数学归纳法的要求

赵建华

数学归纳法（针对自然数的性质）

- 证明的性质：
  - $\forall x \in N \cdot P(x)$
- 证明的方式
  - 基础步骤：证明$P(0)/P(1)$成立
  - 归纳步骤：
    - 假设$P(k)$成立，证明$\mathrm{P}(\mathrm{k}+1)$也成立。
    - 或者假设$P(0), P(1), \ldots, P(k)$成立，证明$\mathrm{P}(\mathrm{k}+1)$也成立

数学归纳法（针对一般的集合）

- 证明的性质：
  - $\forall x \in S \cdot P(x)$，其中S为某个集合
- 证明的方式
  - 首先需要把S按照某种方法分成集合$S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$，即 $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$
    - 分割的方法通常很简单，比如，对于图的集合可以按照图的顶点数量分割，字符串集合可以按照串的长度分割，树可以按照层数分割，···
    - 可以按照证明的要求分割不同的算法
  - 基础步骤：证明$\forall x \in S_0 \cdot P(0)$成立
  - 归纳步骤：
    - 假设$\forall x \in S_k \cdot P(x)$成立，证明$\forall x \in S_{k+1} \cdot P(x)$ 也成立。
    - 或者
    - 假设$\forall x \in \bigcup_{i=1}^{k} S_k \cdot P(x)$成立，证明$\forall x \in S_{k+1} \cdot P(x)$也成立

证明$\forall x \in S_{k+1} \cdot P(x)$的一般模板

- 假设x是S_{k+1}中的任意元素，根据x构造出$\bigcup_{i=1}^{k} S_k$ 中的元素$x_0, x_1, \ldots, x_m$。
  - 根据归纳假设，我们有$P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_m)$成立。
- 由$P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_m)$推导出$P(x)$成立。

例子（1）

也可以理解为

全集S：每个顶点度数都为2的图

性质：G的顶点集合可以分为1个或多个…

成一个简单回路。

- 全集S：无向图的集合
- 性质P：如果G的每个顶点的度数都是2，那么G的顶点集合可以分成1个或多个…

- S的分解
  - 按照图的顶点个数进行分解，Si对应于具有i个顶点的无向图。

例子（2）

- 基础：
  - 对于一个顶点的图G，P成立
- 归纳步骤：
  - 假设对于$\bigcup_{i=1}^{k} S_i$中的图P都成立，且G是S_{k+1}中的图。或者直观地讲
    - 对于多有顶点数小于等于k的图，P都成立，而G是具有k+1个顶点的图
  - 证明方式不限，
    - 可以通过在G中删除一个顶点和关联的两条边，然后在添加一条边，得到一个顶点数目为k的图G’。根据假设P对于G’成立，推导出P对于G也成立。
    - 也可以在G中，从任意顶点出发寻找一个回路，然后删除这个回路得到一个顶点数小于等于k的图G’，…

一些错误的归纳步骤（1）

- 假设n=k时，可以分成k个互不相交的子集，使得,…，此时k个子集中任务一个子集，…
  - 点评：这是从$\bigcup_{i=1}^{k} S_i$中的元素构造S_{k+1}中的元素。问题是：你怎么保证S_{k+1}中的元素都可以这么构造得到？
- 假设顶点个数n=k时P成立，…，则当n=k+1时，可以考虑在n=k的图中增加一个度数为2的顶点v'，…
  - 点评：仍然是从$\bigcup_{i=1}^{k} S_i$中的元素构造S_{k+1}中的元素，不能保证S_{k+1}中的元素都能够这么构造得到。
- 设当n=k时性质成立，图为G；当n=k+1时，图为G'。V'-V=V''。V''中含有一个度数为2的顶点，…
  - 点评：G和G'没有任何关系，V'-V表示什么？

一些错误的归纳步骤（2）

- 假设n=k时命题成立，当n=k+1时，此点s的邻接顶点位于同一个子集vi内…
  - 这个实际上还是从$\bigcup_{i=1}^{k} S_i$中的元素构造S_{k+1}中的元素