- 作业讲解
  - UD第6章问题7、16、17
  - UD第7章问题1、8、9、10、11
  - UD第8章问题1、4、7、8、9、11
  - UD第9章问题2、4、12、13、14、16
  - UD第27章项目3

UD第6章

- 关于集合的两个小问题
  - set difference的表示：是"\"，不是"/"
  - 如何证明“真子集”关系（proper subset）？

UD第7章问题9a

- 如何证明两个集合不相交？
  - 定义法：是否需要正反各证一遍？
    - $\forall x \in A\backslash B$……
    - $\forall x \in B$……
  - 反证法

UD第7章问题11

- 反例
  - 假设：$X=\{1,2\}$，$A=\{1\}\subseteq X$，$B=\{2\}\subseteq X$，$Y=\Phi\subseteq X$
  - 则：$A\cap Y=B\cap Y=\Phi$，但$A\neq B$
- 这个反例对吗？

UD第8章问题4

- 数学归纳法

$$\because \bigcap_{n=1}^{k} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{k} B_n$$

$$且 A_{k+1} \subset B_{k+1}$$

$$\therefore A_{k+1} \cap \bigcap_{n=1}^{k} A_n \subset B_{k+1} \cap \bigcap_{n=1}^{k} B_n$$

$$即 \bigcap_{n=1}^{k+1} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{k+1} B_n$$

- 这个证明正确吗？

UD第8章问题7a

- 用数学语言来书写证明过程

$$\because \exists \alpha_0 \in I, \left(A_{\alpha_0} = \varnothing\right)$$

$$\therefore \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_{\alpha_0} \cap \bigcap_{\alpha \in \left(I \setminus \{\alpha_0\}\right)} A_\alpha = \varnothing \cap \bigcap_{\alpha \in \left(I \setminus \{\alpha_0\}\right)} A_\alpha = \varnothing$$

UD第8章问题11f

- 反证法

假设$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing$

则$\exists x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$

则对于$\alpha, \beta \in I, A_\alpha \cap A_\beta \neq \varnothing$

与题设不符

得证

- 这个证明正确吗？

UD第9章问题4

- 不要混淆$\in$和$\subseteq$

$(1)\forall x \in P(A)$

则$x \subseteq A \subseteq B$

$\therefore x \in P(B)$

$\therefore P(A) \subseteq P(B)$

$(2)\because A \in P(A) \subseteq P(B)$

$\therefore A \subseteq B$

UD第9章问题12a

- 自顶向下分解问题
  1. if and only if的分解
  2. 集合相等的分解

UD第9章问题13

$\because \forall (x, y) \in A \times B \subseteq C \times D$

$\therefore x \in C$且$y \in D$

$\because x, y$是分别从A, B中任取的

$\therefore A \subseteq C$且$B \subseteq D$

- 这个证明正确吗？

UD第9章问题16a

- If {{a},{a,b}}={{x},{x,y}}, then a=x and b=y.

$$\because \{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{x\},\{x,y\}\}$$
$$\therefore \{a\}=\{x\},\{a,b\}=\{x,y\}$$
$$\therefore \cdots$$

- 这个证明正确吗？

UD第9章问题16c

$\forall x \in A \times B$

则$\exists a \in A, b \in B, (a,b) = x, x \in P(P(A \cup B))$

$\because A \subseteq C, B \subseteq D$

$\therefore a \in C, b \in D, x \in P(P(C \cup D))$

$\therefore x \in C \times D$

- 教材答疑和讨论
  - UD第14、15、16章

问题1：函数的基本概念

- 你理解这些基本概念了吗？
  - 定义域 (domain)
  - 陪域 (codomain)
  - 值域 (range)

  - 单射 (injective/one-to-one)
  - 满射 (surjective/onto)
  - 双射 (bijective)

- 你能从日常生活中举出函数的例子吗？
  它们的定义域/陪域/值域分别是什么？
  - 非单射、非满射
  - 单射、非满射
  - 满射、非单射
  - 双射

问题1：函数的基本概念 (续)

- 什么叫做函数相等？包括哪几个方面？

问题1：函数的基本概念 (续)

- 什么叫做函数相等？包括哪几个方面？

- Two functions $f:A \rightarrow B$ and $g:A \rightarrow B$ are equal if and only if $f(x)=g(x)$ for all $x \in A=dom(f)=dom(g)$.
  - 关系相同，因此
    - 定义域相同
    - 值域相同

问题2：函数基本概念的求解与证明

- 结合Example 13.7，你能说出求解函数值域的一般步骤吗？
- 你能运用这组步骤来严谨地求解以下函数的值域吗？

The function $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = 1/x$.

问题2：函数基本概念的求解与证明(续)

- 如何证明一个函数是单射？
- 如何证明一个函数是满射？
- 如何证明一个函数是双射？
- 你能严谨地证明以下函数是双射吗？
  - The function $f: R\backslash\{1\} \rightarrow R\backslash\{1\}$ defined by $f(x)=(x+1)/(x-1)$

问题3：函数的复合

- 你能简要证明这些定理吗？
  - If f and g are one-to-one, then $g \circ f$ is one-to-one.
  - If $g \circ f$ is one-to-one, then f one-to-one. （而g未必）
  - If f and g are onto, then $g \circ f$ is onto.
  - If $g \circ f$ is onto, then g is onto. （而f未必）

问题3：函数的复合

- 你能简要证明这些定理吗？
  - If f and g are one-to-one, then $g \circ f$ is one-to-one.
  - If $g \circ f$ is one-to-one, then f one-to-one. （而g未必）
  - If f and g are onto, then $g \circ f$ is onto.
  - If $g \circ f$ is onto, then g is onto. （而f未必）

- 你能从日常生活中举出函数复合的例子吗？
  - f单射、g单射
  - f单射、g非单射、$g \circ f$单射
  - f满射、g满射
  - f非满射、g满射、$g \circ f$满射
  - f双射、g双射

问题4：反函数

- 什么是反函数？

- 如何求解反函数？
  你能根据定义求解以下函数的反函数吗？
  - The function f: R\{1} → R\{1} defined by $f(x)=(x+1)/(x-1)$

问题4：反函数

- 什么是反函数？

Let $f : A \to B$ be a bijective function. The **inverse** of f is the function $f^{-1} : B \to A$ defined by

$$f^{-1}(y) = x \text{ if and only if } f(x) = y.$$

- 如何求解反函数？
你能根据定义求解以下函数的反函数吗？
  - The function f: R\{1} → R\{1} defined by f(x)=(x+1)/(x-1)

问题4：反函数 (续)

- 除了定义，还有什么证明手段？

- 你能用它来重新证明吗？
  - The function $f: R\backslash\{1\} \rightarrow R\backslash\{1\}$ defined by $f(x)=(x+1)/(x-1)$

问题4：反函数 (续)

- 除了定义，还有什么证明手段？

Let $f : A \to B$ *be a bijective function. Then*

If $g : B \to A$ *is a function satisfying* $f \circ g = i_B$ *or* $g \circ f = i_A$*, then* $g = f^{-1}$.

- 你能用它来重新证明吗？
  - The function f: R\{1} → R\{1} defined by f(x)=(x+1)/(x-1)

问题4：反函数 (续)

- 除了这个定理之外

Let $f : A \to B$ *be a bijective function. Then*

If $g : B \to A$ *is a function satisfying* $f \circ g = i_B$ *or* $g \circ f = i_A$, *then* $g = f^{-1}$.

- 书上还给出了另一个很相似的定理

Let $f : A \to B$ *and* $g : B \to C$ *be functions.*

Suppose now that $f : A \to B$ *and* $g : B \to A$. *If* $f \circ g = i_B$ *and* $g \circ f = i_A$, *then* $g = f^{-1}$.

- 你能看出它们的区别和联系吗？

问题5：函数的像

- 对于$f: X \rightarrow Y$和$x \in X$, $y \in Y$
  - $f(x)$和$f(\{x\})$有什么区别？
  - $f^{-1}(y)$和$f^{-1}(\{y\})$有什么区别？

问题5：函数的像 (续)

- 以下这些定理都成立吗？
  如果成立，你能给出证明吗？
  如果不成立，你能举出反例吗？

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$
$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

问题5：函数的像 (续)

- $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
  这个证明错在哪儿？

Not a proof. It follows from Theorem 17.5 that $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. To show the reverse set inclusion, we let $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. By definition of intersection, $y \in f(A_1)$ and $y \in f(A_2)$. Therefore, $y = f(x)$ for some x in A_1 and $y = f(x)$ for some $x \in A_2$. Since $x \in A_1$ and $x \in A_2$, we see that $x \in A_1 \cap A_2$. Thus $y = f(x)$ where $x \in A_1 \cap A_2$, so $y \in f(A_1 \cap A_2)$. This proves that $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$, and the nonfact is established! $\boxed{?}$

问题5：函数的像 (续)

- 你能不能用图示的方式解释为什么以下这些定理都是不成立的？

$f(f^{-1}(C)) = C;$

$f^{-1}(f(A)) = A;$

$f(A) = f(B)$ implies that $A = B;$

$f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$ implies that $C = D.$