**深 圳 大 学 实 验 报 告**

**实验课程名称： 最优化方法**

**实验项目名称： 线性方程组求解**

**学院： 计算机与软件学院 专业： 软件工程（腾班）**

**报告人： 黄亮铭 学号： 2022155028 班级： 腾班**

**同组人：**

**指导教师： 李炎然**

**实验时间： 2024年9月7日**

**实验报告提交时间： 2024年10月5日**

**教务处制**

**实验报告包含内容**

**一、 实验目的与要求**

1.掌握高斯消元法求解线性方程组；

2.掌握Matlab编写代码，熟悉其画图工具，进行实验，并验证结果；

3.锻炼数学描述能力，提高报告的书写能力。

**二、 问题**

已知向量，矩阵，线性方程组，其中：



(1) 编写代码，通过高斯消元法求解,并验证解的准确性。

(2) 是否可以通过高斯消元法，构造线性方程组求矩阵的逆？如果可以求其逆矩阵。

(3) 如果线性方程组，高斯法消元过程中如何提高解的准确性？并求其解。矩阵定义为：

****

(4) 通过附件A\_b.mat的数据，验证你实现算法的准确性。

**三、模型建立及求解**

**解决问题思路，算法实现描述，误差分析，存在问题等方面进行阐述；代码不要放在报告里面，作为附件提交！实验报告内容要有条理，叙述清楚，图文结合，公式正确，书写符合中文习惯!**

问题1解决思路I

利用高斯消元法直接求解线性方程组，具体步骤如下：

1. 构造增广矩阵：将系数矩阵和常数向量合并成一个增广矩阵。
2. 通过行变换，将矩阵转化为上三角行列式。过程中主要操作为加减消元，即利用第i行的a[i][:]为基数，乘上可以消去a[j][i]的系数，然后加到第j上。 其中，i<j。
3. 回代：增广矩阵被转换成上三角形式，就可以从最后一行开始，逐个解出每个未知数。将上三角矩阵的最后一行写成的形式，解出 。然后，将 的值代入到前一行中，解出​，依此类推，直到解出所有未知数。
4. 检查解的存在性：如果在任何步骤中，主元为0且该行的常数项不为0，那么方程组无解。如果主元为0且该行的常数项也为0，那么方程组有无穷多解。
5. 显示解：最后，将所有解出的未知数值打印在命令行，就是线性方程组的解。

问题1算法实现

高斯消元法的算法实现具体思路如下：

1. 预处理：1）将常数向量处理为行向量；2）获取系数矩阵和常数向量的行列数；3）将系数矩阵和常数向量合并成一个增广矩阵。
2. 检查解的存在性：如果系数矩阵的行数少于列数，说明无解，直接返回。
3. 求解：按照解决思路的②③编写代码。
4. 验证解的准确性：1）利用公式然后检查和之间的误差是否在允许的范围内，如果在允许的范围内则进行下一步，否则直接返回。2）利用matlab自带函数linsolve()获得正确的解，然后用自己的解和正确的解对比，看误差是否则允许的范围内，处理同上。3）如果1）和2）均能满足，则说明解是正确的。
5. 输出解：利用disp()函数输出解。

问题1算法运算结果

结果如图所示：其中线性方程组的解为自己编写的代码获得的解，正确的解是用matlab自带函数获得的解。算法运算结果说明编写的代码的正确性。

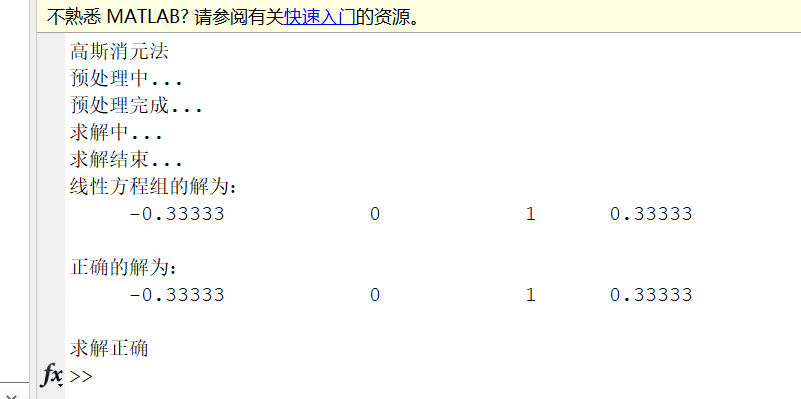


图1：求解结果展示

问题1存在问题及误差分析

这种解决思路存在的问题为：1）若第i行第i列的系数恰好为0，则无法计算，需要进行额外的行交换；2）受到计算误差的影响，特别是系数之间的数量级差距过大时。

当系数矩阵的系数之间数量级相差过大（超过double可以表示的精度）时，使用高斯消元法直接求解线性方程组会获得错误的解。

以计算精度为小数点后3位为例为例，为例，按照上述解决思路，我们将A和b合并成增广矩阵，然后行变换得到，回代后会得到结果。显然，这个答案是错误的。

上述例子就是误差带来的问题，如果不想受误差影响太大，我们需要改进算法，在后面我会提出解决的办法。

计算误差的方法：利用公式，得到。然后通过公式即可计算出总的误差。

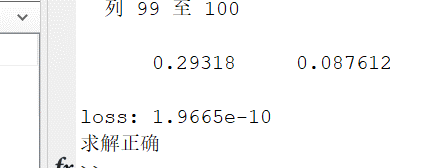


图2：计算出的误差（A\_b.mat）

问题2解决思路

将公式展开可知

可以将上式看成是n个具有m个未知数的方程组写在一起。因此，我们分别对这n个线性方程组分别求解，然后将得到的答案合并成矩阵即可得到。

问题2算法实现

1. 预处理前：检测矩阵A是否可逆，即是否满秩。构造主对角线系数为1其余系数为0的矩阵I。
2. 循环读取矩阵I的每一列。
3. 预处理：1）将常数向量处理为行向量；2）获取系数矩阵和常数向量的行列数；3）将系数矩阵和常数向量合并成一个增广矩阵。
4. 检查解的存在性：如果系数矩阵的行数少于列数，说明无解，直接返回。
5. 求解：按照问题1解决思路的②③编写代码。
6. 验证解的准确性：1）利用公式然后检查和之间的误差是否在允许的范围内，如果在允许的范围内则进行下一步，否则直接返回。2）利用matlab自带函数linsolve()获得正确的解，然后用自己的解和正确的解对比，看误差是否则允许的范围内，处理同上。3）如果1）和2）均能满足，则说明解是正确的。
7. 回到步骤②，直到矩阵I的所有列都被读取。
8. 将每次获得的解合并成矩阵。
9. 验证结果的准确性：利用公式然后检查和之间的误差是否在允许的范围内，如果在允许的范围内则进行下一步，否则直接返回。
10. 输出结果在命令行上。

问题2算法运算结果

结果如图所示：其矩阵A的逆为自己编写的代码获得的解，正确的解是用matlab自带函数获得的解。算法运算结果说明编写的代码的正确性。

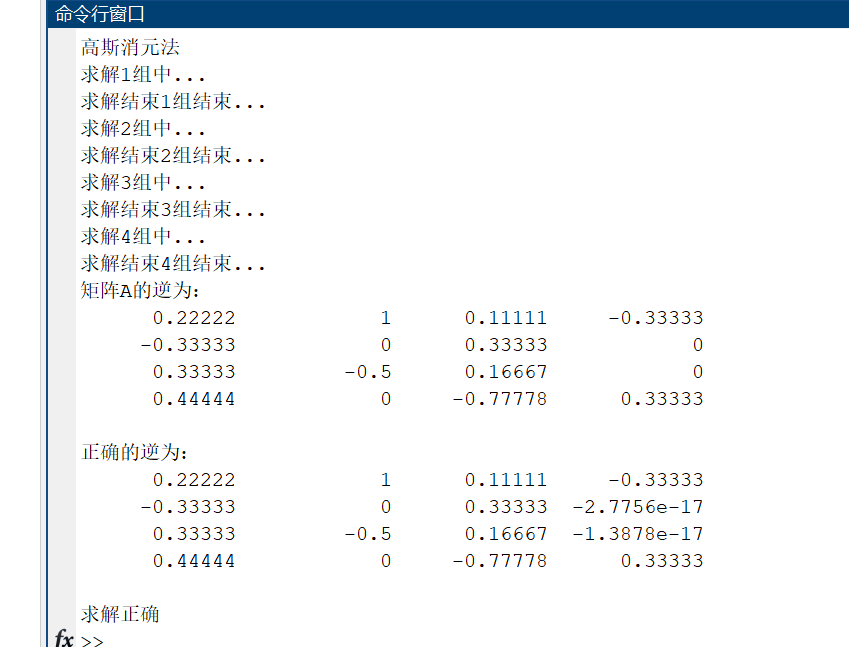


图3：求解结果展示

问题2存在问题及误差分析

这种解决思路存在的问题和问题1中的解决思路存在的问题相同，都是1）若第i行第i列的系数恰好为0，则无法计算，需要进行额外的行交换；2）受到计算误差的影响，特别是系数之间的数量级差距过大时。

计算误差的方法：利用公式，得到。然后通过公式即可计算出总的误差。

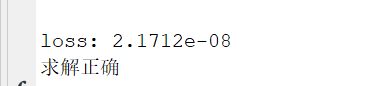


图4：计算出的误差（A\_b.mat）

问题3解决思路

我们可以使用高斯列主消元法提高解的准确性。这是高斯消元法的改进版本。具体步骤如下：

1. 构造增广矩阵：将系数矩阵和常数向量合并成一个增广矩阵。
2. 将矩阵转化为上三角行列式。过程中主要操作为1）行交换，即交换当前列系数最大的行和当前行，2）加减消元，即利用第i行的a[i][:]为基数，乘上可以消去a[j][i]的系数，然后加到第j上。 其中，ij。3）将当前行列的系数变为1。通过操作1），可以解决高斯消元法存在的一个问题：若第i行第i列的系数恰好为0，则无法计算。通过操作2），我们可以将除对角线外的元素变为0。通过操作3），我们可以省略回代这一步操作。
3. 检查解的存在性：如果在任何步骤中，主元为0且该行的常数项不为0，那么方程组无解。如果主元为0且该行的常数项也为0，那么方程组有无穷多解。
4. 显示解：最后，将所有解出的未知数值打印在命令行，就是线性方程组的解。

问题3算法实现

1. 预处理：1）将常数向量处理为行向量；2）获取系数矩阵和常数向量的行列数；3）将系数矩阵和常数向量合并成一个增广矩阵。
2. 检查解的存在性：如果系数矩阵的行数少于列数，说明无解，直接返回。
3. 求解：按照解决思路的②编写代码。
4. 验证解的准确性：1）利用公式然后检查和之间的误差是否在允许的范围内，如果在允许的范围内则进行下一步，否则直接返回。2）利用matlab自带函数linsolve()获得正确的解，然后用自己的解和正确的解对比，看误差是否则允许的范围内，处理同上。3）如果1）和2）均能满足，则说明解是正确的。
5. 输出解：利用disp()函数输出解。

问题3算法运算结果

结果如图所示：其中线性方程组的解为自己编写的代码获得的解，正确的解是用matlab自带函数获得的解。算法运算结果说明编写的代码的正确性。

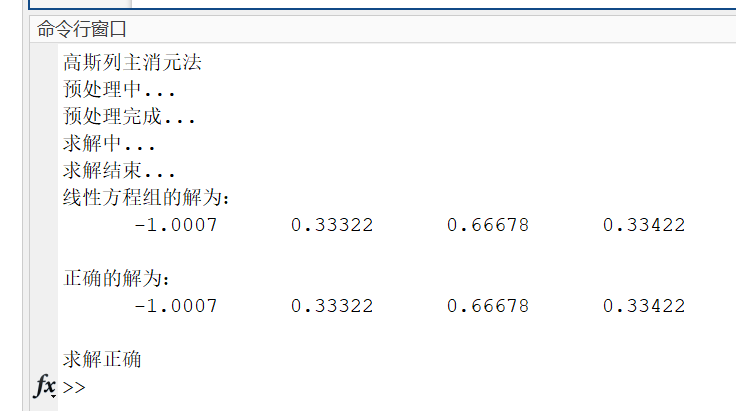


图5：求解结果展示

问题3存在问题及误差分析

列主消元法的主要问题是相比于高斯消元法，列主元消元法的计算量较大，因为在每一步中都需要选择最大的元素作为主元素进行行交换，较大的增加了计算的复杂性。在矩阵较大或者线性方程组的组数比较多时，时间的消耗较大。但是使用列主元消元法可以避免在高斯消元法中可能出现的数值不稳定性问题，并且可以得到更精确的解。

与问题1的计算误差方法相同，问题3的计算误差的方法：利用公式，得到。然后通过公式即可计算出总的误差。

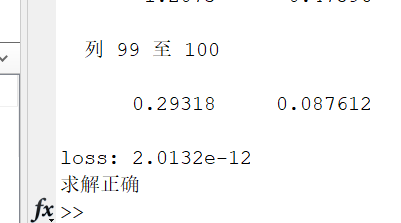


图6：计算出的误差（A\_b.mat）

可以看到，采用列主消元法进行计算的误差比使用高斯消元法计算的误差更小，证明解的准确确实提高了。

问题4验证算法准确性

1. 高斯消元法求解线性方程组结果。

使用自己编写的函数和matlab自带的求解函数得到的结果的误差在允许的范围之内，说明算法的正确性。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

图7：求解结果展示

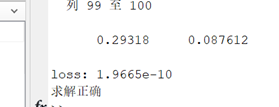


图8：求解误差（高斯消元）

1. 高斯列主消元法求解线性方程组结果。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

图9：求解结果展示

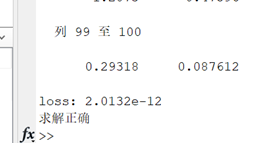


图10：求解误差（列主消元）

1. 高斯消元法求逆和高斯列主消元法求逆。

根据代码，只有在自己编写的代码得到的结果和标准答案即matlab自带函数的得到的结果之间的误差在允许的范围之内，命令行才会打印求解正确。此外，我也观察过输出的结果，两者一致。因此，合理认为代码是正确的。

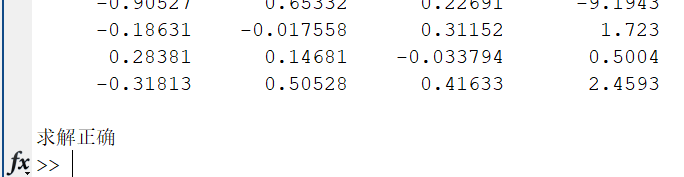


图11：求解结果展示

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

图12：求解误差（左高斯消元，右列主消元）

**四、小结（可含个人心得体会）**

1. 通过本次实验，我掌握了高斯消元法和高斯列主消元法求解线性方程组的方式以及他们之间的区别。
2. 通过编写代码，我对如何使用Matlab有了更深的理解。
3. 高斯消元法大大降低了求解线性方程组的时间复杂度，但是也带来了不稳定和精度问题。而高斯列主消元法则很好地解决了上述两个问题，但是时间复杂度会稍高，因为每次都需要找到当前列最大元素所在行。
4. 验证算法的准确性也是编写代码的重要的一环，通过计算loss即可知道算法的准确性。
5. 验证算法的准确性还可以通过与Matlab自带函数的结果对比。由此，我能也够确保自己编写的代码的准确性
6. 总的来说，这次实验不仅提升了我的编程技能，也加深了我对线性代数和数值计算的理解。

|  |
| --- |
| 指导教师批阅意见：  成绩评定：  指导教师签字：  2024 年 10 月 7 日 |
| 备注： |

注：1、报告内的项目或内容设置，可根据实际情况加以调整和补充。

2、教师批改学生实验报告时间应在学生提交实验报告时间后10日内。