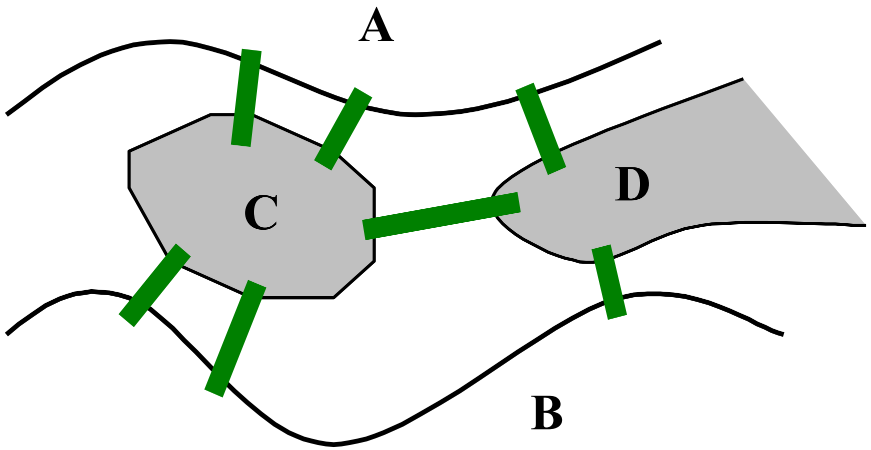
计算机问题求解 — 论题3-11
- 图旅行

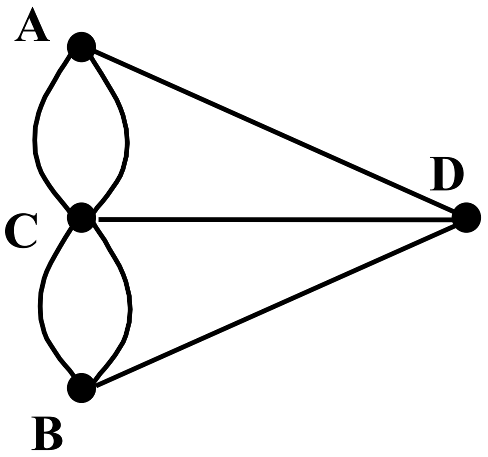
2016年11月16日

Königsberg七桥问题

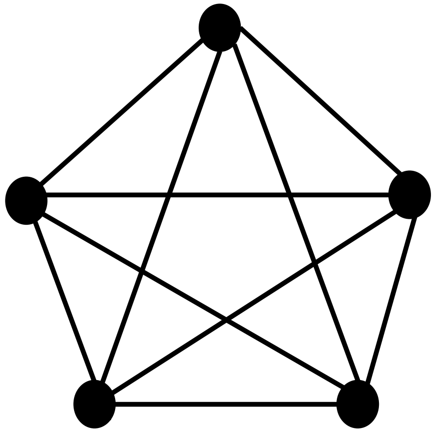
- 问题的抽象：
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”
  - 原问题等价于：“右边的图中是否存在包[illegible]恰好一次的回路？”

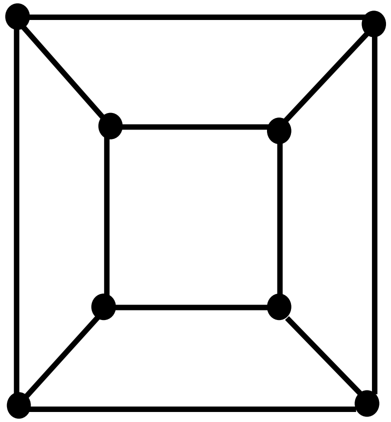
这里看到的图建模过程，应该被深刻理解和记忆

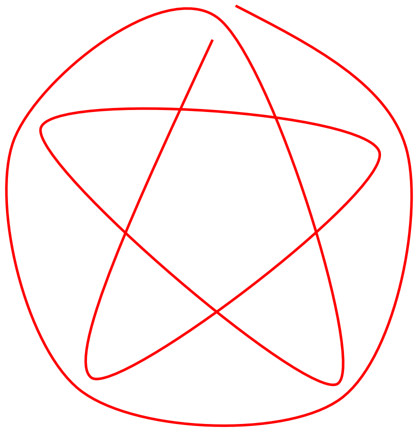




“一笔划”问题







问题1：如何为一笔画问题进行形式化描述？

欧拉通路和欧拉回路

- 定义：包含图（无向图或有向图）中每条边的简单通路称为*欧拉通路*。

注意：欧拉通路是简单通路（边不重复），但顶点可重复

- 定义：包含图中每条边的简单回路称为
- 如果图G中含欧拉回路，则
  但没有欧拉回路，则G称

  //备注：通常假设G是连

问题2：你能够想象欧拉是如何思考这个问题的吗？

欧拉图中的顶点度数

- **连通图G是欧拉图 当且仅当 G中每个顶点的度数均为偶数。**
  - **证明：**

$\Rightarrow$设C是G中的欧拉回路，则$\forall v \in V_G$, $d(v)$必等于v在C上出现数的2倍(起点与终点看成出现一次)。

$\Leftarrow$可以证明：

（1）G中所有的边可以分为若干边不相交的简单回路。

（2）这些回路可以串成一个欧拉回路。

全偶度图中的回路

- 若图G中任一顶点均为偶度点，则G中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中。
  - 证明：对G的边数m施归纳法。
    - 当m=1, G是环，结论成立。假设$m \le k (k \ge 1)$时结论成立。
    - 考虑m=k+1的情况：注意$\delta_G \ge 2$, G中必含简单回路，记为C，令$G' = G - E_C$, 设G'中含s个连通分支，显然，每个连通分支内各点均为偶数(包括0)，且边数不大于k。则根据归纳假设，每个非平凡的连通分支中所有边含于没有公共边的简单回路中，注意各连通分支以及C两两均无公共边，于是，结论成立。

若干小回路串成欧拉回路

- 若连通图G中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中，则G中含欧拉回路。
  - 证明：对G中简单回路个数*d*施归纳法。当*d*=1时显然。
  - 假设$d \le k (k \ge 1)$时结论成立。考虑$d=k+1$.
  - 按某种方式对$k+1$个简单回路排序，令$G'=G-E(C_{k+1})$，设G'中含*s*个连通分支，则每个非平凡分支所有的边包含在相互
路中，且回路个数不大于*k*。由归纳假
欧拉图，设其欧拉回路是C_i'。因G连
  - G中的欧拉回路构造如下：从C_{k+1}
边，每当遇到一个尚未遍历的C_i'与
上的边，回到v_i'继续沿C_{k+1}进行。

问题3：你能够从这样的数学归纳法中，看到寻找欧拉回路的算法吗？

关于欧拉图的等价命题

- **设G是非平凡连通图，以下三个命题等价：**

  (1) G是欧拉图。

  (2) G中每个顶点的度数均为偶数。

  (3) G中所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中。

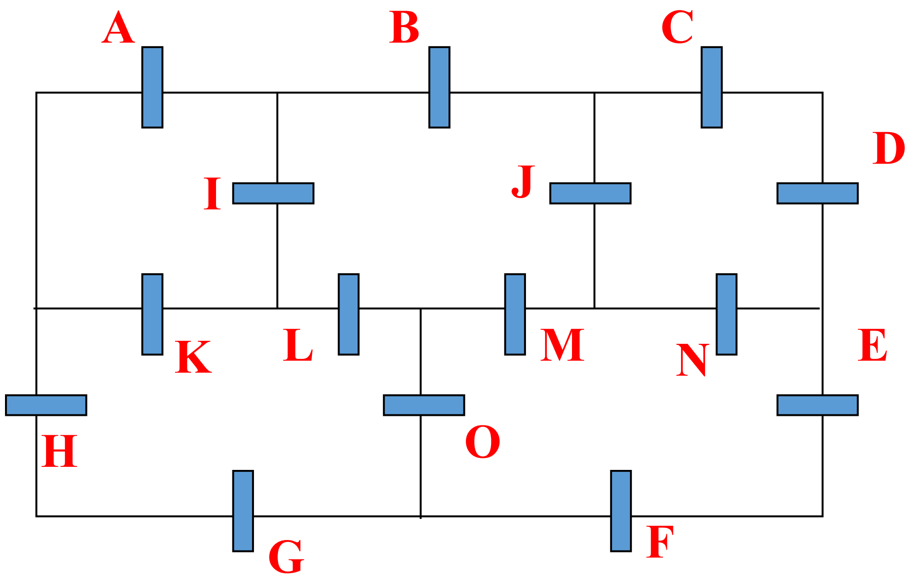
半欧拉图的判定

- 设G是连通图，G是半欧拉图 *当且仅当* G恰有两个奇度点。
  - 证明:

  $\Rightarrow$ 设*P*是G中的欧拉通路(非回路)，设*P*的始点与终点分别是u,v, 则对G中任何一点x, 若x非u,v，则x的度数等于在*P*中出现次数的2倍，而u,v的度数则是它们分别在*P*中间位置出现的次数的两倍再加1。

  $\Leftarrow$ 设G中两个奇度顶点是u,v, 则G+uv是欧拉图，设欧拉回路是C, 则C中含uv边，∴C-uv是G中的欧拉通路。(这表明：如果试图一笔画出一个半欧拉图，必须以两个奇度顶点为始点和终点。)

设计展览会参观路线

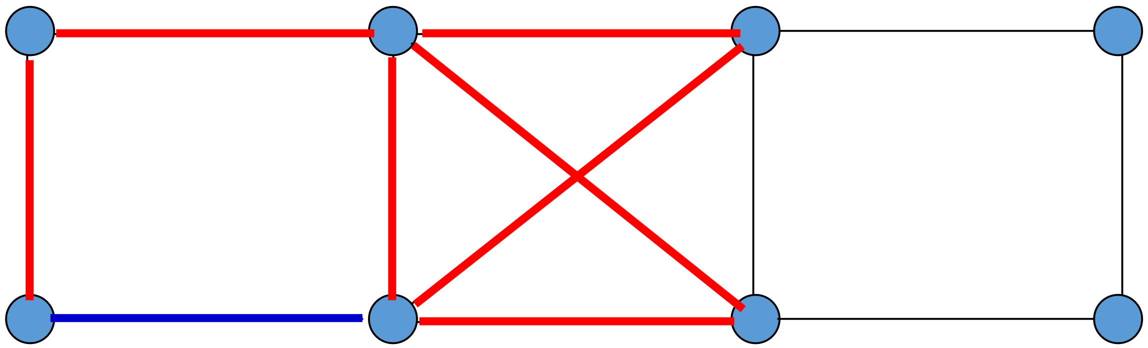


问题4：你会想到其它的建模方法吗？不同的建模方法，对同一个现实问题，有不同的形式化描述

H,G,O,F,E,N,M,O,L,K,I,L,M,J,N,D,C,J,B,I,A,K,H

构造欧拉回路

思想：在画欧拉回路时，已经经过的边不能再用。因此，在构造欧拉回路过程中的任何时刻，假设将已经经过的边删除，剩下的边必须仍在同一连通分支当中。

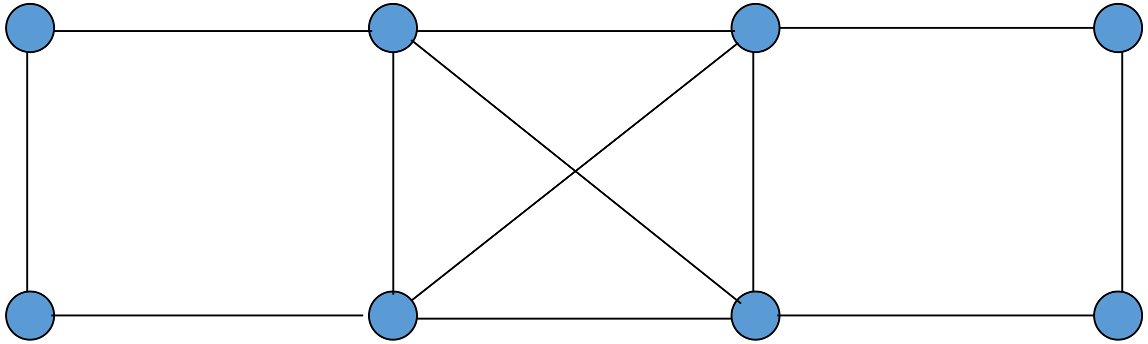


构造欧拉回路-Fleury算法

- **算法：**
  - **输入：** 欧拉图G
  - **输出：** 简单回路 $P = v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_ie_{i+1},\ldots,e_mv_m$，其中包含了 E_G 中所有的元素。

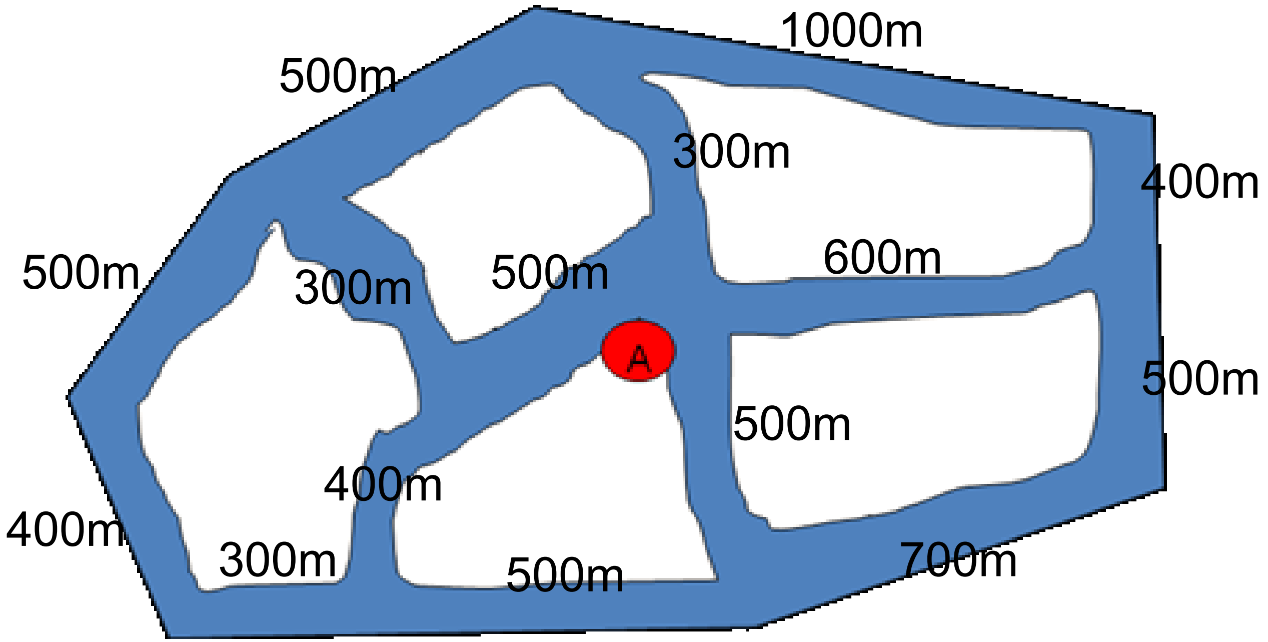
1. 任取 $v_0 \in V_G$，令 $P_0=v_0$；
2. 设 $P_i=v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_i$，按下列原则从 $E_G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$ 中选择 e_{i+1}。
   (a) e_{i+1} 与 v_i 相关联；
   (b) 除非别无选择，否则 e_{i+1} 不应是 $G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$ 中的割边。
3. 反复执行第2步，直到无法执行时终止。

案例：



邮递员问题

- 邮递员需要从A点出发，在以下街区投递信件并回到办公室，请你帮他设计一个投递路线，让他少跑重复路

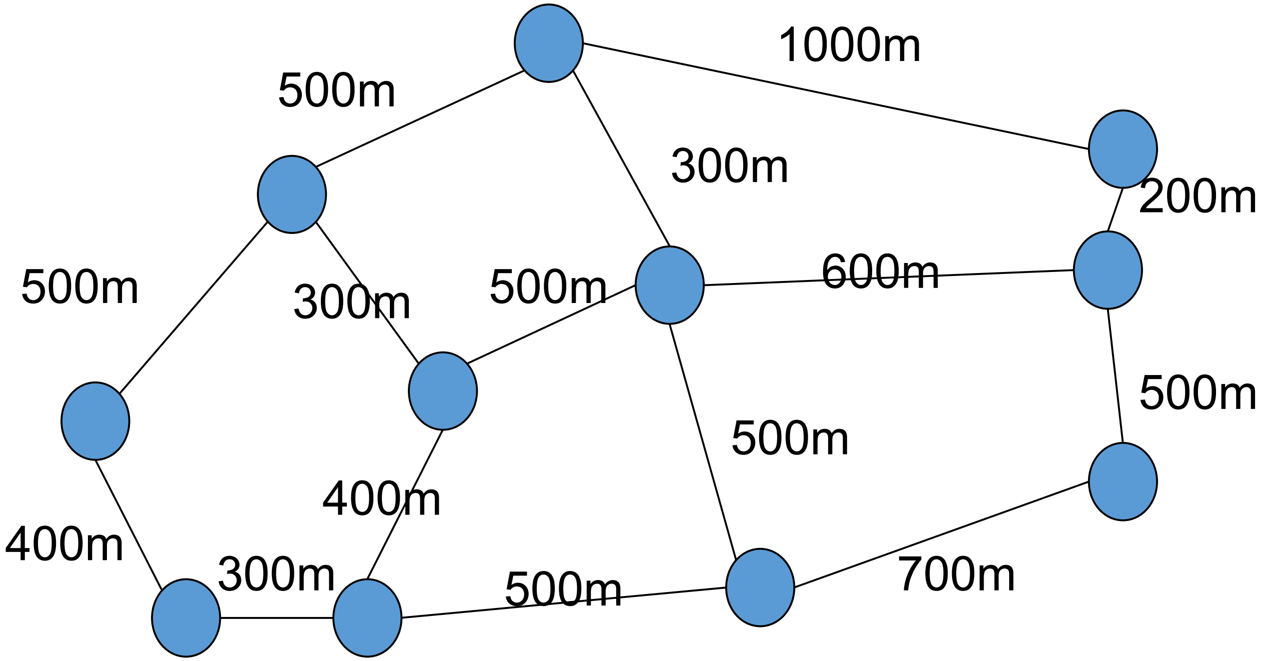


邮递员问题

- 数学模型
  - 无向带权图G：E_G中元素对应于辖区内的街道，V_G中的元素对应于街道的交叉点，街道长度用相应边的权表示。
  - 问题的解: G中包含所有边的权最小的回路，称为最优回路(注意：未必是简单回路)。
  - 当G是欧拉图，则最优回路即欧拉回路。
  - 若G不是欧拉图，则通过加边来消除G中的奇度顶点，要求使加边得到的欧拉图G*中重复边的权和最小。

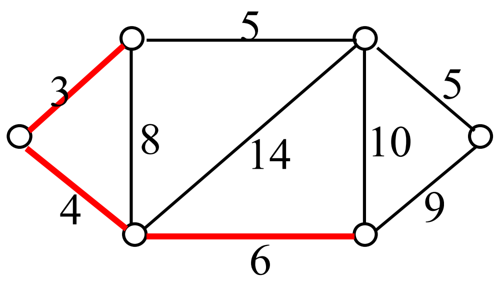
权图

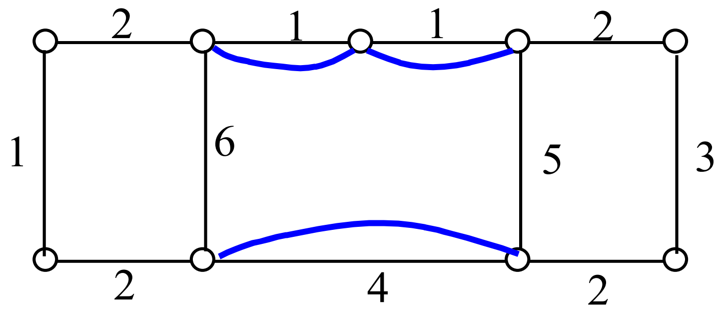
- 如果为图G中的每条边均附加一个值（通常用来表示边所代表的距离、代价、难度等），则称该值为边的权，称该图为权图。



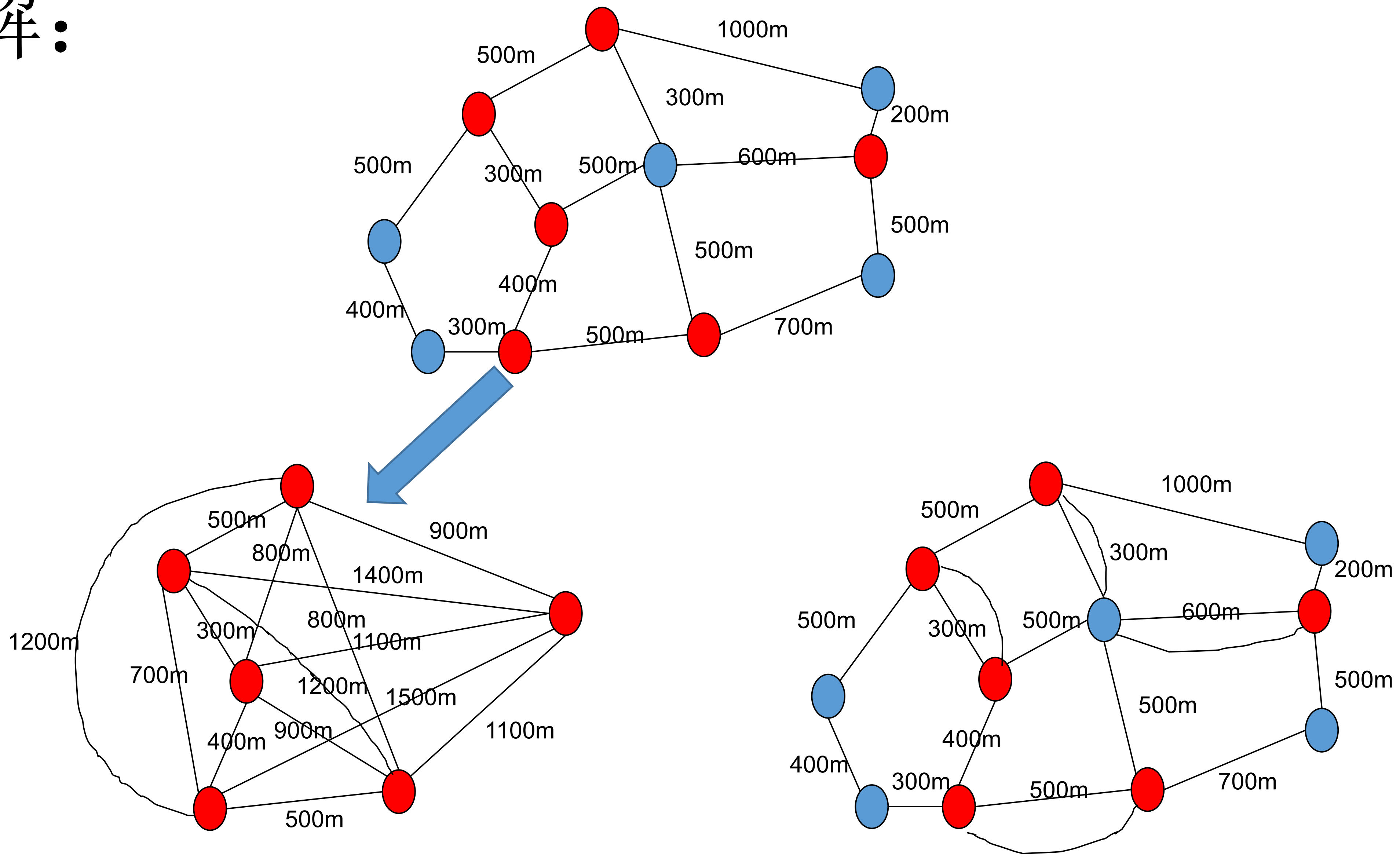
中国邮递员问题-算法

- 算法过程
  - **1．用Dijkstra算法求所有奇度顶点对之间的最短路径。(若G是欧拉图，直接用Fleury算法)**
  - **2．以G中所有奇度顶点构造带权完全图G_{2k}, 每边的权是两顶点间最短路径长度。**
  - **3．求G_{2k}中的最小权完美匹配M。**
  - **4．按照M中的各个路径添加重复边。 再用Fleury算法求欧拉回路。**



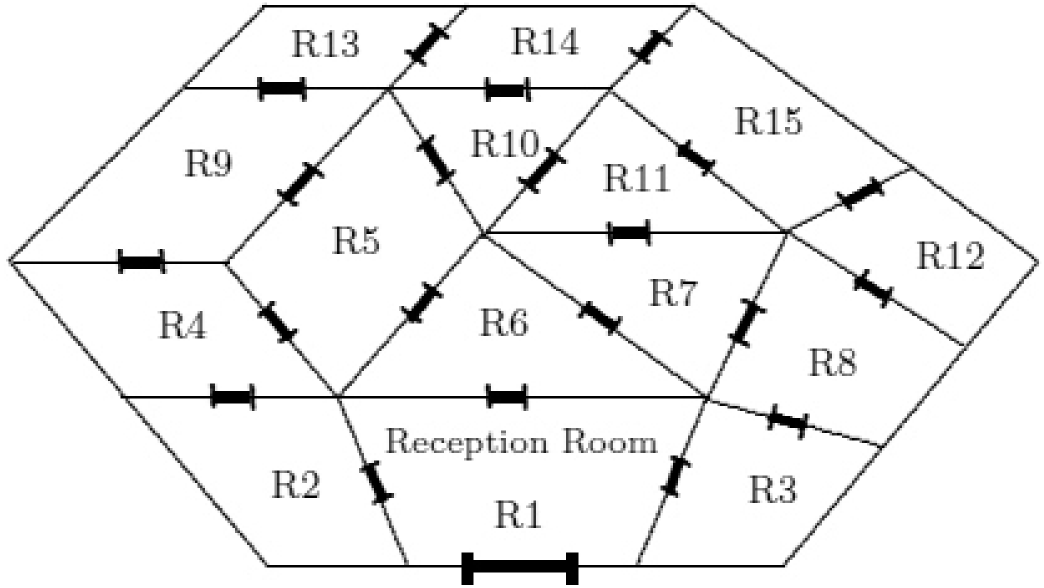


解:



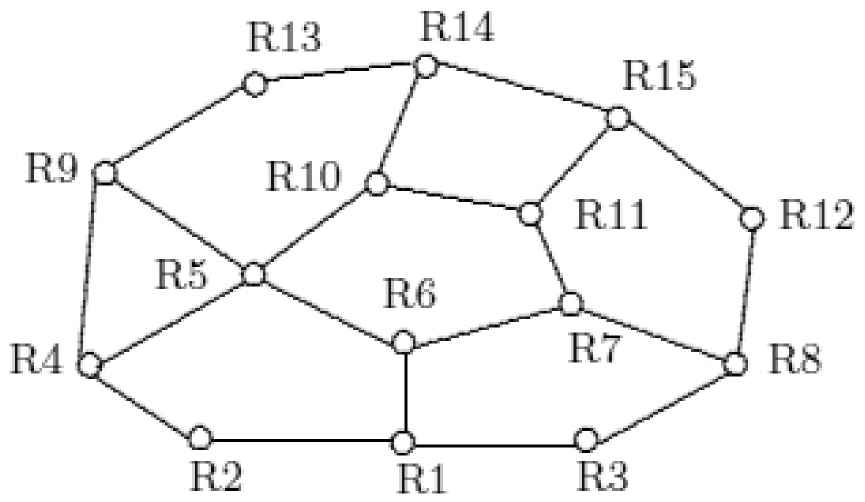
500m
1000m
300m
200m
500m
300m
500m
600m
500m
500m
400m
400m
300m
500m
700m
500m
800m
900m
1400m
1200m
300m
800m
1100m
700m
1200m
1500m
400m
900m
1100m
500m
1000m
500m
300m
200m
500m
300m
500m
600m
500m
500m
400m
400m
300m
500m
700m

同样的问题：



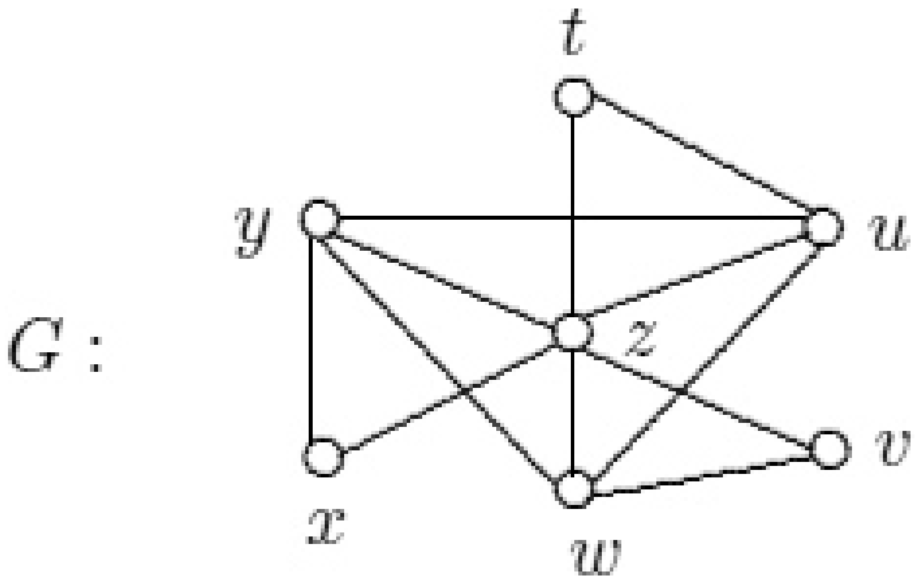
R13
R14
R15
R9
R10
R11
R5
R12
R4
R6
R7
R8
Reception Room
R2
R1
R3

$G:$



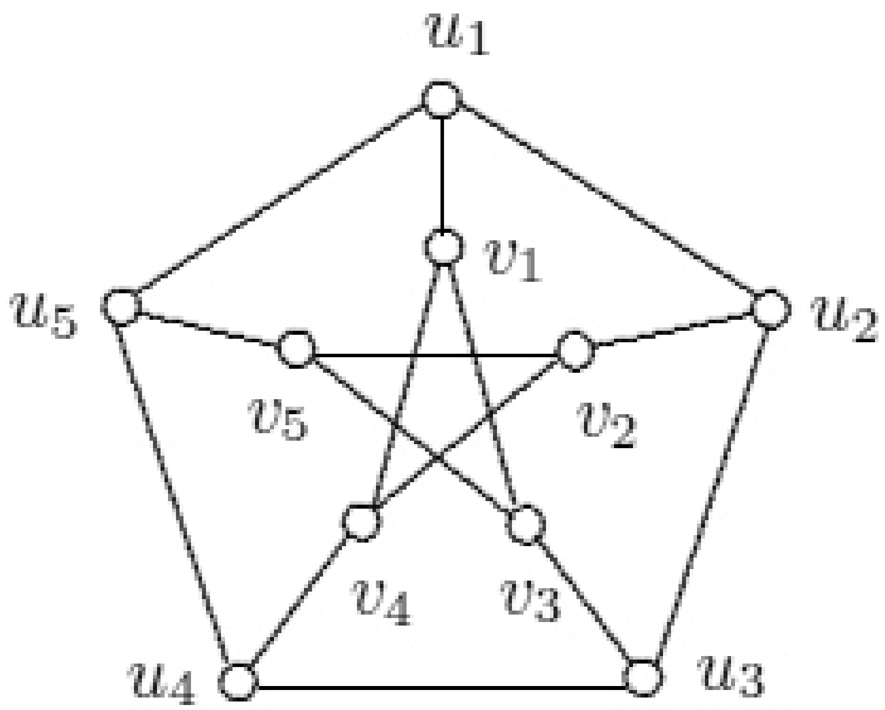
R13
R14
R15
R9
R10
R11
R12
R5
R6
R4
R7
R8
R2
R1
R3

图中节点在哈密尔顿回路中的特质



这张图会是哈密尔顿图吗？

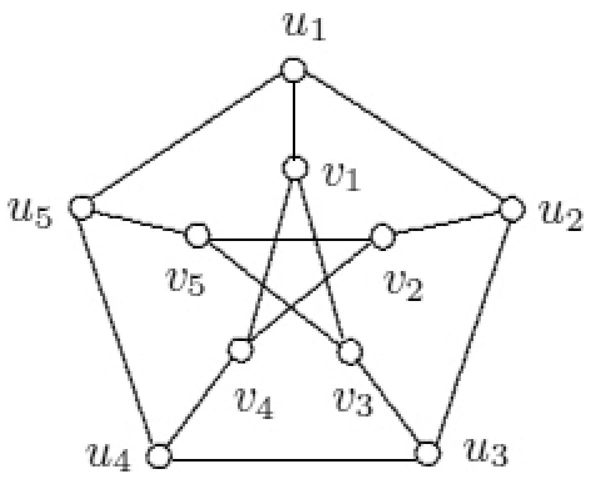
Peterson图不是哈密尔顿图

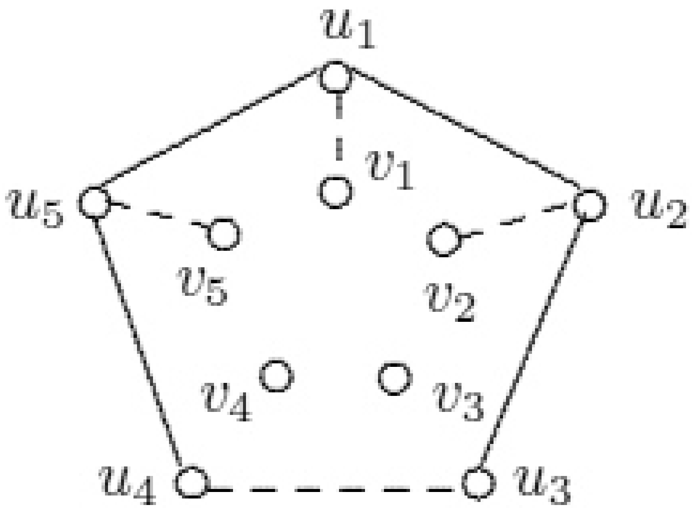


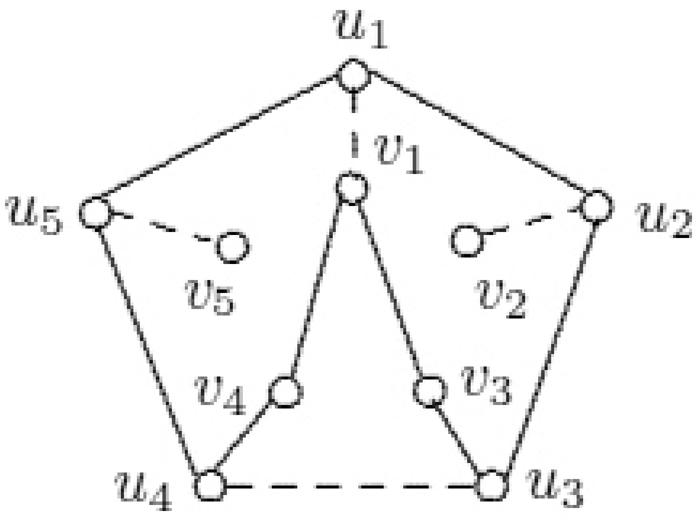
每个点用且仅用两条边！

反证法+构造法：

1）外环贡献4条边





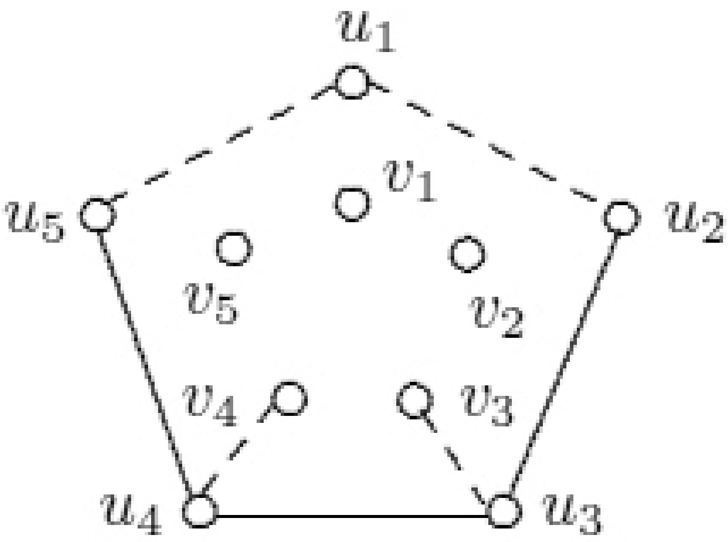


C1和c2中最少贡献5条边=》
不失一般性，c1至少贡献3条边

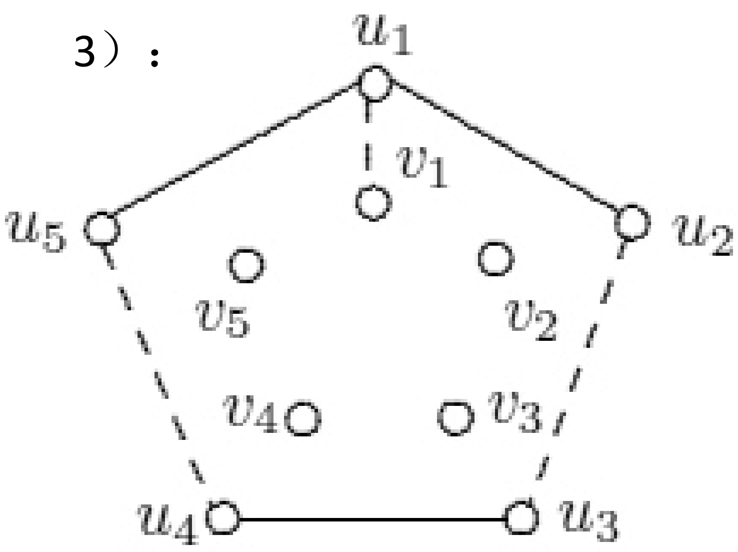
u4,v4边和u3,v3边必须贡献出来

继续：

2）外环贡献了3条边：



3）：

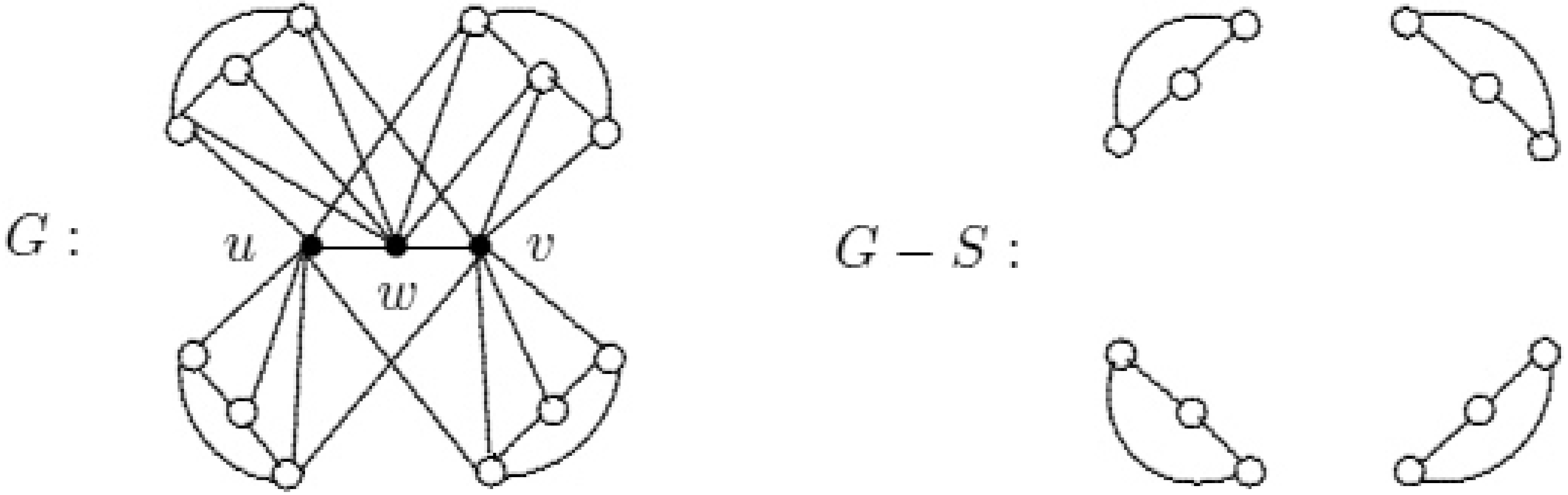


Theorem 6.5 *If G is a Hamiltonian graph, then for every nonempty proper set S of vertices of G,*

$$k(G - S) \leq |S|.$$

你能解释一下，这个定理背后的物理（直观）原理吗？

这个定理被称为H图的必要条件定理，如何理解和应用这个定理？



Theorem 6.6 Let G be a graph of order $n \geq 3$. *If*

$$\deg u + \deg v \geq n$$

for each pair u, v of nonadjacent vertices of G, then G is Hamiltonian.

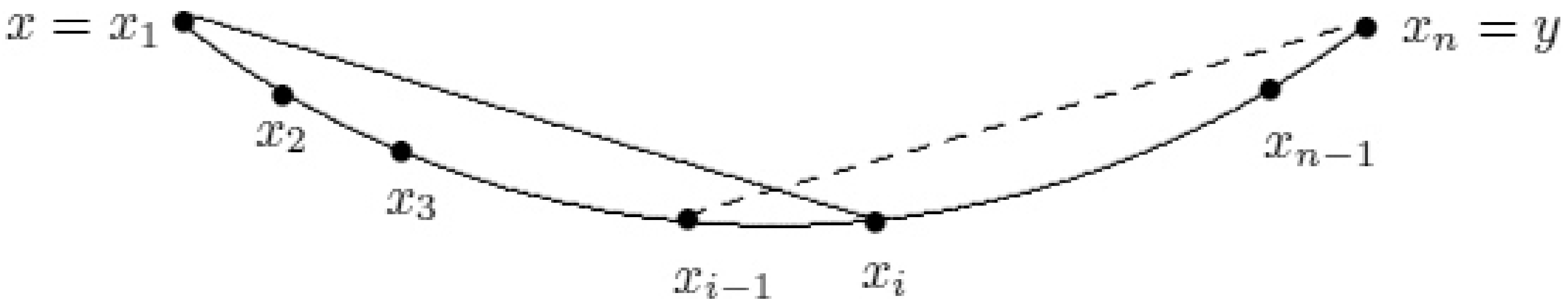
Proof.

1,It may be the case that if we add certain edges to *G*, then the resulting graph is still not Hamiltonian.

2, Add as many edges as possible to *G* so that the resulting graph *H* is not Hamiltonian. Also, $\deg_H u + \deg_H v$ >= n for every pair *u*, *v* of nonadjacent vertices of *H*.

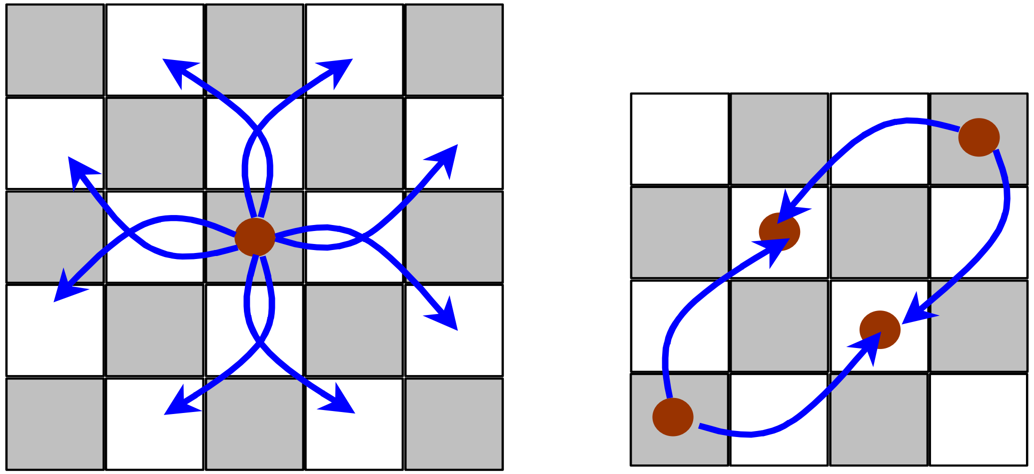
3, *H* contains a Hamiltonian *x* - *y* path $P = (x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y)$ for any nonadjacent vertices x,y

4, This Hamiltonian *x* - *y* path can be reconstructed to be a Hamiltonian cycle.



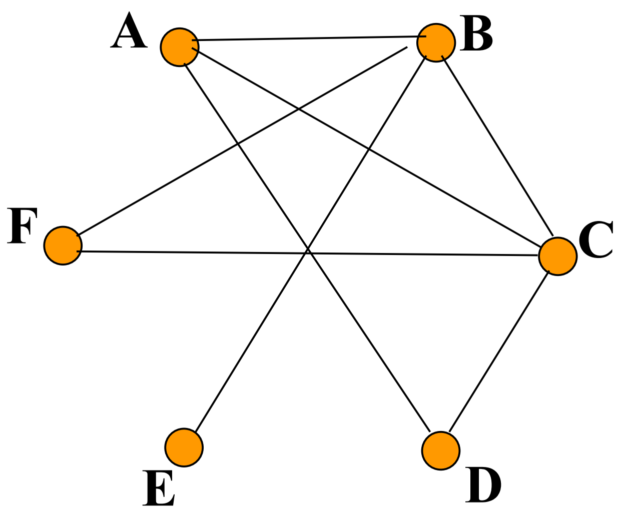
棋盘上问题

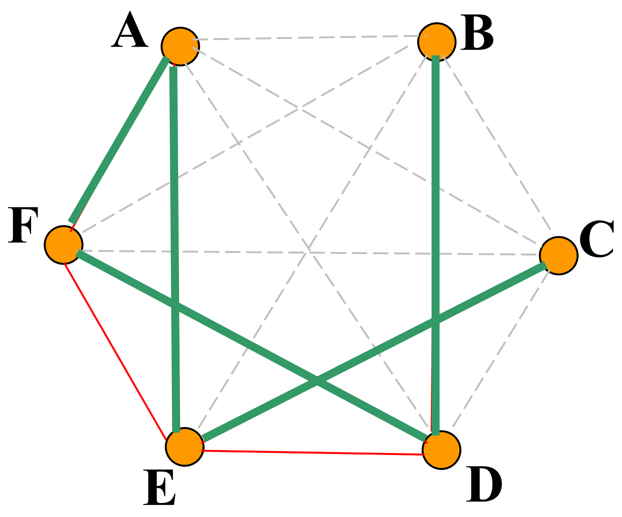
- 在4×4或5×5的缩小了的国际象棋棋盘上，马(Knight)有可能从某一格开始，跳过每个格子一次，并返回起点吗？



安排考试日程

- 问题: 在6天里安排6门课 – A,B,C,C,E,F -的考试，每天考1门。假设每人选修课的情况有如下的4类：DCA，BCF，EB，AB。如何安排日程，使得没有人必须连续两天有考试？





旅行推销员(TSP)问题

- 问题：n个城市间均有道路，但距离不等，旅行推销员从某地出发，走过其它n-1个城市，且只经过一次，如何选择最短路线？
- 数学模型：
  - 构造无向带权图G， V_G中的元素对应于每个城市， E_G中每个元素对应于城市之间的道路，道路长度用相应边的权表示。
  - 则问题的解对应于G中包含所有边的权最小的哈密尔顿回路。
  - G是带权完全图， 总共有n!/2条哈密尔顿回路。因此，问题是如何从这n!/2条中找出最短的一条。

  (**给你一点感觉**：含20个顶点的完全图中不同的哈密尔顿回路有约6000万亿条-(1.21645×10^{17})/2，若机械地检查，每秒处理10万条，需2万年。)

Open topics

- 底图是完全图的有向图称为竞赛图。请证明：竞赛图一定含有有向哈密尔顿通路
  - 相关概念请自行查阅资料
- 请你给出一种合理的循环赛排名方法