子群

赵建华，陶先平

内容

- 子群的定义及其判定
- 有限群的子群的判定
- 陪集与集合的划分
- 陪集关系
  - 陪集关系是等价关系
- 拉格朗日定理
- 拉格朗日定理的重要推论

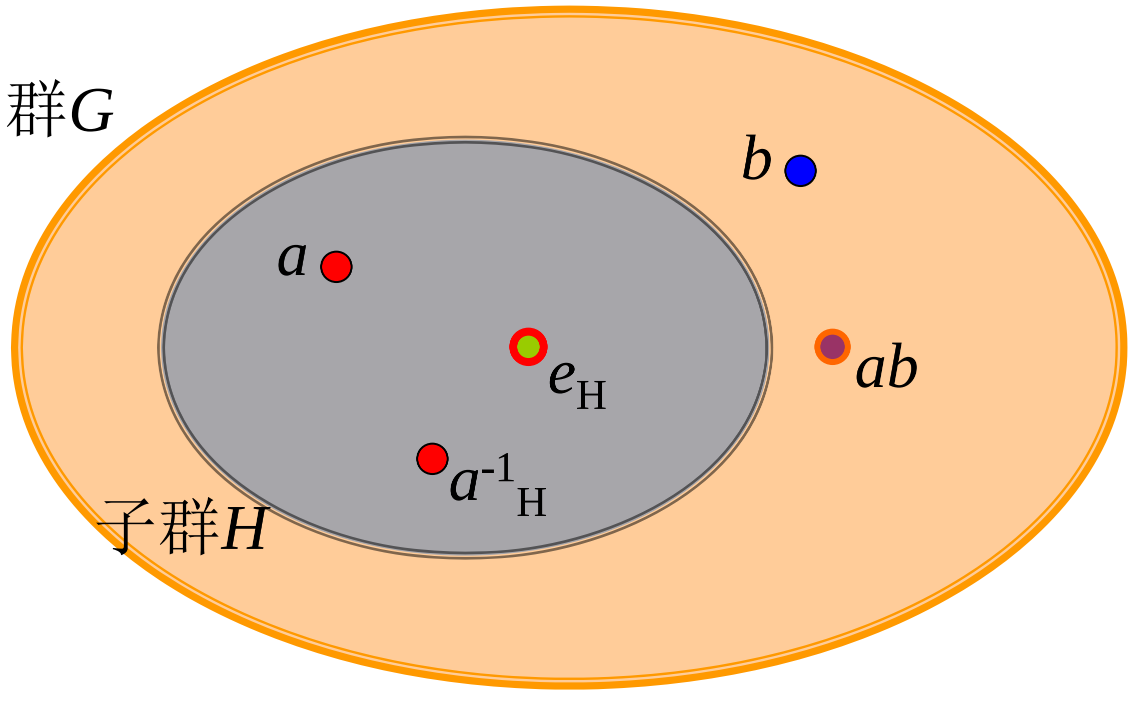
子群的定义

- 设$< G,\circ >$是群，H是G的非空子集，如果$< H,\circ >$也是群，则H是G的子群。
  - 严格的说，$< H,\circ >$中的运算是(G, $_0$)中运算在H上的“限制’
- 例子：偶数加系统是整数加群的子群
- 平凡子群
  - G是自身的子群
  - 设G的单位元是e，H={e}是G的子群

注意：结合律在G的子集上均成立。

思考

问题1：ab应该在哪儿？



问题2：

e_H是否一定是e_G?

子群的判定定理一

- G是群，H是G的非空子集。H是G的子群当且仅当：
  - $\forall a,b\in H$, $ab\in H$, 并且
  - $\forall a\in H$, $a^{-1}\in H$

  （注意：这里a^{-1}是a在G中的逆元，当H确定为群后，它也是a在H中的逆元）

- 证明
  - 必要性：显然（注意群中逆元素的唯一性）
  - 充分性：只须证明G中的单位元也一定在H中，它即是H的单位元素。

子群的判定定理二

- G是群，H是G的非空子集。H是G的子群当且仅当：

$$\forall a,b\in H,\ ab^{-1}\in H$$

- 证明
  - 必要性：$\forall a,b\in H$, 因为H是群，$b^{-1}\in H$，由封闭性可知 $ab^{-1}\in H$
  - 充分性：
    - 单位元素：因为H非空，任取$a\in H$, $e=aa^{-1}\in H$
    - 逆元素：$\forall a\in H$, 因为$e\in H$, 所以 $a^{-1}=ea^{-1}\in H$
    - 封闭性：$\forall a,b\in H$, 已证$b^{-1}\in H$，所以$ab=a(b^{-1})^{-1}\in H$

子群的判定 – 有限子群

- G是群，H是G的非空有限子集。H是G的子群当且仅当：

$$\forall a,b\in H,\ ab\in H$$

- 证明
  - 必要性显然
  - 充分性：只须证明逆元素性

  若H中只含G的单位元，H显然是子群。否则，任取H中异于单位元的元素a, 考虑序列

$$a, a^2, a^3, \ldots$$

注意：该序列中各项均为有限集合H中的元素，因此，必有正整数i,j(j>i), 满足：$a^i=a^j$, 因此：

$$a^{-1}=a^{j-i-1}\in H$$

生成子群

- 设G是群，$a \in G$，构造G的子集H如下：

$$H = \{a^k \mid k\text{是整数}\}$$

则H构成G的子群，称为a生成的子群 $\langle a \rangle$

- 证明：
  - H非空：a在H中
  - 利用判定定理二：

$$\forall a^m, a^l \in H,\ a^m(a^l)^{-1} = a^{m-l} \in H,$$

群的中心

- 设G是群，构造G的子集C如下：

$$C = \{a \mid a \in G, \text{且} \forall x \in G, ax=xa \}$$

则C构成G的子群，称为G的中心

对于可交换群，中心就是群本身。

- 证明：
  - C非空：因为单位元在C中
  - 利用判定定理二：即证明对任意的$a,b \in C$, (即$ax=xa$, $bx=xb$对G中一切x成立)，$ab^{-1} \in C$,
  - 即$(ab^{-1})x=x(ab^{-1})$ 对G中一切x成立

$$(ab^{-1})x = a(b^{-1}(x^{-1})^{-1}) = a(x^{-1}b)^{-1} = a(bx^{-1})^{-1} = a(xb^{-1}) = x(ab^{-1})$$

左(右)陪集及其表示

- 若H是群G的一个子群，a是G中的任意一个元素，定义集合aH如下：

$$aH=\{ah|h\in H\}$$

- aH称为H的一个左陪集
  - 由群的封闭性可知，aH也是G的子集
  - $\forall h\in H$, $ah\in H$ 当且仅当$a\in H$, (Why?)
- 相应地可定义右陪集

陪集与代表元素

- 对于群G的一个子群，任取G中一个元素a，均可以构造一个左陪集aH。a称为这个陪集的代表元素。

- 任意两个不同的元素作为代表元素构造的左陪集合*未必*不相同。

陪集的例子

- 设（I,+）是整数加群，$I_3=\{\ldots -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$是一个子群，则$2I_3=\{\ldots -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$是一个左陪集。

注意：实际上$2I_3=5I_3$。

- $S_3=\{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$，$H=\{(1), (12)\}$是一个子群，$(13)H=\{(13), (132)\}$是一个左陪集。

注意: $(13)H \neq H(13)=\{(13)(123)\}$

陪集与分划

- 设H是群G的子群，则H的所有左陪集构成G的分划
  - G中任意元素a一定在某个左陪集中：$a \in aH$
  - $\forall a,b \in G$, $aH=bH$或者$aH \cap bH=\varnothing$
    - 等价于$aH \neq bH \Rightarrow aH \cap bH=\varnothing$
    - 不失一般性，设存在$t=ah^* \in aH$, 但$t \notin bH$。
    - 反证法，假设$aH \cap bH \neq \varnothing$, 即存在$c \in aH \cap bH$, 令$c=ah_1=bh_2$, 则$a=bh_2h_1^{-1}$,

      $t=ah^*=b(h_2h_1^{-1}h^*) \in bH$，矛盾！所以：$aH \cap bH=\varnothing$
- 注意：a, b在同一子集内 当且仅当 $a \in bH$且$b \in aH$ 当且仅当$b^{-1}a \in H$

左陪集关系

- 设H是群G的子群，定义G上的二元关系R如下：
  $\forall a,b\in G$, $(a,b)\in R$当且仅当$b^{-1}a\in H$
- R是G上的等价关系
  - 自反性：$\forall a\in G$, $a^{-1}a=e$
  - 对称性：注意$a^{-1}b=(b^{-1}a)^{-1}$
  - 传递性：如果$b^{-1}a\in H$, $c^{-1}b\in H$, 则
    $$c^{-1}a=c^{-1}(bb^{-1})a=(c^{-1}b)(b^{-1}a)\in H$$
- $[a]_R=aH$
  - $x\in[a]_R \Leftrightarrow aRx \Leftrightarrow x^{-1}a=h\in H \Leftrightarrow a=xh \Leftrightarrow x=ah^{-1}\in aH$

拉格朗日定理

- 每个左陪集与相应的子群等势
  - 对任意的左陪集aH, f :H→aH: f(h)=ah是双射
- 拉格郎日定理-有限群的子群的一个必要条件
  - 设G是有限群，H是G的子群，则|H|能整除|G|
  - 注意：对有限群，每个陪集元素个数有限且相同，并等于|H|, 于是|G|=k|H|, k是左陪集的个数，称为H在G中的指数，记为[G:H]

拉格朗日定理的重要推论

- 有限群G中任何元素的阶一定是$|G|$的因子
  - 证明：$|\langle a\rangle|=a$的阶
- 若G是质数阶的群，则必有$a\in G$, 满足：$\langle a\rangle=G$
  - 实际上，除单位元素外，G中任何元素的生成子群即G本身

拉格朗日定理推论的应用

- 6阶群G必含3阶子群
- 证明
  - 如果G中有6阶元素a, 则b=aa是3阶元素，因此b是3阶子群
  - 如果G中没有6阶元素，则根据拉格朗日定理的推论，G中元素的阶只可能是1,2或3。
  - 如果也没有3阶元素，即$\forall x \in G$, $x^2=e$, 因此

$$\forall x \in G,\ xy=(yx)^2(xy)=yx,$$ 即G是可交换群。

因此{e,a,b,ab}构成4阶子群，但4不能整除6，这与拉格朗日定理矛盾。

$\therefore$ G中必含3阶元素a, 由a生成的子群是3阶子群。

作业

- pp.204-
  - 21
  - 22
  - 23
  - 24

拉格朗日 (Joseph Louis Lagrange 1736-1813)

- “拉格郎日是数学科学界高耸的金字塔” - 拿破伦.波那巴
- “在短得令人难以置信的时间内，他就完全靠自学掌握了他那个时代的现代分析。十六岁时（可能不太准确），拉格郎日成了在都灵的皇家炮兵学院的数学教授。然后开始了数学史上最光辉的经历之一。”
- “他的杰作《分析力学》是他作为一个十九岁的少年在都灵设想出来的。”
- 这位十八世纪最伟大，最谦虚的数学家的最著名的语录是：“我不知道。”

以上摘自 E.T.贝尔：《数学精英》

- 法国伟大的数学传统 – “4L”
  - Lagrange(1736-1813); Laplace(1749-1827); Legendre(1752-1833); Lebesgue(1875-1941) – (拉格朗日、拉普拉斯、勒让德、勒贝格)