计算机问题求解---论题3-11
图中的匹配与因子分解

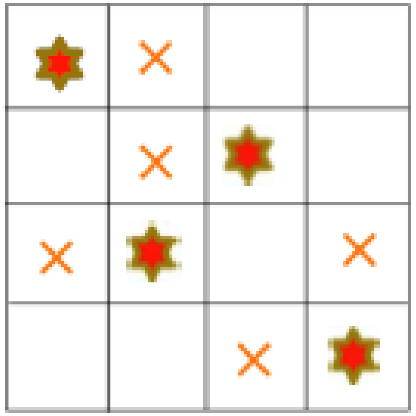
2016-11-23

	×		
	×		
×			×
		×	

要在左图所示的棋盘上放置4个士兵，任何一行或者一列恰好放一个，但不能放在有标记的格子中。

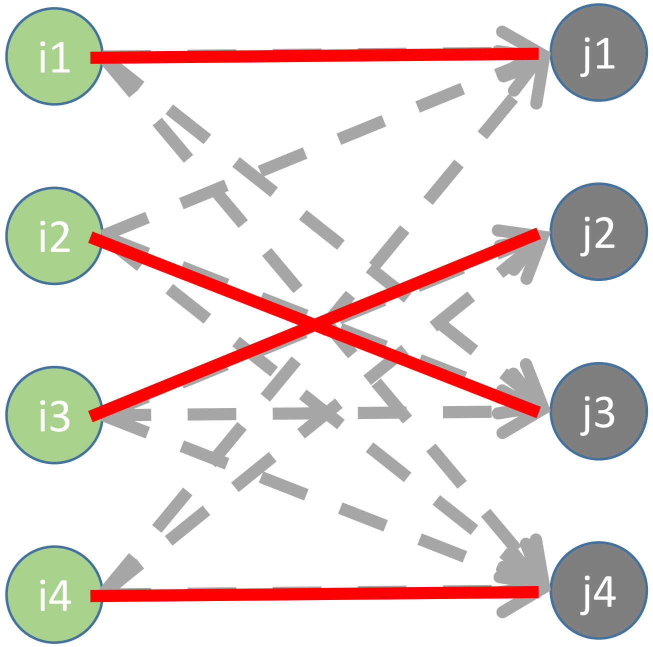
问题1:

你能建一个图模型来解这样的问题吗?



问题2:

你认为在这个模型中，问题的解应该是什么？



边集的一个子集，其中没有任何两条边有公共顶点

什么是matching？

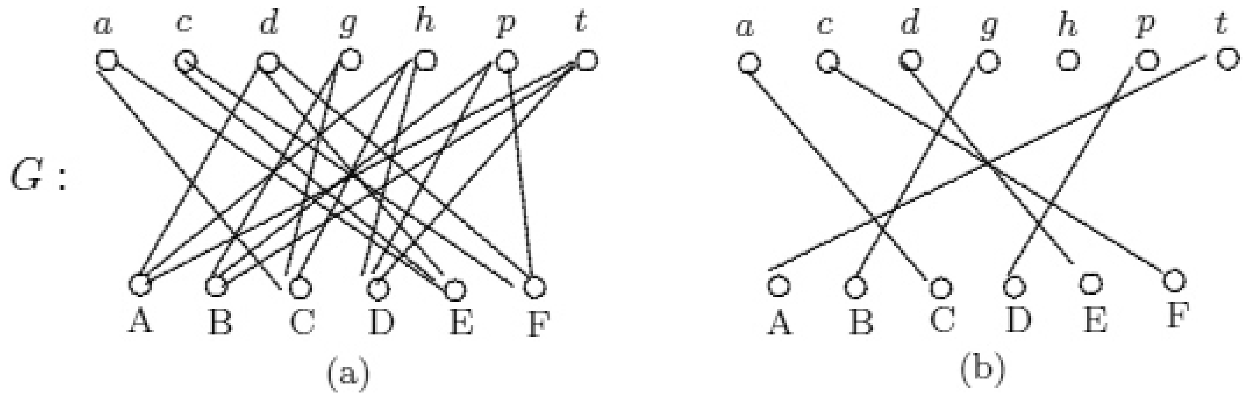
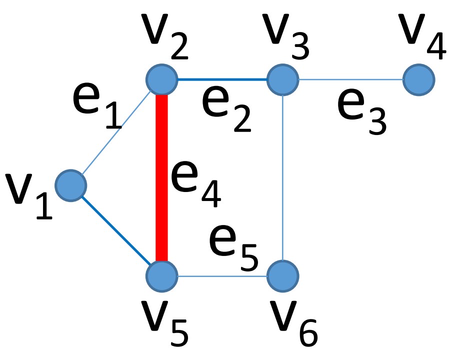
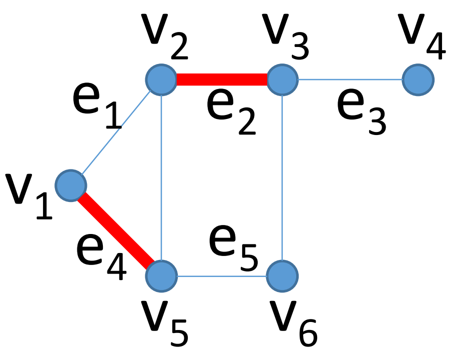


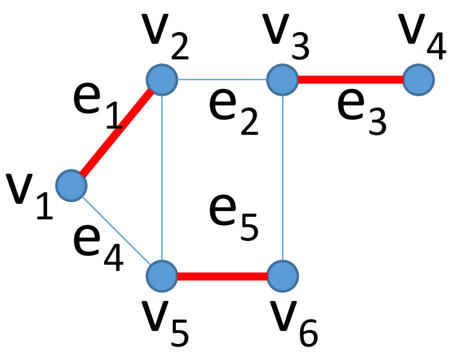
Figure 8.2: A matching in a bipartite graph

独立边集是匹配的核心概念。问题3：你能用集合论里面的基本概念解释matching吗？极大匹配？完美匹配？

匹配、极大匹配、最大匹配、完美匹配



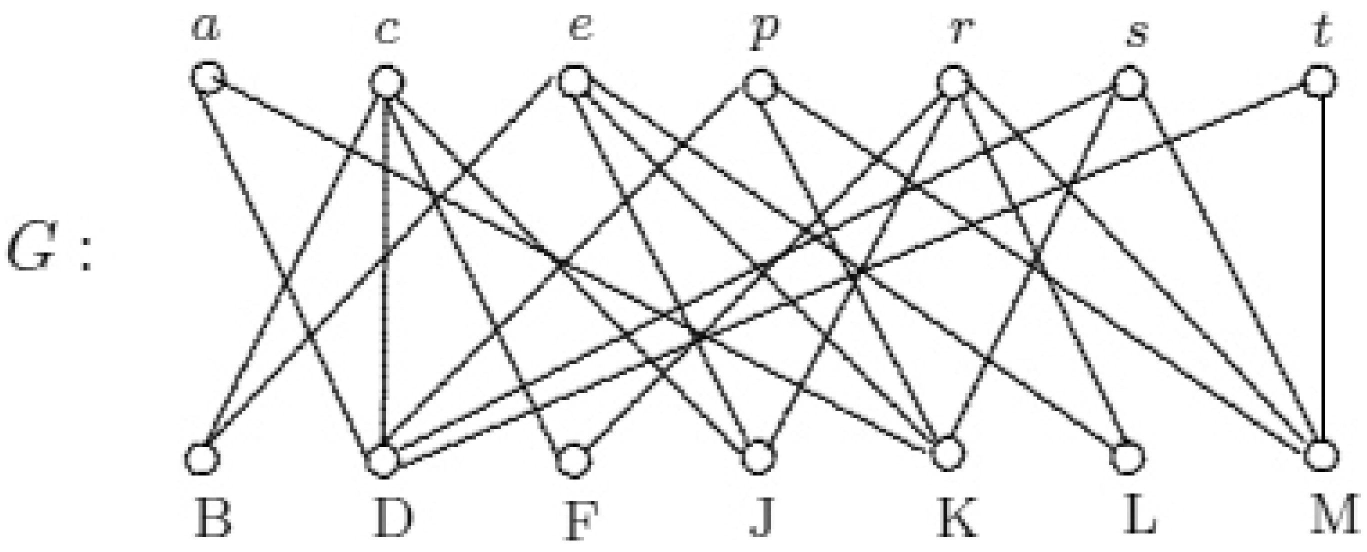




二部图中最大匹配的存在性

Theorem 8.3 *Let G be a bipartite graph with partite sets U and W such that $r = |U| \le |W|$. Then G contains a matching of cardinality r if and only if G satisfies Hall's condition.*

必要性：



Theorem 8.3 *Let G be a bipartite graph with partite sets U and W such that $r = |U| \le |W|$. Then G contains a matching of cardinality r if and only if G satisfies Hall's condition.*

- 充分性
- 奠基: |U|=1,显然
- 假设：$|U_1| \leq |W_1|$ and $1 \leq |U_1| < k$, 结论成立
- 归纳证明要点：

你能想到用数学归纳法证明吗？

Let G be a bipartite graph with partite sets U and W, where $k = |U| \le |W|$, such that Hall's condition is satisfied. We show that U can be matched to a subset of W.

- 从U任取一个*u*，从N(u)中任取一个*w*，构造H:G-{u,w}：H满足Hall条件吗?
  - 如果对U的任意子集S，|N(S)|**>**|S|,是成立的。否则，很难看出

现在你能理解为什么在归纳证明中，需要分情形证明了吗？

Case 2. There exists a proper subset X of U such that $|N(X)| = |X|$. Let F be the bipartite subgraph of G with partite sets X and $N(X)$. Since Hall's condition is satisfied in F, it follows by the induction hypothesis that X can be matched to a subset of $N(X)$. Indeed, since $|N(X)| = |X|$, the set X can be matched to $N(X)$. Let M' be such a matching.

Next, consider the bipartite subgraph H of G with partite sets $U - X$ and $W - N(X)$. Let S be a subset of $U - X$ and let

$$S' = N(S) \cap (W - N(X)).$$

We show that $|S| \leq |S'|$. By assumption, $|N(X \cup S)| \geq |X \cup S|$. Hence

$$|N(X)| + |S'| = |N(X \cup S)| \geq |X| + |S|.$$

这个定理的直观含义是什么？

Theorem 8.4 *A collection $\{S_1, S_2, \dots S_n\}$ of nonempty finite sets has a system of distinct representatives if and only if for each integer k with $1 \le k \le n$, the union of any k of these sets contains at least k elements.*

For example, consider the sets $S_1, S_2, \dots, S_7$, where

$$\begin{array}{llll} S_1 = \{1,2,3\} & S_2 = \{2,4,6\} & S_3 = \{3,4,5\} & S_4 = \{1,4,7\} \\ S_5 = \{1,5,6\} & S_6 = \{3,6,7\} & S_7 = \{2,5,7\}. & \end{array}$$

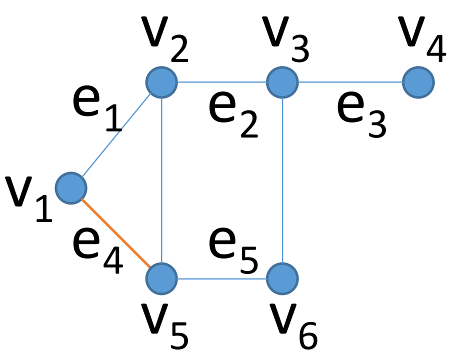
Then this collection of sets has a system of distinct representatives. In particular, 1, 2, …, 7 (that is, $i \in S_i$ for $i = 1, 2, \dots, 7$) is a system of distinct representatives. On the other hand, the sets $S'_1, S'_2, \dots, S'_6$, where

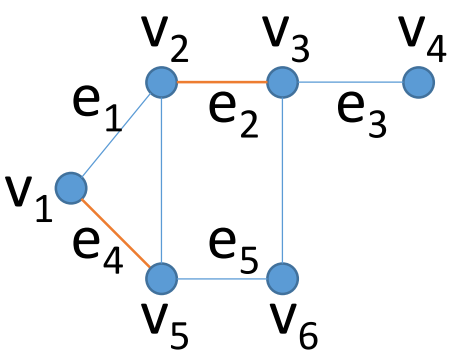
$$\begin{array}{lll} S'_1 = \{1,3,5,6\} & S'_2 = \{3,4\} & S'_3 = \{4,5\} \\ S'_4 = \{3,4,5\} & S'_5 = \{1,2,4,6\} & S'_6 = \{3,5\}, \end{array}$$

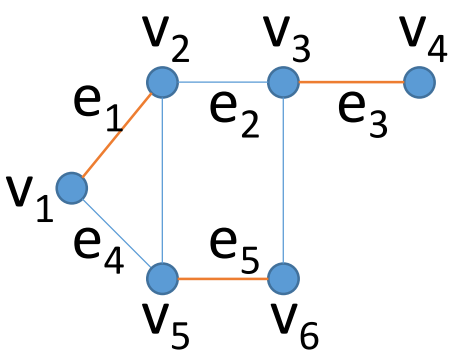
do not have a system of distinct representatives as $S'_2 \cup S'_3 \cup S'_4 \cup S'_6 = \{3,4,5\}$, so distinct representatives do not exist for the sets S'_2, S'_3, S'_4, S'_6.

边独立集(Edge Independent Set)

- **边独立集 (edge independent set)** 匹配
  - A set of independent edges of G
- **极大边独立集 (maximal edge independent set)** 极大匹配
  - 不是任何一个边独立集的真子集
- **最大边独立集 (maximum edge independent set)** 最大匹配
  - 具有最大势(cardinality)的边独立集
- **边独立数 (edge independence number)** 最大匹配的势
  - 最大边独立集的势
  - $\alpha'(G)$



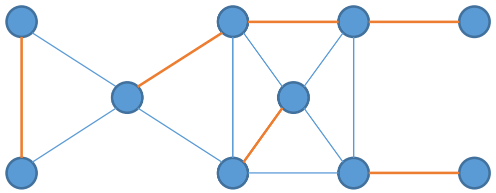


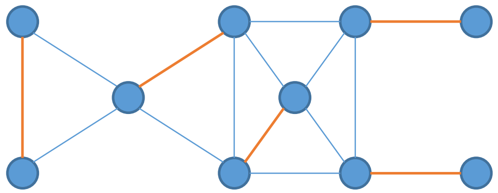


边覆盖集(Edge Cover)

- **边覆盖集 (edge cover)**
  - L是G的边覆盖集：∀u∈V(G), ∃v∈V(G), (u, v)∈L
  - 隐含要求：G中无孤立顶点，即δ(G)>0
- **极小边覆盖集 (minimal edge cover)**
  - 边数极少（任何一个真子集都不再是边覆盖集）
- **最小边覆盖集 (minimum edge cover)**
  - 边数最少
- **边覆盖数 (edge cover number)**
  - **β’(G)**：最小边覆盖集的势

仔细观察边覆盖数和边独立数，你有什么预感？





边覆盖集与边独立集

- **Theorem 8.7 若图G (n 个节点) 不包含孤立点(即δ(G)>0)，则 α'(G)+β'(G)=*n*。**

证明：

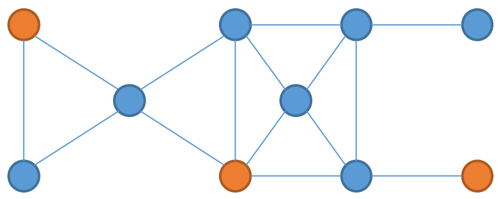
1. 基于最大边独立集M，构造势为$n-|M|=n-\alpha'(G)$的边覆盖集$\Rightarrow \beta'(G)\le n-\alpha'(G)$
   – 对每个未被M饱和的顶点，向M中增加它关联的一条边$\Rightarrow$ **构成势为$n-|M|$的边覆盖集**
2. 基于最小边覆盖集L，构造势为$n-|L|=n-\beta'(G)$的边独立集$\Rightarrow \alpha'(G)\ge n-\beta'(G)$
   – L是最小边覆盖集$\Rightarrow$ **G[L]的连通分支是星**$\Rightarrow$**G[L]有$n-|L|$个连通分支**$\Rightarrow$ 每个连通分支取一条边构成势为$n-|L|$的边独立集

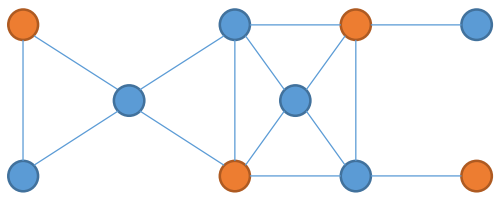
$\Rightarrow$ α'(G)+β'(G)=n

（不可能有长度大于等于3的通路或回路，
否则去掉这条边可以得到更小的边覆盖集）

点独立集

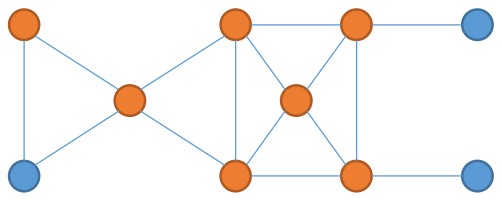
- 点独立集 (vertex independent set)
  - I是G的点独立集： $\forall u, v \in I, (u, v) \notin E(G)$
- 极大点独立集 (maximal vertex independent set)
  - 顶点数极多（不是任何一个点独立集的真子集）
- 最大点独立集 (maximum vertex independent set)
  - 顶点数最多
- 独立数 (independence number)
  - **α(G)： 最大点独立集的势**

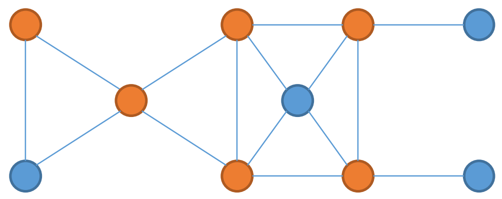




点覆盖集

- 点覆盖集 (vertex cover)
  - F是G的点覆盖集：$\forall(u, v)\in E(G), \{u, v\}\cap F\neq\emptyset$
- 极小点覆盖集 (minimal vertex cover)
  - 顶点数极少（任何一个真子集都不再是点覆盖集）
- 最小点覆盖集 (minimum vertex cover)
  - 顶点数最少
- 点覆盖数 (vertex cover number)
  - **β(G)：最小点覆盖集的势**





点覆盖集与独立集

- **F是点覆盖集当且仅当V(G)-F是点独立集。**

证明：
F是点覆盖集 $\Leftrightarrow$ G的每条边都有至少一个端点在F中 $\Leftrightarrow$ 没有两端点都在V(G)-F中的边 $\Leftrightarrow$ V(G)-F是点独立集

点覆盖集与独立集 (续)

- 推论 **F是极小点覆盖集当且仅当V(G)-F是极大点独立集**。

证明：

1. F是点覆盖集当且仅当V(G)-F是点独立集
2. F是极小点覆盖集 $\Leftrightarrow$ F中去除任意一些点就会将至少一条边的两个端点都去除 $\Leftrightarrow$ V(G)-F中加入任意一些点就会将至少一条边的两个端点都加入 $\Leftrightarrow$ V(G)-F是极大点独立集

点覆盖集与独立集 (续)

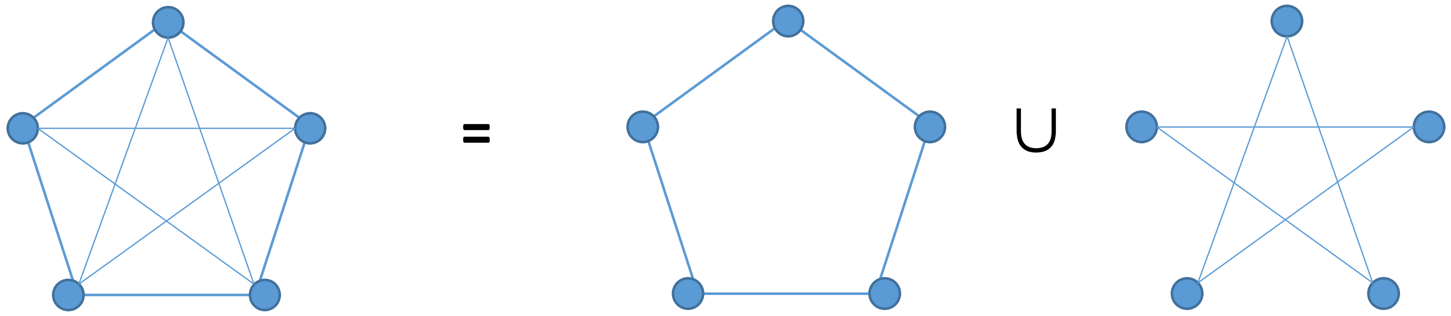
Theorem 8.8 *For every graph G of order n containing no isolated vertices,*

$$\alpha(G) + \beta(G) = n.$$

因子分解(Factorization)

- k-因子 (k-factor)
  - 图G的**k-正则生成子图（k-regular spanning subgraph）**
- 1-因子对应什么？
  - 完美匹配

- 可k-因子分解的 (k-factorable)
  - 图G有**一组k-因子**的边集构成E(G)的一个**划分**



奇分支

- 奇分支 (odd component)
  - 阶为奇数的连通分支
  - 图G的奇分支的数量记作$k_O(G)$

- 向图中增加边不会增加奇分支的数量
  - 连通一个奇分支和一个偶分支：$k_O(G)$不变
  - 连通两个奇分支：$k_O(G)$变小
  - 连通两个偶分支：$k_O(G)$不变

这个图为什么不可能有完美匹配？

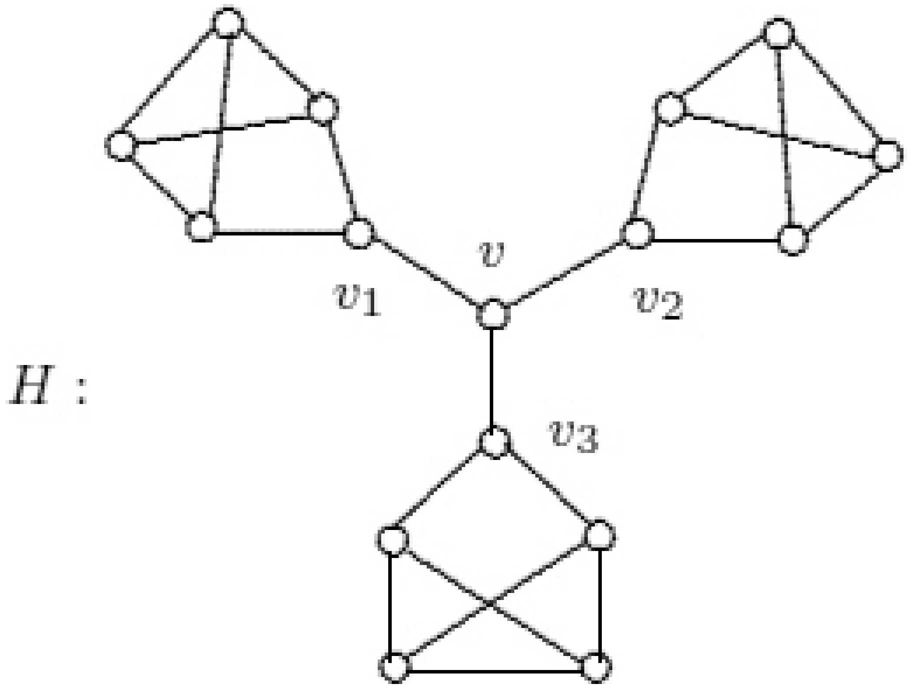


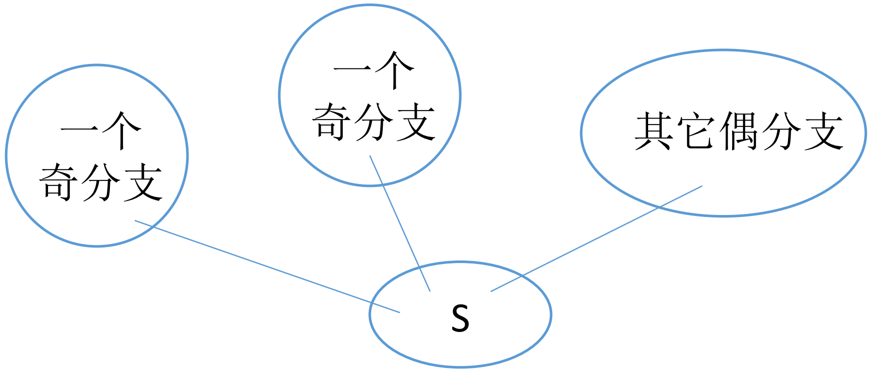
Figure 8.8: A 3-regular graph containing no 1-factor

有完美匹配的充要条件(Tutte,1947)

- **Theorem 8.10 图G有一个1-factor(完美匹配)的充分必要条件是对$\forall S \subset V(G), k_O(G-S) \leq |S|$。**

证明：$\Rightarrow$

G有完美匹配M $\Rightarrow$ 对于G-S的每个奇分支，M中至少有一条边关联该分支中的一个顶点和S中的一个顶点，且S中的这些顶点互不相同 $\Rightarrow k_O(G-S) \leq |S|$



有完美匹配的充要条件 (续)

- **Theorem 8.10 图G有一个1-factor(完美匹配)的充分必要条件是对$\forall S \subset V(G), k_O(G-S) \le |S|$。**

证明：⇐数学归纳、反证法

- **假定$\forall S \subset V(G), k_O(G-S) \le |S|$➔ 当$S=\emptyset, k_O(G-S)$=0➔every component of G is even and G has even order.**

通过数学归纳法证明：针对任意满足下列条件的图G:(a)$\forall S \subset V(G), k_O(G-S) \le |S|$; (b)$|V(G)| = n$为偶数，G一定具有一个1-factor

- Base case: n=2, G=K_2, 显然成立
- **假设:针对任意偶数$n \ge 4, \forall H, |V(H)| < n$, 都满足：如果$\forall S \subset V(H), k_O(H-S) \le |S|$，则$H$含有1-factor**
- **当$|V(G)| = n$时，构造S:**
  - **使得S为满足$k_O(G-R) = |R|$条件的最大的一个集合R**
  - **令$G_1, G_2, \dots, G_k$为$G-S$的k个odd component, 显然$k = |S| \ge 1$**

S一定存在？

Corollary5.6: every nontrivial connected graph contains at least two vertices that are not cut-vertices

有完美匹配的充要条件 (续)

- **Theorem 8.10 图G有一个1-factor(完美匹配)的充分必要条件是对$\forall \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V(G)}, \boldsymbol{k_O(G-S) \le |S|}$。**

证明：⇐数学归纳、反证法

- ....

可以证明: $G_1, G_2, \dots, G_k$为$G-S$的所有**component**

否则, G-S具有一个偶分支 G_0, G_0包含一个非割点 u_0 ➔ 令$S_0 = S \cup \{u_0\}$，有:
$k_0(G-S_0) = |S_0| = k+1$
与S的选择**矛盾**。

针对每个$G_i (1 \le i \le k)$, 令S_i为:
$\boldsymbol{S_i} = \{v | v \in S \text{ and is adjacent to at least one vertex in } G_i\}$

- 由于G的所有Component都是偶分支，所以 S_i非空

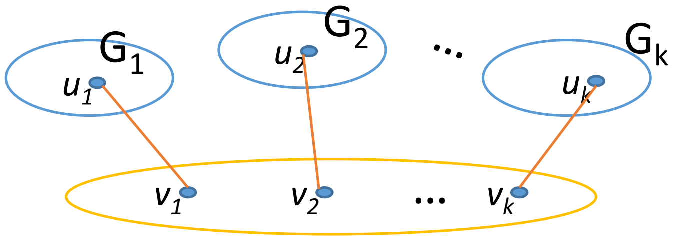
For each $l, 1 \le \ell \le k$, the union of any ℓ of the sets $S_1, S_2, \dots, S_k$ contains at least ℓ vertices

- 否则, 存在$j, 1 \le j \le k$, 使得$S_1, S_2, \dots, S_k$中某j个集合的union的势小于j;
- 不失一般性, 令$T = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_j$且$|T| < j$
- 则$k_0(G-T) \ge j > |T|$, 和**图G的假设矛盾**

Theorem 8.4

There is a set $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ of k distinct vertices s.t. $v_i \in S_i$ for $1 \le i \le k$;
显然, $\boldsymbol{v_i}$同$\boldsymbol{G_i}$中某个节点$\boldsymbol{u_i}$相连

$\{v_i u_i : 1 \le i \le k\}$构成G的一个匹配



有完美匹配的充要条件 (续)

- **Theorem 8.10 图G有一个1-factor(完美匹配)的充分必要条件是对$\forall \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}), \boldsymbol{k_O}(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{S}) \le |\boldsymbol{S}|$。**

证明：⇐数学归纳、反证法

- ....

$\{v_i u_i: 1 \le i \le k\}$构成G的一个匹配

If G_i $(1 \le i \le k)$ is nontrivial, then $G_i - u_i$ has a 1-factor

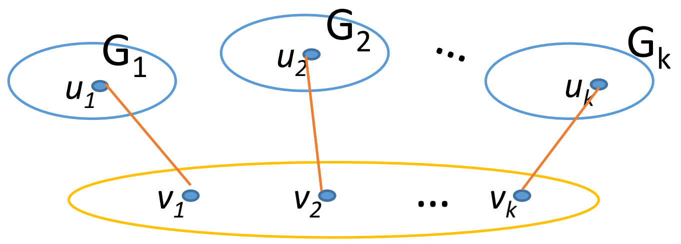
The collection of **1-factors of $\boldsymbol{G_i - u_i}$** for all nontrivial graph G_i $(1 \le i \le k)$ and edges in $\{\boldsymbol{v_i u_i}: \boldsymbol{1 \le i \le k}\}$ produce a 1-factor of G.

设W为$V(G_i - u_i)$的一个真子集, $W \subset V(G_i - u_i)$,
则$k_O(G_i - u_i - W) \le |W|$

假设: 针对任意偶数$n \ge 4$, $\forall H, |\mathrm{V(H)}| < \mathrm{n}$, 都满足：如果$\forall \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}(\boldsymbol{H}), \boldsymbol{k_O}(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{S}) \le |\boldsymbol{S}|$，则$H$含有1-factor

反证法：假设$k_O(G_i - u_i - W) > |W|$

- $G_i - u_i$ has even order➔$k_O(G_i - u_i - W)$与$|W|$**同奇偶**➔ $k_O(G_i - u_i - W) \ge |W| + 2$
- 令$S' = S \cup W \cup \{u_i\}$, 则
  $|S'| \ge \boxed{k_O(G - S')} = k_O(G - S) + k_O(G_i - u_i - W) - 1$
  $\ge |S| + (|W| + 2) - 1 = |S| + |W| + 1 = \boxed{|S'|}$
- 与 “**S为满足$\boldsymbol{k_O}(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{R}) = |\boldsymbol{R}|$**条件的最大的一个集合R” 矛盾



Open topics

- 请证明定理8.8。在证明中，请你给出以下思考：关于点覆盖/独立的所有相关定理，是否在边覆盖/独立讨论范畴内，均有相应的定理？你能“杜撰”出几条吗？