

考试科目名称 计算机问题求解 (二)

考试日期: 2018 年 07 月 08 日 教师: 陶先平、马骏、魏恒峰

系 (专业): 计算机科学与技术系 年级: 2017 级

姓名: _____ 学号: _____ 成绩: _____

题号	一	二	三	四	五	六	七			
分数										

注意事项:

- 诚信考试, 不得作弊。
- 若对题意有疑问, 请及时提出。
- 不要在一道题目上纠缠太久, 也不要轻易放弃一道题。
- 提示: 试题后的提示仅作提示之用, 不排除其它解法。
- 对于算法设计题, 请先用自然语言阐述算法原理。只写伪代码会极大地刺激批卷人扣分的欲望。

题目 1 (排序 (Sorting))

现有一堆石头和一个天平, 请借助天平将石头按照重量进行排序。你所能做的基本操作是通过一次称量比较两块石头的轻重。

- (1) 请设计算法完成该任务 (要求给出伪代码), 并分析算法在最坏情况下的渐近时间复杂度。
- (2) 该问题本身的难度是什么? 请证明你的结论。

题目 2 (算法方法 (Algorithmic Method))

定义 (凸多边形的直径) 凸多边形上任意两点间的距离的最大值称为该凸多边形的直径。

问题: 求凸多边形的直径。

- (1) 请给出该问题的解形式和解空间形式, 并结合该问题解释“解空间搜索”的含义。
- (2) 设计一个线性算法求解该问题, 并解释算法是如何进行解空间搜索的。

题目 3 (随机算法 (Randomized Algorithm))

考虑如下所示的用于产生有偏比特位 (biased random bit) 的随机算法 ONEINTHREE。其中, 子过程 FAIRBIT 以相同的概率返回 0 或 1。(假设对 FAIRBIT 的不同调用是相互独立的。)

```

1: procedure ONEINTHREE()
2:   if FAIRBIT() = 0 then
3:     return 0
4:   else
5:     return 1 - ONEINTHREE()

```

- (1) 证明: ONEINTHREE 返回 1 的概率是 $\frac{1}{3}$ 。
- (2) 假设你现在有了一个以 $\frac{1}{3}$ 的概率返回 1 的过程 ONEINTHREE, 请设计一个能以相同概率返回 0 或 1 的随机算法 FAIRBIT。

(提示: 一种可能的方式是考虑连续调用两次 ONEINTHREE, 然后拒绝掉该拒绝的。)

题目 4 (计数 (Counting))

考虑整数 $1 \cdots n$ 的排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 。

定义 (逆序对) 如果 $i < j$ 且 $a_i > a_j$, 则称 (i, j) 是该排列的一个逆序对。

定义 (逆序表) 记 $b_j = |\{a_i \mid i < j \wedge a_i > a_j\}|$, 则称 $b_1 b_2 \cdots b_n$ 为该排列的逆序表。

- (1) 证明: 在 “ $1 \cdots n$ 的所有排列” 与 “大小为 n 的所有逆序表” 之间存在双射。

(修改为: 任取 $1 \cdots n$ 的排列 σ , 存在大小为 n 的逆序表 τ , 使得 τ 是 σ 的逆序表; 任取大小为 n 的逆序表 τ , 存在 $1 \cdots n$ 的排列 σ , 使得 τ 是 σ 的逆序表。)

(提示: 必要的时候从右往左看逆序表。)

- (2) 记 $I_n(k)$ 为恰有 k 个逆序对的 $1 \cdots n$ 的排列的数目。求 $I_n(0)$ 、 $I_n(1)$ 、 $I_n(2)$ 以及 $I_n(3)$ 。

(提示: 在计算 $I_n(3)$ 时, 你可能需要使用 $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$, $m, n \geq 0$ 。)

题目 5 (哈希方法 (Hashing))

给定哈希函数 $h: K \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$ (K 表示所有键值构成的集合) 以及一个有 m 个槽 (slot) — 记为 $0, 1, \dots, m-1$ — 的哈希表。我们按如下探测 (probe) 策略查找给定键值 k 在该哈希表中的位置:

- (I) 计算 $j = h(k)$, 并令 $i = 0$ 。
- (II) 如果槽 j 为空或者槽 j 里是键值 k , 则结束查找。
- (III) 令 $i = i + 1$ 。
 如果 $i = m$, 则表示哈希表已满, 结束查找。
 否则, 令 $j = (i + j) \bmod m$, 并跳转至步骤 II。

假设 m 可以表示成 2 的整数幂。

- (1) 设 $m = 8$, $h(k) = k \bmod m$ 。假设使用与上述探测策略相对应的插入算法, 请给出按序插入键值 3, 5, 11, 4, 12 之后的哈希表的状态, 并给出此时的负载因子 α 。
- (2) 证明: 上述探测策略是一种二次探测 (quadratic probing) 策略。
 (提示: 二次探测策略使用形如 $h'(k, i) = (h(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$ 的哈希函数。)
- (3) 证明: (对符合条件的任意 m 和 h) 在最坏情况下, 上述探测策略需要逐个探测哈希表的每个槽。

题目 6 (二叉搜索树 (BST))

请扩展 BST 数据结构, 使其能在 $O(\log n)$ 时间内完成如下操作:

- FINDKTH(r, k): 返回以 r 为根节点的 BST 中的第 k 小的元素。(该 BST 的节点数为 n 。)

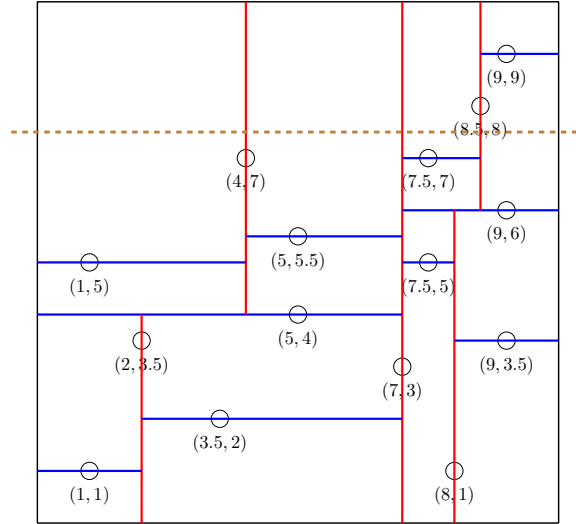
请给出扩展方案和 FINDKTH(r, k) 算法, 并证明算法的正确性。(不要求给出插入、删除操作的算法。)

题目 7 (分治法 (Divide and Conquer))

如图所示的矩形内包含 $n \in \mathbb{N}$ 个点。kd-tree 是一种用以维护点之间的位置关系的数据结构, 它按如下算法递归地划分该矩形:

- (I) 选择 x 轴方向上的 (下; lower) 中位点, 过该点作 x 轴的垂线, 将原矩形划分为两个小矩形。
- (II) 对这两个小矩形执行 (I) 中类似的步骤, 但是将 x 轴改为 y 轴。
- (III) 递归执行 (I) (II) 步骤, 交替进行水平和垂直划分。

如果当前考察的矩形内部不包含点, 则退出递归, 并称这样的矩形为“单元格”(cell)。



给定按上述算法构建的 kd-tree, 回答下列问题。

- (1) 一条水平线 (如图中的虚线) 最多会穿过多少个单元格? 要求给出 Θ 结论。请列出递归式, 并通过画递归树 (recursion tree) 猜解、替代法 (substitution) 证明的方式求解该递归式。
- (2) 给定一条水平线, 请设计算法统计在该水平线之上 (above, 不是 on) 的点的数目。请明确指出算法所使用的关键操作, 并说明算法的时间复杂度为 $O(\sqrt{n})$ 。可直接使用 Master 定理求解递归式。
(提示: $T(n) = \square T(\frac{n}{\Delta}) + \diamond = O(\sqrt{n})$ 。)