



# 输出误差线性时变系统的偏差补偿迭代辨识方法

Maki's Lab

October 11, 2025

## 目录

# 第 1 章 问题背景

## 1.1 问题背景与现有解决方案的缺陷-时变系统辨识

想象一下，你要教一个机器人反复完成同一个动作，比如在传送带上抓取一个盒子。

“时不变”系统（简单情况）：如果每次盒子的重量、位置都一模一样，机器人很容易通过几次尝试就学会最佳动作。

“时变”系统（复杂情况）：但如果传送带上的盒子时轻时重（参数在变化），机器人上次学会的动作，这次可能就不适用了。这就是一个“时变系统”。

时变系统辨识领域的两个亟待解决的问题：精度和跟踪速度。

### 1.1.1 传统方法存在的问题-最小二乘与遗忘因子

传统方法的困境：最小二乘法：其收敛速度较低，估计值无法及时跟踪真实值的变化。科学家们常用一种叫“最小二乘法”的工具来帮机器“学习”系统参数。它就像是一个“金鱼脑”的学徒，只记得最近一点信息，然后就把之前的都忘了。对于变化的系统，它学得慢，而且总是“慢半拍”，等它学会，系统早就变了。

引入遗忘因子：无法完全跟踪时变参数的变化，存在估计延迟。有人提出了“遗忘因子”：让这个学徒忘得更快一点，以便更快地学习新东西。但这又带来了新问题：忘得太快，就容易把噪声（测量误差）也当成了真知识，结果学得不准。

## 1.2 本文引入的解决方法——迭代轴

论文的核心思想非常巧妙，它引入了一个“迭代轴”的概念。我们把它理解为“时空穿梭”学习法。

时间轴 ( $k$ ): 我们熟悉的时间流逝，比如从第 1 秒到第 40 秒。

迭代轴 ( $j$ ): 系统重复运行的次数。比如让机器人反复执行 40 秒的抓取任务，第一次运行是  $j=1$ ，第二次是  $j=2...$

关键假设（这个方法的基石）：

尽管盒子的重量随时间 ( $k$ ) 在变，但在每天的同一时刻，盒子的重量是一样的。比如，每天上午 10:00 整，传送带上的盒子总是 1 公斤重。

这意味着什么？我们把一个在时间轴上变化的参数，映射到了迭代轴上，变成了一个在同一时刻下不变的参数。这样，我们就可以在“同一个时刻点”上，通过反复迭代（多次实验），来学习这个“不变”的参数。

比喻：研究一个每天都在重复的、有固定剧本的舞台剧。虽然剧情（时间轴）在推进，但每天（迭代轴）的晚上 8 点 15 分，主角都会说同一句台词。我们的方法就是反复观看不同天的“晚上 8 点 15 分”这一时刻，来精确学习这句台词是什么。

### 1.2.1 方法根本

将时变系统辨识问题转化为迭代学习问题

### 1.2.2 对于该方法的疑问

机械臂不可能一天都是固定剧本吧？那么多不同重量的货物，不可能每天都按照固定顺序去排列夹取吧？

## 1.3 系统模型与假设

### 1.3.1 系统模型

$$y(k) = \frac{B(k, z)}{A(k, z)}u(k) + v(k)$$

其中

### 1.3.2 关键假设

迭代不变性：同一时刻的参数在不同迭代中保持不变。

噪声特性： $v(k)$  是白噪声，与输入不相关。

系统阶次已知，参数有界。

1. 迭代不变性：同一时刻的参数在不同迭代中保持不变。
2. 噪声特性： $v(k)$  是白噪声，与输入不相关。
3. 系统阶次已知，参数有界。

## 1.4 核心算法设计-三件套

### 1.4.1 代价函数设计-基于二次型优化的迭代学习辨识

每次迭代学习时，代价函数的目标：

1. 估计误差平方和：输出误差要小

2. 参数估计值的变化量：参数变化惩罚项，增强鲁棒性（我这次估算的参数，和上次的参数不能差别太大）通过平衡这两个目标，学徒既能紧跟系统变化，又不会因为一点噪声就疑神疑鬼、大幅修改参数，变得非常稳健。

### 1.4.2 协方差矩阵-基于 SVD 的协方差矩阵更新

考虑到舍入误差以及输入信号非持续激励等因素可能会导致协方差矩阵失去正定性甚至奇异，导致估计误差变大甚至算法不收敛，本文提出了一种基于奇异值分解（SVD）的协方差矩阵迭代更新方法，提高了算法的数值稳定性。学徒脑子里有一个“记忆矩阵”（协方差矩阵  $P_j(k)$ ）

论文的解决方案是使用 SVD（奇异值分解）。

你可以把它想象成一种“标准化记忆法”。就像我们把杂乱的书房按照“重要性”和“类别”重新整理一遍。

每次更新记忆时，都用 SVD 这个“标准化流程”来整理，确保记忆矩阵永远是“健康、正面的”，从而保证了整个计算过程的稳定性，不会算着算着就崩溃。

### 1.4.3 噪声影响-偏差补偿方法

由于理论分析得到该方法是有偏的，因此需要进行补偿由于测量中永远存在噪声，学徒的估计值会有一个固定的偏差（就像照片永远偏黄一点）。

考虑到噪声的存在会使参数估计值与真实值之间存在偏差，本文设计了一种偏差补偿方法，提高了时变参数的估计精度。

论文的解决方法是：

诊断偏差：首先从数学上证明，这个偏差的大小与噪声的强度 ( $\sigma^2$ ) 成正比。

估计噪声：利用那个“小本本”（代价函数）的值，反过来估算出噪声的强度。

实施补偿：最后，从有偏差的估计结果中，减掉这个计算出来的偏差量。

经过这一步“美颜”，参数的估计结果就变得更加精确、无偏了。

#### 1.4.3.1 偏差分析

#### 1.4.3.2 偏差补偿项

#### 1.4.3.3 噪声方差估计

修炼三：偏差补偿（给结果“美颜”）

## 1.5 仿真实验

包括应用场景验证和其他方法对比

### 1.5.1 例 1：慢变与快变参数跟踪

为什么要这么验证：针对应用场景的？系统参数包括正弦、线性、分段常数等多种变化形式。

结果显示：

偏差补偿显著提高估计精度；

SVD 更新提升数值稳定性；

算法能完全跟踪参数变化，无延迟。

### 1.5.2 例 2: 与 FFBCRLS 方法对比

FFBCRLS（带遗忘因子的偏差补偿递推最小二乘）存在明显估计延迟；  
本文方法由于引入迭代轴，无延迟，估计误差更小；  
迭代方法在有限时间系统中具有优势，但计算量较大。