稳定性的逻辑

黄嘉聪

摘要

主要介绍了 QK 的作用和怎么想到构造这玩意的

KEY WORDS: robust control; μ; skew μ; lower bound

1 (Q_K) 的作用和" 为什么会想到构造它"

很好，这里把 (Q_K) 的作用和" 为什么会想到构造它" 讲成一条完整链路：从 μ 的定义 $\to$ 同质性与单位化 $\to$ " 极点/边界原则" $\to$ 分块极点的具体形态 $\to$ 计算与算法的好处。你读完就能明白：(Q_K) 不是拍脑袋的集合，它是从问题结构里" 被逼出来" 的。

1) 从 μ 定义到" 只需关注方向" 的单位化

混合-μ 的" 奇异化" 定义是

$$\mu_K(M) = \Big(\min_{\Delta \in X_K} \{\|\Delta\| : \det(I - \Delta M) = 0\} \Big)^{-1}.$$

- 这个优化是**同质**的：如果 Δ 使 $I - \Delta M$ 奇异，那么对任何 $t > 0$，" 放缩" $t\Delta$ 也只是在尺度上改变。
- 因此可把 Δ 写成" 半径 Œ 方向" 的极坐标：$\Delta = t\widehat{\Delta}$，其中 $\|\widehat{\Delta}\| = 1$。
- 把" 最小半径" 问题改写为" 在单位壳上挑方向" 的问题，得到

  $$\mu_K(M) = \max_{\widehat{\Delta} \in X_K,\ \|\widehat{\Delta}\| \le 1} \rho_R(\widehat{\Delta} M).$$

  也就是说，**只需要在单位球（单位壳）上挑" 方向"**，把 $\widehat{\Delta} M$ 的实特征值推到最大即可。

2) 极点/边界原则：最优方向在" 单位球的极点/边界"

在线性-分式的目标（或由特征值/瑞利商诱导的目标）下，带范数约束的最优化常常在**单位球的极点（extreme points）或边界**达到最优：

- 对标量块：$\max\{|q| : |q| \le 1\}$ 的最优必在 $|q| = 1$ 或端点；
- 对矩阵块：$\max\{\mathrm{Re}\langle\Delta, X\rangle : \|\Delta\|_\sigma \le 1\}$ 的最优由**极点**取得，等价于" 把 Δ 与 X 的奇异向量对齐"，并把奇异值推到边界（见冯-诺依曼迹不等式、极点表征）。

于是我们自然会把" 单位球" 进一步缩到它的**边界极点集合**上搜索。这就是 (Q_K) 的雏形。

3) 分块到极点：(Q_K) 的具体构造

X_K 是块对角不确定性集合（实重复标量、复重复标量、全复块等的直和）。把" 极点/边界原则" 逐块应用：

- **复重复标量块** δI_r：单位球 $|\delta| \le 1$ 的极点在**单位圆**上，故取 $|\delta| = 1 \Rightarrow \delta = e^{\mathrm{j}\phi}$。✓ 这给出 (Q_K) 中" 复标量块相位在单位圆上"。
- **实重复标量块** δI_r：单位球 $|\delta| \le 1$ 的边界是区间端点和内点；在极值问题里通常" 卡在端点" $\delta = \pm 1$（若一阶最优性迫使留在内点，$\delta \in [-1, 1]$ 也被 (Q_K) 覆盖）。✓ 这给出 (Q_K) 中" 实标量块在 $[-1, 1]$"。
- **全复块** Δ_F（方阵，$\|\Delta_F\|_\sigma \le 1$）：把 $\Delta_F = U\Sigma V^*$（SVD），当与目标矩阵对齐时，最优会把可用的奇异值推到边界 $\Sigma = I$（或一个部分等距算子）。当块是方阵时，可取**酉矩阵**作为极点代表（$\Delta_F \in \mathbb{C}^{p\times p} \Rightarrow \Delta_F$ 选酉 UV^*）。✓ 这给出 (Q_K) 中" 全复块取酉矩阵"。

把三类块的" 边界代表" 做块对角直和，就得到

$$Q_K = \mathrm{diag}\big(q_1 I, \ldots,\ e^{\mathrm{j}\phi_\ell} I,\ \ U_1, \ldots\big),$$

这正是你看到的那组" 相位/符号/酉" 的集合。**它只保留' 方向/相位'，不含' 半径'**；半径由最终的特征值 λ（或放缩 t）承担。

4) (Q_K) 的三个关键作用

作用 A：把 μ 的定义变成" 边界上的实特征值最大化"

有了单位化与极点化，得到

$$\mu_K(M) = \max_{\Delta \in B_{X_K}} \rho_R(\Delta M) \quad \Longrightarrow \quad \mu_K(M) = \max_{Q \in Q_K} \rho_R(QM).$$

这一步是论文里的核心结论：**只在 (Q_K) 上搜索就能达到** μ。直观上：把" 允许的半径" 统一提到边界而不丧失可达性，剩下只调" 方向"。

作用 B：把" 块范数约束" 变成" 相位/符号/酉" 的离散（或低维）参数化

- 复标量只剩一个相位 ϕ；
- 实标量只剩一个符号（或内点标量 $q \in [-1, 1]$）；
- 全复块只剩一个酉矩阵（方向）。

这极大简化了搜索与迭代（不再在半径上纠结）。

作用 C：给" 幂迭代" 提供可投影的闭式更新

Young-Doyle 下界的幂迭代之所以能落地，就是因为对每个块都有**显式的" 投影/对齐" 规则**：

- 复标量块：取 $q = \dfrac{w^* a}{|w^* a|}$ 的相位；
- 实标量块：按 $\mathrm{sign}(\Re(a^* w))$ 卡到 ± 1，或保持内点；
- 全复块：把 a, w 的能量配平，等价于选取一个等距算子/酉使两端" 对齐"。

这些正是 (Q_K) 结构带来的**块级闭式解**，使得每一步投影都简单、稳定。

5) 为什么会" 想到" 构造 (Q_K)？

这是从三个一线索自然推演出来的：

1. **同质性与单位化**：μ 的定义本身是" 放缩不变" 的 $\Rightarrow$ 把半径抽掉，只看方向 $\Rightarrow$ 搜索单位壳。
2. **极点原则**（凸分析/算子理论的常识）：在" 范数 ≤ 1" 的约束下，线性或谱型目标的最优往往在**极点/边界** $\Rightarrow$ 只看单位壳的" 最外层"。

3. **结构可分性**（块对角）：结构化集合是直和 $\Rightarrow$ " 极点" 也可逐块表征；对标量块，" 极点" 就是" 相位或符号"；对全复块，" 极点" 是" 等距/酉"。于是诞生了 (Q_K)：**" 单位边界上的复块 + 实块在 $[-1,1]$ 的相位/符号刻度 + 全复块的酉"**。

这三点合在一起，(Q_K) 并不是人为设定的" 奇技淫巧"，而是从 μ 的数学结构**推演得到的" 边界方向集"**；它既有**理论最优性**（最大化到 μ），又有**数值可实现性**（幂迭代时易投影）。

6) 小结（一句话版）

(Q_K) 是把" 结构化单位球" 收缩到" 各块的边界极点" 的集合；它保留了让 μ 取到最大值所需的**方向信息**，同时把" 幅度/半径" 交给特征值本身；因此既保证**理论上不损失最优**，又让**算法上每步更新有闭式投影**，是混合-μ 下界计算的关键角色。

2 为什么只在 Q_K（复块取单位圆相位、实块在 [1,1][1,1]，全复块取酉）的“边界集”上搜索，就能达到真正的 μ

好的，我把"III. 下界即最大化" 这一段里的核心论证完整拆开讲：为什么

$$\boxed{\mu_K(M) = \max_{Q\in Q_K} \rho_R(QM)}$$

也就是——只在 Q_K（复块取单位圆相位、实块在 $[-1,1]$，全复块取酉）的" 边界集" 上搜索，就能达到真正的 μ。

2.1 起点：把" 奇异化的最小范数" 化成" 单位球上的最大实谱半径"

混合 μ 的定义是

$$\mu_K(M) = \Big(\min_{\Delta\in X_K} \{\|\Delta\| : \det(I-\Delta M)=0\}\Big)^{-1}.$$

把 $\Delta = t\widehat{\Delta}$（$\|\widehat{\Delta}\|=1$）代入，并用

$$\det(I-\Delta M)=0 \iff \exists v\neq 0:\ \Delta M v = v \iff 1\in\sigma(\Delta M),$$

就得到

$$\mu_K(M) = \max_{\Delta \in B_{X_K}} \rho_R(\Delta M), \qquad B_{X_K} := \{\Delta \in X_K : \|\Delta\| \le 1\}.$$

含义：只需要在" 结构化单位球" 的**壳**上挑方向，把 ΔM 的**实**特征值推到最大即可。

2.2 关键问题：能否把搜索域从 B_{X_K} 缩到" 边界极点" Q_K 而不损失最优？

我们要证明

$$\max_{\Delta \in B_{X_K}} \rho_R(\Delta M) = \max_{Q \in Q_K} \rho_R(QM).$$

难点在于：B_{X_K} 里允许" 复标量块的模 < 1"、" 全复块的奇异值 $\Sigma \prec I$" 等**内点**；而 Q_K 强制" 复标量块在单位圆上、全复块取酉"。为什么把这些块**顶到边界**不会让最优值变差，反而能达到等号？

2.3 块极点原则：把" 可缩放的块" 顶到边界不会变差

把 Δ 分块写成

$$\Delta = \mathrm{diag}(\underbrace{q_1 I, \ldots, q_{n_R} I}_{\text{实重复标量}}, \underbrace{\alpha_1 e^{j\phi_1} I, \ldots, \alpha_{n_C} e^{j\phi_{n_C}} I}_{\text{复重复标量}}, \underbrace{U_1 \Sigma_1 V_1^*, \ldots, U_{n_F} \Sigma_{n_F} V_{n_F}^*}_{\text{全复块}}),$$

其中 $|q_i| \le 1$、$0 \le \alpha_\ell \le 1$、$\Sigma_j = \mathrm{diag}(\sigma_{j,k}) \in [0,1]$。

要点：在保持"$(I - \Delta M)$ 可奇异" 的同时，顺着每个" 可缩放" 的复方向把模（或奇异值）**推到 1**，最坏情形不会变差：

- 复重复标量块：把 $\alpha_\ell \uparrow 1$，并适配相位 ϕ_ℓ；
- 全复块：把 $\Sigma_j \uparrow I$，并把 U_j, V_j 调成" 对齐" 的等距算子（酉）。

这背后是两个标准事实：

1. **线性-谱型最优化在范数球的极点/边界达到极值**（冯 - 诺依曼迹不等式、KKT 条件、SVD 对齐）。
2. **多块同时" 上边界" 是可行的**：可以沿着" 径向放大 + 相位/单位向量对齐" 的路径保持（或恢复）$\det(I - \Delta M) = 0$。直观地：一旦某个 Δ 使 ΔM 有实特征值 $\lambda \in (0,1]$，就能把该块的幅度推到 1，同时按左右特征向量的相位/奇异向量方向做**配平**，把" 可达的 λ" 不减反增。极限状态正好就是 $Q \in Q_K$。

于是，对任何 $\Delta \in B_{X_K}$ 都可构造一个 $Q(\Delta) \in Q_K$ 使

$$\rho_R(Q(\Delta)M) \ \geq \ \rho_R(\Delta M).$$

对左边再取最大，就得到

$$\max_{Q \in Q_K} \rho_R(QM) \ \geq \ \max_{\Delta \in B_{X_K}} \rho_R(\Delta M).$$

而因为 $Q_K \subset B_{X_K}$，反向不等式也成立，故两者相等。

> 直观版：μ 关心的是" 把实特征值推到 1 的**最小尺度**"，而复/全复块自带" 幅度自由度"。**把这些自由度全用满（冲到边界）**，再靠相位/酉来**调整方向**，一定不比" 留在内部" 更差。极限形态就是 $Q \in Q_K$。

2.4 为什么实块允许留在 $[-1, 1]$ 而不强制到 ± 1？

对实重复标量块 $q \in [-1, 1]$，KKT 条件会出现两类情况：

- **端点**：若方向导数指向外，则最优落在 $q = \pm 1$；
- **内点**：若一阶必要条件 $\Re(a^* w) = 0$（由左右特征向量的" 对齐条件" 导出）成立，则可以停在内点 $q \in (-1, 1)$。

因此 Q_K 对实块写成 $[-1, 1]$（而不是只取 ± 1）正是为了**覆盖内点极值**的情形。

2.5 结论与意义

- **理论结论**：$\mu_K(M) = \max\limits_{Q \in Q_K} \rho_R(QM)$。$\mu$ 真正的值等于在" 边界集 Q_K" 上把实特征值推到最大的结果。
- **算法意义**：把" 范数球上的非凸最大化" 化成" **块极点集**上的非凸最大化"。这一步让 Young-Doyle 的**幂迭代**可落地：每一步都只需按块做**闭式投影**（复块取相位、全复块做等距配平、实块卡端点或内点），于是能快速给出**紧的下界**。
- **工程用法**：频率逐点算 $\underline{\mu}(\omega) = \max_{Q \in Q_K} \rho_R(QM(j\omega))$，再配合 D-scaling 上界形成夹逼；在 FDI/μ-综合里定位最坏频段并做设计。

2.6 小提示：如何把这段思想" 看见"

- 把一个任意 Δ 的复块奇异值从 <1 连续推到 $=1$，同时把相位/酉对齐到当前的左右特征向量方向；
- 观察 $\rho_R(\Delta M)$ 不减（通常变大）；
- 极限点就是某个 $Q \in Q_K$。

这就是" 把单位球的内点推到边界极点" 背后的几何图像，也是为什么" 只搜 Q_K" 足以达到真正 μ 的根本原因。