武汉大学

本科生课程讲义及知识总结

课程名称：空间数据误差处理
开课学院：遥感信息工程学院
开课时间：2019-2020 年度第二学期

2020.武汉大学

目录

第一章·绪论

➢ 认知世界的过程

1. 公元前 6 世纪古希腊毕达哥拉斯就提出了地的球形状概念。
2. 公元前 5 世纪埃拉托斯特尼（Eratosthenes）用在南北两地同时观测日影的办法首次推算出地球子午圈的周长。
3. **认知世界的过程**：地表阶段——路径阶段——测量阶段
4. **广义的测量**：根据法则给事物分派数字。【三要素：事物的属性；数字；规则】
5. **统计学的三个假设**：
    1) 实际测量值=真实值+误差；
    2) 误差的数学期望（统计平均值）为零；
    3) 任意两次测量所产生的误差相互独立。

➢ 测量（观测）与观测数据

1. **测量（空间）的概念**：获取地球的形状、大小以及地表(包括地面上各种物体）的几何形状及其空间位置的过程。
2. **测量数据**：测量数据（观测数据）是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取的反映地球与其它实体的空间分布有关信息的数据，包含信息和干扰（误差）两部分。
3. **观测数据处理的意义**：
    1) 需要多余观测；
    2) 需要计算最优结果——数据处理模型；
    3) 需要凭借结果好坏——模型精度评价；
    4) 需要选择合适的计算模型——优化模型。
4. **观测的分类**：
    1) **直接观测**：直接用测量仪器或传感器测取所需要的观测量【被观测的量可直接与其单位长度进行比较】；
    2) **间接观测**：被观测量由直接观测量通过某种确定的函数关系（公理、定理）计算得到的观测过程称为间接观测。
    3) **静态观测**：测量过程中被观测的物理量是（相对）不变的；
    4) **动态观测**：测量过程中被观测的物理量是变化的。

➢ 误差与测量平差

1. **误差的定义**：测量结果与其真值的差异。$\Delta x = x - x_0$；

   Δx–测量误差； x–测量结果； x_0–真值

2. 误差来源：仪器误差、观测误差、外界条件影响、原理误差
3. 误差的分类：
   1) **随机误差：**在一定的观测条件下进行了一系列观测，如果观测误差的数值大小与符号不定，不存在任何确定的规律性，只具有统计性的规律，这种误差称为随机误差。【性质：正态分布】
   2) **偶然误差：**在一定的观测条件下进行了一系列观测，如果观测的误差是随机误差，且误差的算术均值随观测次数的增加而趋于零，这种误差称为偶然误差。【偶然误差是均值为零的随机误差】
   3) **系统误差：**在一定的观测条件下进行了一系列观测，如果观测误差的数值大小与符号保持为常数，或按照一定的规律变化，这种带有系统性和方向性的误差称为系统误差。【系统误差具有累积性】
   4) **粗差**：特别大的误差（错误）。

4. **真误差的定义：$\boldsymbol{\Delta_i = l_i - L}$　　$\boldsymbol{l_i}$: *观测值*，L: *真值***

   真误差的特点：$\boldsymbol{E(l) = L \quad E(\Delta) = 0}$

5. 《中华人民共和国国家计量技术规范测量不确定度评定与表示》JJF1059 1999 中,“误差”的定义是测量结果减去被观测量的真值,所以在这里误差特指真误差,并且其符号是惟一的。

6. **偶然误差的特性：**
   1) **有界性**：在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值，即超过一定限值的误差，其出现的概率为零；
   2) **密集性（区间性）**：绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大；
   3) **对称性**：绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相同；
   4) **补偿性**：偶然误差的数学期望为（趋近于）零

7. 误差处理的原则：
   1) **粗差**：舍弃含有粗差的观测值，并重新进行观测；

2) **系统误差**：按其产生的原因和规律加以改正、抵消和削弱；

3) **偶然误差**：根据误差特性合理的处理观测数据减少其影响。

8. **测量平差的概念：** 依据某种最优化准则，由一系列带有观测误差的测量数据，求定未知量的最佳估值及精度的理论和方法。

9. **测量平差的主要工作：**

1) 数据处理方法——最优结果计算；

2) 数据分析方法——最优结果计算的精度；

3) 优化最优结果计算模型

10. **测量平差的意义：**

1) 提高测量数据的可靠性；

2) 对测量数据的精度进行评定；

3) 扩大测量数据的应用范围。

11. 测量平差方法：最小二乘法、相关平差、秩亏自由网平差、方差—协方差分量估计等。

第二章·误差分布与精度指标

➢ 偶然误差的特性

1. 观测值的数学期望等于理论真值：

$$E(\varDelta)=E(l)-E(L)\rightarrow E(\varDelta)=0\rightarrow E(l)=\tilde{L}$$

2. 偶然误差间的相互差异与对应观测值之间的相互差异相同，故观测值与它所带有的偶然误差具有类型一致的分布——正态分布

$$\Delta_i=l_i-E(l_i)\qquad \sigma=\sigma_\Delta=\sigma_L\qquad \sigma^2=E(\Delta^2)$$

3. 参数σ代表的是随机变量分布的离散特征：

1) σ代表误差分布的离散程度的数值；

2) σ代表误差的水平；

3) σ代表观测数据的水平→精度。

4. 误差对观测结果的影响：

1) **随机误差的大小影响精密度：**

A. **精密性**：观测数据的离散程度，取决于偶然误差的影响。

B. **精密度（精度）**：指在对某量进行多次观测中，各观测值之间的密集或离散程度，即偶然误差的标准差。精密度的特点：

a) 如果两组观测误差分布相同，则其精度相同，反之亦然；

b) 同一观测条件下进行的一组观测对应着同一误差分布，这组的每个观测值都是等精度观测，而不论其个别误差是大是小。

2) **系统误差的大小影响准确度**：

A. **准确性**：观测数据的准确程度，取决于所有误差总的影响。

B. **准确度**：随机变量的真值与其数学期望的差值。

5. **精确度**：偶然误差和系统误差的合成：

$$（均方误差）MSE(L)=\sigma_L^2+(E(L)-\tilde{L})^2=E(\Delta\Delta)$$

σ_L^2是偶然误差（精度的平方）；$E(L)-\tilde{L}$是系统误差

当系统误差$\varepsilon<\frac{1}{3}\sigma$时可以视为无系统误差；

当偶然误差$\sigma<\frac{1}{3}\varepsilon$时视为系统误差没有被消除掉；

6. 如果随机误差减小(精密度高)，则准确度主要取决于系统误差，故：

1) 精密度高是精确度高的前提，精密度是精确度的基础；

2) 高的精密度不一定保证高的精确度。

7. **评价精度的标准**：

1) **方差与中误差**：在相同条件下，对某量（真值为 X）进行 n 次独立观测，观测值 l1， l2，……，ln，偶然误差（真误差）Δ1，Δ2，……，Δn，则中误差 m 的定义为：$m=\pm\sqrt{[\Delta\Delta]/n}$，这一组中所有的观测值的精度都相同。【中误差越小，观测精度越高】

2) **平均误差**：在一定的观测条件下，一组独立的真误差绝对值的数学期望成为平均误差。 $\theta=(E|\Delta|)$ 【中误差在评价观测精度比平均误差灵敏】

3) **容许误差（极限误差）**：测量中通常取 2 倍或 3 倍中误差（2m 或 3m）作为偶然误差的容许误差。【区别误差和错误的界限】

4) **相对误差**：相对误差 K 是中误差的绝对值 m 与相应观测值 D 之比：$K=|m|/D$，通常以分母为 1 的分式来表示，称其为相对（中）误差。

8. **精度匹配问题：** 1 弧度(rad)=206264.808 秒(")→横向误差=弧度 x 弦长。
9. 测距误差 5mm+5ppm 的意义 → $5mm + 300 \times 5 \times 10^{-6} m$。

$$m_L = a + b \times s$$

精度匹配问题：给了距离观测值（例如$1000m \pm 2mm$），求匹配的角度观测值的精度

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_S}{S} \times 206265'' \quad \text{S 单位为 mm}$$

10. J6 经纬仪的 J6 的意义是：

一个方向一测回的观测角的均值中误差是 6″，半测回的中误差是$6\sqrt{2}''$。

测角中误差也填 6″

【一个角度是两个方向相减】

11. **测量不确定度**：测量不确定度就是指测量结果中用于说明测得值所处范围的一个参数,其大小只与测量条件有关。由于他是一个表示范围的参数,所以是绝对值。
12. 测量不确定度的表示方法：
    1) 全站仪测距：±5mm+5ppm，1 倍中误差置信区间；
    2) GPS 测量：±2mm+1.5ppm，1 倍中误差置信区间。

第三章·协方差传播率及权

➢ 间接观测值的精度评定

1. **误差传播定律**：在间接观测中，观测值必须由一个或一系列的其他直接观测值通过一定的函数关系间接计算出来，阐述观测值函数的中误差和观测值中误差的关系的公式成为误差传播定律。

➢ 协方差传播律

1. **协方差：** 用来描述两个或多个随机变量之间关系的一个数字特征。设有观测值 X 和 Y，则他们的协方差为：

$$D_{XY} = \sigma_{XY} = E\big((X - E(X))(Y - E(Y)\big) = E(\Delta_X \Delta_Y)$$

$$\Delta_X = X - E(X) \qquad \Delta_Y = Y - E(Y)$$

2. **协方差的估值**：$\sigma_{XY} = \frac{[\Delta_X \Delta_Y]}{n}$

3. **协方差阵**：观测值的方差与他们之间的协方差共同组成

$$D(X,Y)=\begin{pmatrix}D_{xx} & D_{xy}\\ D_{xy} & D_{yy}\end{pmatrix}=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2+2\sigma_{\mathrm{XY}}$$

☆注意：D_{xy}是指两个量 x 和 y 之间的协方差，而$D(X,Y)=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$是 x 和 y 一起构成的一个向量的协方差阵，$D_{xy}$可以是矩阵也可以不是，但其是矩阵的时候也不能说是协方差阵（x，y 本身是多维向量的时候 x 和 y 之间的协方差D_{xy}就是矩阵形式）。

4. **多个观测量的协方差阵**：设有观测值$x_1,x_2\dots.x_n$，则他们的协方差阵为：

$$D_{xx}=D(x_1,x_2\dots.x_n)=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_n^2\end{bmatrix}=\sigma_1^2+\cdots\sigma_n^2+2\sigma_{12}+\cdots+2\sigma_{1n}$$

$$=\sum_{i}^{n}\sigma_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}$$

1) $\sigma_{ij}=0,i\neq j$表示观测量相互独立，矩阵为对角矩阵。

2) 当对角元相等时，为等精度观测

5. **相关系数**：$\rho_{\mathrm{XY}}=\frac{\sigma_{\mathrm{XY}}}{\sigma_X\times\sigma_Y}$

1) $\sigma_{YX}=\sigma_{XY}=0$：表示 X、Y 间互不相关，对于正态分布而言，相互独立；

2) $\sigma_{YX}=\sigma_{XY}\neq 0$：表示 X、Y 间相关

6. **线性函数的协方差：**

1) **和差函数：** $z=k_1x_1\pm k_2x_2\pm\cdots\pm k_nx_n$

对应的中误差为： $m_z=\pm\sqrt{k_1^2m_1^2+k_2^2m_2^2+\cdots+k_n^2m_n^2}$

2) **若 n=1 即倍差函数：** $z=kx$

对应的中误差为： $m_z=\pm km$

3) **若$\boldsymbol{k=1,i=1,2\dots.n}$即线性函数为：** $z=x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n$

对应的中误差为： $m_z=\pm\sqrt{m_1^2+m_2^2+\cdots+m_n^2}$

4) **线性函数协方差的矩阵形式：**

设线性函数为：$Z=KX$，其中：$X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},K=[k_1,k_2,\cdots,k_n]$

则函数 Z 的方差（$\boldsymbol{\sigma_z^2}$或$\boldsymbol{D_{ZZ}}$ → 此处的$\mathbf{D_{ZZ}}$指的是一个观测值函数的方差）为：

$\sigma_z^2=D_{ZZ}=KD_{xx}K^T$

7. **非线性函数的协方差：**

   1) **设非线性函数为：** $Z = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$

   2) Z **的协方差（误差）：** $\Delta Z = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n = K\Delta x = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\begin{bmatrix}\Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n\end{bmatrix}$

   3) **Z的协方差矩阵为：** $\sigma_Z^2 = D_{ZZ} = KD_{xx}K^T$

   4) **非线性函数协方差的计算步骤：**

      A. 对函数式全微分，是非线性函化为线性函数形式；

      B. 如果自变量是相关观测值，应求出各变量之间的协方差；或用变量代换，经合并同类项及移项等方法使其成为独立观测值后按照独立观测量的方法计算；

      C. 对有些函数可先取对数再微分；

      D. 数值带入计算应注意量纲的统一

   5) 如果题目中没有给出协方差，我们约定俗成地认为两个变量是独立的。

8. **矩阵形式的协方差传播公式：**

   1) 已知随机向量X，其协方差阵为D_{XX}，$Y = FX + F_0 \quad Z = KX + K_0$

   那么：

   $D_{YY} = E[\Delta Y(\Delta Y)^T] = FE(\Delta X\Delta X^T)F^T = FD_{XX}F^T$

   $D_{ZZ} = E[\Delta Z(\Delta Z)^T] = KE(\Delta X\Delta X^T)K^T = KD_{XX}K^T$

   $D_{YZ} = E[\Delta Y(\Delta Z)^T] = FE(\Delta X\Delta X^T)K^T = FD_{XX}K^T$

   ☆注意：$D_{\binom{Y}{Z}} = \begin{pmatrix} D_{YY} & D_{YZ} \\ D_{YZ} & D_{ZZ}\end{pmatrix}$

➢ 协方差传播律的应用

1. 在相同的观测条件下，对一个量进行多次观测，则所有观测值的算术均值为该量的最佳估值。【算术平均值是最可靠的估值】

2. **算术平均值的中误差为：** $m_{\bar{L}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$

   即算术平均值的中误差为观测值的中误差的$\frac{1}{\sqrt{n}}$倍

【单纯依靠提高测量次数是不可靠的，超过一定次数限度将带来其他的误差】

3. **水准测量的精度：** 在平坦地区的水准测量中，每公里的测站数大致相等，因此，每公里观测高差的方差相等，设其均为σ_{km}^2，则 S 公里观测高差的方差和中误差分别为：

$\sigma_{h}^2 = S \cdot \sigma_{km}^2$ ； $\sigma_{h} = \sqrt{S}\sigma_{\mathrm{km}}$

4. **已知三角形闭合差 w 计算三角形测角中误差：**

$\sum \beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \qquad \therefore m_{\sum \beta} = m\sqrt{3}$

故每个角的测角中误差为$m = \dfrac{m_{\sum \beta}}{\sqrt{3}}$

$\therefore m = \pm\sqrt{\frac{[\omega\omega]}{3n}}$（菲列罗公式）

平差：$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma - 180°) = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\gamma + 60°$

平差后测角中误差$m_{\hat{\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{3}}m_\alpha$

5. **等精度观测数据的精度计算：**

   1) 第一公式（观测值真值已知）：$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$

   2) 第二公式（观测值真值未知，最佳估值或算术平均值$\bar{L}$已知）：$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$

   【其中 v_i 为观测值的改正数：$v_i = \bar{L} - l_i$】

➢ 权及定权的方法

1. **权的定义：** 设$l_i(i = 1,2,\ldots,n)$,它们的方差为σ_i^2，如选定任一常数σ_0^2则定义：

$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$称为观测值$l_i$的权，权与方差成反比。

2. **权的性质：**

   1) 权的大小随着σ_0^2而变化，但权比不会发生变化；

   2) 一个σ_0^2对应一组权；

   3) 方差（中误差）越小，权越大；权越大，精度愈高。

   【权可以反映各观测值在估值中所占比重大小的量】

   4) 权是衡量精度的相对指标，为了使权起到比较精度的作用，一个问题只选一个σ_0^2

   5) σ_0相当于对应权为 1 的观测值的方差，一般将其称为单位权方差（中误差），权等于的 1 的观测值称为单位权观测值。

3. **定权的方法：**

1) **算术均值的权**：$p_L = np$即算术平均值的权是等精度观测值的权的 n 倍。

2) **水准测量的权**：$p_i = \frac{C}{S_i}$（以路线长度定权）或$p_i = \frac{C}{N_i}$（以测站数定权）。

3) **边角定权**：$P_\beta = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\beta^2}$ ；$P_S = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2}$ 令$\sigma_0 = \sigma_\beta$，则$P_\beta = 1$ ，$P_{S_i} = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_{S_i}^2}$

4. **加权均值**

1) 加权均值：$\bar{L} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$

2) 加权均值的中误差：$\sigma_L^2 = (\frac{p_1}{[p]})^2 \sigma_1^2 + (\frac{p_2}{[p]})^2 \sigma_2^2 + \cdots + (\frac{p_n}{[p]})^2 \sigma_n^2$

3) 当单位权中误差$\sigma_0^2 = 1$时，$\sigma_L^2 = 1/[p]$

此时加权均值的权：$p_{\bar{L}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_L^2} = \frac{1}{(1/[p])} = [p]$

➢ 协因数和协因数传播率

1. **处理原则**：先定权，再计算方差，反过来再调整权。

2. **协因数**：观测值方差与单位权方差之比称为协因数，也是衡量精度的相对指标。

设L_i, L_j它们的方差为σ_i^2, σ_j^2，协方差为σ_{ij}

令：$Q_{ii} = \frac{1}{p_i} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2}$，*$Q_{ii}$为$L_i$的协因数或权倒数*

$Q_{jj} = \frac{1}{p_j} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_0^2}$，*$Q_{jj}$为$L_j$的协因数或权倒数*

$Q_{ij} = \frac{1}{p_{ij}} = \frac{\sigma_{ji}}{\sigma_0^2}$，*$Q_{ij}$为$L_i$关于$L_j$的互协因数或相关权倒数*

变化形式为：$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 Q_{ii}$

3. **协因数阵**：

1) $D_{XX} = \sigma_0^2 Q_{XX}$；$Q_{XX}$为观测向量$X_i$的协因数阵；

2) $D_{XY} = \sigma_0^2 Q_{XY}$；$Q_{XY}$为观测向量$X_i, X_j$的互协因数阵

3) $Q_{XX} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & \frac{1}{p_{12}} & \cdots & \frac{1}{p_{n1}} \\ \frac{1}{p_{21}} & \frac{1}{p_2} & \cdots & \frac{1}{p_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{p_{n1}} & \frac{1}{p_{n2}} & \cdots & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix}$

☆协因素阵的对角线元素是相应的权倒数

4) 协因数阵的一个推导公式：$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \rightarrow D_{YX} = D_{XY}{}^T$ 且 $Q_{YX} = Q_{XY}{}^T$ 同时，若

$Q_{YX}=Q_{XY}{}^{T}=0$ 则认为 X 和 Y 向量相互独立。

4. **权阵：** $P_{XX}=Q_{XX}^{-1}=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & \frac{1}{p_{12}} & \cdots & \frac{1}{p_{1n}} \\ \frac{1}{p_{21}} & \frac{1}{p_2} & \cdots & \frac{1}{p_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{p_{n1}} & \frac{1}{p_{n2}} & \cdots & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix}^{-1}$

☆$P_{XX}Q_{XX}=E$；

☆观测值向量的权阵不是由观测值的权和相关权组成的矩阵，而是协因数阵的逆。

5. **协因数传播率：** 设有观测值的线性函数为：$Z=FX$

则：$D_{ZZ}=FD_{XX}F^{T}\rightarrow Q_{ZZ}=FQ_{XX}F^{T}$

6. **权倒数传播定律：** 设有观测值的非线性函数为：$Z=FX$

$dz=\frac{\partial f}{\partial X_1}dL_1+\frac{\partial f}{\partial X_2}dL_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial X_n}dL_n=FdX\rightarrow$

$$Q_{zz}=FQ_{XX}F^{T}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial X_1} & \frac{\partial f}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial X_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial X_1} \\ \frac{\partial f}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial X_n}\end{pmatrix}$$

则：$\frac{1}{p_z}=\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2\frac{1}{p_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)^2\frac{1}{p_2}+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2\frac{1}{p_n}$（线性和非线性均适合）

7. **传播定律的应用：**

1) 矢量和：$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}=(E\quad E)\begin{pmatrix}\vec{AB} \\ \vec{BC}\end{pmatrix}\rightarrow$

$Q_{\vec{AC}}=(E\quad E)\begin{pmatrix}Q_{AB} & 0 \\ 0 & Q_{BC}\end{pmatrix}(E\quad E)^{T}=Q_{\vec{AB}}+Q_{\vec{BC}}$

2) 已知随机向量X，其协因数阵为Q_{XX}，$Y=FX+F_0\qquad Z=KX+K_0$

那么：$Q_{YY}=FQ_{XX}F^{T}\qquad Q_{ZZ}=KQ_{XX}K^{T}\qquad Q_{YZ}=FQ_{XX}K^{T}$

➢ 非等精度观测精度评定

1. 非等精度观测数据通过加权化为等精度观测。

2. **非等精度单位权中误差计算公式：** $\sigma_0=\pm\sqrt{\frac{[P\Delta\Delta]}{n}}$

求第 i 个观测值的中误差：$\sigma_i^2=\sigma_0^2\frac{1}{P_i}$

3. **真值未知，以改正数计算的非等精度中误差计算公式：** $\sigma=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$

其中：$v_i = \hat{L} - l_i$ ，$\hat{L} = \frac{[pl]}{p}$

4. 观测数据的真误差一般是不知道的，测量时常对一系列观测量进行成对观测（双观测），形成双观测量，可以用双观测量求单位权中误差→用双观测量之差d_i求取单位权中误差以计算精度。

   1) **双观测值之差的真误差：**$\Delta_d = d_i$

   2) **双观测值之差的权：**$P_d = \frac{P_i}{2}$。

   3) **双观测量单位权中误差：**

      A. 不等精度：$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{[P_d\Delta_d\Delta_d]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[P_i d_i d_i]}{2n}}$

      B. 等精度：$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{[d_i d_i]}{2n}}$

   4) **不等精度双观测量每一组观测值中误差：**$\sigma_{L_i'} = \sigma_{L_i''} = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{P_i}}$

   5) **双观测量每一组观测值平均值的中误差：**

      A. 不等精度：$\sigma_{\bar{L}} = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{2P_i}}$

      B. 等精度：$\sigma_{\bar{L}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_0$

5. **观测值的综合误差：**$\Omega = \tilde{L} - L = \Delta + \varepsilon$

   综合误差的方差：$D_{LL} = E(\Omega^2) = E(\Delta^2) + 2E(\Delta)\varepsilon + \varepsilon^2 = \sigma^2 + \varepsilon^2$

6. **线性函数仅含有系统误差的观测值函数的误差传播定律：**

$$\varepsilon_z = E(\Omega_z) = k_1E(\Omega_1) + k_2E(\Omega_2) + \cdots + k_nE(\Omega_n) = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n = [k\varepsilon]$$

7. **线性函数系统误差与偶然误差的综合传播定律：**

$$\sigma_z^2 = E(\Omega_z^2) = D_{zz} = (k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n)\begin{pmatrix} \sigma_1^2+\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & \sigma_2^2+\varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \cdots & \sigma_n^2+\varepsilon_n^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$$= [k^2\sigma^2] + [k\varepsilon]^2$$

第四章·平差的数学模型与最小二乘原理

➢ 测量平差概述

1. 测量平差要解决的问题：估值计算、衡量观测估值的精度、优化估值计算的模型。

2. 测定三角形：
    1) 仅确定平面三角形的形状：观测三个内角的任意两个即可,称其必要元素个数为 2，必要元素有C_3^2种选择。
    2) 确定平面三角形的形状与大小：6 个元素中必须有选择地观测三个内角与三条边的三个元素，因此，其必要元素个数为 3。任意 2 个角度+1 个边、2 个边+1 个角度、三个边，必要元素有$C_3^2C_3^1 + C_3^1C_3^2 + C_3^3$种组合。
3. **必要观测：**能够唯一确定一个几何模型所必要的观测，一般用 t 表示。
   【必要观测之间相互独立】
4. **观测值：**为了确定几何模型中各元素的大小进行的实际观测，称为观测值，观测值的个数一般用 n 表示
    1) n<t，则无法确定模型；
    2) n=t，唯一确定模型，不能发现粗差；
    3) n>t，可以确定模型，还可以发现粗差。
5. **多余观测：**观测值的个数 n 与必要观测个数 t 之差，一般用 r 表示，r = n-t
6. 方程的个数大于未知数的个数，方程有无穷多组解，寻求最优解的过程就是求模型最佳估值的测量平差问题
7. **水准网测量确定必要观测数**：
    1) 有已知点的水准网中，必要观测个数等于未知点的个数；
    2) 没有已知点的水准网中，必要观测的个数等于网中全部未知点的个数减 1。

➢ 观测数据处理数学模型

1. **条件平差法：**以条件方程为函数模型的平差方法，称为条件平差法。
   在具体测量中，实际观测数 n，必要观测数 t，则多余观测数$r = n - t$
   应该建立$r = n - t$个条件方程：$F_i(\tilde{L}) = 0, (i = 1,2,\cdots,r)$【右边一定为 0】

$$\hat{L} = L + v, \underset{r\times n}{A}\underset{n\times 1}{\tilde{L}} + \underset{r\times 1}{A_0} = 0 \ \left(\text{条件方程或平差模型}\right)$$

$$\rightarrow \underset{r\times n}{A}\underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W} = 0, \underset{r\times 1}{W} = (\underset{r\times n}{A}\underset{n\times 1}{L} + \underset{r\times 1}{A_0})\ (\text{误差方程})$$

   方法步骤：

   ① 用观测值列出 r 个方程：例如$\tilde{h}1 - \tilde{h}2 - \tilde{h}6 = 0$

   ② 写出误差方程：$v1 - v2 - v6 + h1 - h2 - h6 = 0$

2. **间接平差法（参数法）：** 选择几何模型中 t 个独立变量为平差参数，每一个观测量表达成所选参数的函数，即列出 n 个这种函数关系式，以此为平差的函数模型，称为间接平差法。【间接平差法的自由度是多余观测数 r，不随平差方法改变而改变】

在具体测量中，实际观测数 n，必要观测数 t，则多余观测数$r = n - t$

选择 t 个函数独立的参数$(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \ldots\ldots, \tilde{X}_t)$，列出$n$个方程：$\tilde{L} = F_i(\tilde{X})$

$\hat{L} = L + v, \hat{X} = X^0 + x \rightarrow \underset{n\times1}{\hat{L}} = \underset{n\times t}{B}\underset{t\times1}{\hat{X}} + \underset{n\times1}{d}$（间接方程）

$\rightarrow \underset{n\times1}{v} = \underset{n\times t}{B}\underset{t\times1}{\hat{X}} - \underset{n\times1}{l}, \underset{n\times1}{l} = \underset{n\times1}{L} - \underset{n\times1}{d}$ <此步为推导>

$\rightarrow \underset{n\times1}{v} = \underset{n\times t}{B}\underset{t\times1}{x} - \underset{n\times1}{l}, \underset{n\times1}{l} = L - (BX^0 + d) = L - \underset{n\times1}{F}(X^0)$（误差方程）

【$\underset{n\times1}{l}$ 的物理意义是$\tilde{L} = F_i(\tilde{X})$的初始值的差值】

方法步骤：

① 假设 t 个参数，并写出初始值：例如$\hat{X} = H_{p1}$; $X^0 = H_B + h_3$

② 对每一个观测值用已知值和参数列一个方程：例如$\widehat{h_1} = \widehat{X_2} - H_A$

③ 写出误差方程 $\underset{n\times1}{v} = \underset{n\times t}{B}\underset{t\times1}{x} - \underset{n\times1}{l}, \underset{n\times1}{l} = L - \underset{n\times1}{F}(X^0)$

3. **有参数的条件平差法：** 在平差问题中，观测值个数为 n，t 为必要观测数，则可列出 r=n-t 个条件方程，现有增设了 u 个独立量作为参数，而 0<u<t，每增设一个参数应增加一个条件方程。以含有参数的条件方程作为平差的函数模型，称为附有参数的条件平差法。

共有$c = r + u$个条件方程：$\underset{c\times1}{F}(\hat{L}, \hat{X}) = 0$

平差的自由度$r = c - u$

$\underset{c\times n}{A}\underset{n\times1}{\hat{L}} + \underset{c\times u}{B}\underset{u\times1}{\hat{X}} + \underset{c\times1}{A_0} = \underset{c\times1}{0}$　　　$\underset{n\times1}{\hat{L}} = L + v$, $\underset{n\times1}{\hat{X}} = X^0 + x$ $\rightarrow$

$\underset{c\times n}{A}\underset{n\times1}{v} + \underset{c\times u}{B}\underset{u\times1}{x} + \underset{c\times1}{W} = \underset{c\times1}{0}$　　　$W = (AL + BX^0 + A_0)$

方法步骤：

① 用已知的观测值和参数列出 c 个方程：例如$\widehat{h_1} - \widehat{h_2} - \widehat{h_3} = 0$

② 写出误差方程 $\underset{c\times n}{A}\underset{n\times1}{v} + \underset{c\times u}{B}\underset{u\times1}{x} + \underset{c\times1}{W} = \underset{c\times1}{0}$

4. **有条件的间接平差法：** 如果在平差问题中，不是选 t 个而是选定$u > t$个参数，其中包含 t 个独立参数，则多选的$s = u - t$个参数必是 t 个独立参数的函数，亦即在 u 个参

数之间存在着 s 个函数关系，它们是用来约束参数之间应满足的关系。除了建立 n 个间接观测方程外，还要增加 s 个约束参数方程，故称此平差方法为附有限制件的间接平差法。

☆自由度不变仍然是 r

$$\underset{n,1}{\hat{L}} = F(\underset{u,1}{\hat{X}}) \quad \underset{s,1}{\Phi}\left(\underset{u,1}{\hat{X}}\right)=0 \rightarrow \underset{n\times 1}{\tilde{L}} = \underset{n\times u}{B}\underset{u\times 1}{\tilde{X}} + \underset{n\times 1}{d} \;;\; \underset{s\times u}{C}\underset{u\times 1}{\tilde{X}} + \underset{s\times 1}{C_0} = \underset{s\times 1}{0}$$

5. **函数模型的线性化：** $F(L+v, X^0+x) = F(L, X^0) + \left.\frac{\partial F}{\partial \tilde{L}}\right|_{L,X^0} v + \left.\frac{\partial F}{\partial \tilde{X}}\right|_{L,X^0} x + \cdots \rightarrow$

$$\underset{c\times 1}{F} = F(L, X^0) + \underset{c\times n}{A}\underset{n\times 1}{v} + \underset{c\times u}{B}\underset{u\times 1}{x}$$

$$\underset{c\times n}{A} = \left.\frac{\partial F}{\partial \tilde{L}}\right|_{L,X^0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{L}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{L}_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{L}_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{L}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{L}_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{L}_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_c}{\partial \tilde{L}_1} & \frac{\partial F_c}{\partial \tilde{L}_2} & \cdots & \frac{\partial F_c}{\partial \tilde{L}_n} \end{pmatrix}_{L,X^0}$$

$$\underset{c\times u}{B} = \left.\frac{\partial F}{\partial \tilde{X}}\right|_{L,X^0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{X}_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{X}_u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{X}_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{X}_u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_c}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial F_c}{\partial \tilde{X}_2} & \cdots & \frac{\partial F_c}{\partial \tilde{X}_u} \end{pmatrix}_{L,X^0}$$

例如非线性的条件平差方程线性化：

$$\tilde{L}_1 \cdot \tilde{L}_2 - A = 0 \rightarrow L_2 v_1 + L_1 v_2 + L_1 L_2 - A = 0$$

$$\tilde{L}_1^2 + \tilde{L}_2^2 - A^2 = 0 \rightarrow 2L_1 v_1 + 2L_2 v_2 + L_1^2 + L_2^2 - A^2 = 0$$

➢ 最小二乘原理

1. **参数估计及其最优性质：** 条件的个数 r=n-t <n，即方程的个数少，求解的参数多，方程多解，可对平差数学模型附加某种约束，实现满足最优性质的参数唯一解。
2. **最小二乘估计：** 估计量应具有无偏性、一致性和有效性的要求。
3. **最小二乘准则：** 使各个观测点观测值偏差的平方和达到最小。
4. **最小二乘原理：** $V^T PV =$ 最小

第五章・条件平差

➢ 条件平差原理

$\underset{r\times n}{A}\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0 \qquad \underset{r\times 1}{W}=(\underset{r\times n}{A}\underset{n\times 1}{L}+\underset{r\times 1}{A_0})$

条件平差：要求在满足条件方程下，求函数的 V 值

令：$\underset{r\times r}{N_{aa}}=\underset{r\times n}{A}\underset{n\times n}{P^{-1}}\underset{n\times r}{A^T} \qquad K=-N_{aa}^{-1}W=-N_{aa}^{-1}(AL+\boldsymbol{A_0})$

$V=-P^{-1}A^TN_{aa}^{-1}W=QA^TK \rightarrow \hat{L}=L+V=f(L)$

➢ 条件平差计算步骤

1. 根据平差问题的具体情况，列出条件方程式，条件方程的个数等于多余观测数 r，求出$\underset{r\times 1}{W}=(\underset{r\times n}{A}\underset{n\times 1}{L}+\underset{r\times 1}{A_0})$；
2. 根据条件式的系数，闭合差及观测值的权组成法方程式，法方程的个数等于多余观测数 r，（将$V=QA^TK$代入$\underset{r\times n}{A}\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0$得到$AQA^TK+W=0$）

   求出$\underset{r\times r}{N_{aa}}=\underset{r\times n}{A}\underset{n\times n}{P^{-1}}\underset{n\times r}{A^T}=AQA^T$；
3. 解算法方程，求出联系数 K 值，$K=-N_{aa}^{-1}W$；
4. 将 K 值代入改正数方程式，求出 V 值，并求出平差值$\hat{L}=L+V$
5. 求出高程的最优估值，例如：$H_{P1}=H_A+\hat{L}_1=3.3748m$
6. 用平差值$\hat{L}$重新列出平差值条件方程式，看其是否满足方程检查正确性。
7. 求改正数的协因数Q_{VV}以及高差平差值协因数$Q_{\hat{L}\hat{L}}$
8. 求每个点的高程精度：根据已知点与观测值结合，$D_{\hat{L}\hat{L}}=\hat{\sigma}_0Q_{\hat{L}\hat{L}}$中取对角线的对应项。

➢ 精度评定

1. 条件平差精度评定：计算单位权中误差：$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{V^TPV}{r}}$

2. 由协因数传播率和协方差传播率推导：$Y = FX + F_0 \rightarrow Q_{YY} = FQ_{XX}F^T$

3. $Q_{VV} = Q_{LL}A^TN_{aa}^{-1}AQ_{LL}$ $\qquad Q_{\hat{L}\hat{L}} = Q_{LL} - Q_{VV}$ $\rightarrow$ $D_{\hat{L}\hat{L}} = \hat{\sigma}_0^{\,2} Q_{\hat{L}\hat{L}} = \hat{\sigma}_0^{\,2}(Q_{LL} - Q_{VV})$

4. **精度评定的公式汇编**

   1) $Q_{LL} = Q$

   2) $Q_{LW} = -QA^T$

   3) $Q_{LK} = Q(-N_{aa}^{-1}A)^T = -QA^TN_{aa}^{-1}$

   4) $Q_{LV} = Q(QA^TN_{aa}^{-1}A)^T = QA^TN_{aa}^{-1}AQ = Q_{VV}$

   5) $Q_{WW} = (-A)Q(-A)^T = N_{aa}$

   6) $Q_{WK} = (-A)Q(-N_{aa}^{-1}A)^T = AQA^TN_{aa}^{-1} = I$

   7) $Q_{WV} = (-A)Q(-QA^TN_{aa}^{-1}A)^T = AQA^TN_{aa}^{-1}AQ = AQ$

   8) $Q_{W\hat{L}} = (-A)Q(I - QA^TN_{aa}^{-1}A)^T = -AQ(I - A^TN_{aa}^{-1}AQ) = 0$

   9) $Q_{KK} = (-N_{aa}^{-1}A)Q(-N_{aa}^{-1}A)^T = N_{aa}^{-1}$

   10) $Q_{KV} = (-N_{aa}^{-1}A)Q(-QA^TN_{aa}^{-1}A)^T = N_{aa}^{-1}AQA^TN_{aa}^{-1}AQ = N_{aa}^{-1}AQ$

   11) $Q_{K\hat{L}} = (-N_{aa}^{-1}A)Q(I - QA^TN_{aa}^{-1}A)^T = -N_{aa}^{-1}AQ(I - A^TN_{aa}^{-1}AQ) = 0$

   12) $Q_{VV} = (-QA^TN_{aa}^{-1}A)Q(-QA^TN_{aa}^{-1}A)^T = QA^TN_{aa}^{-1}AQA^TN_{aa}^{-1}AQ = QA^TN_{aa}^{-1}AQ$

   13) $Q_{V\hat{L}} = (-QA^TN_{aa}^{-1}A)Q(I - QA^TN_{aa}^{-1}A)^T = 0$

条件平差各随机向量的协因素

	L	W	K	V	$\hat{L}$
L	Q	$-QA^T$	$-QA^TN_{aa}^{-1}$	Q_{VV}	$Q-Q_{VV}$
W		N_{aa}	I	AQ	0
K			N_{aa}^{-1}	$N_{aa}^{-1}AQ$	0
V				$QA^TN_{aa}^{-1}AQ$	0
$\hat{L}$					$Q-Q_{VV}$

➢ 典型条件平差方程

1. **水准网**：

$$t = p - 1 - q \begin{cases} p - \text{网点数} \\ q - \text{多余的独立起算数据} \end{cases}$$

$C = r = n - t$

☆水准网的独立起算数据为 1 个

列方程的原则：包含的线路数最少为原则，可以列闭合水准路线、附合水准路线。

2. **测角网**：

需要一个已知点坐标、一个相邻已知方位、一个已知相邻边长或需要两个相邻点坐标

☆测角网的独立起算数据为 4 个

$$t=2p-4-q\begin{cases}p-\text{网点数}\\q-\text{多余的独立起算数据}\end{cases}$$

$$C=r=n-t$$

列方程的原则：将复杂图形分解成典型图形。

条件类型：角度条件和正弦条件

- 角度条件——图形条件：n 边形的内角估值之和应满足$(n-2)\bullet 180°$
- 角度条件——水平闭合（圆周条件）：若在某点上观测了所有方向的全部角，则可组成水平闭合条件。
- 角度条件——方位角（固定角条件）：利用图中两个或两个以上的起算方位角。
- 正弦条件——固定边条件：利用网中两个或两个以上的起算边。
- 正弦条件——极条件：利用不同的三角形推算同一边。【列出从极点 P 出发的各条边之比，把边长比换为正弦的比】
- 正弦条件——固定坐标条件：利用网中被隔开的已知点。

平差模型问题

1. ☆间接平差有多少个观测值就要为观测值列多少个方程
2. ☆线性化就是将条件方程（间接方程）变成误差方程的过程
3. 平面网--------求解平面坐标
   1) 水准网间接平差参数：列未知点的 x、y 坐标
   2) 单一附合导线&边角网（导线网）：

   $$n=\text{观测角度数}+\text{导线数}$$

   $$t=2m\left(\text{m 为待定点的个数}\right)\text{或}t=2p-3-q\begin{cases}p-\text{网点数}\\q-\text{多余的独立起算数据}\end{cases}$$

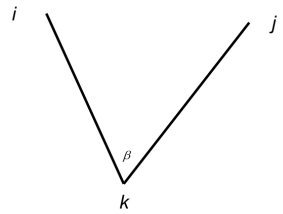
4. 数字化平差模型--------求解平面坐标

   平差约束条件：直角和直线模型、平行线模型、距离模型、面积模型、园条件、曲线条件

   1) 角度模型：

   $$\hat{\alpha}_{kj}-\hat{\alpha}_{ki}=\hat{\beta}_{ij}^{k}\qquad \hat{\alpha}_{kj}=arctan\frac{\hat{y}_j-\hat{y}_k}{\hat{x}_j-\hat{x}_k}\qquad \hat{\alpha}_{ki}=arctan\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_k}{\hat{x}_i-\hat{x}_k}$$

条件方程：$arctan\frac{\hat{y}_j-\hat{y}_k}{\hat{x}_j-\hat{x}_k}-arctan\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_k}{\hat{x}_i-\hat{x}_k}-\hat{\beta}=0$



线性化（变成误差方程）：

对$\hat{\alpha}_{kj}=arctan\dfrac{\hat{y}_j-\hat{y}_k}{\hat{x}_j-\hat{x}_k}$、 $\hat{\alpha}_{ki}$泰勒展开：

$\hat{\alpha}_{kj}=\alpha_{kj}+\delta\alpha_{kj}\quad \hat{\alpha}_{ki}=\alpha_{ki}+\delta\alpha_{ki}$

求一阶偏导数：

$$\delta\alpha_{kj}=\frac{\partial f}{\partial x_j}v_{x_j}+\frac{\partial f}{\partial y_j}v_{y_j}+\frac{\partial f}{\partial x_k}v_{x_k}+\frac{\partial f}{\partial y_k}v_{y_k}$$

$$\delta\alpha_{ki}=\frac{\partial f}{\partial x_i}v_{x_i}+\frac{\partial f}{\partial y_i}v_{y_i}+\frac{\partial f}{\partial x_k}v_{x_k}+\frac{\partial f}{\partial y_k}v_{y_k}$$

各项如下分别求微分：

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{-\dfrac{(y_j-y_k)}{(x_j-x_k)^2}}{1+(\dfrac{y_j-y_k}{x_j-x_k})^2}=\frac{-(y_j-y_k)}{(x_j-x_k)^2+(y_j-y_k)^2}=-\frac{\Delta y_{kj}}{S_{kj}^2}=-\frac{\sin\alpha_{kj}}{S_{kj}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}=\frac{\dfrac{1}{x_j-x_k}}{1+(\dfrac{y_j-y_k}{x_j-x_k})^2}=\frac{(x_j-x_k)}{(x_k-x_j)^2+(y_k-y_j)^2}=\frac{\Delta x_{kj}}{S_{kj}^2}=\frac{\cos\alpha_{kj}}{S_{kj}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=\frac{-\dfrac{(y_j-y_k)(-1)}{(x_j-x_k)^2}}{1+(\dfrac{y_j-y_k}{x_j-x_k})^2}=\frac{(y_j-y_k)}{(x_j-x_k)^2+(y_j-y_k)^2}=\frac{\Delta y_{kj}}{S_{kj}^2}=\frac{\sin\alpha_{kj}}{S_{kj}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_k}=\frac{\dfrac{1}{x_j-x_k}(-1)}{1+(\dfrac{y_j-y_k}{x_j-x_k})^2}=-\frac{(x_j-x_k)}{(x_k-x_j)^2+(y_k-y_j)^2}=-\frac{\Delta x_{kj}}{S_{kj}^2}=-\frac{\cos\alpha_{kj}}{S_{kj}}$$

得到：

$$\hat{\alpha}_{kj}=\alpha_{kj}+\frac{\Delta y_{kj}}{s_{kj}^2}v_{x_k}-\frac{\Delta x_{kj}}{s_{kj}^2}v_{y_k}-\frac{\Delta y_{kj}}{s_{kj}^2}v_{x_j}+\frac{\Delta x_{kj}}{s_{kj}^2}v_{y_j}$$

$$\hat{\alpha}_{ki}=\alpha_{ki}+\frac{\Delta y_{ki}}{s_{ki}^2}v_{x_k}-\frac{\Delta x_{ki}}{s_{ki}^2}v_{y_k}-\frac{\Delta y_{ki}}{s_{ki}^2}v_{x_i}+\frac{\Delta x_{ki}}{s_{ki}^2}v_{y_i}$$

令：$a_{kj}=\frac{\Delta y_{kj}}{s_{kj}^2}\quad b_{kj}=-\frac{\Delta x_{kj}}{s_{kj}^2}\quad a_{ki}=\frac{\Delta y_{ki}}{s_{ki}^2}\quad b_{ki}=-\frac{\Delta x_{ki}}{s_{ki}^2}$

由：$\hat{\alpha}_{kj}-\hat{\alpha}_{ki}-\hat{\beta}_{ij}^k=0$列方程 $\underset{r\times n}{A}\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0\qquad \underset{r\times 1}{W}=(\underset{r\times n}{A}\underset{n\times 1}{L}+\underset{r\times 1}{A_0})$：

误差方程：

$$(a_{kj}-a_{ki})v_{x_k}+(b_{kj}-b_{ki})v_{y_k}+a_{ki}v_{x_i}+b_{ki}v_{y_i}-a_{kj}v_{x_j}-b_{kj}v_{y_j}+w_k=0$$

$$w_k=(\alpha_{kj}-\alpha_{ki})-\beta_{ij}^{k}$$

2) 直线与直角模型：

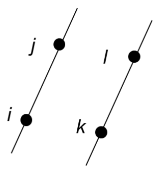
直线模型：$\hat{\alpha}_{kj}-\hat{\alpha}_{ki}-180^o=0$

直角模型：$\hat{\alpha}_{kj}-\hat{\alpha}_{ki}-90^o=0$

对一个有N个顶点的直角房屋进行平差：

观测数$n=2N$，必要观测数：$t=N+1$，多余观测数:$r=N-1$。

3) 平行线模型：



$$\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\alpha}_{kl}=0 \quad \hat{\alpha}_{ij}=arctan\frac{\hat{y}_j-\hat{y}_i}{\hat{x}_j-\hat{x}_i} \quad \hat{\alpha}_{kl}=arctan\frac{\hat{y}_l-\hat{y}_k}{\hat{x}_l-\hat{x}_k}$$

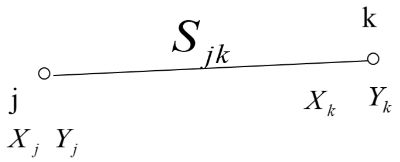
令：

$$a_{ij}=\frac{\sin a_{ij}}{S_{ij}} \quad b_{ij}=-\frac{\cos a_{ij}}{S_{ij}} \quad a_{kl}=\frac{\sin a_{kl}}{S_{kl}} b_{kl}=-\frac{\cos a_{kl}}{S_{kl}} \quad w=(a_{kl}-a_{ij})$$

故：$a_{ij}v_{x_i}+b_{ij}v_{y_i}-a_{ij}v_{x_j}-b_{ij}v_{y_j}-\alpha_{kl}v_{x_k}-b_{kl}v_{y_k}+\alpha_{kl}v_{x_l}+b_{kl}v_{y_l}+w=0$

$$w=(a_{ij}-a_{kl})$$

4) 距离模型：



$$\sqrt{(\hat{X}_k-\hat{X}_j)^2+(\hat{Y}_k-\hat{Y}_j)^2}-S_{jk}=0$$

线性化：$\cos a_{jk}\,v_{x_k}+\sin a_{jk}\,v_{y_k}-\cos a_{jk}\,v_{x_j}-\sin a_{jk}\,v_{y_j}+s_{jk}-S_{jk}=0$

5) 面积模型：

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\,(\tilde{y}_{i+1}-\tilde{y}_{i-1})-A=0$$

【联想扫描线算法】

6) 圆条件：

$$(\tilde{x}_i-\tilde{x}_0)^2+(\tilde{y}_i-\tilde{y}_0)^2-\hat{R}^2=0$$

线性化：

$$(\hat{x}_i-\hat{x}_0)^2+(\hat{y}_i-\hat{y}_0)^2-\hat{R}^2+\frac{\partial f}{\partial \hat{x}_i}v_{x_i}+\frac{\partial f}{\partial \hat{y}_i}v_{y_i}+\frac{\partial f}{\partial \hat{x}_0}v_{x_0}+\frac{\partial f}{\partial \hat{y}_0}v_{y_0}+\frac{\partial f}{\partial \hat{R}}v_R=0$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}=2(x_i-x_0)$；$\frac{\partial f}{\partial R}=2R$

$$(x_i-x_0)v_{x_i}+(y_i-y_0)v_{y_i}-(x_i-x_0)v_{x_0}-(y_i-y_0)v_{y_0}-Rv_R+w=0$$

$$\mathrm{w}=\frac{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2-R^2}{2}$$

7) 曲线条件：

8) 数字化数据的平差处理的策略：先控制后碎部，先整体后局部。

5. 单片空间后方交会--------求解三维坐标

6. GPS 网平差--------求解三维坐标

GPS 网的必要基准是 1 个位置基准（3 个约束条件）

观测数$n=3s$，必要观测数：$t=3p$，多余观测数:$r=n-t$

【s 为基线数，p 为未知点的个数】

第六章・附有参数的条件平差

➢ 平差原理

$$\underset{c\times n}{A}\underset{n\times 1}{\tilde{L}}+\underset{c\times u}{B}\underset{u\times 1}{\tilde{X}}+\underset{c\times 1}{A_0}=\underset{c\times 1}{0}$$

$$\tilde{X}=X^0+x \qquad \hat{L}=L+V$$

$$\rightarrow\begin{cases}\underset{c\times n}{A}\underset{n\times 1}{V}+\underset{c\times u}{B}\underset{u\times 1}{x}+\underset{c\times 1}{W}=\underset{c\times 1}{0}\\ V^TPV=min\end{cases}$$

令：$\Phi=V^TPV-2K^T(AV+Bx+W)$

分别对 V 和 x 求一阶偏导并令其为零：

✧ $\frac{d\Phi}{dV}=2V^TP-2K^TA=0\rightarrow P^TV=(K^TA)^T=A^TK\rightarrow V=P^{-1}A^TK=QA^TK$

$\rightarrow AQA^TK+Bx+W=0$ （可替换：$\underset{r\times r}{N_{aa}}=AQA^T$）

✧ $\frac{d\Phi}{dx}=-2K^TB=0\rightarrow B^TK=0$

继续推导:

$$AQA^TK+Bx+W=0\ \rightarrow\ K=-N_{aa}^{-1}(Bx+W)\xrightarrow{代入B^TK=0}-B^TN_{aa}^{-1}(Bx+W)=0\Rightarrow$$

$$x=-(B^TN_{aa}^{-1}B)^{-1}B^TN_{aa}^{-1}W$$

$$V=QA^TK=-QA^TN_{aa}^{-1}(Bx+W)$$

误差方程:

$$\begin{pmatrix}\underset{c\times c}{N_{aa}} & \underset{c\times u}{B}\\ \underset{u\times c}{B^T} & \underset{u\times u}{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underset{c\times 1}{K}\\ \underset{u\times 1}{x}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\underset{c\times 1}{W}\\ \underset{u\times 1}{0}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\underset{c\times 1}{K}\\ \underset{u\times 1}{x}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\underset{c\times c}{N_{aa}} & \underset{c\times u}{B}\\ \underset{u\times c}{B^T} & \underset{u\times u}{0}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\underset{c\times 1}{W}\\ \underset{u\times 1}{0}\end{pmatrix}$$

➢ 平差计算步骤

1. 根据平差问题的具体情况，列出条件方程式，条件方程的个数等于多余观测数 r+参数个数 u;
2. 根据条件式的系数，闭合差及观测值的权组成法方程式，法方程的个数等于多余观测数$r+u$;
3. 解算法方程，求出参数改正数 x 和联系系数 K;
4. 将 K 值、x 代入改正数方程式，求出 V 值，并求出平差值和参数估值
5. 为了检查平差计算的正确性，常用平差值重新列出平差值条件方程式，看其是否满足方程

第七章・间接平差

➢ 间接平差原理

$$\underset{n\times 1}{\tilde{L}}=\underset{n\times t}{B}\underset{t\times 1}{\tilde{X}}+\underset{n\times 1}{d}\qquad V^TPV=min\qquad V=Bx-l\quad Q_{ll}=Q_{LL}=Q$$

令$\varphi=V^TPV=(Bx-l)^TP(Bx-l)=min$

求偏导: $\dfrac{\partial(V^TPV)}{\partial x}=0\rightarrow 2V^TP\dfrac{\partial V}{\partial x}=0\rightarrow 2V^TPB=0\rightarrow$

$$(Bx-l)^TPB=0\xrightarrow{左右整体转置}B^TP(Bx-l)=0\rightarrow B^TPBx-B^TPl=0$$

$$\xrightarrow{求解}x=(B^TPB)^{-1}B^TPl\xrightarrow{计算改正数}V=B(B^TPB)^{-1}B^TPl-l$$

➢ 间接平差计算步骤

1. 选择 t 个独立的未知参数
2. 将每个观测值表示成未知参数的函数，形成误差方程（要求出 x_0）
3. 形成法方程：$B^TPBx - B^TPl = 0$
4. 求解法方程得出参数的改正数：$x = (B^TPB)^{-1}B^TPl$
5. 计算观测值的改正数：$V = B(B^TPB)^{-1}B^TPl - l$
6. 计算观测值的最优估值：$\hat{L} = L + V$
7. 精度评定，计算单位权中误差$\overset{\wedge}{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{V^TPV}{r}}$，计算平差值的协因数阵：$Q_{\hat{X}\hat{X}} = N_{bb}^{-1} = (B^TPB)^{-1}$；$Q_{\hat{L}\hat{L}} = BN_{bb}^{-1}B^T$以及精度$\sigma_{\hat{L}}$：$\overset{\wedge}{\sigma}_0$与$Q_{\hat{X}\hat{X}}$对角线对应元素之积为参数的精度；$\overset{\wedge}{\sigma}_0$与$Q_{\hat{L}\hat{L}}$对角线对应元素之积为观测值的精度

➢ 公式汇编

1. $V = Bx - l$
2. $x = (B^TPB)^{-1}B^TPl$
3. $V = B(B^TPB)^{-1}B^TPl - l$
4. $\overset{\wedge}{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{V^TPV}{r}}$
5. $Q_{\hat{X}\hat{X}} = Q_{xx} = N_{bb}^{-1} = (B^TPB)^{-1}$
6. $Q_{\hat{L}\hat{L}} = BN_{bb}^{-1}B^T$
7. $Q_{VV} = Q - Q_{\hat{L}\hat{L}} = Q - BN_{bb}^{-1}B^T$

➢ 间接平差参数的选取

1. 高程控制网：待定点的高程
2. 平面控制网：待定点的二维坐标
3. 三维控制网：待定点的三维坐标
4. GPS 网：待定点的三维坐标

第八章・附有条件的间接平差

➢ 平差原理

$$\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times u}{B}\underset{u\times1}{x} - \underset{n\times1}{l} \;;\quad \underset{s\times u}{C}\underset{u\times1}{x} + \underset{s\times1}{W_X} = \underset{s\times1}{0}$$

$$\tilde{X} = X^0 + x \;;\quad \hat{L} = L + V \;;\quad V^TPV = min$$

构建：$\varphi = V^TPV + 2K_S^T(Cx + W_X)$

令 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 2V^TP\dfrac{\partial V}{\partial x} + 2K_S^TC = 2V^TPB + 2K_S^TC = 0$

$$\begin{cases} B^TPBx + C^TK_S - B^TPl = 0 \\ Cx + W_X = 0 \end{cases} \rightarrow x = N_{bb}^{-1}(W - C^TK_S) \;;\quad W = B^TPl \;;\quad \underset{u\times u}{N_{bb}} = B^TPB$$

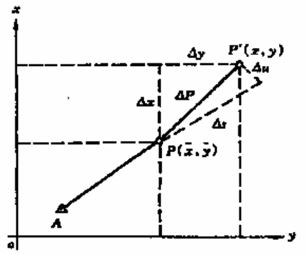
$$\rightarrow K_S = N_{cc}^{-1}(CN_{bb}^{-1}W + W_X) \qquad <\underset{s\times s}{N_{cc}} = CN_{bb}^{-1}C^T>$$

$$x = N_{bb}^{-1}[W - C^TN_{cc}^{-1}(CN_{bb}^{-1}W + W_X)] = (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1})W - N_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}W_X$$

$$\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times u}{B}\underset{u\times1}{x} - \underset{n\times1}{l}$$

第九章·误差椭圆

➢ 点位误差概念



1. A 为已知点，假设它的坐标是不带有误差的数值，P 为待定点的真位置，P’为由观测值通过平差所求得的最或然点位，在待定点 P 的这对坐标之间存在着误差。

$$\left.\begin{aligned} \Delta x = \tilde{x} - x \\ \Delta y = \tilde{y} - y \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta P^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \text{（点位真误差）}$$

2. x 和 y 的方差：$\begin{aligned} \sigma_x^2 = E[(\tilde{x} - E(x))^2] = E[(\tilde{x} - x)^2] = E[\Delta x^2] \\ \sigma_y^2 = E[(\tilde{y} - E(y))^2] = E[(\tilde{y} - y)^2] = E[\Delta y^2] \end{aligned}$ $\rightarrow$

点位真误差的方差：$\sigma_P^2 = E(\Delta P^2) = E((\Delta x)^2) + E((\Delta y)^2) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

✧ 点位方差与坐标系的选择无关，点位方差σ_P^2总是等于两个相互垂直的方向的坐标方差的平方和。

3. $\sigma_P^2 = E(\Delta P^2) = E((\Delta s)^2) + E((\Delta u)^2) = \sigma_s^2 + \sigma_u^2 \rightarrow \sigma_p^2 = \sigma_s^2 + \sigma_u^2$

σ_s称为纵向(中)误差 ； σ_u称为横向（中）误差

➢ 点位误差的计算

$$\sigma_x^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{p_x} = \sigma_0^2 Q_{xx} \;;\quad \sigma_y^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{p_y} = \sigma_0^2 Q_{yy} \;;\quad \sigma_P^2 = \sigma_0^2 (Q_{xx} + Q_{yy})$$

$$Q_{\hat{X}\hat{X}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{X}_1\hat{X}_1} & Q_{\hat{X}_1\hat{Y}_1} & \cdots & Q_{\hat{X}_1\hat{X}_i} & Q_{\hat{X}_1\hat{Y}_i} & \cdots & Q_{\hat{X}_1\hat{X}_u} & Q_{\hat{X}_1\hat{Y}_u} \\ Q_{\hat{Y}_1\hat{X}_1} & Q_{\hat{Y}_1\hat{Y}_1} & \cdots & Q_{\hat{Y}_1\hat{X}_i} & Q_{\hat{Y}_1\hat{Y}_i} & \cdots & Q_{\hat{Y}_1\hat{X}_u} & Q_{\hat{Y}_1\hat{Y}_u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{\hat{X}_i\hat{X}_1} & Q_{\hat{X}_i\hat{Y}_1} & \cdots & Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} & Q_{\hat{X}_i\hat{Y}_i} & \cdots & Q_{\hat{X}_i\hat{X}_u} & Q_{\hat{X}_i\hat{Y}_u} \\ Q_{\hat{Y}_i\hat{X}_1} & Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_1} & \cdots & Q_{\hat{Y}_i\hat{X}_i} & Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_i} & \cdots & Q_{\hat{Y}_i\hat{X}_u} & Q_{\hat{Y}_i\hat{Y}_u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{\hat{X}_u\hat{Y}_1} & Q_{\hat{X}_u\hat{Y}_1} & \cdots & Q_{\hat{X}_u\hat{X}_i} & Q_{\hat{X}_u\hat{Y}_i} & \cdots & Q_{\hat{X}_u\hat{X}_u} & Q_{\hat{X}_u\hat{Y}_u} \\ Q_{\hat{Y}_{u1}\hat{X}_1} & Q_{\hat{Y}_u\hat{Y}_1} & \cdots & Q_{\hat{Y}_u\hat{X}_i} & Q_{\hat{Y}_u\hat{Y}_i} & \cdots & Q_{\hat{Y}_u\hat{X}_u} & Q_{\hat{Y}_u\hat{Y}_u} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xi}^2 = \sigma_0^2 Q_{\hat{X}_i\hat{X}_i} \quad \sigma_{yi}^2 = \sigma_0^2 Q_{\hat{y}_i\hat{y}_i} \quad \sigma_{Pi}^2 = \sigma_0^2 (Q_{xixi} + Q_{yiyi})$$

任意方向的位差：$\Delta\phi = pp'' + p''p''' = \Delta x \cos\phi + \Delta y \sin\phi$ 【ϕ为坐标方位角】

$$Q_{\phi\phi} = (\cos\phi \quad \sin\phi)\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = Q_{xx}\cos^2\phi + Q_{yy}\sin^2\phi + Q_{xy}\sin 2\phi$$

$$\sigma_\phi^2 = \sigma_0^2 [Q_{xx}\cos^2\phi + Q_{yy}\sin^2\phi + Q_{xy}\sin 2\phi]$$

$$\sigma_{\phi+90}^2 = \sigma_0^2 [Q_{xx}\cos^2(\phi+90) + Q_{yy}\sin^2(\phi+90) + Q_{xy}\sin 2(\phi+90)]$$

故最终的点位误差计算公式为：$\sigma_P^2 = \sigma_\phi^2 + \sigma_{\phi+90}^2$

位差的极大值 E 和极小值 F

Q_{EE}和Q_{FF}就是在某一坐标系下点坐标协因素阵$Q_{\hat{X}\hat{X}}$的特征根：

$$|Q_{\hat{X}\hat{X}} - \lambda I| = \begin{vmatrix} Q_{xx} - \lambda & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = Q_{EE} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} + K) \qquad \lambda_2 = Q_{FF} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} - K)$$

$$K = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4(Q_{xy})^2}$$

$$E^2 = \sigma_0^2 Q_{EE} \quad F^2 = \sigma_0^2 Q_{FF}$$

$$tan\varphi_E = \frac{Q_{EE} - Q_{xx}}{Q_{xy}} \qquad tan\varphi_F = \frac{Q_{FF} - Q_{xx}}{Q_{xy}}$$

☆先求出方向后计算极值的方法:

由位差计算式可以看出，σ_P 随着 φ 值的变化而改变，具有最大值和最小值。其一阶导数等于零，即

$$\frac{d\left(\sigma_\varphi^2\right)}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\left(\sigma_0^2 Q_x\cos^2\varphi+\sigma_0^2 Q_y\sin^2\varphi+\sigma_0^2 Q_{xy}\sin 2\varphi\right)$$
$$=-2\sigma_0^2 Q_x\cos\varphi\sin\varphi+2\sigma_0^2 Q_y\sin\varphi\cos\varphi+2\sigma_0^2 Q_{xy}\cos 2\varphi$$
$$=-\sigma_0^2 Q_x\sin 2\varphi+\sigma_0^2 Q_y\sin 2\varphi+2\sigma_0^2 Q_{xy}\cos 2\varphi$$
$$=-\sigma_0^2(Q_x-Q_y)\sin 2\varphi+2\sigma_0^2 Q_{xy}\cos 2\varphi$$

设位差的极值方向为 φ_0，则有 $tg2\varphi_0=\frac{2Q_{xy}}{Q_x-Q_y}$

将 φ_0 代入位差计算式得:

$$\sigma_{\varphi_0}^2=\sigma_0^2(Q_x\cos^2\varphi_0+Q_y\sin^2\varphi_0+Q_{xy}\sin 2\varphi_0)$$
$$=\sigma_0^2(Q_x\cos^2\varphi_0+Q_y\sin^2\varphi_0+Q_{xy}\cdot\frac{2tg\varphi_0}{1+tg^2\varphi_0}$$

以极值 E 和 F 表示的任意方向Ψ上的位差:

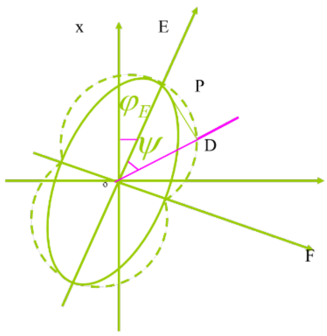
$\Delta\Psi=\Delta E\cos\Psi+\Delta F\sin\Psi \quad Q_{\Psi\Psi}=\cos^2\Psi\, Q_{EE}+\sin^2\Psi\, Q_{FF}+\sin 2\Psi Q_{EF}$

$Q_{EF}=0 \quad \rightarrow \quad Q_{\Psi\Psi}=\cos^2\Psi\, Q_{EE}+\sin^2\Psi\, Q_{FF}$ ； $\sigma_\Psi^2=E^2\cos^2\Psi+F^2\sin^2\Psi$

欲求 PA 边平差后方位角α_{PA}的中误差$\sigma_{\alpha_{\text{PA}}}$，则可先在图中量出垂直于 PA 方向上的位差$\overline{Pf}$，这就是 PA 边的横向位差（也可以是$\sigma_u$），于是可求得:

$$\sigma_{\alpha_{\text{PA}}}=\rho''\times\frac{\overline{Pf}}{S_{\text{PA}}}$$

其中，ρ'' 为常数$206265''$



➢ 误差椭圆

误差曲线不是一种典型曲线，作图也不方便，因此降低了它的实用价值。但其形状与以 E、F 为长、短半轴的椭圆很相似。而椭圆是一种规则图形，作图也比较容易，实际上常用以 E、F 为长、短半轴的椭圆来代替误差曲线，并称为误差椭圆。因此一般情况下，总是先求出待定点的点位误差椭圆，再通过误差椭圆求得待定点在任意方向上的误差，起到与误差曲线同样的作用，方便而又全面地反映点位误差在各个方向上的分布情况

$$\frac{x_e^2}{E^2}+\frac{y_e^2}{F^2}=1$$

第十章·误差理论与空间数据质量

➢ 空间数据质量评价

1. **估值计算**：根据观测量求某些量在一定统计意义下的估值。
2. **衡量观测数据的精度**：观测数据相对于真值或统计估值的中误差。
3. 空间数据由于空间的复杂性、模糊性、人类认识和表达能力的局限以及人们在数据处理过程中的人为因素，总是与真实值之间有存在一定的差异。这种差异不可能完全消除，但是可以控制，这就是数据质量问题——决定空间数据应用是非成败的特征。
4. **空间数据质量：**是空间数据在表达空间位置、专题特征以及时间这三个基本要素时，所能够达到的准确性、一致性、完整性，以及它们三者之间统一性的程度。
5. **空间数据质量来源**：
   1) 源误差：测量数字数据的误差、地图数字化数据的误差、遥感数据误差
   2) 操作误差：由计算机字长引起的误差、由拓扑分析引起的误差、数据分类和内插引起的误差
6. **空间数据质量内容**：
   1) 位置（几何）精度：如数学基础、平面精度、高程精度等，用以描述几何数据的误差。
   2) 属性精度：如要素分类的正确性、属性编码的正确性、注记的正确性等，用以反映属性数据的质量。
   3) 逻辑一致性：如多边形的闭合精度、结点匹配精度、拓扑关系的正确性等，由几何或属性误差也会引起逻辑误差。
   4) 完备性：如数据分类的完备性、实体类型的完备性、属性数据的完备性、注记的完整性，数据层完整性，检验完整性等。
   5) 现势性：如数据的采集时间、数据的更新时间等。

➢ 不确定性理论

1. **不确定性：**不仅包含误差和噪声，还包括“知识不完备的，不可信的和不知道的数据及风险性”。
2. **模糊性：**由于事物的复杂性使其界限不分明，使其概念不能给出确定的描述和确定的评定标准。模糊概念是内涵确定而外延不确定的概念。

3. **随机性：**由于客观条件的不充分或偶然因素的干扰，使得几种确定性结果的出现呈现偶然性，在某次试验中不能预知哪一个结果发生，这种偶然性称为随机性。
4. **灰性：**部分已知部分未知的信息。灰色概念是外延确定而内涵不确定的概念。