

稳定性的逻辑

黄嘉聪

摘要

主要介绍了稳定性的相关知识，重点在于理解：稳定性条件（传统 SISO 和传统 MIMO 和鲁棒稳定背后有什么共性？有界输入有界输出稳定和内稳定）为什么鲁棒稳定的条件是 $\det(I - M\delta)$

KEY WORDS: robust control; μ ; skew μ ; lower bound

1 复单位圆指的是特征值的取值范围？单位球是 Δ 的取值范围？

非常好，你的问题切到了 μ -分析几何图景的核心：“复单位圆”和“单位球”这两个“单位”确实是两个不同层面的概念——一个在特征值空间（ λ -平面）里，一个在矩阵空间（ Δ -空间）里。下面我们分层详细解释：

1.1 两个“空间”要分清

概念	所属空间	几何意义	出现位置
复单位圆 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 1\}$	特征值平面 (λ -plane)	描述矩阵 ΔM 的特征值位置	用来判断系统“临界稳定”或“奇异”
结构化单位球 $B_{X_K} = \{\Delta \in X_K : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}$	不确定性矩阵空间 (Δ -space)	描述允许的不确定性方向/幅度范围	μ 的定义域，搜索“最坏方向”

1.2 复单位圆：特征值层面的边界

在 μ 定义或稳定性分析里，矩阵 ΔM 的特征值 λ 决定系统是否“碰到边界”：

- 离散时间系统：若所有特征值都在复单位圆 内 ($|\lambda| < 1$)，系统稳定；
- 达到奇异或失稳：有特征值恰好在单位圆 上 ($|\lambda| = 1$)；
- μ 定义中的关键点：当我们找到一个 Δ 使得

$$\det(I - \Delta M) = 0,$$

这就意味着 1 是 ΔM 的特征值，而 1 就在复单位圆上 ($|1| = 1$)。所以我们也可以说：当某个特征值"撞到复单位圆"时，系统到达鲁棒稳定的边界。

因此：

复单位圆是特征值的"允许范围"的边界。在 μ -分析里， μ 反映要让特征值从原本的稳定区域（单位圆内）推到单位圆上的最小缩放倍数。

1.3 结构化单位球： Δ 的可选范围

另一方面， μ 是在 Δ -空间里搜索"哪一个方向最容易让系统变坏"。定义：

$$B_{X_K} = \{\Delta \in X_K : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}.$$

- 这是所有允许结构（块对角）的 Δ 的单位球（或单位壳）；
- 它规定了每个不确定性块的范数约束（复块 $|\Delta| \leq 1$ 、实块 $|\Delta| \leq 1$ 、全复块 $|\Delta| \leq 1$ ）；
- μ 的定义相当于问：

需要把 Δ 的整体"半径" 放大多少倍，才能让特征值撞到复单位圆？

即：

$$\text{最小 } t > 0 \text{ 使存在 } \Delta \in B_{X_K}, \det(I - t\Delta M) = 0.$$

由此得到

$$\mu_K(M) = \frac{1}{t_{\min}} = \max_{\Delta \in B_{X_K}} \rho_R(\Delta M).$$

这就是为什么"单位球" 出现——它是 Δ 的取值范围，而"单位圆" 是 λ 的取值范围。二者通过方程

$$(I - \Delta M)v = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

彼此关联。

1.4 联系起来的几何直觉

把两层放在一起想：

1. Δ 空间（不确定性方向）：在单位球 B_{X_K} 中找一个方向 Δ ，使得 ΔM 的特征值 λ 尽量大。
2. λ 空间（特征值位置）：对应的 λ 从原来单位圆内（安全区）向外移动；当 $\lambda = 1$ （或 $|\lambda| = 1$ ）时，系统刚好变得奇异/临界稳定。

因此：

- 单位球： Δ 的“可用能量范围”；
- 复单位圆：系统特征值的“稳定边界”；
- μ ：这两个空间的“桥梁”，描述要把 Δ 的半径放大到多少，使 λ 到达单位圆。

1.5 图形比喻

可以想成两个同心圆：

- 内圈（单位圆）： λ 平面上特征值的允许区域；
- 外圈（ Δ 单位球）： Δ 空间里不确定性的允许大小。

μ 问的是：

需要把 Δ -球放大多少倍，才能在 λ -平面上让某个特征值刚好碰到单位圆？

1.6 总结一句话

- 复单位圆 \rightarrow 是特征值 λ 的几何边界（判别系统或 $(I - \Delta M)$ 是否奇异）；
- 结构化单位球 \rightarrow 是不确定性矩阵 Δ 的范数约束集合；
- μ 连接两者：它告诉我们在结构化单位球上放大多少倍，才能让 ΔM 的特征值撞到复单位圆。

2 不确定性都结构化了为什么还能是个球形？

这个问题问得非常深刻——你已经抓到了 μ -分析几何直觉的精髓。看似"结构化"的不确定性，为什么我们还称它的取值集合为"球形单位球"？下面我从三个层次（数学层面、几何层面、结构层面）来完整解释，让你真正理解：

2.1 数学层面："球形"来自范数约束，不是形状几何意义的球体

当我们写

$$B_{X_K} = \{\Delta \in X_K : \|\Delta\| \leq 1\},$$

这里的"球"其实是指在一个向量空间上以某个矩阵范数定义的"单位球体"集合。它并不是在三维欧式空间里的圆球那种形状，而是范数意义上的"等半径集合"。

例如，在 \mathbb{R}^2 上，用不同的范数定义"单位球"：

- 2-范数（欧几里得） \rightarrow 圆形；
- 1-范数 \rightarrow 菱形；
- ∞ -范数 \rightarrow 正方形。

它们都叫"unit ball"，只是形状不同。

矩阵空间的"球"同理。我们说"单位球"，是因为它满足

$$\|\Delta\| \leq 1,$$

而不是说它真的几何上是"球体"。

2.2 几何层面：结构化 \neq 非球，而是球的笛卡尔积

当我们引入结构化不确定性，即

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k),$$

每个子块 Δ_i 自己也有一个局部"单位球"定义：

不确定性类型	局部集合	几何直觉
实标量 $\delta_i \in \mathbb{R}$	$ \delta_i \leq 1$	实轴上的区间 $[-1, 1]$
复标量 $\delta_i \in \mathbb{C}$	$ \delta_i \leq 1$	复平面上的圆盘
全复块 $\Delta_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}$	$\bar{\sigma}(\Delta_i) \leq 1$	高维空间中的"矩阵单位球"

把这些局部单位球按块拼成对角块对角结构:

$$B_{X_K} = \{\text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_k) : \bar{\sigma}(\Delta_i) \leq 1\}.$$

几何上, 这个集合不是一个"单个球", 而是各个子球的笛卡尔积 (**direct product**)。我们叫它"结构化单位球 (structured unit ball)"。

⇒ 所以严格说, 这个集合是一个块乘积形球体, 每个块的"球形半径"为 1, 但块与块之间没有耦合。

2.3 结构层面: "结构化" 体现的是方向约束, 不是形状约束

当你在 μ -分析中结构化不确定性时, 你其实是说:

" Δ 的非零元素只能出现在这些块中 (方向约束), 但在每个块内部, 大小依然按范数约束 ≤ 1 。"

也就是说:

- 结构化限制了 Δ 的"方向";
- 球形限制了 Δ 的"长度"。

举个直观比喻:

你规定: 一个人只能在若干固定的街区 (块结构) 里走路, 但每个街区内他能走的距离 (长度) 不超过 1。那么所有可能的行走位置集合仍然是"每个街区的球形区域"的笛卡尔积——也可以叫"结构化单位球"。

2.4 形式上为什么还是"球"的表达式

因为 μ 的定义是:

$$\mu_K(M)^{-1} = \min_{\Delta \in X_K} \{\|\Delta\| : \det(I - \Delta M) = 0\}.$$

这在形式上与非结构化不确定性完全一致, 只是约束 $\Delta \in X_K$ 。因此自然定义

$$B_{X_K} := \{\Delta \in X_K : \|\Delta\| \leq 1\},$$

沿用了"unit ball"的名字。只不过这个"球"在数学上是"限制在结构化子空间上的球体切片 (section of the full unit ball)"。

2.5 一个直观例子：二维图像

假设

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}, \quad \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, |\delta_i| \leq 1.$$

那么：

- 完全非结构化的单位球是 $\{\Delta : \|\Delta\|_2 \leq 1\}$, 是一个真正的四维"球"。
- 而这个结构化集合等价于 $\{(\delta_1, \delta_2) : |\delta_1| \leq 1, |\delta_2| \leq 1\}$, 几何上是一个**二维正方形**。

虽然它的形状不是"圆的", 我们仍然称它为"结构化单位球"——因为它是"以 $\|\Delta\| \leq 1$ " 为半径约束的子集。

2.6 小结一句话

"结构化" 决定了哪些方向(子空间)可以取值; "单位球" 决定了这些方向上长度(范数) ≤ 1 。

所以：

- 单位球 \neq " Δ 完全自由的球形区域",
- 而是"在特定结构方向上截取的、范数半径为 1 的球体切片"。

数学上：

$$B_{X_K} = X_K \cap \{\Delta : \|\Delta\| \leq 1\}$$

这就是 **结构化单位球**的精确定义与"球形"意义。

2.7 总结

概念	实际含义
"单位球"	指所有范数 ≤ 1 的矩阵集合(形状可不是几何球)
"结构化"	限制 Δ 的非零分块位置和重复模式
"结构化单位球"	是在结构化子空间中截取出的范数 ≤ 1 的集合
"为什么还能是球"	因为范数约束仍然是"半径型"的, 只是局限在结构化方向上

3 谱半径：最大特征值模

下面把"谱半径 (spectral radius)" 讲清楚：它的精确定义、与特征值/范数的关系、常用性质和在系统/鲁棒分析里的用法，并给几个小例子帮你快速判断。

3.1 定义（核心一句话）

对任意方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 谱半径定义为

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\},$$

也就是 A 的全部特征值模长（绝对值）里最大的那个。

补：有时会区分"实谱半径" $\rho_R(A)$ （仅在实特征值里取最大值；若无实特征值则记为 0）。你在混合- μ 推导里遇到的 ρ_R 就是这个量，它与标准谱半径 $\rho(A)$ 不同。

3.2 与特征值/范数的基本关系

3.2.1 相似不变性

$$\rho(SAS^{-1}) = \rho(A) \quad (\forall S \text{ 可逆})$$

换一组基（相似变换）不改变谱半径。这也说明谱半径只取决于特征值本身。

3.2.2 标量缩放

$$\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

3.2.3 与任何次乘性矩阵范数的关系

对任一矩阵范数 $\|\cdot\|$ （满足 $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ ），都有

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

并且著名的 **Gelfand 公式**（非常重要）：

$$\boxed{\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} = \inf_{k \geq 1} \|A^k\|^{1/k}}$$

这告诉你：无论选什么范数，取高次幂的" k 次方根极限"，都会收敛到谱半径。

3.2.4 与奇异值 (2-范数) 的关系

- 一般情形: $\rho(A) \leq \|A\|_2 = \bar{\sigma}(A)$ (最大奇异值)。
- 若 A 正规 (normal) (与其共轭转置可交换, 如厄米/酉/对称矩阵), 则

$$\|A\|_2 = \max_i |\lambda_i(A)| = \rho(A).$$

即正规矩阵时, 谱半径就等于 2-范数。

3.2.5 与特征多项式/根的关系

若 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$, 则

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|.$$

因此它是" 特征多项式所有根的最大模"。

3.2.6 Gershgorin 圆盘给界

若 $A = [a_{ij}]$, 以第 i 行为中心 a_{ii} 、半径 $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ 的 Gershgorin 圆盘覆盖所有特征值, 于是

$$\rho(A) \leq \max_i (|a_{ii}| + R_i).$$

这是估计谱半径的一个简单上界。

3.3 与稳定性/动力学的关系

- 离散时间系统 $x_{k+1} = Ax_k$: 若 A 可对角化且 $\rho(A) < 1$, 则 $A^k \rightarrow 0$, 即渐近稳定。更广泛地, 谱半径控制了 A^k 的增长/衰减速率 (见 Gelfand 公式)。
- 连续时间系统 $\dot{x} = Ax$: 稳定性由 谱幅 (spectral abscissa, 最大实部) 而不是谱半径决定: $\alpha(A) := \max_i \Re \lambda_i(A) < 0$ 则稳定。这里容易和谱半径混淆: 连续时间看" 实部", 离散时间看" 模长"。
- 非负矩阵 (Perron-Frobenius) 若 $A \geq 0$ (元素非负) 且不可约, 则 $\rho(A)$ 是 A 的最大实特征值, 对应正的左右特征向量。这在网络/马尔可夫链/图论中很常见。

3.4 在鲁棒控制与 μ -分析中的角色

在你之前的问题中，我们用到了

$$\mu_K(M) = \max_{\Delta \in B_{X_K}} \rho_R(\Delta M),$$

这里的 ρ_R 是" 实谱半径"。原因是奇异条件 $\det(I - \Delta M) = 0$ 等价于" ΔM 存在实特征值 1"，于是把" 找最小范数使奇异" 等价成" 在单位球上把 ΔM 的实特征值推到最大"。这就是谱半径（或实谱半径）在 μ 下界公式中的关键位置。

3.5 快速例子

1. 对角矩阵 $A = \text{diag}(2, -3, 1 + i)$ 特征值模 $\{2, 3, \sqrt{2}\}$, $\rho(A) = 3$ 。
2. 幂零矩阵 $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 特征值全是 0, $\rho(N) = 0$; 但 $\|N\|_2 > 0$ 。说明谱半径与范数不同。
3. 正规矩阵 U 酉阵 $|\lambda_i(U)| = 1$, $\rho(U) = 1 = \|U\|_2$ 。
4. 离散稳定若 $\rho(A) = 0.8$, 通常 A^k 以 0.8^k 量级衰减（精确速率受是否正规及条件数影响，但 Gelfand 公式保证极限根在 0.8）。

3.6 小结

- 谱半径 $\rho(A)$ 是" 最大的特征值模"。
- 它与任何矩阵范数满足 $\rho(A) \leq \|A\|$, 并由 Gelfand 公式与幂次极限紧密相连。
- 正规矩阵时 $\rho(A) = \|A\|_2$ 。
- 离散系统稳定看 $\rho(A) < 1$; 连续系统稳定看谱幅 $\alpha(A) < 0$ 。
- 在 μ -分析里，谱半径（尤其" 实谱半径"）把" 奇异化问题" 转成" 特征值最大化问题"，是下界算法的核心桥梁。

疑问 1

ΔM 如果不是一个方阵，那应该没有特征值才对啊？你说的这个是不是有问题？

- 在你之前的问题中，我们用到了

$$\mu_K(M) = \max_{\Delta \in B_{X_K}} \rho_R(\Delta M),$$

这里的 ρ_R 是“实谱半径”。原因是奇异条件 $\det(I - \Delta M) = 0$ 等价于“ ΔM 存在 实特征值 1”，于是把“找最小范数使奇异”等价成“在单位球上把 ΔM 的 实特征值 推到最大”。这就是谱半径（或实谱半径）在 μ 下界公式中的关键位置。

作者: JC 日期: 2025-10-23

4 LFT 保证了 ΔM 是方阵

非常好，这个问题非常关键——你已经注意到了很多初学 μ -分析时容易忽略的一个“隐藏假设”： ΔM 必须是方阵，否则谈特征值确实是没有意义的。让我们仔细澄清这一点。

4.1 你的直觉完全正确

在一般矩阵理论中：

- 如果 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 且 $m \neq n$, 那么 A 不是方阵;
- 此时 $\det(I - A)$ 没有定义（因为 I 只能定义在方阵空间）;
- 所以自然也就没有特征值的概念（特征值只对方阵定义）。

因此，如果 μ 定义中出现了

$$\det(I - \Delta M) = 0,$$

就必须隐含一个前提： ΔM 是方阵。

4.2 在 μ -分析框架中，这个前提是成立的

在 μ 理论里，矩阵 M 与不确定性 Δ 的维度并不是随便的，而是通过 **线性分式变换 (LFT)** 精确匹配好的。通常我们写：

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{并定义闭环: } F_u(M, \Delta) = M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}.$$

而 μ 分析是在"不确定性反馈环节" 内部进行的，定义的是：

$$\mu_K(M) = \frac{1}{\min\{\|\Delta\| : \det(I - \Delta M) = 0, \Delta \in X_K\}}.$$

此处的 M 并不是任意矩阵，而是经过系统分块后处于 LFT 反馈通道里的那一块。维度选择保证了乘积 ΔM 总是方阵，因为它代表的是反馈通道从" Δ 输出 $\rightarrow \Delta$ 输入" 的映射。

具体来说：

- 若 Δ 映射的是" Δ 输入 $\rightarrow \Delta$ 输出"，那么 M 的相应块 M_{22} 映射的是" Δ 输出 $\rightarrow \Delta$ 输入"；
 - 于是 ΔM_{22} 的维度自然是 $n_\Delta \times n_\Delta$ 。
- ✓ 因此在 μ 定义中，乘积 ΔM 一定是方阵。

4.3 为什么理论必须要求"方阵反馈通道"

这是鲁棒控制的核心逻辑之一：

- 反馈闭环 $I - \Delta M$ 代表系统整体的内部映射；
- 稳定性要求这个反馈环节可逆；
- "奇异" 意味着闭环不再可逆（等价于有特征值 1）；
- 这必须建立在反馈通道输入输出维度相等的前提下。

否则根本无法定义 " $I - \Delta M$ " 或 " $\det(\dots)$ "。

4.4 如果 ΔM 不是方阵怎么办？

如果真的有某个分析环节出现 $M \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $\Delta \in \mathbb{C}^{q \times p}$, 使 $p \neq q$, 那就要重新构造矩阵使其方阵化。

常见做法有两种：

4.4.1 扩维 (augmentation)

构造一个等价的方阵系统块，例如

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

这样整体就变成方阵，再分析其谱性质。

4.4.2 通过 LFT 重构

在标准 LFT 框架中，系统的上/下互联已经自然保证 ΔM 方阵——如果没有方阵，那说明你取错了分析块。

4.5 小结（重点）

项目	正确理解
$\mu_K(M)$ 定义	$\mu_K(M) = \frac{1}{\min_{\Delta \in X_K} \{\ \Delta\ : \det(I - \Delta M) = 0\}}$
要求	ΔM 必须是方阵；否则 \det 和特征值都没定义
解释	在 μ -分析里 M 取的是闭环不确定性反馈通道，维度天然匹配
因此	讨论 " ΔM 的实特征值 1" 是完全合法的前提下说的
若不方阵	需要通过扩维或重新定义反馈路径使其方阵化

✓ 一句话总结：

在 μ -分析中， ΔM 代表的是" 不确定性反馈通道" 的闭环传递矩阵。

由于反馈系统输入输出必须匹配，所以它总是方阵。因此我们才能合法地谈" 特征值" " 谱半径" " 奇异条件 $\det(I - \Delta M) = 0$ " 这些概念。

笔记 1

为什么最小的扰动对应最大的特征值——以标量不确定性举例

情况一： $\Delta = \{\delta I : \delta \in \mathbb{C}\}$

这时不确定性是标量乘单位矩阵。

为什么 $\mu_\Delta(M) = \rho(M)$ ？

- 特征方程： $\det(I - M(\delta I)) = \det(I - \delta M) = 0$
- 这等价于 $\det(\frac{1}{\delta}I - M) = 0$ ，即 $1/\delta$ 是 M 的特征值
- 最小的 $|\delta|$ 对应最大的 $|1/\delta|$ ，即 M 的谱半径 $\rho(M)$
- 因此 $\mu_\Delta(M) = 1/\min |\delta| = \rho(M)$

作者：JC 日期：2025-10-23

5 结构奇异值的等价定义——谱半径

190

μ AND μ SYNTHESIS

Lemma 10.1 $\mu_{\Delta}(M) = \max_{\Delta \in \mathbf{B}\Delta} \rho(M\Delta)$

In view of this lemma, continuity of the function $\mu: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ is apparent. In general, though, the function $\mu: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ is not a norm, since it does not satisfy the triangle inequality; however, for any $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mu(\alpha M) = |\alpha| \mu(M)$, so in some sense, it is related to how “big” the matrix is.

We can relate $\mu_{\Delta}(M)$ to familiar linear algebra quantities when Δ is one of two extreme sets.

- If $\Delta = \{\delta I : \delta \in \mathbb{C}\}$ ($S=1, F=0, r_1=n$), then $\mu_{\Delta}(M) = \rho(M)$, the spectral radius of M .

Proof. The only Δ 's in Δ that satisfy the $\det(I - M\Delta) = 0$ constraint are reciprocals of nonzero eigenvalues of M . The smallest one of these is associated with the largest (magnitude) eigenvalue, so, $\mu_{\Delta}(M) = \rho(M)$. \square

- If $\Delta = \mathbb{C}^{n \times n}$ ($S=0, F=1, m_1=n$), then $\mu_{\Delta}(M) = \bar{\sigma}(M)$.

Obviously, for a general Δ , as in equation (10.1), we must have

$$\{\delta I_n : \delta \in \mathbb{C}\} \subset \Delta \subset \mathbb{C}^{n \times n}. \quad (10.5)$$

Hence directly from the definition of μ and from the two preceding special cases, we conclude that

$$\rho(M) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M). \quad (10.6)$$

These bounds alone are not sufficient for our purposes because the gap between ρ and $\bar{\sigma}$ can be arbitrarily large.

这个引理是结构奇异值 (μ) 理论中的核心结果。让我详细解释为什么这个引理成立。

5.1 结构奇异值 μ 的基本定义

首先回顾结构奇异值 μ 的定义：

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}}$$

如果没有这样的 Δ 存在，则 $\mu_{\Delta}(M) = 0$ 。

换句话说： μ 是使系统变得不稳定的最小不确定性 Δ 的范数的倒数。

5.2 引理 10.1 的重新表述

引理声称:

$$\mu_{\Delta}(M) = \max_{\Delta \in B\Delta} \rho(M\Delta)$$

其中 $B\Delta = \{\Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}$ 是单位球内的不确定性集合。

5.3 为什么这个等式成立?

5.3.1 直观理解

考虑特征方程 $\det(I - M\Delta) = 0$, 这等价于说 **1** 是 $M\Delta$ 的特征值。

现在, 谱半径 $\rho(M\Delta)$ 是 $M\Delta$ 的特征值的最大模。如果 $\rho(M\Delta) \geq 1$, 意味着存在某个特征值的模至少为 1。

关键洞察:

- 如果 $\rho(M\Delta) < 1$, 那么所有特征值的模都小于 1, 系统稳定
- 如果 $\rho(M\Delta) = 1$, 那么系统处于稳定边界
- 如果 $\rho(M\Delta) > 1$, 那么系统不稳定

因此, 最大化 $\rho(M\Delta)$ 就相当于找到最坏情况的不确定性, 使系统最接近不稳定。

5.3.2 数学证明思路

从 μ 的定义出发:

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0\}}$$

设 Δ_0 是达到这个最小值的 Δ , 即:

$$\bar{\sigma}(\Delta_0) = \min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0\}$$

那么:

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\bar{\sigma}(\Delta_0)}$$

现在考虑缩放后的不确定性 $\tilde{\Delta} = \frac{\Delta_0}{\bar{\sigma}(\Delta_0)}$, 则:

- $\bar{\sigma}(\tilde{\Delta}) = 1$, 所以 $\tilde{\Delta} \in B\Delta$
- $\det(I - M\tilde{\Delta}) = \det\left(I - \frac{M\Delta_0}{\bar{\sigma}(\Delta_0)}\right) = 0$

由于 $\det(I - M\tilde{\Delta}) = 0$, 存在特征值 λ 使得 $M\tilde{\Delta}v = \lambda v$ 且 $|\lambda| = 1$ 。

因此:

$$\rho(M\tilde{\Delta}) \geq 1$$

实际上, 可以证明对于这个特定的 $\tilde{\Delta}$, 有 $\rho(M\tilde{\Delta}) = 1$ 。

反过来, 对于任意 $\Delta \in B\Delta$, 如果 $\rho(M\Delta) = c$, 那么通过缩放可以构造一个使系统不稳定的 Δ' , 其范数为 $1/c$ 。

因此, 最大谱半径正好等于 μ 。

5.4 两个极端情况的解释

5.4.1 情况一: $\Delta = \{\delta I : \delta \in \mathbb{C}\}$

这时不确定性是标量乘单位矩阵。

为什么 $\mu_\Delta(M) = \rho(M)$?

- 特征方程: $\det(I - M(\delta I)) = \det(I - \delta M) = 0$
- 这等价于 $\det(\frac{1}{\delta}I - M) = 0$, 即 $1/\delta$ 是 M 的特征值
- 最小的 $|\delta|$ 对应最大的 $|1/\delta|$, 即 M 的谱半径 $\rho(M)$
- 因此 $\mu_\Delta(M) = 1/\min|\delta| = \rho(M)$

5.4.2 情况二: $\Delta = \mathbb{C}^{n \times n}$

这时不确定性是任意复数矩阵。

为什么 $\mu_\Delta(M) = \bar{\sigma}(M)$?

- 根据小增益定理, 最坏情况的不确定性沿着 M 的最大增益方向
- 最小的 $\bar{\sigma}(\Delta)$ 使得 $\det(I - M\Delta) = 0$ 是 $1/\bar{\sigma}(M)$
- 因此 $\mu_\Delta(M) = \bar{\sigma}(M)$

5.5 不等式关系的几何解释

$$\{\delta I_n : \delta \in \mathbb{C}\} \subset \Delta \subset \mathbb{C}^{n \times n}$$

这个包含关系意味着:

- 标量不确定性是最受限的情况

- 完全不确定性是最不受限制的情况
- 一般的结构不确定性介于两者之间

因此谱半径和最大奇异值给出了 μ 的下界和上界:

$$\rho(M) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M)$$

5.6 为什么这个引理重要?

5.6.1 理论意义:

1. 连接了不同概念: 将结构奇异值与谱半径、奇异值联系起来
2. 提供了计算框架: 虽然直接计算 μ 很困难, 但这个引理提供了上下界
3. 揭示了本质: μ 衡量的是"在最坏结构不确定性下的最大增益"

5.6.2 实际应用:

1. 鲁棒稳定性分析: 如果 $\mu_{\Delta}(M) < 1$, 系统对所有允许的不确定性鲁棒稳定
2. 控制器设计: 设计控制器使 μ 最小化
3. 性能鲁棒性: 类似的框架可用于分析性能鲁棒性

5.7 计算考虑

虽然这个引理给出了 μ 的表达式, 但实际计算仍然困难:

- 右边的最大化是非凸优化问题
- 对于一般结构 Δ , 计算 μ 是 NP-hard 问题
- 实践中使用上下界逼近:
 - 下界: 通过幂迭代等方法估计
 - 上界: 通过求解 LMI 等问题得到

5.8 总结

这个引理成立的原因是：

1. μ 本质上衡量的是最坏情况下的环路增益
2. 谱半径 $\rho(M\Delta)$ 直接关联到稳定性边界
3. 最大化谱半径等价于找到最危险的不确定性方向
4. 极端情况对应着不确定性结构的极端限制

这个结果奠定了 μ 分析的理论基础，使得我们能够系统性地分析结构化不确定性对系统稳定性的影响。