, composition
- 它为什么是一个群？

问题2: special linear group

- 什么是special linear group?
 - general linear group & $\det=1$
- 它为什么是一个群?
- 它在二维空间上的几何意义是什么? 为什么?
 - 保持面积不变
 - The area of the parallelogram spanned by \mathbf{a} and \mathbf{b} is $\left| \det \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \right) \right|$.
- 请你构造一个determinant=-1的矩阵, 试试看它是不是也能保持面积不变
- 你觉得determinant=1和determinant=-1在几何意义上有什么区别?
 - “方向”不同
- 你能不能在更简单的一维空间上解释这一区别?
- 在更复杂的三维空间上呢?

http://mathinsight.org/determinant_linear_transformation

问题3: orthogonal group和isometry

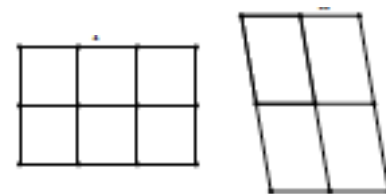
- 什么是orthogonal group?
 - general linear group & $A^{-1}=A^t$
- 它为什么是一个群?
- 它的几何意义是什么?
 - 保持距离/长度/内积不变...
- isometry group的几何意义是什么?
 - 保持距离不变
- 那么orthogonal group和isometry group有什么区别?
 - 是否保持原点不变
- 在几何意义上, 你能举一个属于isometry group但不属于orthogonal group的变换吗?
 - translation

问题3: orthogonal group和isometry (续)

- 因此, 在几何意义上, orthogonal group中都是一些什么样的线性变换?
 - rotation (围绕原点)
 - reflection (对称轴过原点/原点对称)
- orthogonal group中的矩阵的行列式有什么特征?
 - determinant = ± 1
- 因此, 在几何意义上, orthogonal group和special linear group的交集special orthogonal group中只剩下哪些线性变换?
 - rotation (围绕原点)
- 顺便问一下, 你能发现rotation和reflection之间的关系吗?
 - rotation = 两次reflection
- 现在你能抛开rotation, 只用reflection来解释orthogonal group和special orthogonal group吗?
 - 若干次reflection生成orthogonal group
 - 偶数次reflection生成special orthogonal group

问题4: symmetry group和wallpaper group

- 什么是symmetry group?
 - isometry group & some points fixed
- 刚才提到的这些群中, 哪些是symmetry group?
 - general linear group
 - special linear group
 - orthogonal group
 - special orthogonal group
- 什么是wallpaper group? 它和symmetry group有什么关系?
 - symmetry group的广义定义: some **objects** (e.g. points, **patterns**) fixed
- 如何理解“两张wallpaper对应同一个wallpaper group”?

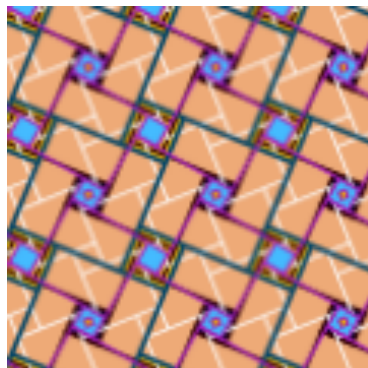


问题4: symmetry group和wallpaper group (续)

- 以下这些wallpaper对应同一个wallpaper group吗?

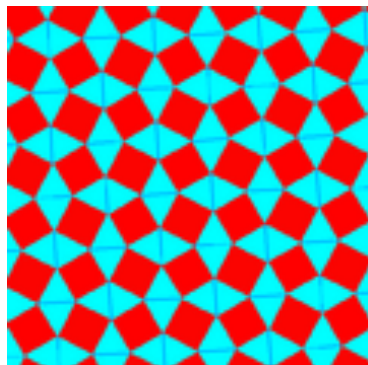
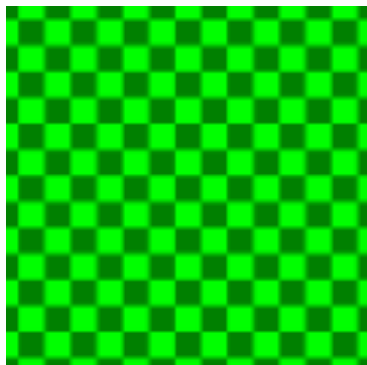


(不考虑颜色)



p4: 2种90度转点, 1种180度转点

现在你理解为什么说p4的point group与 Z_4 同构了吗?



p4m: 四向对称轴; 90度转点在对称轴上

p4g: 两向对称轴; 90度转点不在对称轴上