'Movement' Group
Introduction to Galois Theory

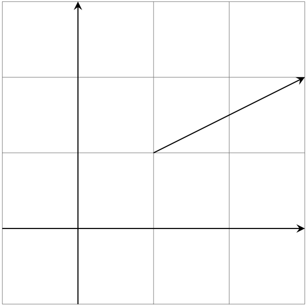
Rivers

Nanjing University

2019 年 3 月 11 日

Table of Contents

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$



Subgroup:

All Linear Subspace

Associative:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Identity Element:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

Inverse Element:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

Commutative:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Table of Contents

定理阐述

定理

有理数域上的大于等于 5 次的多项式没有根式解

多项式的根的对称性

考虑:

$$(x^2+1)(x^2-5)=0$$

其解:

$$x=\pm\sqrt{5},\pm i$$

对称性: 含有 $\pm\sqrt{5}$ 的多项式，交换 $\pm\sqrt{5}$，多项式仍成立

$$(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})=6+2\sqrt{5}$$

$$(1-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=6-2\sqrt{5}$$

方程的解与数域

数域

对于加减乘除四则运算封闭的集合

有理数域 $\mathbb{Q}$ 是最小的数域

方程的解与数域

数域

对于加减乘除四则运算封闭的集合

有理数域 $\mathbb{Q}$ 是最小的数域

为什么有理系数一次方程的解可以由四则运算给出，
而二次方程需要开方？

域扩张

考虑一个方程:

$$x^2 - 5 = 0$$

这个方程在有理数里无解，但是通过对 5 开方，我们可以获得 $\sqrt{5}$，而后将 $\sqrt{5}$ 和有理数进行加减乘除四则运算，就可以得到新的数域，记作 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. 我们由此可以看到，开方的操作使得原来的有理数域扩大了，这也被称之为域扩张。

解的对称性与域的对称性

自同构

$$f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

自同构群

自同构群

一个域的所有的自同构及其复合操作，构成的群

伽罗瓦群

伽罗瓦群

域 $\mathbb{F}$ 扩展为域 $\mathbb{E}$，则 $\mathbb{E}$ 的自同构群中，由不改变 $\mathbb{F}$ 的变换构成的子群，记作 $Gal(\mathbb{E}/\mathbb{F})$.

考虑:

$$(x^2-5)(x^2+1)=0$$

其解为 $x=\pm i, \pm\sqrt{5}$

可以对应以下三个域:

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) & \text{- - - - - - - -} & \mathsf{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)/\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)) \\
\uparrow & & \downarrow \\
\mathbb{Q}(\sqrt{5}) & \text{- - - - - - - -} & \mathsf{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)/\mathbb{Q}(\sqrt{5})) \\
\uparrow & & \downarrow \\
\mathbb{Q} & \text{- - - - - - - -} & \mathsf{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)/\mathbb{Q})
\end{array}$$

To be continued...

- 正规子群
- 商群
- 正规子群链
- ....