

# 傅立叶变换光谱测量技术实验报告

黄润华

Ocean University of China

email@noreply.com

杨超

Ocean University of China

email@somewhere.com

摘要—本实验报告为傅立叶变换光谱测量技术第五次实验报告,本报告采用 Python 仿真动镜倾斜误差因素影响下的傅里叶变换光谱测量系统的光谱测量曲线。误差可以是随机、线性或正弦变化的。以 632.8nm 的 HeNe 激光和 532nm 的 VAG 激光为例。采样间隔 79.1nm。本仿真以 632.8nm 的 HeNe 激光为例。

Index Terms—Optical spectrum, python, fft

## I. 实验目的

1. 思考并仿真动镜倾斜误差因素对傅里叶变换光谱测量曲线的影响;
2. 学习利用 Python 仿真不同影响条件下光谱测量曲线。

## II. 实验原理

### A. 分辨率和分辨能力

光谱仪的光谱分辨率是其定性区分彼此非常接近的两个光谱峰的能力的量度。通常,光谱分辨率由仪器线形状 (ILS) 的半峰全宽 (FWHM) 表示,光谱仪的输出光谱具有纯单色输入辐射。

光谱分辨率  $R$  由下式定义

$$R = \frac{\sigma_{max}}{\delta\sigma} \quad (1)$$

其中  $\sigma_{max}$  是光谱仪设计运行的最大波数。

1) 分辨率与最大 OPD 之间的关系: 根据公式

$$B_c(\sigma) = B_{rel}(\sigma) + iB_{iol}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x) \text{rect}(x) e^{-i2\pi\sigma x} dx \quad (2)$$

$$\begin{cases} cB(\sigma) = 2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) \text{rect}(x) e^{-2\pi\sigma x} dx \right| \\ \phi(\sigma) = \arctan \left[ \frac{B_{iol}(\sigma)}{B_{rel}(\sigma)} \right] \end{cases} \quad (\sigma \geq 0) \quad (3)$$

其中矩形函数定义为

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

因此,理论上 FTS 的光谱分辨率取决于可移动镜的扫描范围

$$B_e(\sigma) = \begin{cases} lB(\sigma)/2 & (\sigma \geq 0) \\ B(-\sigma)/2 & (\sigma \leq 0) \end{cases} \quad (4)$$

理论上,完美单色线的干涉图可以用来描述

$$I(x) = 2\cos(2\pi\sigma_0 x) \quad (5)$$

将此表达式替换为方程  $B(\sigma)$ 、 $\phi(\sigma)$ , 考虑到实际上  $\sigma > 0$ , 可以得到 ILS  $B(\sigma)$  的表达式:

$$B_{ILS}(\sigma) = 2L \frac{\sin[2\pi(\sigma_0 + \sigma)L]}{2\pi(\sigma_0 + \sigma)L} + \frac{\sin[2\pi(\sigma_0 - \sigma)L]}{2\pi(\sigma_0 - \sigma)L} \quad (6)$$

$$\approx 2L \times \frac{\sin[2\pi(\sigma_0 - \sigma)L]}{2\pi(\sigma_0 - \sigma)L} \quad (7)$$

$$= 2L \sin c[2\pi(\sigma_0 - \sigma)L] \quad (8)$$

如图 1 所示,光谱从一条线 ( $\delta$  函数) 扩展到  $\text{sinc}$  函数形状 (仪器线形)。

$$(\delta\sigma)_{linewidth} = \frac{1.21}{2L} \quad (9)$$

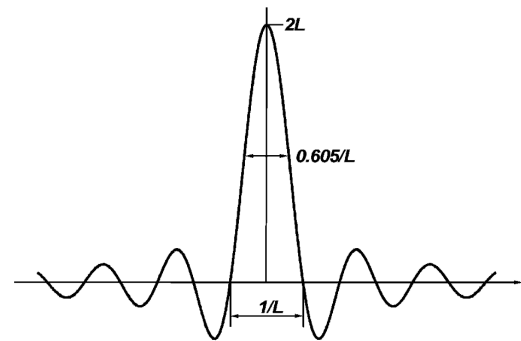


图 1.  $B_{ILS}(\sigma)$

2) 分离共振: 分辨率可以通过分离图 2 所示光谱中相同强度 (或共振) 的两条单色线 (波数和) 来描述。如果两个线峰值之间的下降幅度大于线峰值的 20%, 则可以声称解决了两个共振, 此时

$$(\delta\sigma)_{\text{separation}} = \frac{1.46}{2L} \quad (10)$$

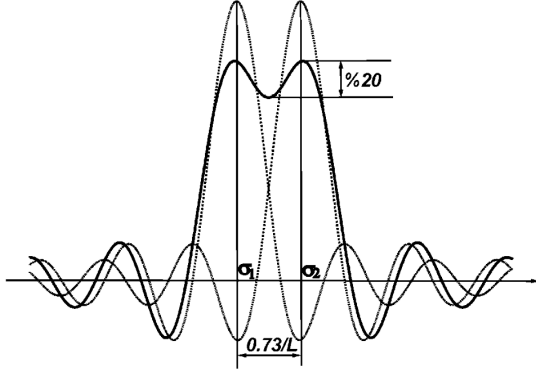


图 2. 分离共振解析结果

3) 瑞利准则: 瑞利准则分离两个 ILS 的峰值, 使得一个共振的最大值落在另一个共振的零点处, 因此, 仪器线形状决定的分辨率是

$$\delta\sigma = \frac{1}{2L} \quad (11)$$

#### B. 分辨率与发散角度之间的关系

图 3 是迈克尔逊干涉仪的等效图, 根据图 3 与图 4 可以计算出 OPD 与夹角  $\theta$  之间的关系

$$OPD = 2 \times \frac{x/2}{\cos \theta} - x \tan \theta \sin \theta = x \cos \theta \quad (12)$$

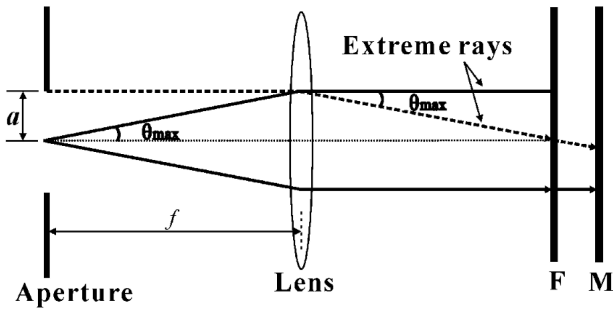


图 3. 迈克尔逊干涉仪的等效图

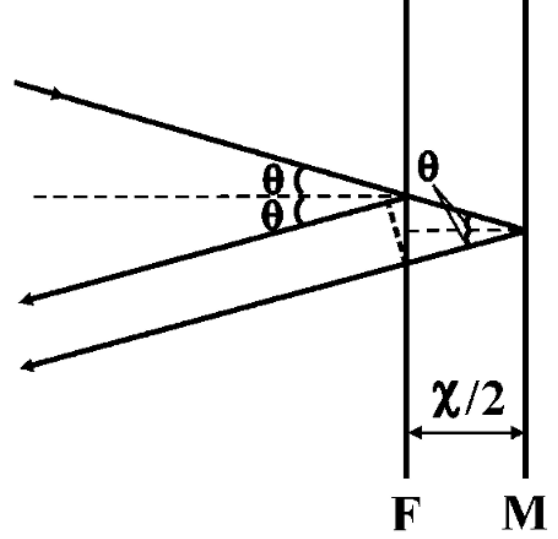


图 4. 迈克尔逊干涉仪接收端放大图

我们可以得到扩展源的归一化干涉图, 对着一个立体角  $\Omega_{\max}$  是

$$I(x, \Omega_{\max}) = \frac{1}{\Omega_{\max}} \int_0^\infty B(\sigma) \int_0^{\Omega_{\max}} \cos(2\pi\sigma x \cos \theta) d\Omega d\sigma$$

根据立体角的公式, 上述式子可以化简为

$$I(x, \Omega_{\max}) = \int_0^\infty B(\sigma) \text{sinc} \frac{\Omega_{\max} \sigma x}{2} \cos[2\pi\sigma x - \frac{\Omega_{\max} \sigma x}{2}] d\sigma$$

对于单色光源其满足

$$B(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0)$$

其仪器线轮廓可以写为

$$\begin{cases} B_{Div-ILS}(\sigma) = [\pi/(\sigma_0 \Omega_{\max})] \text{rect}(\sigma_1, \sigma_2) \\ \quad + [\pi/(\sigma_0 \Omega_{\max})] \text{rect}(-\sigma_2, -\sigma_1) \\ \sigma_2 = \sigma_0 - \sigma_0 \Omega_{\max}/2\pi \\ \sigma_1 = \sigma_0 \end{cases}$$

于是可以得到

$$B_{Div-ILS}(\sigma) = [\pi/(\sigma_0 \Omega_{\max})] \text{lrect}(\sigma_1, \sigma_2) \quad (13)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 [1 - (\Omega_{\max}/4\pi)] \quad (14)$$

总的波数差或分辨率是

$$\delta\sigma = \frac{\sigma_0 \Omega_{max}}{2\pi}$$

考虑到可移动镜的扫描长度有限, 实际 FTS 的 ILS 应该是

$$B_{ILS}(\sigma) = B_{Div-ILS}(\sigma) * 2L \sin c[2\pi\sigma L] \quad (15)$$

其中  $L$  是可移动镜的最大位移,  $*$  是卷积算子。图 4 中两个极端射线的 OPD 之间的差异公式如下:

$$\Delta OPD = 2L - 2L \cos \theta_{max} \approx L\theta_{max}^2 = L \frac{a^2}{f^2}$$

其中  $a$  是入口孔径的半径,  $f$  是准直器的焦距。当  $\Delta OPD$  等于  $\lambda/2$  时, 两条光线异相, 它们之间会发生破坏性叠加。对于宽带辐射输入, 存在的最短波长决定了 FTS 的  $\Delta OPD$  的最大有效值, 如下式所示:

$$\Delta OPD \leq \frac{\lambda_{min}}{2} = \frac{1}{2\sigma_{max}} \quad (16)$$

我们可以得到  $a$  的值应满足以下不等式, 以获得大于  $R$  的分辨率:

$$a \leq \frac{f}{\sqrt{R}} \quad (17)$$

### C. 傅里叶变换光谱仪的优点

与色散光谱仪相比, FTS 具有许多广泛宣传的优点。然而, 只有吞吐量 (Jacquinot) 和多路复用 (Felgett) 优势是 FTS 操作原理所固有的, 而不是特定的工程设计。

1) 吞吐量或 Jacquinot 优势: 吞吐量优势是 FTS 可以具有大的圆形入口孔, 其面积比分散光谱仪中的狭缝的面积大得多, 以获得相同的分辨率。吞吐量定义为, 其中是限制孔径的面积, 并且是图 5 中所示的准直或聚焦光学器件所对应的立体角。

FTS 的最大吞吐量由下式给出

$$T_{FTS} = A\Omega_s = \frac{\pi}{R} A_{mirror} \quad (18)$$

其中  $A_{mirror}$  是镜子的投影面积。

对于光栅光谱仪, 实现分辨率  $R$  的能量吞吐量受其狭缝区域和准直光学系统的限制, 并由下式给出:

$$T_{grating} = \frac{l}{f_g R} A_{grating} \quad (19)$$

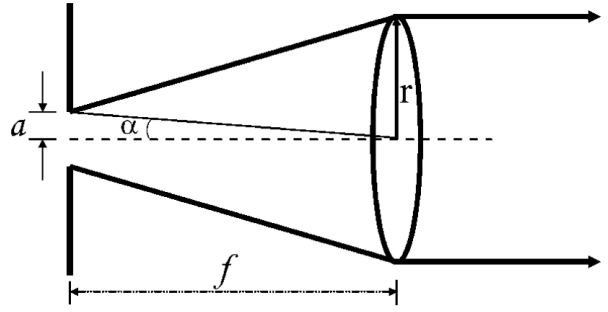


图 5. 孔径和立体角的关系图

其中  $f_g$  是准直光学系统的焦距,  $l$  是狭缝的高度,  $A_{grating}$  是光栅的投影面积。对于光栅光谱仪,  $\frac{l}{f_g R}$  小于  $1/20$ 。

因此, 对于相同的分辨率和类似的仪器尺寸, FTS 比光栅光谱仪具有高 60 倍的能量收集能力。因此, Jacquinot 的优势使得 FTS 更适合于弱信号测量, 其中检测器噪声占主导地位, 频谱信噪比 (SNR) 与吞吐量成比例地增加。

2) Multiplex 或 Fellgett 的优势: 多路复用的优点是 FTS 在扫描周期内同时观察来自给定频谱的整个范围的所有频谱信息。因此, 通过使用 FTS 和使用单色仪可获得的 SNR 的比率:

$$\frac{SNR_{FTS}^S}{SNR_{monochromator}} = N^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

FTS 的多重优势仅存在于红外和远红外信号的测量中, 并且在可见 - 紫外信号的检测中丢失, 因为在红外检测中, 与信号电平无关的检测器噪声占主导地位。量子噪声在可见光 - 紫外信号检测中占主导地位。

3) Connes 的优势: FTS 的波数范围来自 He-Ne 激光条纹, 其作为每次扫描中采样位置的内部参考。这种激光的波数非常准确, 并且非常稳定。因此, 干涉仪的波数校准更精确, 并且具有比分散仪器的校准好得多的长期稳定性。

### III. 实验内容

仿真动镜倾斜误差因素影响下的傅里叶变换光谱测量系统的光谱测量曲线。误差可以是随机、线性或正弦变化的。以 632.8nm 的 HeNe 激光和 532nm 的 VAG 激光为例。采样间隔 79.1nm。

### IV. 实验结果

本实验报告以 632.8nm 的波长为例。

## 632.8nm - Comparison of the original signal and the signal after adding random noise

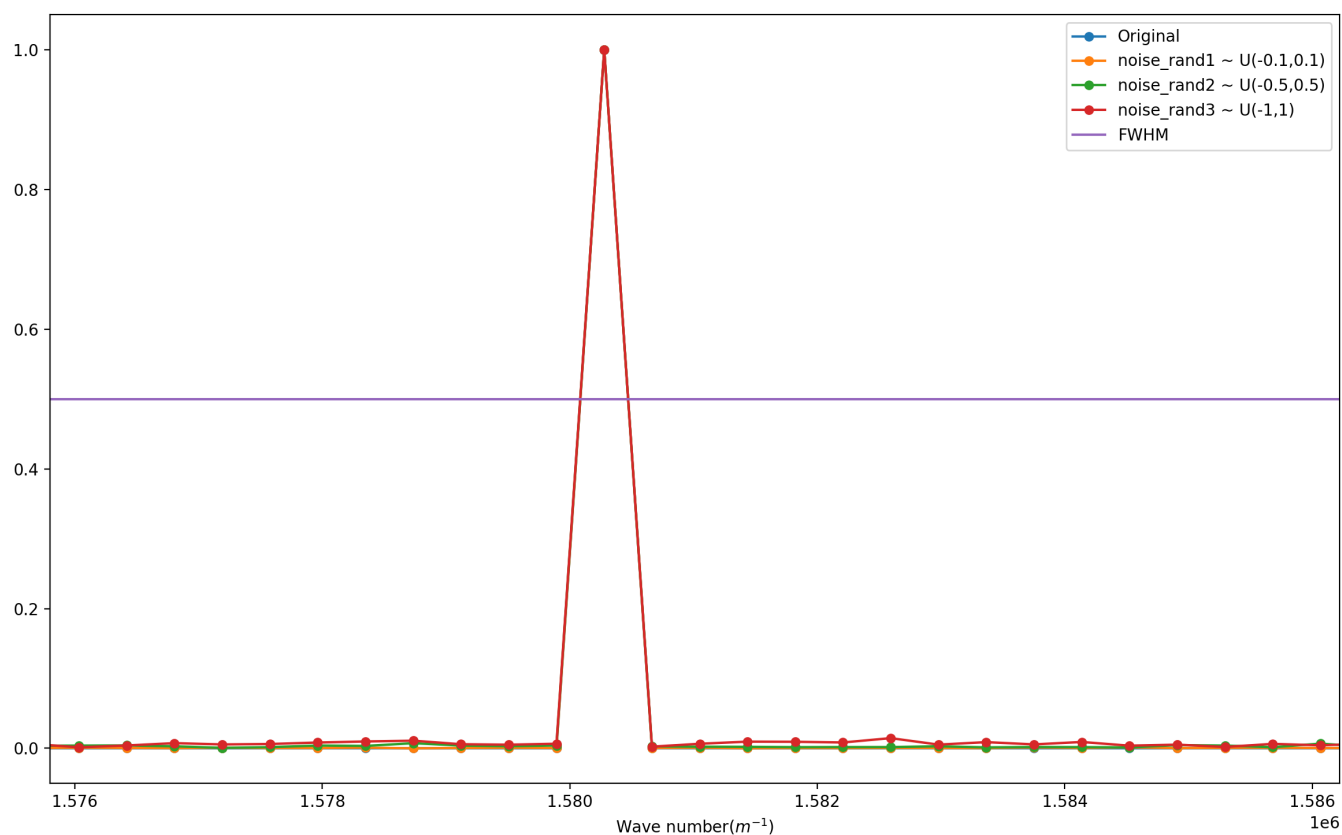


图 6. 随机噪声形式的误差对光谱曲线的影响

### A. 三种不同的叠加噪声

图片 7、图 8与图 9显示了本次仿真的三种不同的叠加噪声，其中图 7为叠加的正弦噪声，图 8为叠加的随机噪声，图 9为叠加的线性噪声。

通过图片 7、图 8与图 9可以看到，动镜倾斜误差因素对光谱曲线的影响较小，甚至可以忽略不计。

### V. 结语

本实验完成了利用 Python 仿真动镜倾斜误差因素影响下的傅里叶变换光谱测量系统的光谱测量曲线。

### 附录

实验代码（以随机误差噪声为例）

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

### 632.8nm - Comparison of the original signal and the signal after adding sinusoidal noise

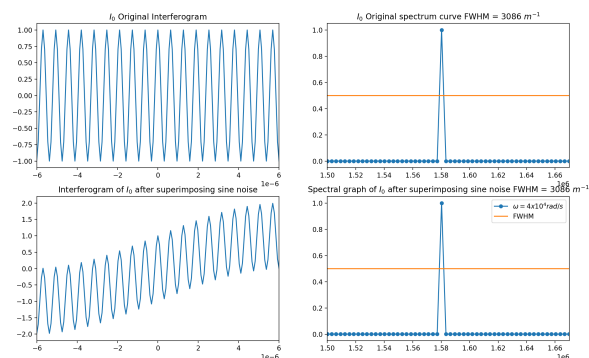


图 7. 叠加的正弦噪声

```
from scipy.fftpack import fft
from pylab import *
import random
```

632.8nm - Comparison of the original signal and the signal after adding random noise

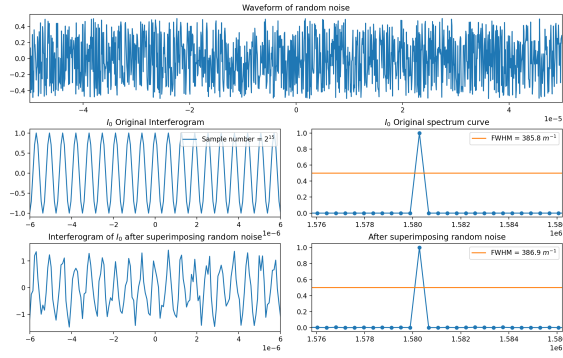


图 8. 叠加的随机噪声

632.8nm - Comparison of the original signal and the signal after adding linear noise

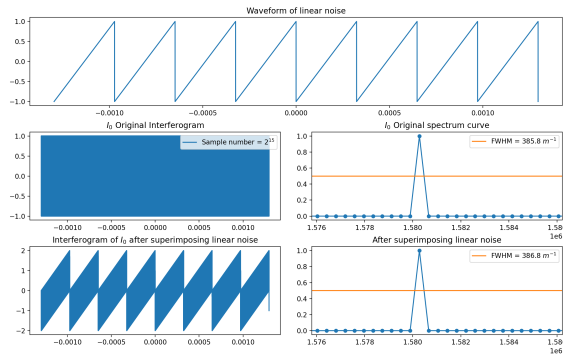


图 9. 叠加的线性噪声

```
import matplotlib.gridspec as gridspec
```

```
# 本程序模拟动镜倾斜误差影响下的傅里叶  
# 变换光谱测量系统的光谱测量曲线
```

```
# 程序具体参数如下:
```

```
# 一 采样间隔选取 79.1nm
```

```
# 一 干涉图波长选取 632.8nm
```

```
# 一 干涉图采样点数选取 2^15
```

```
# 一 本程序只叠加一种噪声——随机噪声
```

```
def GetFFT(I0, Iw0, n0):
```

```
    Y0 = 2*abs(fft(I0, n0))
```

```
    Y0_max = max(Y0);
```

```
    Y0 = Y0/Y0_max
```

```
    Y0 = Y0[:int(n0/2)]
```

```
    Yw0 = 2*abs(fft(Iw0, n0))
```

```
    Yw0_max = max(Yw0);
```

```
    Yw0 = Yw0/Yw0_max
```

```
    Yw0 = Yw0[:int(n0/2)]
```

```
    return Y0, Yw0
```

```
# 波长为632.8nm
```

```
laimda0 = 632.8*10**(-9)
```

```
# 79.1nm的采样间隔
```

```
i = 79.1*10**(-9)
```

```
# 中心点的采样频
```

```
sigma0 = 1/laimda0
```

```
p1 = (-1)*(2**14)*79.1*10**(-9)
```

```
# 2**n个点
```

```
p2 = (2**14-1)*79.1*10**(-9)
```

```
# 无补零
```

```
x0 = np.arange(p1, p2, i)
```

```
n0 = n1 = 2*(int(np.log2(len(x0)))+1)
```

```
print("n0 length = %d" %n0)
```

```
I0 = np.cos(2*np.pi*sigma0*x0)
```

```
# 设置频谱图的横坐标
```

```
fs_0 = 1/i*np.arange(n0/2)/n0
```

```
# 此部分为叠加随机噪声
```

```
noise_rand = [random.uniform(-1, 1) for  
_ in range(len(x0))]
```

```
# noise_rand = [random.uniform(0,  
laimda0/5) for _ in range(len(x0))]
```

```
Iw1 = I0 + noise_rand
```

```
Y0, Yw1 = GetFFT(I0, Iw1, n0)
```

```
# 设置频谱图的横坐标
```

```
fs_1 = 1/i*np.arange(n0/2)/n0
```

```
best_Y0_average_range = 0.5*np.ones((  
Yw1.size, 1))
```

```
figure(1)
```

```

gs = gridspec.GridSpec(3, 6)
gs.update(wspace=0.5, hspace=0.3)

subplot(gs[0, :6])
plt.plot(x0, noise_rand)
plt.xlim(-0.00005, 0.00005)
plt.title("Waveform of random noise")

subplot(gs[1, 0:3])
s1, = plt.plot(x0, I0)
plt.legend(handles=[s1], labels=['Sample
    number =  $2^{15}$ '], loc='upper
    right')
plt.xlim(-6*(10**(-6)), 6*(10**(-6)))
plt.title("$I_0$ Original Interferogram")

subplot(gs[1, 3:6])
s1, = plt.plot(fs_1, Y0, marker='o', ms
    =5)
p1, = plt.plot(fs_0,
    best_Y0_average_range)
plt.legend(handles=[p1], labels=['FWHM =
    385.8  $\text{\AA}$ '], loc='upper right')
plt.title("$I_0$ Original spectrum
    curve")
plt.xlim(1.5758*(10**6),
    1.58622*(10**6))

subplot(gs[2, 0:3])
plt.plot(x0, Iw1)
plt.xlim(-6*(10**(-6)), 6*(10**(-6)))
plt.title("Interferogram of $I_0$ after
    superimposing random noise")

subplot(gs[2, 3:6])
plt.plot(fs_1, Yw1, marker='o', ms=5)

```

```

p2, = plt.plot(fs_0,
    best_Y0_average_range)
plt.legend(handles=[p2], labels=['FWHM =
    386.9  $\text{\AA}$ '], loc='upper right')
plt.title("After superimposing random
    noise")
plt.xlim(1.5758*(10**6),
    1.58622*(10**6))

plt.suptitle("632.8nm - Comparison of
    the original signal and the signal
    after adding random noise", fontsize
    = 20)

plt.show()

```