基于递推模型与几何模型的“板凳龙”运动问题研究

摘要

板凳龙是浙闽地区的传统民俗活动，以庆祝丰收和祈求吉祥为目的，常见于节庆和庙会中。本文利用把手位置递推模型以及板凳碰撞模型、螺距补偿模型等**几何模型**来研究“板凳龙”的运动问题，旨在解决“板凳龙”运动轨迹、时间、速度等问题。

针对问题一，本文建立了**把手位置递推模型**：首先根据初始位置和螺距构建极径r与极角θ的函数关系，再根据初始速度 1m/s 构建极角θ和时间t的函数关系，其次根据直角坐标与极坐标之间的关系可以得到把手位置与极角θ的函数关系，然后根据两把手之间的距离可以**递推**全部把手的位置信息，最后对把手位置求时间的导数即可得到把手速度。将相关数据代入模型求解分析可知，随着时间的增加，各把手的速度不断增大并趋向于 1m/s。

针对问题二，本文建立了**板凳碰撞模型**：首先通过**几何关系**确定发生碰撞的位置，再将龙头前把手的运动轨迹近似认为是“板凳龙”的运动轨迹，通过碰撞点与前把手的位置关系确定了碰撞点的坐标，然后根据**点到直线的距离公式**得到碰撞点位置与板凳宽度之间的关系，最后根据板凳宽度确定约束条件。将相关数据代入模型，通过**数值模拟**的方式求解可得，舞龙队盘入的终止时刻大约为 **412.58 s**。

针对问题三，本文建立了**螺距补偿模型**：首先将“板凳龙”沿螺旋线盘入的情况近似认为是螺栓拧入螺母的情况，再以龙头碰撞点位于相邻板凳边缘中点时为临界情况，从而确定**最大螺距补偿系数**$\boldsymbol{\delta}$，然后将螺距补偿模型几何化，通过第二问的**板凳碰撞模型**可以得到龙头板凳以及龙头相邻板凳前后把手的位置信息，最后根据平面解析几何、勾股定理、方程平移等相关知识确定**螺距补偿系数**$\boldsymbol{\delta}$。将相关数据代入模型，通过 matlab 编程求解可以得到临界螺距$\boldsymbol{p}_{\min}$为 **45.21 cm**。

针对问题四，本文建立了**圆弧调整模型**：首先确定盘入螺旋线、盘出螺旋线与调头空间之间的切点位置，再通过切点的性质找到圆心所在直线，根据题目所给出大小圆弧半径，且各部分均相切，进而对圆心位置与半径大小进行判断，最后得出调头路径的长度始终为 **14.137 m**。针对求解板凳龙运动信息的问题，本文建立了**基于时间的把手位置递推模型**：首先对不同时间龙头前把手的位置进行分类，再利用几何关系计算得到龙头位置信息，然后根据**递推模型**得到各把手的位置信息，最后对把手位置求时间的导数得到把手速度。将相关数据代入模型求解分析可知，各把手速度的变化规律基本符合问题一中得出的变化规律，进一步验证了模型的合理性。

针对问题五，本文建立了**鞭尾速度模型**：首先将“板凳龙”近似看成是一条鞭子，认为龙尾后把手处速度最大，再根据曲率与速度的关系得到，调头曲线半径越小速度越大的结论，然后可以将问题简化为求解当龙尾后把手速度为 2m/s 时的龙头速度，最后通过**平面解析几何**求得龙尾后把手的坐标。将相关数据代入第四问的递推模型求解得到龙头的最大行进速度为 **1.812 m/s**。

最后，本文还对模型进行合理性分析与推广，探讨了模型在不同场景下的应用潜力和可能面临的挑战，为未来的研究提供了参考。

关键词：递推模型；板凳碰撞模型；螺距补偿模型；鞭尾速度模型；平面解析几何

一、问题重述

1.1 问题背景

“板凳龙”是浙闽地区的传统民俗活动，人们将数条板凳首尾相连，形成一个圆盘状的“盘龙”，在舞龙队能够自由盘入、盘出的前提下，整体的面积越小则行进速度越快。现有一板凳龙由 223 节板凳组成，第一节为龙头，最后一节为龙尾，其余均为龙身。板宽均为 30 cm，龙头长 341 cm，龙身和龙尾长均为 220 cm，每节板凳上有两个孔，孔径为 5.5 cm，孔的中心到相邻最近的板头距离为 27.5 cm (见图 1 和图 2)。板凳龙的连接方式见图 3。

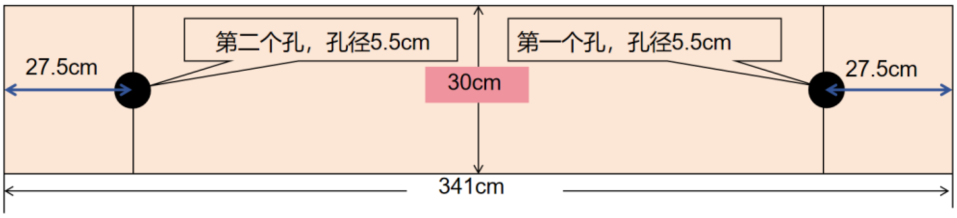

图 1 龙头俯视图

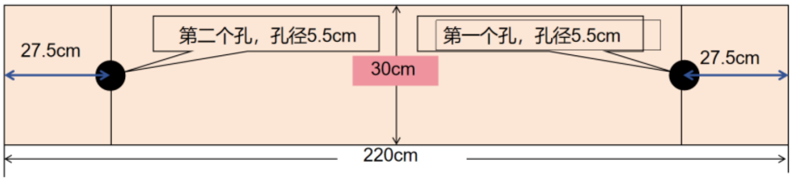

图 2 龙身和龙尾俯视图

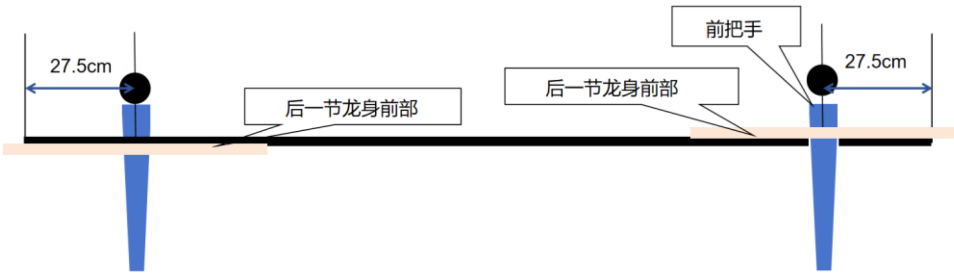

图 3 板凳正视图

1.2 问题提出

问题 1：问题要求针对舞龙队龙头的初始位置结合运动过程，构建一个模型，用以计算每秒整个舞龙队的速度与位置。

问题 2：问题要求根据问题一的设定，考虑板凳之间不发生碰撞的情况下舞龙队盘入的时间，并计算出舞龙队的位置与速度。

问题 3：问题要求通过所设定螺线中心为圆心、直径为 9 m 的圆形调头区域计算出舞龙队逆时针盘出时所需最小调头空间的螺距。

问题 4：问题要求在问题三设定下调整圆弧，使其保持各部分相切，调头曲线变短。并计算出问题所给时间段中，每秒舞龙队的位置和速度。

问题 5：在问题四设定的路径中，根据所给条件求出龙头最大行进速度，使得各把手的速度不超过 2m/s。

二、问题分析

2.1 问题一的分析：

问题要求建立舞龙队位置与时间的数学模型。首先假设板凳龙沿直线盘入螺旋线，由阿基米德螺线的定义可以得到二维等距螺旋线的极坐标方程，然后根据由极坐标相关知识建立时间与极角的函数关系。最后根据几何关系建立龙身和龙尾把手位置的递推模型分析龙头前把手、龙身前把手和龙尾后把手位置和速度的关系。

2.2 问题二的分析：

问题要求建立板凳的碰撞模型。首先由于龙头最长，且龙身会沿着龙头所走过的路径运动，所以碰撞点一定发生在龙头板凳左上角位置处，因此将板凳碰撞模型转化为龙头碰撞模型。随后根据直线的相关知识建立龙头碰撞迭代的模型，分析龙头、龙身和龙尾把手位置和速度的规律。

2.3 问题三的分析：

问题要求以螺线中心为圆心、直径为 9 m 的圆形调头空间，确定一个最小螺距，使得龙头前把手能够沿着相应的螺线盘入到调头空间的边界。首先将板凳龙沿螺旋线盘入的情况近似认为是螺栓扭入螺母的情况建立螺距补偿模型，然后将螺距补偿模型几何化根据几何关系与三角函数知识求解出临界螺距。

2.4 问题四的分析：

问题要求构建调头曲线的模型，在所给的调头区域内，调整构成调头路径的两段圆弧使其仍保持各部分相切，使得调头曲线变短。首先通过直线斜率相关知识，得到直线 l_2 的直线方程，随后再根据圆周角定理得知 S 形曲线始终为定值建立圆弧调整模型，最后再通过几何与极坐标知识，分析舞龙队位置与速度的关系。

2.5 问题五的分析：

问题要求在问题四设定的路径中，龙头速度保持不变，确定龙头的最大行进速度。首先将板凳龙近似的认为是一条鞭子，结合曲率与速度的关系，建立鞭尾速度模型，求解出速度最大的应该是龙尾后把手，随后将龙头前把手速度简化为龙头的速度。最后求解出龙头的最大速度。

三、模型假设

1. 假设板凳不会在运动中发生变形
2. 假设龙头前把手位于起始点 A 处
3. 假设调头过程中的 S 形曲线在出入点都与螺线相切
4. 不考虑人为因素以及环境因素导致板凳龙运动轨迹改变的情况

四、符号说明

符号	意义	单位
$r(\theta)$	二维等距螺旋线方程	\
s	弧长	米
$v_{x/y}(t)$	龙头前把手在x/y轴上速度关于时间的方程	\
L	两把手之间的距离	米
(x_i,y_i)	第 i 个把手的位置坐标	\
(x_h,y_h)	龙头前把手坐标	\
$(x_{碰},y_{碰})$	碰撞点坐标	\
$p_{\min}$	临界螺距	米
δ	螺距补偿系数	米
(x_i,y_i)	第 n 条板凳后把手的坐标	\
R_1	调头曲线大圆半径	米
R_2	调头曲线小圆半径	米
$v_{\max}$	龙头的最大速度	米/秒

注：未申明的变量以其在符号出现处的具体说明为准。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：把手位置递推模型的建立与求解

当舞龙队从 A 点盘入时，把手沿着等距螺线移动，根据题设所给板凳长度信息，运用几何知识可以算出板凳龙长度为：369.71 m，结合等距螺旋线的解析方程可以建立舞龙把手位置的坐标信息与旋转角度的关系，再通过确定旋转角度与时间和速度的关系递推求解得到舞龙各把手位置与速度信息。

5.1.1 二维等距螺旋线模型的建立

首先将舞龙队盘绕的等距螺旋线用极坐标形式展示，如图 4 所示，其中螺距 b=55cm，箭头指向为舞龙队盘入方向，可建立二维等距螺旋线模型。

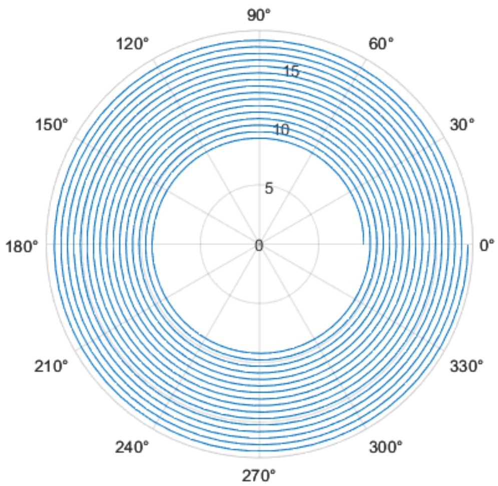

图 4 等距螺线极坐标形式示意图

- **等距螺旋线模型建立**

由图 1 建立阿基米德螺线可以得到二维等距螺旋线的极坐标方程为：

$$r(\theta)=a+b\theta \tag{1}$$

其中θ为极角，螺距 b 为 0.55m，初始距离 a 为 8.8m，因此二维等距螺旋线的极坐标方程为：

$$r(\theta)=8.8+\frac{0.55\theta}{2\pi}\approx 8.8+0.0876\theta \tag{2}$$

由平面直角坐标系与极坐标系之间的关系可得：

$$\begin{cases} x(\theta)=r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta)=r(\theta)\sin\theta \end{cases} \tag{3}$$

- **时间与极角函数关系的建立**

由于龙头龙头前把手沿着等距螺旋线的行进速度 v_0 始终为 1 m/s，可以得到：

$$ds_0=v_0dt \tag{4}$$

其中 s_0 为在 t 时间内龙头沿螺旋线移动的弧长距离，对极坐标下的等距螺旋线进行微分求解，对曲线微分形式如下：

$$ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta \tag{5}$$

对微分方程进行求解，联立式(4)、(5)可得：

$$s=\int_0^{\theta}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta=t \tag{6}$$

- **龙头前把手位置与速度模型的建立**

随着龙头前把手向等距螺旋线内不断盘入，建立龙头前把手与极角 θ 的关系式由式(3)可得，由式（6）可得时间 t 与极角之间存在函数关系，因而将 θ 视作时间 t 的函数，进而确定龙头前把手位置为：

$$\begin{cases} x[\theta(t)]=r[\theta(t)]\cos[\theta(t)] \\ y[\theta(t)]=r[\theta(t)]\sin[\theta(t)] \end{cases} \tag{7}$$

由式（7）可得到龙头把手位置随时间的变化关系，为求解随时间龙头把手速度，即龙头把手的位置随时间的变化情况，因而龙头前把手在 x 轴与 y 轴上的分速度可通对位置求时间的导数得到，进而根据平行四边形定则得到龙头把手的速度：

$$
\begin{cases}
v_x(t)=\dfrac{dx[\theta(t)]}{dt}=\dfrac{dr[\theta(t)]}{dt}\cdot\dfrac{d\theta(t)}{dt}\{\cos\theta(t)-r[\theta(t)]\sin\theta(t)\} \\
v_y(t)=\dfrac{dy[\theta(t)]}{dt}=\dfrac{dr[\theta(t)]}{dt}\cdot\dfrac{d\theta(t)}{dt}\{\sin\theta(t)+r[\theta(t)]\cos\theta(t)\} \\
v=\sqrt{v^2{}_x(t)+v^2{}_y(t)}
\end{cases} \tag{8}
$$

● **龙身和龙尾把手位置递推模型的建立**

由题可知连接同一板凳的前后把手之间的距离同样确定，但龙头板凳与其余板凳长度不同需要特别讨论因而不妨假设两把手之间的距离为 L，第 i 个把手的位置坐标为 (x_i,y_i)，如图 5 所示：

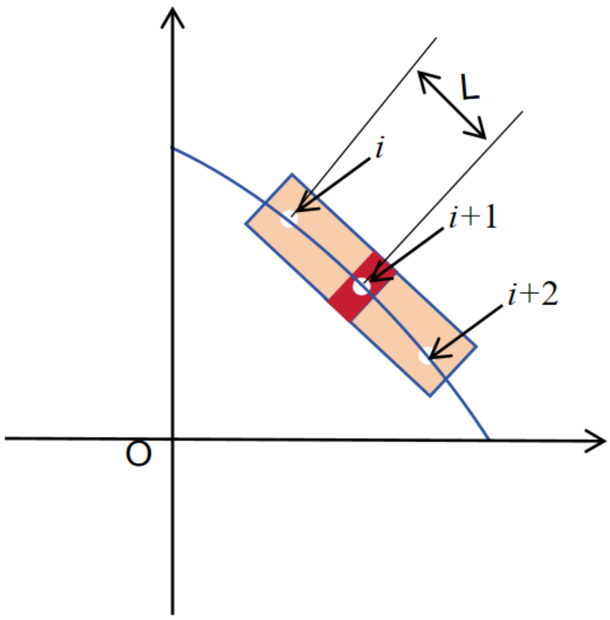

图 5 把手位置递推模型示意图

通过勾股定理求得第(i+1)个把手的坐标：

$$
(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2=L^2 \tag{9}
$$

对于龙首：L = 2.86 m ；对于龙身：L = 1.65 m 。

结合(2)、(6)、(7)、(9)确定各把手在螺旋线上的分布并根据极角与时间的关系，建立把手位置的递推模型为：

$$
\begin{cases}
r(\theta)=8.8+0.0876\theta \\
\displaystyle\int_0^{\theta}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta=t \\
x[\theta(t)]=r[\theta(t)]\cos[\theta(t)] \\
y[\theta(t)]=r[\theta(t)]\sin[\theta(t)] \\
(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2=L^2
\end{cases} \tag{10}
$$

5.1.1 把手位置与速度递推模型的求解

本文将龙头与龙身板凳长度、龙头前把手移动速度等数据带入把手位置与速度递推模型行进求解，具体步骤如下表：

表 1 把手位置与速度递推模型的求解步骤

手把位置与速度求解算法	
Step1：	判断在题目中所给的时间数据下筛选其中盘入的龙身节数。
Step2：	根据把手在整个舞龙中所处的方位进行分类，共分为：龙头前把手、龙头后把手、龙身把手并对其分别进行求解。
Step3：	首先根据盘入时间确定龙头位置，其次通过递推模型确定各盘入龙身所在位置与速度

已知板凳两把手由板凳身链接，长度固定，且为一条直线，前后把手位置均在等距螺旋线上。

- **针对龙头板凳的前把手与后把手的求解**

考虑到龙头与龙身龙尾板长之间存在差异因而首先针对龙首前把手(x_1,y_1)与龙首后把手(x_2,y_2)则有：

$$\begin{cases}(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=L_0^2\\ x_2[\theta(t)]=r[\theta(t)]\cos[\theta(t)]\\ y_2[\theta(t)]=r[\theta(t)]\sin[\theta(t)]\\ x_2^2+y_2^2>x_1^2+y_1^2\end{cases}\tag{11}$$

由此可以求得龙头板凳的前后把手在 t 时刻的位置并对其速度进行求解

- **针对龙身的前把手与后把手的求解**

由于除龙头外的其他板凳长度相同，且前一板凳的后把手是作为后一板凳的前把手，因而通过对每一个求出的后把手位置进行循环计算，便可得出已盘入的任意把手的位置与速度信息，约束如下：

$$\begin{cases}(x_i-x_{i+1})^2+(y_i-y_{i+1})^2=L^2\\ x_{i+1}[\theta(t)]=r[\theta(t)]\cos[\theta(t)]\\ y_{i+1}[\theta(t)]=r[\theta(t)]\sin[\theta(t)]\\ x_{i+1}^2+y_{i+1}^2>x_i^2+y_i^2\\ i\geqslant 2\end{cases}\tag{12}$$

将所求出的 i+1 作为下次循环计算的 i 值，进一步对 i+2 进行求解。首先采用数值模拟的方法求极角 θ 和时间 t 的函数关系，再定义步长为 1 s，依次迭代计算 0 到 300 s 内龙头的位置坐标，然后取 L=2.86 m，即可得到第 1 节龙身的把手坐标，作出龙头把手轨迹如图 6 所示；取 L=1.65 m，依次递推即可得到第 2 节龙身到龙尾的把手坐标，即可得到速度。

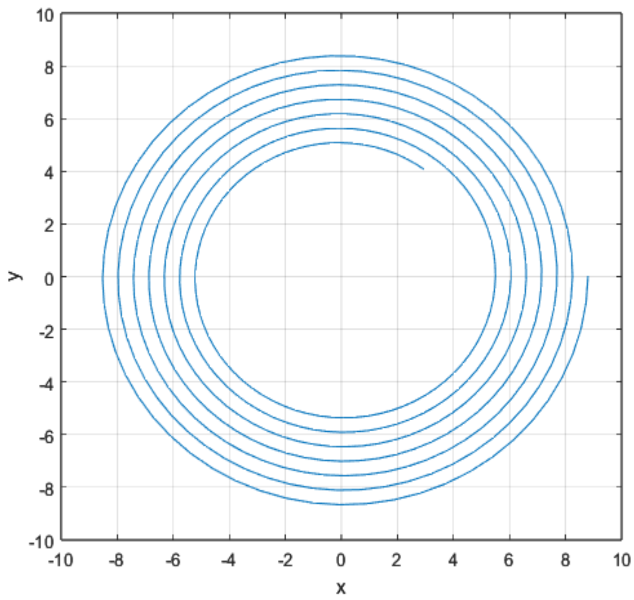

图 6 龙头位置可视化示意图

利用 matlab 软件编程求解，依次改变两把手之间的距离，即可得到各把手的位置结果，如表 2 所示：

表 2 位置结果表

	0s	60s	120s	180s	240s	300s
龙头 x(m)	8.800000	5.790058	-4.098316	-2.945383	2.574567	4.434563
龙头 y(m)	0.000000	-5.78009	-6.295534	6.10332	-5.367328	2.291812
第 1 节龙身 x(m)	\	7.457875	-1.448846	-5.224565	4.803235	2.897514
第 1 节龙身 y(m)	\	-3.438042	-7.405183	4.366877	-3.581307	4.383265
第 51 节龙身 x(m)	\	\	-6.164311	2.115466	6.656585	4.125789
第 51 节龙身 y(m)	\	\	5.792705	7.524567	-1.326598	3.215487
第 101 节龙身 x(m)	\	\	\	-3.501698	-3.266545	-6.915443
第 101 节龙身 y(m)	\	\	\	-7.968562	-7.248643	2.624786
第 151 节龙身 x(m)	\	\	\	\	\	5.564567
第 151 节龙身 y(m)	\	\	\	\	\	6.185463
第 201 节龙身 x(m)	\	\	\	\	\	\
第 201 节龙身 y(m)	\	\	\	\	\	\
龙尾(后) x(m)	\	\	\	\	\	\
龙尾(后) y(m)	\	\	\	\	\	\

注：未盘入螺旋线的龙身位置信息记为“ \ ”

对坐标求时间的导数，即可得到速度结果，如表 3 所示：

表 3 速度结果表

	0s	60s	120s	180s	240s	300s
龙头(m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身(m/s)	\	0.994941	0.994005	0.992642	0.991342	0.989343
第 51 节龙身(m/s)	\	\	0.995233	0.994428	0.993574	0.992691
第 101 节龙身(m/s)	\	\	\	0.995492	0.994764	0.993752
第 151 节龙身(m/s)	\	\	\	\	0.995539	0.994259
第 201 节龙身(m/s)	\	\	\	\	\	0.994976
龙尾(后)(m/s)	\	\	\	\	\	\

5.2 问题二：板凳碰撞模型的建立与求解

随着曲率的不断增大，相同长度的前后把手所连直线与两把手之间螺旋线的距离显著增大，而龙头的前把手处于最接近螺旋线中心，且龙身会沿着龙头所走过的路径运动，因而此处所在的外围一圈板凳所在曲率相比其他凳身更大，且在板凳中距离等距螺旋线最远的点为把手点指向龙头与朝向盘出方向的左上角位置，因而板凳之间的碰撞一定发生在龙头板凳左上角位置处，如下图所示。

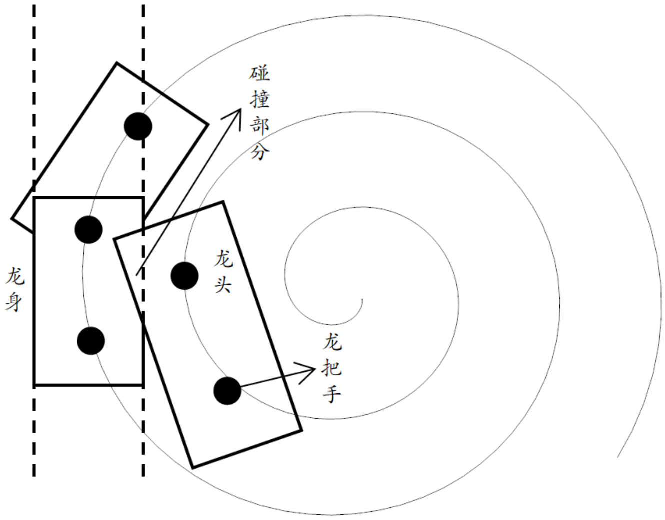

图 7 板凳龙碰撞示意图

5.2.1 龙头碰撞模型的建立

由于龙头板凳最长，并考虑到舞龙队员的实际操作情况，为了给舞龙队员预留一定的操作空间，现将龙头前把手的运动轨迹近似认为是板凳龙的运动轨迹。设龙头的前把手坐标为(x_h, y_h)，后把手坐标为(x_{h-1}, y_{h-1})，与龙头发生碰撞的板凳 i 前把手与后把手坐标分别为(x_i, y_i)和(x_{i-1}, y_{i-1})，认为龙头该板凳发生碰撞，碰撞点坐标为$(x_{碰}, y_{碰})$。

则由直线的两点式可以得到与龙头碰撞板凳前后把手所组成的 l_1 方程为：

$$y - y_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \tag{13}$$

由点到直线的距离公式可得，龙头前把手到碰撞板凳把手所在直线的方程的距离为：

$$d=\frac{|(y_i-y_{i-1})x_h-(x_i-x_{i-1})y_h+(x_i-x_{i-1})y_{i-1}-(y_i-y_{i-1})x_{i-1}|}{\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}} \tag{14}$$

认为当 d 小于板凳宽度时，发生碰撞。

- **龙头逆碰撞点位置的确定与判断**

为确定拟碰撞点位置即$(x_{碰},y_{碰})$，观察到由板凳前后把手所组成的直线与板凳外侧长边平行，且与短边垂直，题文给出孔径与板头距离为 d $_{头}$=27.5 cm，计算得出孔径中心与板宽面距离为 d $_{长}$=12.25 cm，首先给出由龙头前后把手两点构成的 l_2 方程：

$$y-y_{h-1}=\frac{y_h-y_{h-1}}{x_h-x_{h-1}}(x-x_{h-1}) \tag{15}$$

为确定尼碰撞点$(x_{碰},y_{碰})$的位置，已知把手与板凳长边与短边之间的距离信息与板凳前后两把手所构成的直线 l_2 公式，因而引入中间点(x_h',y_h')再基于已知龙首前把手点做板头的平行线从而确定中间点的位置，板头垂直于板凳长边，而板凳两把手连线平行于板凳长边，即 l_3 垂直于 l_2，所建方程如下方程：

$$y_-y_{h-1}=\frac{x_{h-1}-x_h}{y_h-y_{h-1}}x-\frac{y_h-y_{h-1}}{x_n-x_{h-1}}x_{h-1} \tag{16}$$

过点(x_h,y_h)做直线 l_3 的平行线，交板凳长边于(x_h',y_h')如图 8 所示：

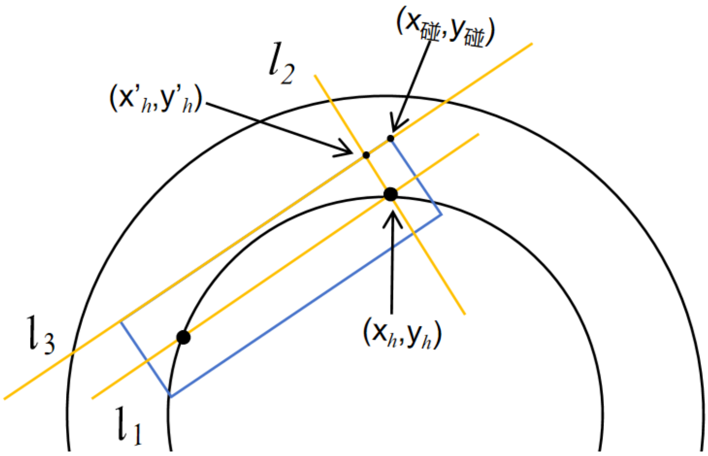

图 8 碰撞点几何关系示意图

得交点(x_h',y_h')与龙头前把手(x_h,y_h)的几何关系为：

$$\begin{gathered}\sqrt{(x_h'-x_h)^2+(y_h'-y_h)^2}=d_{长}\\(x_h')^2+(y_h')^2>x_h^2+y_h^2\end{gathered} \tag{17}$$

在确定交点(x_h',y_h')后同理过点(x_h',y_h')做直线 l_2 的平行线，得到拟碰撞点$(x_{碰},y_{碰})$与交点(x_h',y_h')之间的几何为：

$$\begin{gathered}\sqrt{(x_h'-x_{碰})^2+(y_h'-y_{碰})^2}=d_{头}\\(x_h')^2+(y_h')^2<x_{碰}^2+y_{碰}^2\end{gathered} \tag{18}$$

从而确定龙头板凳碰撞点坐标$(x_{碰},y_{碰})$，当$(x_{碰},y_{碰})$与直线 l_1 之间的距离 d 小于 $d_{长}$ 时，可以认为龙头凳与板凳 i 发生了碰撞。

5.2.2 问题二：板凳碰撞模型的求解

将板凳宽度、龙头运动轨迹以及约束条件等信息带入板凳碰撞模型求解，具体求解步骤如下表 4 所示：

表 4 板凳碰撞模型的求解步骤

板凳碰撞模型求解算法	
Step1：	以大步长计算拟碰撞点与螺旋线之间的距离来预估碰撞大致发生时间。
Step2：	在预估的碰撞时间内求解假设的拟碰撞点所在位置的轨迹。
Step3：	通过数值模拟的方法确定碰撞发生时所在的时间与位置。

- **初始范围确定**

先遍历 600 s 内龙头前把手的坐标位置，并进行可视化分析，如下图：

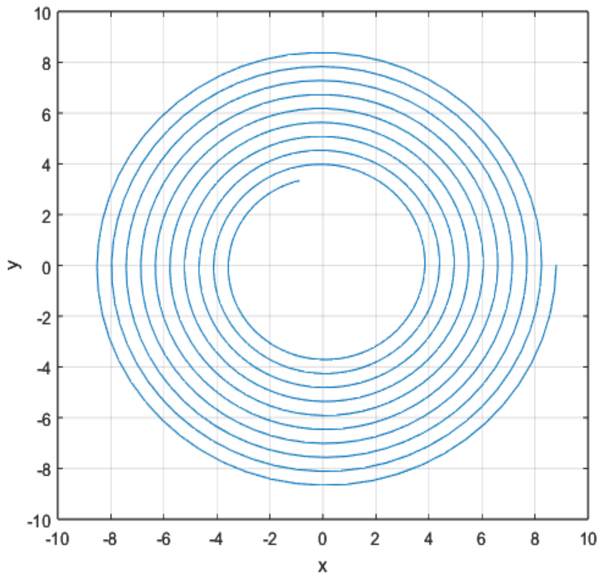

图 9 600s 内龙头位置信息图

分析上图各点坐标可推测碰撞时间大约在 300 s 到 500 s 之间；发生碰撞的位置至少为 40 秒前龙头前把手经过的位置，结合式(12)，即可得到大致的约束条件为：

$$\begin{cases} d=\dfrac{\left|(y_i-y_{i-1})(x_h-x_{i-1})+(x_i-x_{i-1})(y_{i-1}-y_h)\right|}{\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}}>0.3 \\ i>40 \end{cases} \tag{19}$$

- **碰撞模型的求解**

最后结合问题 1 中的把手递推模型，采用数值模拟的方法，给出 300s 到 600s 之间每秒个把手的位置信息，逐步检测是否满足约束条件，最后利用 matlab 编程可以解得：**舞龙队盘入的终止时刻为：412.58 s**

将时间带入第一问的把手递推模型可以得到龙头、龙身和龙尾把手的位置信息和速度，如下表：

表 5 位置信息和速度表

	横坐标 x (m)	纵坐标 y (m)	速度 (m/s)
龙头前把手	2.005257	2.724654	1.000000
第 1 节龙身前把手	-0.722339	3.379399	0.991343
第 51 节龙身前把手	-3.540213	3.745449	0.993391
第 101 节龙身前把手	-3.178464	-5.598126	0.994252
第 151 节龙身前把手	-6.512609	-3.658390	0.994959
第 201 节龙身前把手	-0.377292	8.383124	0.995276
龙尾后把手	8.125181	-3.290854	0.999562

5.3 问题三：螺距补偿模型的建立与求解

5.3.1 螺距补偿模型的建立

根据《机械设计基础》一书上给出的螺栓与螺母的形状如下图：

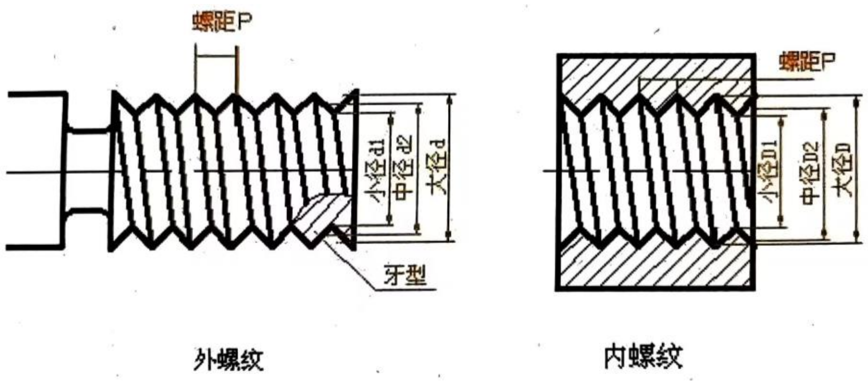

图 10 螺纹示意图

可以将板凳龙沿螺旋线盘入的情况近似认为是螺栓扭入螺母的情况，如果板凳龙可以向螺纹那样近似认为是光滑且连续的，那最小的临界螺距 $p_{\min}$ 应该等于板凳宽度 30cm，但是板凳龙的龙头和龙身板凳均不一样长，且盘入时也并不连续，故设定一个螺距补偿系数 δ，使得补偿后的螺距能使板凳龙盘入调头空间，补偿后的临界螺距为：

$$p_{\min} = 0.3 + \delta \tag{20}$$

● **螺距补偿系数模型的建立**

为了确保板凳龙能盘入螺旋线，假设一种临界情况，即龙头在刚盘入调头空间时刚好触碰到旁边龙身的中点，此时龙身前把手与原点的连线经过龙头与龙身间缝隙距离为补偿系数 δ，如图所示：

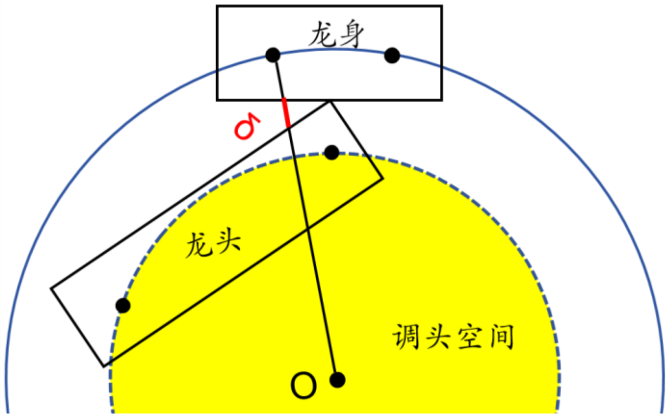

图 11 补偿系数示意图

5.3.2 螺距补偿模型的求解

● **螺距补偿模型几何化**

将上图简化以便求解螺距补偿系数，如下图：

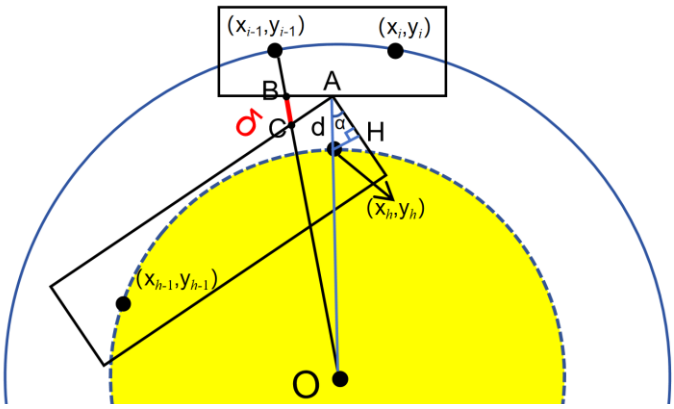

图 12 补偿系数几何关系示意图

其中，A 点为龙身板凳边缘的中点；(x_h,y_h)和(x_{h-1},y_{h-1})分别为龙头前把手和后把手坐标；(x_i,y_i)和(x_{i-1},y_{i-1})分别为与龙头相邻的龙身前把手和后把手坐标；A 点到龙头前把手的距离为 d；龙身后把手与原点的连线分别交龙身和龙头于 B、C 两点。

● **螺距补偿系数求解**

根据题设所给的板凳几何形状，根据勾股定理可以求得 d = 0.31325 m，故 AB 的直线方程为：

$$y_{AB}=4.81325 \tag{21}$$

根据问题二的模型，可以推出龙身后把手的坐标(x_{i-1},y_{i-1})，故 OB 的直线方程为：

$$y_{OB}=\frac{y_{i-1}}{x_{i-1}}x \tag{22}$$

根据正弦定理可以求得α为：61.39°，故 AC 的直线方程为：龙头前后把手所处直线方程沿α角平移 0.15 m。根据两点式可知，龙头前后把手所处直线方程为：

$$y-y_{h-1}=\frac{y_h-y_{h-1}}{x_h-x_{h-1}}(x-x_{h-1}) \tag{23}$$

由式(20)可知，平移后 AC 的直线方程为：

$$y_{AC}-y_{h-1}=\frac{y_h-y_{h-1}}{x_h-x_{h-1}}(x-x_{h-1})+0.15\sin\alpha-\frac{0.15\cos\alpha(y_h-y_{h-1})}{x_h-x_{h-1}} \tag{24}$$

联立式(18)、(19)即可求得 B 点坐标:(x_B,y_B)；联立式(20)、(21)即可求得 C 点坐标:(x_C,y_C)，最后根据两点间的距离公式可求得螺距补偿系数为：

$$\delta=\sqrt{(x_c-x_b)^2+(y_c-y_b)^2} \tag{25}$$

综合上述式子，利用 matlab 编程可以解得：$\delta=0.121$，故使得龙头前把手能够沿着螺旋线盘入调头空间的最小临界螺距$p_{\min}$为：**45.21** cm 。

5.4 问题四：调头曲线模型的建立与求解

5.4.1 圆弧调整模型的建立与求解

- **直线方程的求解**

由于盘入螺线的螺距为 1.7 m，根据式(2)可以求得二维等距螺旋线的极坐标方程为：

$$r(\theta)=27.2+0.27\theta \tag{26}$$

已知调头空间的半径为 4.5m，可以利用 matlab 解得极角 θ 为：**-84.07rad**；作出切入调头空间的示意图，切入点 D 的坐标为：**(-3.718,-3.064)**；D 的切线 l_1 的斜率为：**-1.214**。

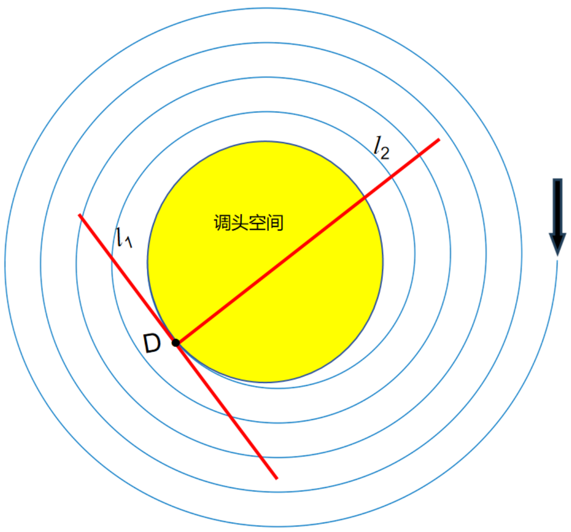

图 13 切入直线示意图

根据垂直直线斜率定理可得，两直线相互垂直，两直线的斜率相乘等于-1 可得，垂直于切入直线 l_2 的直线斜率为：**0.82372**；由于过切点 D 可得直线 l_2 的直线方程为：

$$y=0.824(x+3.718)-3.064 \tag{27}$$

● **判断依据**

根据式(28)可知，直线 l_2 会经过坐标原点，可以得出结论：在调头空间中的两个外切圆的圆心与原点共线。根据圆周角定理可知，调头路径形成的 S 形曲线始终为定值，其值为调头空间周长的一半，即： **4.5π ≈ 14.137 米**。

5.4.2 圆弧调整模型的位置信息与速度求解

针对问题 4 计算自调头起不同时刻所对应的舞龙队所在的位置和速度，在不同时刻下舞龙队所在方位不同，要计算不同时刻各把手位置首先需要对时刻进行划分，划分为：还未进入调头空间、进入调头空间前半段但还未进入调头空间后半段、还未离开调头区域、部分离开调头区域。

设盘入切点 Q_1 与盘出切点 Q_2 与前后有两段圆弧切点 Q_3 的坐标分别为$(x_{入},y_{入})$、$(x_{出},y_{出})$、$(x_{切},y_{切})$其中$x_{入}=-x_{出}$，$x_{切}=x_{出}/3$，$x_{入}^2+y_{入}^2=4.5^2$。调头空间的圆心 O_1 调头空间内前一段圆弧的圆心 O_2 调头空间后一段圆弧的圆心 O_3 的坐标分别为$(x_{调},y_{调})$、$(x_{前},y_{前})$、$(x_{后},y_{后})$其中$x_{调}=y_{调}=0$，$x_{前}=-1.5x_{后}$，$x_{前}^2+x_{后}^2=9$。前一段圆弧的半径是 r 则有后一段圆弧的半径是 2r 调头空间的半径是 R=4.5m，r=1.5m。前一段弧线所对圆心角为 θ_1，后一段弧线所对圆心角为 θ_2 其中根据第一小问的结论 $\theta_1=\theta_2=\pi$。进而确定圆心上点坐标方程与其极坐标的表达形式：

● **圆 O_2 ：**

$$(x-x_{前})^2+(y-y_{前})^2=\gamma_1^2$$
$$\begin{cases} x=r_1\cos\theta+x_{前} \\ y=r_1\sin\theta+y_{前} \end{cases} \tag{28}$$

● **圆 O_3 ：**

$$(x-x_{后})^2+(y-y_{后})^2=\gamma_2^2$$
$$\begin{cases} x=r_2\cos\theta+x_{后} \\ y=r_2\sin\theta+y_{后} \end{cases} \tag{29}$$

设前半弧的长度为 S_1 后半弧的长度为 S_2，则计算出 S_1，S_2 与半径 r 和圆心角 θ 之间的关系如下：

$$\begin{cases} S_1=r_1\cdot\theta_1 \\ S_2=r_2\cdot\theta_2 \end{cases}$$
$$S_{总}=S_1+S_2 \tag{30}$$

由于在圆上曲线斜率恒定，因而不同位置相同弦长所对应的劣弧长l为一定值，根据余弦定理，表达式如下：

$$l=r\cdot\theta=r\cdot\arccos\left[1-\frac{(d)^2}{2r^2}\right] \tag{31}$$

其中 d 为板凳前后把手之间的间距，r 为所在圆弧的半径，再针对四大时刻的区间对各把手位置模型的建立。

- **还未进入调头空间**

此时舞龙队头部还未进入调头空间，即时间：$t\leqslant 0$，此时舞龙队还未进入调头空间，可采用与第一问相同的递推方式，首先求得龙头位置坐标，再对其后进行递推求解。

- **进入调头空间前半段但还未进入调头空间后半段**

此时龙头前把手以进入第一段圆弧曲线但还未进入第二段圆弧曲线，即时间：$0<t\leqslant S_1$ 此时龙头前把手位置不在等距螺旋线上，因而设龙头前把手坐标$(x_{头},y_{头})$，第 i 节板凳后把手坐标为(x_i,y_i)，则有龙头走过圆弧的圆心角$\Delta\theta$可由以下公式求得：

$$\Delta\theta=\frac{t}{r_1} \tag{32}$$

因而龙头前把手自进入调头空间到时间 t 时刻龙头的位置模型为：

$$\begin{cases}x_{头}=r_1\cos(\theta+\Delta\theta)+x_{前}\\ y_{头}=r_1\sin(\theta+\Delta\theta)+y_{前}\end{cases} \tag{33}$$

当 $t<l$ 时，龙头的后把手还在螺旋线上，根据式(10)可对龙头后把手的位置进行求解；当 $t>l$ 时，龙头后把手已进入调头区域，则龙头后把手坐标为(x_1,y_1)与龙头前把手坐标满足关系式：

$$\begin{cases}(x_{头}-x_1)^2+(y_{头}-y_1)^2=(2.86)^2\\ (x_1-x_{前})^2+(y_1-x_{前})^2=r_1^2\\ (x_1-x_{头})^2>0\end{cases} \tag{34}$$

同理，在龙身部分满足关系式：

$$\begin{cases}(x_i-x_{i+1})^2+(y_i-y_{i+1})^2=(1.65)^2\\ (x_{i+1}-x_{前})^2+(y_{i+1}-x_{前})^2=r_1^2\\ (x_i-x_{头})^2<(x_{i+1}-x_{头})^2\end{cases} \tag{35}$$

未进入调头空间的第 n 个板凳，其中 n 是满足的任意正整数：

$$r\cdot\arccos\left[1-\frac{(2.86)^2}{2r_1^2}\right]+nr\cdot\arccos\left[1-\frac{(1.65)^2}{2r_1^2}\right]\leq S_1 \tag{36}$$

计算得到临界值，此时第 n-1 条板凳后把手依旧在第一段曲线上，计算出坐标(x_{n-1},y_{n-1})，此时第 n 条板凳后把手在螺旋线上，则根据式（10）计算得到第 n 条板凳后把手的坐标。

5.4.3 把手速度的求解

由式(6)可知 θ 是关于时间的函数，因而分别对 x_i 与 y_i 时间求导，即可得出该点的速度。

- **龙首前把手已进入后半圆弧但还未离开调头区域**

此时龙头前把手以进入前一段圆弧曲线但还未离开调头区域，即时间：$S_1<t\leqslant S_2$，龙头前把手位置前段调头曲线上，则有龙头走过圆弧的圆心角$\Delta\theta'$可由以下公式求得：

$$\Delta\theta' = \frac{t - S_1}{r_2} \tag{37}$$

因而龙头前把手自进入后一段圆弧曲线到时间 t 时刻龙头的位置模型为：

$$\begin{cases} x_{头}{}' = r_1 \cos(\theta' + \Delta\theta') + x_{后} \\ y_{头}{}' = r_1 \sin(\theta' + \Delta\theta') + y_{后} \end{cases} \tag{38}$$

当 t< $l' = r_2 \cdot \theta' = r_2 \cdot \arccos\left[1 - \frac{(2.86)^2}{2{r_2}^2}\right]$时，龙头的后把手前一段圆弧上，此时前后把手之间存在关系：

$$\begin{cases} (x'_{头} - x'_1)^2 + (y'_{头} - y_1{}')^2 = (2.86)^2 \\ (x'_1 - x_{后})^2 + (y'_1 - y_{后})^2 = r_1^2 \\ (x'_1 - x_{后})^2 > (x'_{头} - x_{后})^2 \end{cases} \tag{39}$$

进而确定前一段圆弧各点的位置信息，再通过式（10）递推得到螺线线上各点的坐标；当 t> $l' = r_2 \cdot \theta' = r_2 \cdot \arccos\left[1 - \frac{(2.86)^2}{2{r_2}^2}\right]$时，龙头后把手已进入后一段圆弧，与式(39)同理，通过前把手计算出前一段圆弧与后一段圆弧切点出前后把手位置，再递推求得前一段圆弧与螺旋线相切点处板凳前把手坐标，后于式(10)同理，推得螺旋线上各个点的坐标。由式(6)可知将 x_i 与 y_i 分别对时间求导，即可得出该点的速度。

- **龙首前把手部分已离开调头区域**

此时龙头前把手以离开调头区域进入盘出螺旋线，即时间：$S_1+S_2<t$，此时通过计算得到龙头前把手盘出距离为 $S_{出} = t - S_1 + S_2$,有切点($x_{出}, y_{出}$)与等距螺旋线解析式(3)，r=1.7m，同时通过式(5)计算出等距螺旋线长度变化，最后通过式(10)确定龙头前把手在等距螺旋线上的位置，在通过递推求得各把手在盘入螺旋线，前一段圆弧，后一段圆弧的位置信息。由式(6)可知 θ 是关于时间的函数，可知将 x_i 与 y_i 分别对时间求导，即可得出该点的速度。

利用 matlab 编写代码求解从-100s 开始到 100s 为止，每秒舞龙队的位置和速度，并给出部分结果，如下表：

表 6 板凳龙部分位置信息表

	-100	-50	0	50	100
龙头 x/(m)	8.503914	6.553096	-4.248714	4.079145	0.006784
龙头 y/(m)	0.348817	-1.562022	-0.590324	4.644781	8.074771
第 1 节龙身 x/(m)	7.989437	6.725194	-3.17611	5.628465	2.826317
第 1 节龙身 y/(m)	3.190113	1.312998	-3.131987	1.895785	3.978489
第 51 节龙身 x/(m)	\	-5.820768	-0.232925	3.564894	4.679687
第 51 节龙身 y/(m)	\	-7.632433	-8.063824	-4.445667	0.016534
第 101 节龙身 x/(m)	\	\	\	-6.064715	-6.324483
第 101 节龙身 y/(m)	\	\	\	6.634968	4.023165
第 151 节龙身 x/(m)	\	\	\	\	2.157894

第 151 节龙身 y/(m)	\	\	\	\	-4.686514
第 201 节龙身 x/(m)	\	\	\	\	\
第 201 节龙身 y/(m)	\	\	\	\	\

注：未盘入螺旋线的龙身位置信息记为“ \ ”

表 7 板凳龙部分把手速度表

	-100	-50	0	50	100
龙头(m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身(m/s)	0.995391	0.992725	0.982747	0.990813	0.994845
第 51 节龙身(m/s)	0	0.996394	0.994757	0.996654	0.998875
第 101 节龙身(m/s)	0	0	0	0.997654	0.999986
第 151 节龙身(m/s)	0	0	0	0	0
第 201 节龙身(m/s)	0	0	0	0	0
龙尾（后）(m/s)	0	0	0	0	0

注：不在时间范围内的龙身速度记为“ 0 ”

5.5 问题五：鞭尾速度模型的建立与求解

5.5.1 鞭尾速度模型的建立

由第一问求出的数据可得，在同一时刻龙尾把手的速度最大，故可以将板凳龙近似的认为是一条鞭子，其鞭子尾部的速度最大，如下图：

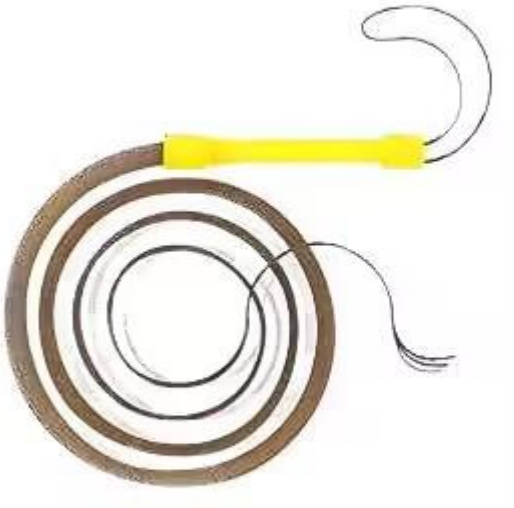

图 14 鞭子示意图

- **曲率与速度关系的建立**

曲率表示曲线在某一点处的弯曲程度，对于圆来说，曲率在任何一点都是常数，且等于半径的导数，故圆的曲率 K 与半径 R 之间的关系为：

$$K = \frac{1}{R} \tag{40}$$

当板凳龙沿设定路径运动时，法向加速度与速度的关系为：

$$a_n = v^2 K \tag{41}$$

其中a_n为法向加速度，v为龙头前把手的运动速度，K 为曲率。由式(29)可知，法向加速度与速度的平方以及曲率成正比，与半径成反比，因此对于调头曲线来说，半径越小，法向加速度越大，速度也就越大。

根据上述鞭子模型的假设，对于板凳龙来说，当龙头速度确定时，在所有把手中，速度最大的应该是龙尾后把手，其速度最大的的时刻为：龙尾后把手刚盘入小圆时，如下图的 O 点：

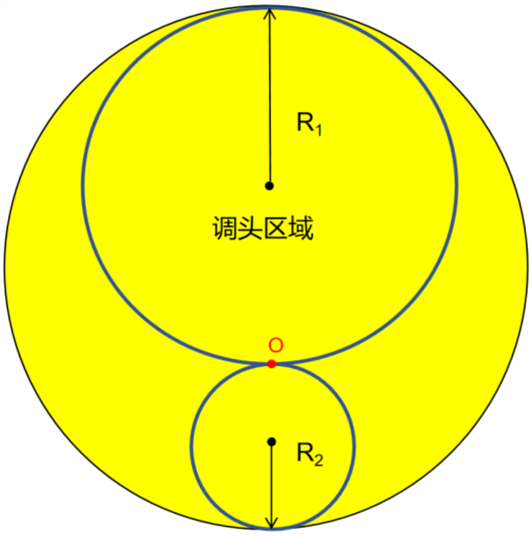

图 15 调头曲线示意图

- **问题简化**

由上述假设和推导可知，问题 5 可简化为：当龙尾后把手进入 O 点的速度为 2m/s 时，求龙头前把手的速度，此时求得的龙头前把手速度即为，龙头的最大速度。

5.5.2 鞭尾速度模型的求解

由式(27) 直线 l_2 的方程和切入点 D 的坐标为：(-3.718,-3.064)，可以作出 O 点的几何关，如下图 ：

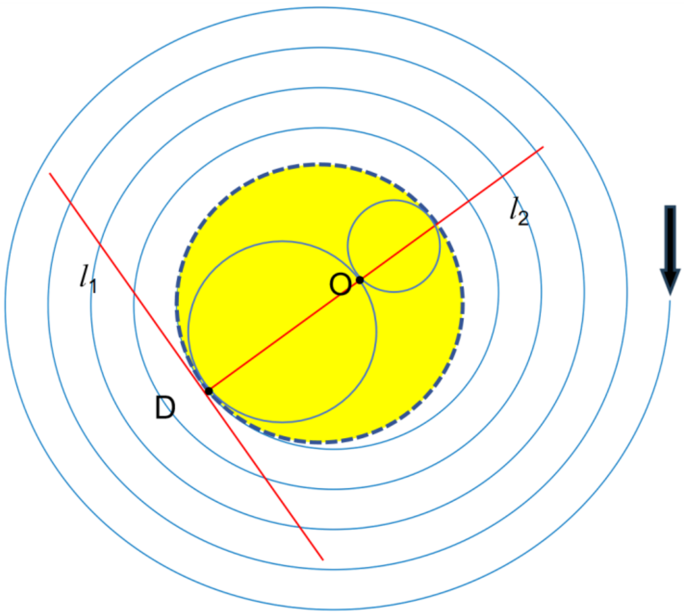

图 16 鞭尾速度模型示意图

由于大圆和小圆的半径之比为 2:1，且黄色调头空间的直径为 9 米，故大圆和小圆的半径分别为 3 米和 1.5 米。所以 O 点的坐标是 D 点坐标(-3.718,-3.064)沿着直线 l_2 平移 6 个单位，用 matlab 编程解得：O 点坐标为 **(0.9125 , 0.7575)**。

将O点坐标带入问题四中建立的把手递推模型可得，当O点龙尾的速度为2m/s时，龙头的最大速度 $v_{\max}$ 为 **1.812 m/s**。

六、模型的分析与检验

问题一结果的合理性分析

问题一主要探求舞龙队不同位置的把手随着时间的推移位置与速度的变化与确定，本文通过分析等距螺旋线的性质，并根据龙头前把手的移动速度推导出时间与极角之间的函数关系。根据等距螺旋线的性质可知，内侧把手的角速度会随着沿螺旋线不断盘入而增大，外侧手把的速度也随着不断盘入，如甩鞭一样速度不断增加并接近龙头的速度，本文计算结果复合事实。

问题二结果的合理性分析

问题二主要探求找出极限碰撞点，因而需要对等距螺旋线的特点与舞龙队盘入螺旋线时凳身的进行分析，随着沿螺旋线盘入，凳身越来越靠近螺旋线中心，凳身与把手所在螺旋线的距离不断增加，因而在随着螺旋线的不断盘入越有可能发生碰撞，同时因为螺旋线向内旋因而凳角相比必然其他凳身部分更加突出距离外圈板凳距离最近，综合上述结合平面几何的计算可以预测出较为精确的碰撞情况，具有较强可信度。

问题三结果和合理性分析

问题三主要在设计确定最小螺距，本文采用螺距补偿模型，通过确定盘入临界情况，进而确定补偿系数，通过运用对螺栓与螺母的临界计算法，能够更加准确的确定最小螺距。

问题四结果合理性分析

问题四第一小问要求计算并优化调头空间内调头路径，首先考录到与调头空间的两切点关于中心对称且可确定圆心所在直线与半径比例等相关限制，且通过计算得到两圆心是位于仅偏离圆心很小的直线上，因而为方便计算，及为微小的位移忽略不计，并计算得到两弧圆心所在坐标与半径，本文运用几何证明的方法对圆心的位置进行了合理判断，具有较高精准度。第二问本文通过建立把手位置与运动时间的模型并分段分析龙头走到不同路径上的情况再做递推求解，具有针对性，能够更快的求得精确解。

问题五结果合理性分析

相比问题四，问题五主要探究在限制各把手极限速度的情况下确定龙头的行进速度，舞龙队的盘入盘出如同鞭子一样，故本文建立鞭尾模型进行求解，首先通过曲线的曲率联系几何关系建立各把手沿着设定路径运动时的法向速度与加速度之间的关系并将问题简化求解，通过与现实模型相结合，能够更加快速的理解并求解出速度。

七、模型的评价、改进与推广

7.1 模型的优点

1.简洁高效：本模型结构设计简洁，运用几何建模方法有效解决了舞龙队的路径规划与通度控制问题。通过螺旋与圆弧相切的几何路径设计，迅速确定龙头、龙身、龙尾的精确位置与速度。

2.应用性强：本模型紧密贴合实际表演需求，综合考量了行进路径、转向空间以及速度限制等核心要素，并引入了碰撞检测机制与速度上限，成功地复现了现实场景中的动态变化，满足了实际的约束条件。

3.原创性显著：本文构建的模型在思路上展现出独特的创新性和原创性。

4.求解结果准确：模型求解结果具有高度的准确性和可靠性，为舞龙队路径规划提供了有力的数据支持。

5.构建过程清晰：模型构建过程逻辑严谨，假设合理，条理清晰，通过简洁明了的推导，成功简化了复杂的多波束问题，便于理解和应用。

6.图示注释详尽：在建模过程中，采用直观的图示和详尽的注释，将抽象的数学问题具象化、直观化，增强了模型的可读性和可操作性。

7.2 模型的缺点

1. 本文考虑影响模型的影响因素较为片面:
2. 本文建立的模型在普适性方面存在一定的局限性。

7.3 模型的推广

1.应用于海上航行及港口管理领域，能够优化船舶进出港及航行路径。通过预测与规划船舶的航行轨迹，系统确保各船舶之间维持安全距离，避免碰撞事件发生。此类应用显著提升了港口运营的效率与安全性。系统通过动态调整船舶的航行速度与航向，最大程度减少船舶在港内的等待时间及拥堵状况。

2.应用在空中交通管理系统领域，设计更为智能化的空中交通管理系统。通过预测和规划飞行路径，确保各航班之间维持安全距离，有效预防拥堵和碰撞的发生。

八、参考文献

[1]邵兵,王训杰,田玉恒,等.代数阿基米德螺旋涡旋型线的研究[J].2004.

[2]陈文苑.文化展演与仪式重构：徽州右龙板凳龙仪式实践的民族志考察——以“互动仪式”理论为视角[J].河池学院学报,2024,44(03):31-39.1:26:10

[3] 涂德浴等，机械设计基础[M]，上海交通大学出版社，2018.9.1:28:08

[4] 司守奎等，数学建模算法与应用[M]，国防工业出版社，2021.3.

[5]陈刚.椭圆上弧微分的变化规律及其应用[J].南通职业大学学报,2002,16(2):49-51.

九、附录

附录 1

介绍：支撑材料的文件列表

名称	修改日期	类型	大小
参考文献	2024/9/8 7:57	文件夹	
代码	2024/9/8 18:12	文件夹	
附件	2024/9/8 8:28	文件夹	
图片	2024/9/8 18:21	文件夹	
图1、2、3、5、7	2024/9/7 17:11	PPTX 演示文稿	118 KB
图8、15	2024/9/8 13:22	PPTX 演示文稿	58 KB
图10	2024/9/7 13:57	JPG 文件	224 KB
图11	2024/9/7 15:26	PPTX 演示文稿	56 KB
图12	2024/9/7 15:50	PPTX 演示文稿	57 KB
图13	2024/9/8 14:32	PPTX 演示文稿	256 KB
图14	2024/9/8 13:29	JPG 文件	15 KB
第二问求解代码	2024/9/6 22:39	MATLAB Live Scr...	26 KB
第四问O点求解代码	2024/9/8 14:16	MATLAB Live Scr...	4 KB
第四问切入点坐标求解代码	2024/9/8 0:27	MATLAB Live Scr...	4 KB
第四问求解代码	2024/9/8 18:08	MATLAB Live Scr...	21 KB
第五问求解代码	2024/9/8 18:12	MATLAB Live Scr...	37 KB
问题一极坐标图片代码	2024/9/7 19:09	MATLAB Live Scr...	39 KB
问题一龙头速度	2024/9/7 11:11	MATLAB Live Scr...	24 KB
问题一龙头坐标代码	2024/9/7 11:12	MATLAB Live Scr...	26 KB
问题1 x轴坐标数据	2024/9/8 8:03	XLSX 工作表	5,934 KB
问题1 y轴坐标数据	2024/9/8 8:03	XLSX 工作表	5,933 KB
问题1 速度v的数据	2024/9/8 8:02	XLSX 工作表	3,262 KB
问题2 结果数据	2024/9/8 18:28	XLSX 工作表	18 KB
问题4 结果数据	2024/9/8 18:29	XLSX 工作表	17,399 KB
代数阿基米德螺旋涡旋型线的研究	2024/9/8 1:20	WPS PDF 文档	126 KB
椭圆上弧微分的变化规律及其应用_陈刚	2024/9/8 1:50	WPS PDF 文档	224 KB
文化展演与仪式重构：徽州右...—以"互...	2024/9/8 1:14	WPS PDF 文档	1,846 KB

附录 2

介绍：该代码是 matlab 语言编写的，作用是求解第一问龙头坐标和速度

```
% 定义 r(theta) 和 r'(theta)
r = @(theta) 8.8 + 0.0876 * theta;
r_prime = @(theta) 0.0876;
% 定义被积函数
integrand = @(theta) sqrt(r(theta).^2 + r_prime(theta).^2);
% 时间范围
t_values = 0:1:300; % 从 0 到 300，步长为 1
% 初始化 theta 和坐标
theta_values = zeros(size(t_values));
x_values = zeros(size(t_values));
y_values = zeros(size(t_values));
% 对每个时间 t 求解 theta(t) 并计算 x 和 y
for i = 1:length(t_values)
    t = t_values(i);
    % 使用数值方法求解 theta(t)，使得积分等于 t
    theta_func = @(theta) integral(integrand, 0, theta) - t;
    theta_values(i) = fzero(theta_func, 0); % 从 0 开始找根
    % 确保 theta 是递减的
    theta_values(i) = -theta_values(i)
    % 计算 x 和 y
    x_values(i) = r(theta_values(i)) * cos(theta_values(i));
    y_values(i) = r(theta_values(i)) * sin(theta_values(i));
    % 保留 6 位小数
    x_values(i) = round(x_values(i), 6);
    y_values(i) = round(y_values(i), 6);
end
% 计算速度
dx_dt = diff(x_values) ./ diff(t_values);
dy_dt = diff(y_values) ./ diff(t_values);
speeds = sqrt(dx_dt.^2 + dy_dt.^2);
% 插入速度的开头和结尾以匹配时间范围长度
speeds = [speeds(1), speeds]; % 在开头插入与 dx_dt 相同的值
% 绘制 x 和 y 的图形
figure;
plot(x_values, y_values);
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
% 可选：输出 x 和 y 的值
```

```
disp(table(t_values', x_values', y_values', speeds', 'VariableNames', {'Time',
'X', 'Y', 'Speed'}));
```

附录 3
介绍：该代码是 matlab 语言编写的，作用是求解第二问碰撞时间

```
% 定义 r(theta) 和 r'(theta)
r = @(theta) 8.8 + 0.0876 * theta;
r_prime = @(theta) 0.0876;
% 定义被积函数
integrand = @(theta) sqrt(r(theta).^2 + r_prime(theta).^2);
% 时间范围
t_values = 0:1:300; % 从 0 到 300，步长为 1
% 初始化 theta 和坐标
theta_values = zeros(size(t_values));
x_values = zeros(size(t_values));
y_values = zeros(size(t_values));
% 龙头的位置 (假设)
x_h = 1.0; % 假设龙头的 x 坐标
y_h = 1.0; % 假设龙头的 y 坐标
% 对每个时间 t 求解 theta(t) 并计算 x 和 y
for i = 2:length(t_values)
    t = t_values(i);

    % 使用数值方法求解 theta(t)，使得积分等于 t
    theta_func = @(theta) integral(integrand, 0, theta) - t;
    theta_values(i) = fzero(theta_func, 0); % 从 0 开始找根
    % 确保 theta 是递减的
    theta_values(i) = -theta_values(i);
    % 计算 x 和 y
    x_values(i) = r(theta_values(i)) * cos(theta_values(i));
    y_values(i) = r(theta_values(i)) * sin(theta_values(i));
    % 计算距离 d（前把手和后把手坐标分别是 (x_i, y_i) 和 (x_{i-1}, y_{i-1})）
    xi = x_values(i);
    yi = y_values(i);
    xi_1 = x_values(i-1);
    yi_1 = y_values(i-1);
    % 距离 d 的计算公式
    d = abs((yi - yi_1) * (x_h - xi_1) + (xi - xi_1) * (yi_1 - y_h)) /
sqrt((xi - xi_1)^2 + (yi - yi_1)^2);
    % 检查距离条件，如果 d < 0.3 则停止递推
    if d < 0.3
        fprintf('在 t = %d 时，停止递推，距离 d = %.6f\n', t, d);
```

```
        break; % 满足条件时停止递推
    end
    % 保留 6 位小数
    x_values(i) = round(x_values(i), 6);
    y_values(i) = round(y_values(i), 6);
end
% 绘制 x 和 y 的图形
figure;
plot(x_values(1:i), y_values(1:i));
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
% 可选：输出 x 和 y 的值
disp(table(t_values(1:i)', x_values(1:i)', y_values(1:i)', 'VariableNames',
{'Time', 'X', 'Y'}));
```

附录 4
介绍：该代码是 matlab 语言编写的，作用是求解第四问 O 点坐标

```
% 极坐标方程参数
r_target = 4.5;          % 目标半径 r
theta_target = (r_target - 27.2) / 0.27;  % 解出对应的 theta 值
% 转换为直角坐标
r = r_target;  % 使用给定的 r = 4.5
x = r * cos(theta_target);  % 计算 x 坐标
y = r * sin(theta_target);  % 计算 y 坐标
% 计算 dr/dtheta
dr_dtheta = 0.27;  % r 对 theta 的导数
% 计算斜率 dy/dx
slope = (dr_dtheta * sin(theta_target) + r * cos(theta_target)) / ...
        (dr_dtheta * cos(theta_target) - r * sin(theta_target));
% 显示结果
fprintf('当 r = 4.5 时, theta = %.2f radians\n', theta_target);
fprintf('对应的直角坐标为: x = %.3f, y = %.3f\n', x, y);
fprintf('该点的曲线斜率为: %.3f\n', slope);
```

附录 5
介绍：该代码是 matlab 语言编写的，作用是求解第四问位置和速度

```
% 定义 r(theta) 和 r'(theta)
r = @(theta) 8.8 + 0.0876 * theta;
r_prime = @(theta) 0.0876;
```

```
% 定义被积函数
integrand = @(theta) sqrt(r(theta).^2 + r_prime(theta).^2);
% 时间范围
t_values = -100:1:100; % 从-100 到 100，步长为 1
% 初始化 theta 和坐标
theta_values = zeros(size(t_values));
x_values = zeros(size(t_values));
y_values = zeros(size(t_values));
% 对每个时间 t 求解 theta(t) 并计算 x 和 y
for i = 1:length(t_values)
    t = t_values(i);
    % 使用数值方法求解 theta(t)，使得积分等于 t
    theta_func = @(theta) integral(integrand, 0, theta) - t;
    theta_values(i) = fzero(theta_func, 0); % 从 0 开始找根
    % 确保 theta 是递减的
    theta_values(i) = -theta_values(i);
    % 计算 x 和 y
    x_values(i) = r(theta_values(i)) * cos(theta_values(i));
    y_values(i) = r(theta_values(i)) * sin(theta_values(i));
    % 保留 6 位小数
    x_values(i) = round(x_values(i), 6);
    y_values(i) = round(y_values(i), 6);
end
% 绘制 x 和 y 的图形
figure;
plot(x_values, y_values);
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
% 可选：输出 x 和 y 的值
disp(table(t_values', x_values', y_values', 'VariableNames', {'Time', 'X',
'Y'}));
```

附录 6

介绍：该代码是 matlab 语言编写的，作用是求解第五问最大速度

```
clear length % 清除变量 length 的冲突
% 定义 r(theta) 和 r'(theta)
r = @(theta) 8.8 + 0.0876 * theta;
r_prime = @(theta) 0.0876;
% 定义被积函数
integrand = @(theta) sqrt(r(theta).^2 + r_prime(theta).^2);
% 计算未调整时的最大速度
```

```
theta_max = fminbnd(@(theta) -integrand(theta), 0, 100); % 找到最大速度的 theta
v_max_original = integrand(theta_max);
% 计算调整比例系数
scaling_factor = 2.012 / v_max_original;
% 调整被积函数
integrand_adjusted = @(theta) scaling_factor * sqrt(r(theta).^2 +
r_prime(theta).^2);
% 时间范围
t_values = -100:1:100; % 从-100 到 100，步长为 1
% 初始化 theta 和坐标
theta_values = zeros(size(t_values));
x_values = zeros(size(t_values));
y_values = zeros(size(t_values));
% 对每个时间 t 求解 theta(t) 并计算 x 和 y
for i = 1:length(t_values)
    t = t_values(i);
    % 使用数值方法求解 theta(t)，使得积分等于 t
    theta_func = @(theta) integral(integrand_adjusted, 0, theta) - t;
    theta_values(i) = fzero(theta_func, 0); % 从 0 开始找根
    % 确保 theta 是递减的
    theta_values(i) = -theta_values(i);
    % 计算 x 和 y
    x_values(i) = r(theta_values(i)) * cos(theta_values(i));
    y_values(i) = r(theta_values(i)) * sin(theta_values(i));
    % 保留 6 位小数
    x_values(i) = round(x_values(i), 6);
    y_values(i) = round(y_values(i), 6);
end
% 绘制 x 和 y 的图形
figure;
plot(x_values, y_values);
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
% 可选：输出 x 和 y 的值
disp(table(t_values', x_values', y_values', 'VariableNames', {'Time', 'X',
'Y'}));
```