



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kleine affine Schliessungsfiguren und ihr algebraische Bedeutung

Bachelorarbeit

Alexander Huber

12. Februar 2021

Betreuer: Prof. Dr. Norbert Hungerbühler

Departement für Mathematik, ETH Zürich

Zusammenfassung

In affinen Ebenen können unterschiedliche Schliessungsfiguren gelten. Wir betrachten den *kleinen Scherensatz*, den *kleinen Satz von Pappos-Pascal* sowie den *kleinen Satz von Desargues* und untersuchen ihre Beziehungen. Weiter erarbeiten wir die Algebraisierung affiner Ebenen über *Ternärkörpern*, *Doppelloops* sowie *kartesischen Gruppen* und charakterisieren diese geometrisch. Dabei wird sich herausstellen, dass für eine Richtung der *kleine Satz von Pappos-Pascal* nicht aus dem *kleinen Satz von Desargues* folgt. Zuletzt werden wir beweisen, dass in endlichen affinen Ebenen mit prim-Ordnung der *kleine Scherensatz*, der *kleine Satz von Pappos-Pascal* und der *kleine Satz von Desargues* äquivalent sind.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iii
1 Affine Ebenen	1
1.1 Inzidenzsysteme und affine Ebenen	2
2 Kleine affine Schliessungsfiguren	7
2.1 Kleiner Satz von Desargues	7
2.2 Kleiner Satz von Pappos-Pascal	10
2.3 Kleiner Scherensatz	11
2.4 Übersicht der Beziehungen	14
3 Ternärkörper	17
3.1 Definitionen	17
3.2 Affine Ebenen über Ternärkörpern	18
3.3 Ternärkörper über affinen Ebenen	20
3.4 Doppelloops und kartesische Gruppen	24
4 Affine Ebenen über Doppelloops und kartesischen Gruppen	27
4.1 Parallelprojektionen	27
4.2 Affine Ebenen über Doppelloops	29
4.3 Affine Ebenen über kartesischen Gruppen	31
4.4 Nicht-kommutative kartesische Gruppen	35
5 Endliche affine Ebenen	39
5.1 Affine Ebenen mit prim-Ordnung	39
A Gruppen	43
Literatur-/Quellenverzeichnis	45

Kapitel 1

Affine Ebenen

Auf der Suche nach einem Axiomensystem der euklidischen Geometrie beschreibt Hilbert in [1] die fünf unterschiedliche Gruppen

- i) Axiome der Verknüpfung,
- ii) Axiome der Anordnung,
- iii) Axiome der Kongruenz,
- iv) Axiom der Parallelen,
- v) Axiome der Stetigkeit.

Dabei unterscheidet er die Axiome der Ebenen von den Axiomen des Raumes. Affine Ebenen beschränken sich auf die ebenen Axiome von i), iv) und sind so eine Verallgemeinerung der euklidischen Ebene.

Affine Ebenen beschreiben also Punkte, Geraden, Parallelen und ihre Inzidenzen. Aber Begriffe wie Winkel, Mittelpunkt und stetige Geraden können in affinen Ebenen nicht definiert werden. Welche Sätze aus diesen wenigen Axiomen folgen, wurde rege erforscht und bildet die Grundlage der affinen Geometrie.

Überraschend ist, dass wir in affinen Ebenen Zahlen inklusive Addition und Multiplikation einführen können. Dass dies möglich ist, erstaunt sehr, denn die Axiome der affinen Ebenen beinhalten keine Konzepte der Zahlen. Diese Zahlkörper mit algebraischen Methoden zu untersuchen, eröffnet uns eine Brücke zwischen der affinen Geometrie und der Algebra.

In diesem Kapitel werden wir die wichtigsten Grundlagen von Inzidenzsystemen und affinen Ebenen kennenlernen. Die Resultate folgen aus [2] und [7].

1.1 Inzidenzsysteme und affine Ebenen

Affine Ebenen können auf unterschiedliche Arten eingeführt werden. Wir werden sie mit Hilfe der Inzidenzsystem beschreiben. Diese Art ist weit verbreitet, denn sie ermöglicht eine einfache Einführung von projektiven Ebenen.

Bemerkung 1.1 In [8] ist eine Beschreibung affiner Ebenen als Kollinearitäts-Strukturen oder Parallelen-Ebenen aufgeführt.

Definition 1.2 Seien \mathcal{B} und \mathcal{G} zwei nicht leere, disjunkte Mengen und $I \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{G}$ eine Teilmenge. Wir nennen das Tripel $I = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, I)$ ein Inzidenzsystem.

Falls für $P \in \mathcal{B}$ und $g \in \mathcal{G}$ das Paar $(P, g) \in I$ ist, dann sagen wir P ist inzident mit g und schreiben PIg .

Die Elemente von \mathcal{B} nennen wir *Punkte* und schreiben sie normalerweise gross (z.B. $P, Q, R \in \mathcal{B}$). Die Elemente von \mathcal{G} nennen wir *Geraden* und schreiben sie normalerweise klein (z.B. $a, g, x \in \mathcal{G}$).

Bemerkung 1.3 Für ein Inzidenzsystem $I = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, I)$ definiert das Tripel $I' = (\mathcal{B}, \mathcal{G}', I')$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{G}' &= \{\{P \in \mathcal{B} \mid P I g\} \mid g \in \mathcal{G}\}, \\ I' &= \{(P, g') \in \mathcal{B} \times \mathcal{G}' \mid P \in g'\}\end{aligned}$$

ein weiteres Inzidenzsystem I' und es gilt $P I' g' \Leftrightarrow P \in g'$ für alle Punkte und Geraden von I' . Wir passen darum die Notation der Inzidenz an und schreiben anstatt PIg einfach $P \in g$. Des Weiteren betrachten wir immer das Inzidenzsysteme I' anstelle des Inzidenzsystem I .

Nebst P ist inzident mit g sagen wir auch P liegt auf g oder g geht durch P .

Zwei Geraden $g, h \in \mathcal{G}$ sind *parallel*, geschrieben $g \parallel h$, wenn entweder $g = h$ oder es keinen Punkt in \mathcal{B} gibt, der auf g und auf h liegt. Falls g und h nicht parallel sind, dann schreiben wir $g \nparallel h$.

Eine Menge von Punkten $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$ heisst *kollinear*, falls es eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ gibt mit $\mathcal{B} \subseteq g$. Wir sagen auch, die Punkte $P, Q, R \in \mathcal{B}$ sind *kollinear*, falls die Menge $\{P, Q, R\}$ kollinear ist. Genau gleich heisst eine Menge von Geraden $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$ *kopunktal*, falls es einen Punkt $P \in \mathcal{B}$ gibt so, dass für alle Punkte $g \in \mathcal{G}$ gilt $P \in g$. Analog wie bei der Kollinearität bezeichnen wir auch $f, g, h \in \mathcal{G}$ als *kopunktal*.

Definition 1.4 Das Inzidenzsystem $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, I)$ ist eine affine Ebene genau dann, wenn folgende Axiome gelten:

- A1 Für zwei paarweise verschiedene Punkte $P, Q \in \mathcal{B}$ gibt es genau eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ so, dass $P \in g$ und $Q \in g$.

A2 Für eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ und einen Punkt $P \in \mathcal{B}$ gibt es genau eine Gerade $h \in \mathcal{G}$ so, dass $g \parallel h$ und $P \in h$.

A3 Es existieren drei paarweise verschiedene Punkte $P, Q, R \in \mathcal{B}$, die nicht kollinear sind.

Beispiel 1.5 Die euklidische Ebene erfüllt bekannterweise die Axiome A1, A2 und A3 und ist eine affine Ebene. Einen genauen Beweis dafür findet man in [7, S. 8].

Wie das folgende Beispiel zeigt, gibt es affine Ebenen mit endlich vielen Punkten. Wir sagen, eine affine Ebene ist *endlich*, falls $|\mathcal{B}|$ endlich ist.

Beispiel 1.6 Das Inzidenzsystem $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$, wobei $\mathcal{B} = \{A, B, C, D\}$, $\mathcal{G} = \{a, b, c, d, e, f\}$ und der Inzidenztafel in Abbildung 1.1, erfüllt alle Axiome einer affinen Ebene. Alle Axiome können direkt überprüft werden. Die Ebene \mathcal{A} ist die kleinste affine Ebene, das heisst es gibt keine affine Ebene mit weniger als 4 Punkten. Dies wird in [7, S. 10] bewiesen.

Bei einer affinen Ebene an die euklidische Ebene zu denken, ist nicht immer hilfreich. Eine gutes Beispiel für eine allgemeinere affine Ebene ist die Moulton-Ebene.

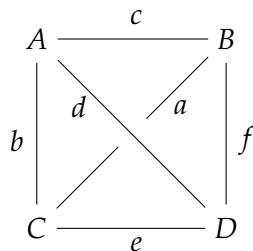
Beispiel 1.7 (Moulton-Ebene) Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ ein Inzidenzsystem mit den Punkten $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2$, die reelle Koordinatenebene, und mit der Menge der Geraden \mathcal{G} bestehend aus

- der Menge aller horizontalen Geraden,

$$\{(x, y) \in \mathcal{B} \mid y = c\}, \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

- der Menge aller vertikalen Geraden,

$$\{(x, y) \in \mathcal{B} \mid x = c\}, \quad \forall c \in \mathbb{R},$$



(a)

	a	b	c	d	e	f
A		*	*	*		
B	*		*			*
C	*	*			*	
D				*	*	*

(b)

Abbildung 1.1: Eine affine Ebene mit vier Punkten

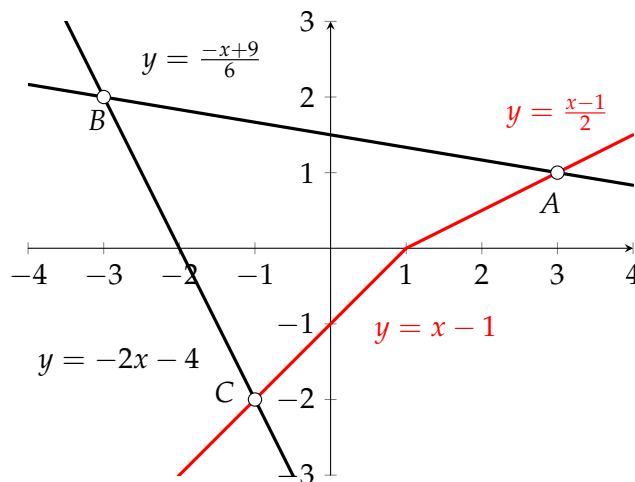


Abbildung 1.2: Ein Dreieck ABC in der Moulton-Ebene

- der Menge aller Geraden mit negativer Steigung,

$$\{(x, y) \in \mathcal{B} \mid y = ax + b\}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a < 0,$$

- der Menge aller Geraden mit positiver Steigung, die an der X -Achse geknickt werden,

$$\{(x, y) \in \mathcal{B} \mid y = \begin{cases} ax + b & x \geq -\frac{b}{a} \\ \frac{a}{2}x + \frac{b}{2} & x < -\frac{b}{a} \end{cases}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0.$$

Weiter gilt $P \in \mathcal{B}$ ist mit $g \in \mathcal{G}$ inzident, falls $P \in g$.

Das Inzidenzsystem \mathcal{M} ist sogar eine affine Ebene und wird Moulton-Ebene genannt. Zu sehen, dass die Axiome A1, A2 und A3 erfüllt sind, ist rechnerisch und wird hier unterlassen. Intuitiv kann man sich mithilfe der Abbildung 1.2 davon überzeugen.

Wir möchten nun einige wichtige Notationen und Eigenschaften von affinen Ebenen einführen. Sei im Folgenden $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ eine beliebige affine Ebene.

Wir bezeichnen mit \overline{PQ} die nach Axiom A1 eindeutig existierende Gerade durch die Punkte P und Q . Weiter nennen wir die nach Axiom A2 eindeutig definierte Gerade h , die Parallele zu g durch P .

Lemma 1.8 Zwei nicht parallele Geraden $g, h \in \mathcal{G}$ gehen durch genau einen gemeinsamen Punkt P .

Beweis Da g und h nicht parallel sind, ist g ungleich h und es gibt mindestens einen Punkt P der auf beiden Geraden liegt. Wir nehmen an, dass es einen weiteren Punkt $Q \in \mathcal{B} \setminus \{P\}$ gibt so, dass Q auf g und auf h liegt. Dann gilt $g = \overline{PQ} = h$ nach Axiom A1. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. \square

Diesen eindeutigen Punkt P nennen wir den *Schnittpunkt der Geraden g und h* . Wir schreiben $P = g \cap h$.

Lemma 1.9 *In einer affinen Ebene ist Parallelität eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden.*

Beweis Reflexivität und Symmetrie der Parallelität folgen direkt aus der Definition und wir müssen nur die Transitivität zeigen. Seien $f, g, h \in \mathcal{G}$ mit $f \parallel g$ und $g \parallel h$. Angenommen f und h gehen durch einen gemeinsamen Punkt $P \in \mathcal{B}$.

Nach Axiom A2 gilt nun, dass f die eindeutige Parallele zu g durch P ist und h die eindeutige Parallele zu g durch P ist. Somit gilt $f = h$ und $f \parallel g$. Falls f und g keinen gemeinsamen Punkt haben, dann gilt $f \parallel g$ direkt. Somit ist die Parallelität transitiv. \square

Die Äquivalenzklasse $\Pi_g = \{h \in \mathcal{G} \mid h \parallel g\}$ der Parallelität nennen wir *das Parallelenbüschel in g -Richtung*. Falls wir keine spezifische Richtung angeben möchten, dann schreiben wir Π ist ein *Parallelenbüschel* oder Π ist eine *Richtung*. Eine Gerade $g \in \Pi$ nennen wir eine Π -Gerade.

Bemerkung 1.10 *In einem beliebigen Inzidenzsystem muss die Parallelität keine Äquivalenzrelation sein.*

Kapitel 2

Kleine affine Schliessungsfiguren

In diesem Kapitel untersuchen wir die kleinen affinen Schliessungsfiguren. Wir betrachten den *kleinen Satz von Desargues*, den *kleinen Satz von Pappos-Pascal* und den *kleinen Scherensatz* und werden die bekannten Beziehungen zwischen ihnen herleiten.

Obwohl wir die Figuren mit dem Wort 'Satz' beschreiben, sind sie keine Sätze im mathematischen Sinne. Denn ihre Aussagen müssen in einer beliebigen affinen Ebene nicht gelten. Im mathematischen Sinne sind sie Axiome, die wir zu den Axiomen der affinen Ebene hinzunehmen.

Diese Benennung lässt sich historisch begründen. Wie am Anfang von [4] dargestellt ist, waren die Resultate von *Pappos von Alexandria*¹ bereits im 4. Jahrhundert bekannt und mit den Verallgemeinerungen von *Blaise Pascal* aus dem Jahr 1639 die Grundlage für den Satz von Pappos-Pascal. Der Satz von Desargues tauchte das erste Mal im Jahr 1648 auf. Beide Sätze beziehen sich aber auf die euklidische Geometrie, in welcher ihre Aussage immer wahr ist. Erst bei der Betrachtung von affinen Ebenen im 19. Jahrhundert wurde die Bedeutung und Wichtigkeit dieser Sätze bewusst. Trotzdem ist uns das Wort Satz in der Literatur erhalten geblieben.

Die Resultate dieses Kapitels folgen aus Kapitel 2 in [2] und Kapitel 3 in [7].

2.1 Kleiner Satz von Desargues

Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, I)$ eine beliebige affine Ebene.

Definition 2.1 (kleiner Satz von Desargues) Seien $f, g, h \in \mathcal{G}$ paarweise verschiedene, parallele Geraden. Wir sagen, zwischen den Trägergeraden f, g, h gilt

¹Pappos von Alexandria war ein Griechischer Mathematiker. Oft wird er auch als Pappus von Alexandria bezeichnet. Dies ist auf die lateinische Schreibart des Namens zurückzuführen. Wir nennen ihn und seinen Satz in dieser Arbeit Pappos.

2. KLEINE AFFINE SCHLIESSUNGSFIGUREN

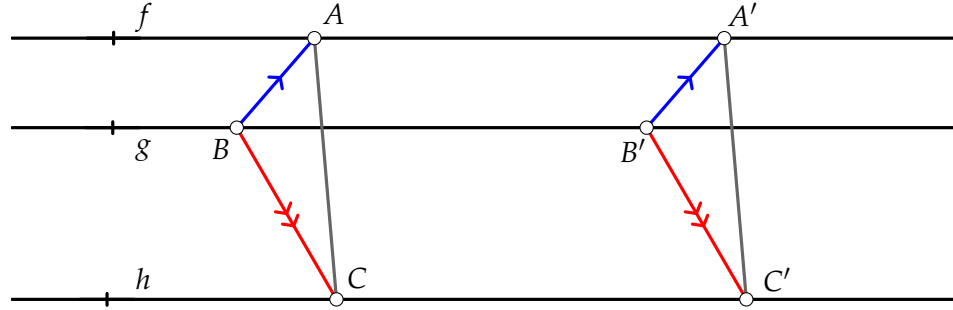


Abbildung 2.1: Falls der kleine Satz von Desargues zwischen den Trägergeraden f, g, h gilt, dann müssen die Geraden AC und $A'C'$ parallel sein.

der kleine Satz von Desargues, geschrieben (d) , genau dann, wenn für alle Punkte $A, A' \in f, B, B' \in g, C, C' \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}, \overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ gilt $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$.

Falls (d) zwischen allen Trägergeraden einer Richtung Π gilt, dann schreiben wir $(d)_\Pi$. Falls (d) für alle möglichen Trägergeraden hält, dann sagen wir, der kleine Satz von Desargues gilt in \mathcal{A} , geschrieben (d) gilt in \mathcal{A} . Siehe Abbildung 2.1.

Bemerkung 2.2 Wenn man die Voraussetzung, $f, g, h \in \mathcal{G}$ sind parallel, in Definition 2.1 durch, f, g, h sind kopunktal, ersetzt, dann erhält man den Satz von Desargues, geschrieben (D) .

Wir können den kleinen Satz von Desargues umformulieren. Diese erklärt auch, warum die Definition 2.1 eine Schliessungsfigur genannt wird.

Bemerkung 2.3 Mit Hilfe der Axiome A1 und A2 der affinen Ebenen sieht man schnell, dass (d) äquivalent zu der folgenden Eigenschaft ist.

Für paarweise verschiedene, parallele Geraden $f, g, h \in \mathcal{G}$ und für alle Punkte $A, A' \in f, B, B' \in g, C, C'_a, C'_b \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}, \overline{BC} \parallel \overline{B'C'_a}, \overline{AC} \parallel \overline{A'C'_b}$ folgt $C'_a = C'_b$.

Somit schliesst sich die Figur $C'_a B' A' C'_b$ und es entsteht ein Dreieck $A'B'C'$ mit $C' = C'_a = C'_b \in h$.

Die Aussage in Bemerkung 2.3 gilt auch für $(d)_\Pi$ und erleichtert uns den Umgang mit Schliessungsfiguren.

Der nächste Satz wird in der Literatur oft algebraisch bewiesen. Wir werden einen geometrischen Beweis zeigen. Dieser stammt aus dem Artikel [3].

Satz 2.4 Für zwei paarweise verschiedene Richtungen Π und Ψ einer affinen Ebene gilt $(d) \Leftrightarrow (d)_\Pi \wedge (d)_\Psi$.

Beweis Aus (d) folgen $(d)_\Pi$ und $(d)_\Psi$ direkt.

Wir werden die Umkehrung in 3 Schritten beweisen.

1) Zuerst beweisen wir (d) für den Fall, dass eine Seite des Dreiecks ABC eine Π -Gerade und eine andere Seite eine Ψ -Gerade ist.

Seien $f, g, h \in \mathcal{G}$ paarweise verschiedene, parallele Geraden und $A, A' \in f$, $B, B' \in g$, $C, C' \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$. Seien zusätzlich $\overline{AB} \in \Pi$ und $\overline{BC} \in \Psi$. Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen $\overline{AC} \not\parallel \overline{A'C'}$, dann existiert der Schnittpunkt $R = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$. Sei weiter $S \in \mathcal{B}$, sodass $\overline{BS} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{B'S} \parallel \overline{A'C'}$. Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Parallele zu \overline{AC} durch B und der Parallele zu $\overline{A'C'}$ durch B' und ist eindeutig. Wir erhalten die Situation in Abbildung 2.2a.

Nun sind die Seiten der Dreiecke $AA'R$ und $BB'S$ parallel. Aus $(d)_\Pi$ und $\overline{AB}, \overline{A'B'} \in \Pi$ folgt $\overline{RS} \in \Pi$. Denn nach Bemerkung 2.3 muss sich das Dreieck $BB'S$ schliessen und S auf der Parallelen zu \overline{AB} durch R liegen. Analog folgt aus den Dreiecken $BB'S, CC'R$ und $(d)_\Psi$, dass $\overline{RS} \in \Psi$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme $\Pi \neq \Psi$, denn Π und Ψ sind Äquivalenzklassen und müssen darum einen leeren Schnitt haben.

2) Im zweiten Schritt möchten wir nun (d) für den Fall, dass eine Seite des Dreiecks ABC eine Π -Gerade ist, beweisen.

Seien $f, g, h \in \mathcal{G}$ paarweise verschiedene, parallele Geraden und $A, A' \in f$, $B, B' \in g$, $C, C' \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ und zusätzlich $\overline{AB} \in \Pi$. Seien $D \in \overline{AB}$ so, dass $\overline{CD} \in \Psi$, und $D' \in \overline{A'B'}$ so, dass $\overline{C'D'} \in \Psi$. Siehe

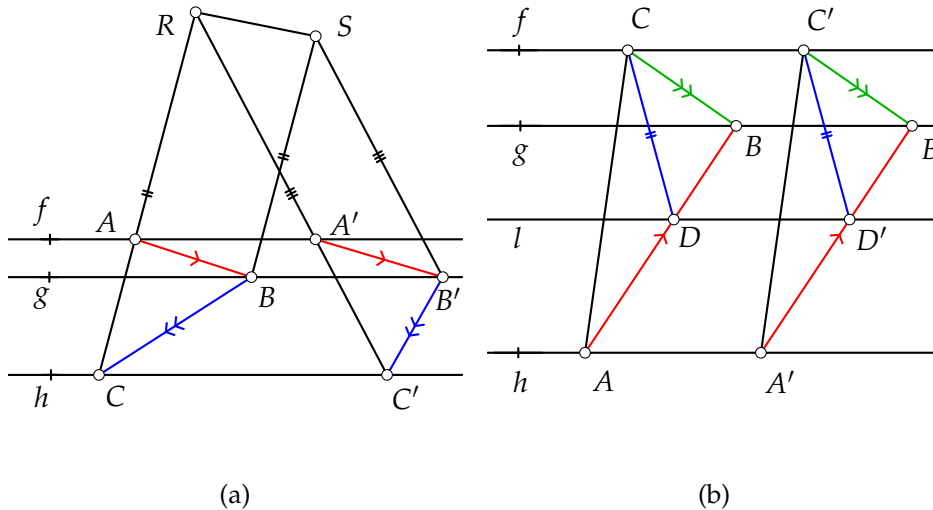


Abbildung 2.2

Abbildung 2.2b. Nach Schritt 1) schliesst sich das Dreieck $D'BC'$ auf der Parallelen zu f durch D . Wir erhalten $l = \overline{DD'} \parallel f$. Nach der Anwendung von 1) auf die Dreiecke ADC und $A'D'C'$ sehen wir, dass auch $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ gilt.

3) Nun können wir (d) ohne weitere Einschränkungen beweisen. Falls bei einem Dreieck ABC keine Seite eine Π -Gerade ist, dann können wir analog zu 2) das Dreieck in zwei Dreiecke mit einer Π -Gerade unterteilen und 2) auf die beiden neuen Dreiecke anwenden. Mit der gleichen Argumentation wie in 2) folgt nun (d). \square

2.2 Kleiner Satz von Pappos-Pascal

Eine weitere Schliessungsfigur ist der kleine Satz von Pappos-Pascal.

Definition 2.5 (kleiner Satz von Pappos-Pascal) Seien $g, h \in \mathcal{G}$ paarweise verschiedene, parallele Geraden. Wir sagen, zwischen den Trägergeraden g, h gilt der kleine Satz von Pappos-Pascal, geschrieben (p) , genau dann, wenn für alle Punkte $A, B', C \in g, A', B, C' \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ gilt $\overline{AC'} \parallel \overline{A'C}$.

Analog wie in Definition 2.1 bezeichnen wir mit $(p)_{\Pi}$ den Fall, dass (p) für alle Trägergeraden von Π gilt. Falls (p) für alle möglichen Trägergeraden hält, dann sagen wir, der kleine Satz von Pappos-Pascal gilt in \mathcal{A} , geschrieben (p) gilt in \mathcal{A} . Siehe Abbildung 2.3.

Bemerkung 2.6 Ähnlich wie in Bemerkung 2.3 kann man (p) umformulieren zu. Das Sechseck $ABCA'B'C'$ schliesst sich auf der Gerade h beziehungsweise g .

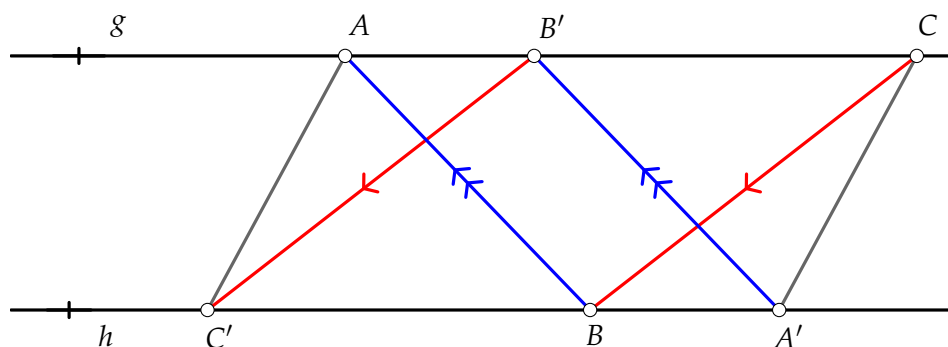


Abbildung 2.3: Falls der kleine Satz von Pappos-Pascal zwischen den Trägergeraden g, h gilt, dann müssen die Geraden $\overline{AC'}$ und $\overline{A'C}$ parallel sein.

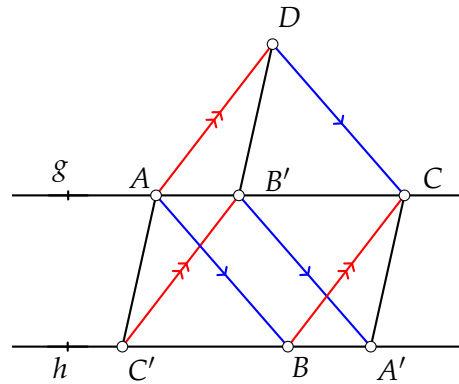


Abbildung 2.4

Satz 2.7 Für eine affinen Ebene gilt $(d) \Rightarrow (p)$.

Beweis Seien $g, h \in \mathcal{G}$ paarweise verschiedene, parallele Geraden und seien $A, B', C \in g$, $A', B, C' \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$. Wir können annehmen, dass A, B', C paarweise verschieden sind. Sonst folgt $\overline{AC'} \parallel \overline{A'C}$ direkt.

Konstruiere den Schnittpunkt D der Parallelen zu \overline{BC} durch A mit der Parallelen zu \overline{AB} durch C wie Abbildung 2.4. Dann liegen die Dreiecke $C'BA$ und $B'CD$ auf den paarweise verschiedenen Parallelen $\overline{C'B'}$, \overline{BC} , \overline{AD} . Zudem folgt aus $\overline{C'B} = g \parallel f = \overline{B'C}$ und $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ mit (d) , dass auch $\overline{AC'} \parallel \overline{DB'}$ gilt.

Analog folgt aus den Dreiecken $A'BC$ und $B'AD$ mit (d) , dass $\overline{A'C} \parallel \overline{DB'}$. Somit erhalten wir $\overline{AC'} \parallel \overline{DB'} \parallel \overline{A'C}$. Da die Trägergeraden und die Punkte darauf beliebig waren folgt (p) . \square

2.3 Kleiner Scherensatz

Die letzte Schliessungsfigur, die wir in diesem Kapitel behandeln werden, ist der kleine Scherensatz.

Definition 2.8 (kleiner Scherensatz) Seien $g, h \in \mathcal{G}$ paarweise verschiedene, parallele Geraden. Wir sagen, zwischen den Trägergeraden g, h gilt der kleine Scherensatz, geschrieben (s) , genau dann, wenn für alle Punkte $A, A', C, C' \in g$, $B, B', D, D' \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$, $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$ gilt $\overline{AD} \parallel \overline{A'D'}$.

2. KLEINE AFFINE SCHLIESSUNGSFIGUREN

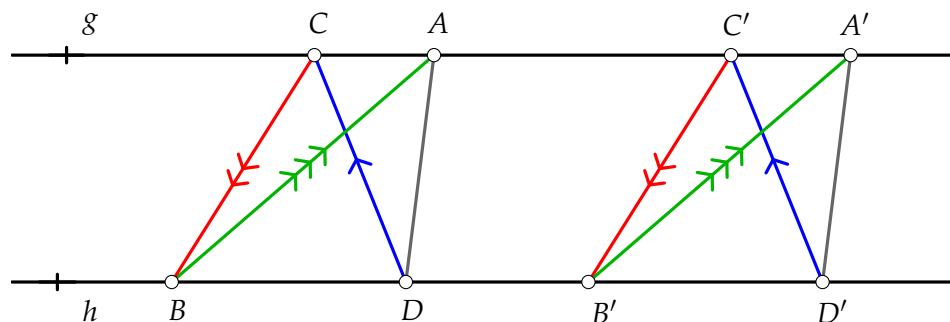


Abbildung 2.5: Falls der kleine Scherensatz zwischen den Trägergeraden g , g gilt, dann müssen die Geraden \overline{AD} und $\overline{A'D'}$ parallel sein.

Analog wie in Definition 2.1 bezeichnen wir mit $(s)_{\Pi}$ den Fall, dass (s) für alle Trägergeraden von Π gilt. Falls (s) für alle möglichen Trägergeraden hält, dann sagen wir, der Scherensatz gilt in \mathcal{A} , geschrieben (s) gilt in \mathcal{A} . Siehe Abbildung 2.5.

Bemerkung 2.9 Ähnlich wie in Bemerkung 2.3 kann man (s) umformulieren. Die Schliessungsfigur (s) ist äquivalent dazu, dass sich das Viereck $A'B'C'D'$ auf der Gerade h beziehungsweise g schliesst.

Nun können wir uns den Beziehungen zwischen (s) , (d) , (p) zuwenden.

Satz 2.10 Für eine Richtung Π einer affinen Ebene gilt $(d)_{\Pi} \Rightarrow (s)_{\Pi}$.

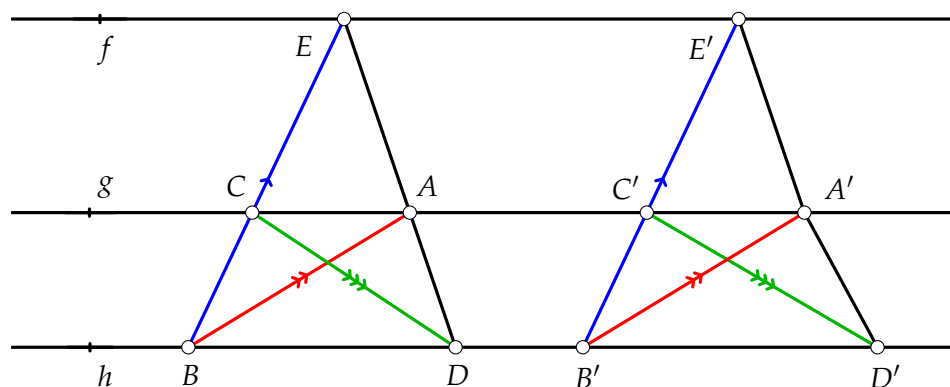


Abbildung 2.6

Beweis Seien $g, h \in \Pi$ paarweise verschieden und $A, A', C, C' \in g, B, B', D, D' \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ und $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$. Falls $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ und $\overline{A'D'} \parallel \overline{B'C'}$, dann folgt $\overline{AD} \parallel \overline{A'D'}$ direkt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $\overline{AD} \not\parallel \overline{BC}$.

Nun können wir $E = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ und $E' \in \overline{B'C'}$ mit $\overline{EE'} \parallel g$ konstruieren. Siehe Abbildung 2.6. Die Dreiecke ABE und $A'B'E'$ auf den Trägergeraden g, h, f erfüllen die Voraussetzung von $(d)_\Pi$ und wir erhalten $\overline{AE} \parallel \overline{A'E'}$. Wenn wir $(d)_\Pi$ auf die Dreiecke ECD und $E'C'D'$ anwenden, dann folgt $\overline{ED} \parallel \overline{E'D'}$.

Da aber $E' \in \overline{A'E'}$, $E' \in \overline{E'D'}$ und $\overline{A'E'} \parallel \overline{AE} = \overline{ED} \parallel \overline{E'D'}$ folgt

$$\overline{A'E'} = \overline{E'D'} = \overline{A'D'}.$$

Daraus folgern wir $\overline{AD} \parallel \overline{A'D'}$. Da die Trägergeraden beliebig waren folgt $(s)_\Pi$. \square

Aus dem Satz 2.10 folgt mit der Definition von (d) und (s) sofort das folgende Korollar.

Korollar 2.11 Für eine affine Ebene gilt $(d) \Rightarrow (s)$.

Auch die folgende Implikation können wir beweisen.

Satz 2.12 Für eine Richtung Π einer affinen Ebene gilt $(p)_\Pi \Rightarrow (s)_\Pi$.

Beweis Seien $g, h \in \Pi$ paarweise verschieden und $A, A', C, C' \in g$ sowie $B, B', D, D' \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ und $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$. Konstruiere $E \in g$ und $E' \in g$ so, dass $\overline{EB} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{C'E'}$. Siehe Abbildung 2.7. Wir bemerken, falls $E = C$, $E = B$, $E' = C'$ oder $E' = B'$ folgt die Aussage direkt. Wir können deshalb annehmen, dass dies nicht der Fall ist. Das Sechseck $EBCE'C'B'$ hat somit wirklich sechs unterschiedliche Ecken.

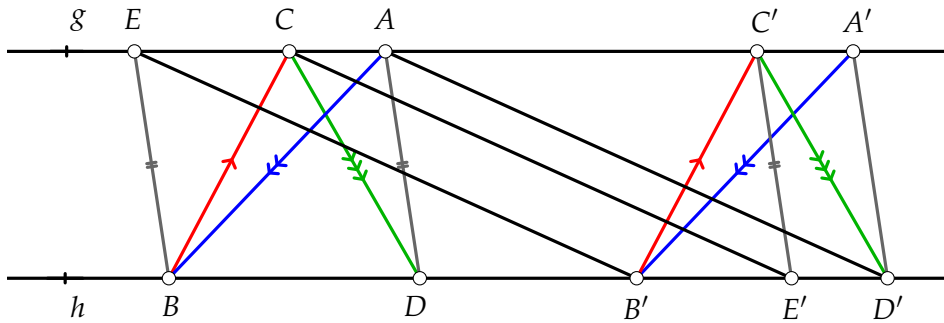


Abbildung 2.7

Beim Sechseck $EBCE'C'B'$ sind nun die Seiten $\overline{EB} \parallel \overline{E'C'}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{C'B'}$ parallel. Mit $(p)_\Pi$ folgt nun, dass $\overline{E'C'} \parallel \overline{B'E}$. Analog folgern wir aus dem Sechseck $CDAD'C'E'$ und $(p)_\Pi$, dass $\overline{AD'} \parallel \overline{E'C}$ gilt und wir erhalten

$$\overline{AD'} \parallel \overline{E'C} \parallel \overline{B'E}.$$

Da zudem $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ gilt, erfüllt das Sechseck $BAD'A'B'E$ die Voraussetzung von $(p)_\Pi$ und wir erhalten $\overline{A'D'} \parallel \overline{BE}$. Nach der Konstruktion von E folgt, $\overline{A'D'} \parallel \overline{EB} \parallel \overline{AD}$. Dies beendet den Beweis, da $g, h \in \Pi$ beliebig waren. \square

Bemerkung 2.13 Im Beweis von Satz 2.12 zeigen wir sogar, dass für zwei Trägergeraden g, h gilt,

$$(p) \text{ gilt zwischen } g \text{ und } h \Rightarrow (s) \text{ gilt zwischen } g \text{ und } h.$$

Wieder folgt aus dem Satz 2.12 sofort das folgende Korollar.

Korollar 2.14 Für eine affine Ebene gilt $(p) \Rightarrow (s)$.

2.4 Übersicht der Beziehungen

In der Abbildung 2.8 sehen wir nun alle Beziehungen, die wir in den letzten Abschnitten bewiesen haben. Dabei sind Π und Ψ wieder paarweise verschiedene Richtungen einer affinen Ebene. Es stellt sich nun die Frage, welche dieser Implikationen umkehrbar sind.

Am nächsten Beispiel sehen wir, dass die Spezialisierungen

$$(d) \Rightarrow (d)_\Pi, \quad (p) \Rightarrow (p)_\Pi, \quad (s) \Rightarrow (s)_\Pi$$

nicht umkehrbar sind.

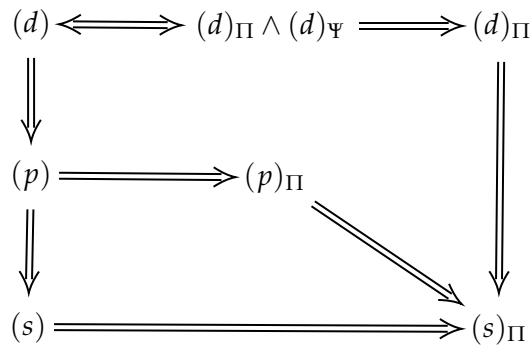


Abbildung 2.8: Abhängigkeiten der kleinen affinen Schliessungsfiguren

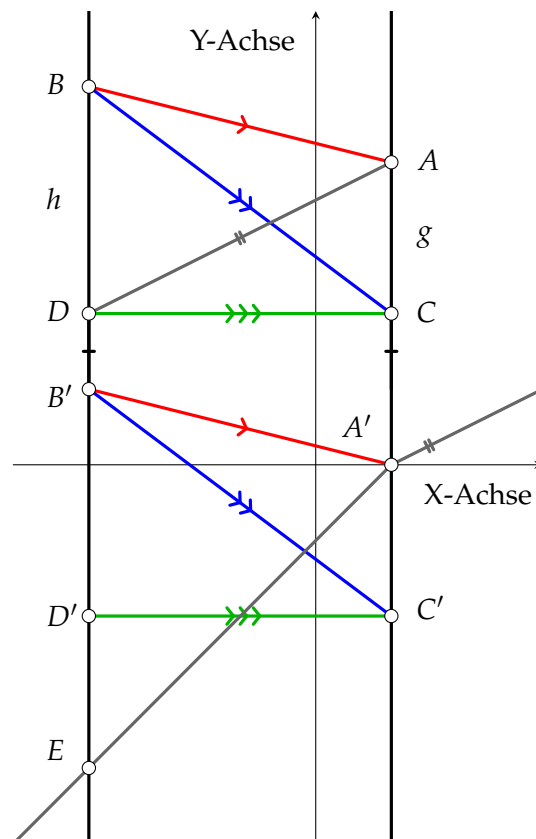


Abbildung 2.9: Der Scherensatz kann in der Moulton-Ebene nicht in Richtung der Y-Achse gelten. Denn die Parallele zu \overline{AD} durch den Punkt A' schneidet die Gerade h nicht im Punkt D' .

Beispiel 2.15 In der Abbildung 2.9 sieht man, dass in der Moulton-Ebene (s) nicht in Richtung der Y-Achse gelten kann. Denn die Seite \overline{AD} ist nicht parallel zur Seite $\overline{A'D'}$. Aus Satz 2.10 und Satz 2.12 folgt, dass auch (p), (d) in Richtung der Y-Achse nicht gelten können.

Dieses Beispiel kann man für alle Richtungen ausser der X-Achse konstruieren. Somit kann (d), (p), (s) nur in der Richtung der X-Achse gelten. Dass dies wirklich der Fall ist, werden wir im Kapitel 4 sehen.

Ob (d) und (p) oder (p) und (s) äquivalent sind, ist ein ungelöstes Problem.

Auffällig ist auch, dass wir die Implikation, $(d)_{\Pi} \Rightarrow (p)_{\Pi}$, nicht zeigen konnten. Tatsächlich ist dies auch nicht möglich. Um dies zu sehen, müssen wir zuerst affine Ebenen über kartesischen Gruppen kennenlernen.

Ternärkörper

Affine Ebenen können mit Hilfe von Ternärkörpern algebraisiert werden. Wir werden sehen, dass jede affine Ebene isomorph zu einer affinen Ebene über einem Ternärkörper ist. Mit der Addition und der Multiplikation im Ternärkörper können wir lineare Ternärkörper definieren und zeigen ihren Zusammenhang mit Doppelloops und kartesische Gruppen. Dabei folgen wir [2].

3.1 Definitionen

Definition 3.1 Sei \mathcal{K} eine nicht leere Menge und $\mathcal{T} : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ eine Abbildung. Das Paar $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ ist eine Ternärkörper, wenn folgende Axiome gelten:

T1 Es existieren $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathcal{K}$ paarweise verschieden so, dass für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ gilt
 $\mathcal{T}(\mathbf{0}, b, c) = c, \mathcal{T}(a, \mathbf{0}, c) = c, \mathcal{T}(a, \mathbf{1}, \mathbf{0}) = a, \mathcal{T}(\mathbf{1}, b, \mathbf{0}) = b.$

T2 Für alle $a, b, d \in \mathcal{K}$ gilt

$$\exists! x \in \mathcal{K} : \mathcal{T}(a, b, x) = d.$$

T3 Für alle $a, b, a', b' \in \mathcal{K}$ mit $a \neq a'$ gilt

$$\exists! (x, y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} : \mathcal{T}(a, y, x) = b \text{ und } \mathcal{T}(a', y, x) = b'.$$

T4 Für alle $x, y, x', y' \in \mathcal{K}$ mit $y \neq y'$ gilt

$$\exists! a \in \mathcal{K} : \mathcal{T}(a, y, x) = \mathcal{T}(a, y', x').$$

Bemerkung 3.2 Die Elemente $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ nennen wir das Null- beziehungsweise das Einselement von \mathcal{K} .

Beispiel 3.3 Die reellen Zahlen \mathbb{R} und die Abbildung $\mathcal{T}(a, b, c) = a * b + c$ sind ein Ternärkörper. Dabei ist die Addition und die Multiplikation wie in \mathbb{R} . Weiter ist $0 \in \mathbb{R}$ das Nullelement und $1 \in \mathbb{R}$ das Einselement. Die Axiome T1, T2, T3, T4 lassen sich durch direktes Rechnen verifizieren.

3.2 Affine Ebenen über Ternärkörpern

Die Eigenschaften der Ternärkörper sind so gewählt, dass wir aus ihnen affine Ebenen konstruieren können.

Definition 3.4 Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ ein Ternärkörper. Wir bezeichnen mit der affinen Koordinatenebene über \mathcal{K} das Inzidenzsystem $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$. Dabei sind

$$\mathcal{B} = \mathcal{K} \times \mathcal{K},$$

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{g}(a, b) \mid a, b \in \mathcal{K}\} \cup \{\mathbf{g}(c) \mid c \in \mathcal{K}\}$$

mit

$$\mathbf{g}(a, b) = \{(x, y) \in \mathcal{K}^2 \mid \mathcal{T}(a, y, x) = b\}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{g}(c) = \{(x, y) \in \mathcal{K}^2 \mid y = c\}. \quad (3.2)$$

Ein Punkt $P \in \mathcal{B}$ inzidiert mit einer Gerade $g \in \mathcal{G}$, falls $P \in g$.

Für einen Ternärkörper $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ gelten folgende Eigenschaften.

Lemma 3.5 Jede Gerade in $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ hat mindestens zwei paarweise verschiedene Punkte.

Beweis Nach Axiom T1 existieren $\mathbf{0} \neq \mathbf{1} \in \mathcal{K}$. Sei nun $g \in \mathcal{G}$.

Falls $g = \mathbf{g}(c)$ für ein $c \in \mathcal{K}$, dann gilt $(\mathbf{0}, c) \neq (\mathbf{1}, c) \in g$ wie aus Gleichung 3.2.

Falls $g = \mathbf{g}(a, b)$ für $a, b \in \mathcal{K}$, dann hat g die Form aus (3.1). Weiter existieren nach Axiom T2 ein $s \in \mathcal{K}$ mit $\mathcal{T}(a, \mathbf{1}, s) = b$. Wir erhalten $(b, \mathbf{0}) \neq (s, \mathbf{1}) \in g$, da nach Axiom T1 gilt $\mathcal{T}(a, \mathbf{0}, b) = b$. \square

Lemma 3.6 Für die Geraden in $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ gelten folgende Eigenschaften.

- i) Für alle $c, c' \in \mathcal{K}$ gilt $\mathbf{g}(c) \parallel \mathbf{g}(c')$.
- ii) Für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ gilt $\mathbf{g}(a, b) \nparallel \mathbf{g}(c)$.
- iii) Für alle $a, b, a', b' \in \mathcal{K}$ gilt $\mathbf{g}(a, b) \parallel \mathbf{g}(a', b')$ genau dann, wenn $a = a'$.

Beweis i) Seien $c, c' \in \mathcal{K}$ und angenommen es existiert ein Punkt $(x, y) \in \mathcal{B}$ mit $(x, y) \in \mathbf{g}(c), \mathbf{g}(c')$. Dann folgt aus der Definition von $\mathbf{g}(c)$, dass die Gleichung $c = y = c'$ und somit $\mathbf{g}(c) = \mathbf{g}(c')$ gilt. Also haben wir gezeigt, dass $\mathbf{g}(c) \parallel \mathbf{g}(c')$ für alle $c, c' \in \mathcal{K}$.

ii) Seien $a, b, c \in \mathcal{K}$ und angenommen es existiert ein Punkt $(x, y) \in \mathcal{B}$ mit $(x, y) \in \mathbf{g}(a, b)$ sowie $(x, y) \in \mathbf{g}(c)$. Dann folgt aus der Definition von $\mathbf{g}(a, b)$ und $\mathbf{g}(c)$, dass $\mathcal{T}(a, y, x) = b$ und $y = c$ gelten. Nach Axiom T2 existiert ein eindeutiges $x \in \mathcal{K}$ mit $\mathcal{T}(a, c, x) = b$ und somit gilt $(x, c) \in \mathbf{g}(a, b)$ sowie $(x, c) \in \mathbf{g}(c)$. Da aber dieses x eindeutig ist, gibt es neben (x, c) keinen

weiteren Punkt in \mathcal{B} , welcher gleichzeitig auf $\mathbf{g}(a, b)$ und $\mathbf{g}(c)$ liegt. Nach Lemma 3.5 ist auf $\mathbf{g}(a, b)$ ein zweiter Punkt ungleich (x, c) und wir folgern daraus $\mathbf{g}(a, b) \neq \mathbf{g}(c)$. Schlussendlich folgt $\mathbf{g}(a, b) \nparallel \mathbf{g}(c)$.

iii) Seien $a, b, a', b' \in \mathcal{K}$. Angenommen $a = a'$ und es existiert ein Punkt $(x, y) \in \mathcal{B}$ mit $(x, y) \in \mathbf{g}(a, b)$ sowie $(x, y) \in \mathbf{g}(a', b')$. Dann gilt

$$b = \mathcal{T}(a, y, x) = \mathcal{T}(a', x, y) = b'$$

und wir erhalten $\mathbf{g}(a, b) = \mathbf{g}(a', b')$. Daraus folgt $\mathbf{g}(a, b) \parallel \mathbf{g}(a', b')$.

Für die andere Richtung nehmen wir $a \neq a'$ an. Nach Axiom T3 existiert ein eindeutiges $(x, y) \in \mathcal{B}$ mit

$$\mathcal{T}(a, y, x) = b \text{ und } \mathcal{T}(a', y, x) = b'$$

Dies ist gleichbedeutend mit $(x, y) \in \mathbf{g}(a, b)$ und $(x, y) \in \mathbf{g}(a', b')$. Wegen der Eindeutigkeit von (x, y) kann es keinen weiteren Punkt in \mathcal{B} geben, welcher gleichzeitig auf beiden Geraden $\mathbf{g}(a, b)$ und $\mathbf{g}(a', b')$ liegt. Da nach Lemma 3.5 ein weiterer Punkt auf $\mathbf{g}(a, b)$ liegt, gilt $\mathbf{g}(a, b) \neq \mathbf{g}(a', b')$. Somit erhalten wir $\mathbf{g}(a, b) \nparallel \mathbf{g}(a', b')$. \square

Nun können wir zeigen, dass $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ wirklich eine affine Ebene ist.

Satz 3.7 Für einen Ternärkörper $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ ist $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathbf{I})$ eine affine Ebene.

Beweis Wir müssen die drei Axiome A1, A2, A3 nachweisen.

A1: Seien $(x, y), (x', y') \in \mathcal{B}$ paarweise verschieden. Falls $y \neq y'$, dann können (x, y) und (x', y') nicht auf einer Gerade der Form $\mathbf{g}(c)$ liegen. Denn sonst gilt $y = y'$. Aus Axiom T4 folgt,

$$\exists! a \in \mathcal{K} : \mathcal{T}(a, y, x) = \mathcal{T}(a, y', x').$$

Somit gilt für $b = \mathcal{T}(a, y, x)$, dass $(x, y), (x', y')$ auf $\mathbf{g}(a, b)$ liegen. Da a eindeutig ist, gibt es keine weitere Gerade die durch (x, y) und (x', y') geht.

Falls nun $y = y'$ gilt, dann liegen (x, y) und (x', y') auf $\mathbf{g}(y)$. Angenommen $(x, y), (x', y') \in \mathbf{g}(a, b)$ für $a, b \in \mathcal{K}$, dann gilt

$$\mathcal{T}(a, y, x) = b = \mathcal{T}(a, y', x').$$

Aus $y = y'$ und Axiom T2 folgern wir $x = x'$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und belegt die Eindeutigkeit der Gerade $\mathbf{g}(y)$.

A2: Seien nun $(x, y) \in \mathcal{B}$ und $g \in \mathcal{G}$. Falls $g = \mathbf{g}(c)$ für ein $c \in \mathcal{K}$, dann gilt $(x, y) \in \mathbf{g}(y)$ und $g = \mathbf{g}(c) \parallel \mathbf{g}(y)$ nach Lemma 3.6. Da (x, y) nicht auf einer weiteren Gerade der Form $\mathbf{g}(y')$ liegen kann und mit Lemma 3.6 gilt $g = \mathbf{g}(c) \nparallel \mathbf{g}(a, b)$ für alle $a, b \in \mathcal{K}$, ist $\mathbf{g}(y)$ die eindeutige Parallel zu g durch (x, y) .

Sei nun $g = \mathbf{g}(a, b)$ für $a, b \in \mathcal{K}$. Die Gerade $\mathbf{g}(a, b')$ mit $b' = \mathcal{T}(a, y, x)$ ist nach Lemma 3.6 parallel zu $\mathbf{g}(a, b)$ und der Punkt (x, y) liegt auf der Gerade $\mathbf{g}(a, b')$. Da b' eindeutig definiert ist und mit Lemma 3.6 folgt die Eindeutigkeit von $\mathbf{g}(a, b')$.

A3: Die drei Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 0)$ sind nicht kollinear, da $\mathbf{g}(0)$ die eindeutige Gerade durch $(0, 0)$ und $(1, 0)$ ist, aber $(1, 0)$ nicht auf $\mathbf{g}(0)$ liegt. \square

3.3 Ternärkörper über affinen Ebenen

Umgekehrt können wir Ternärkörper aus affinen Ebenen konstruieren.

Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ eine affine Ebene und fixiere drei nicht kollineare Punkte $0, 1, 1' \in \mathcal{B}$. Die Punkte $0, 1, 1'$ nennen wir die *Basis von \mathcal{A}* . Wir bezeichnen die Gerade $\overline{01}$ als *x-Achse*, kurz auch nur \mathbf{x} , die entsprechende Richtung als *x-Richtung* und ihre Geraden als *x-Geraden*. Analog definieren wir die Begriffe *y-Achse*, \mathbf{y} , *y-Richtung*, *y-Geraden* mit der Gerade $\overline{01'}$.

Ferner sei \mathcal{K} die Menge aller Punkte auf der \mathbf{x} -Achse. Nach Bemerkung 1.3 gilt also $\mathcal{K} = \overline{01}$.

Für die Punkte A, B, C auf der \mathbf{x} -Achse definieren wir den Punkt $\mathcal{T}(A, B, C)$ wie folgt. Siehe Abbildung 3.1.

- Konstruiere B' auf der \mathbf{y} -Achse so, dass $\overline{BB'} \parallel \overline{11'}$.
- Konstruiere P in \mathcal{B} so, dass $\overline{B'P}$ parallel zur \mathbf{x} -Achse und \overline{CP} parallel zur \mathbf{y} -Achse ist.
- Konstruiere $\mathcal{T}(A, B, C)$ auf der \mathbf{x} -Achse so, dass $\overline{\mathcal{T}(A, B, C)P} \parallel \overline{A1'}$.

Die obige Abbildung $T : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ mit $(A, B, C) \mapsto \mathcal{T}(A, B, C)$ nennen wir die *Ternärverknüpfung von \mathcal{A} mit Basis $0, 1, 1'$* .

Definition 3.8 Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ eine affine Ebene mit Basis $0, 1, 1' \in \mathcal{G}$. Der Ternärkörper über \mathcal{A} mit Basis $0, 1, 1'$ bezeichnet das Tupel $\mathcal{K}(\mathcal{A}; 0, 1, 1') = (\mathcal{K}, \mathcal{T})$, wobei \mathcal{K} die \mathbf{x} -Achse und \mathcal{T} die Ternärverknüpfung ist.

Falls die Basis nicht relevant ist, dann schreiben wir für $\mathcal{K}(\mathcal{A}; 0, 1, 1')$ auch nur $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Wir möchten nun beweisen, dass der Ternärkörper über \mathcal{A} , wirklich ein Ternärkörper ist. Dafür zeigen wir zuerst, dass es zwischen \mathcal{A} und $\mathcal{A}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$ einen Isomorphismus gibt. Das heisst, es existiert eine Bijektion der Punkte von \mathcal{A} zu den Punkten von $\mathcal{A}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$, welche die Geraden und die Inzidenzen erhalten.

Sei $\mathcal{A}' = \mathcal{A}(\mathcal{K}(\mathcal{A})) = (\mathcal{B}', \mathcal{G}', \mathcal{I}')$ das Inzidenzsystem, welches wir aus dem Ternärkörper über der affinen Ebene \mathcal{A} erhalten.

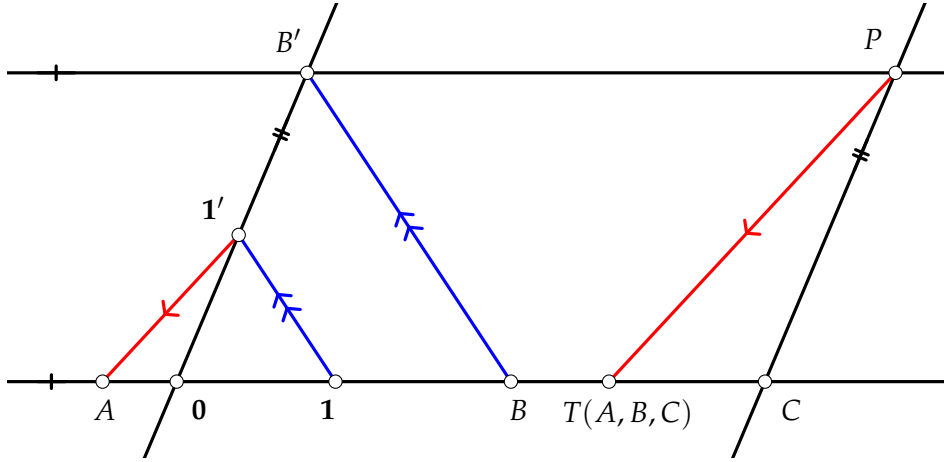


Abbildung 3.1: Definition der Ternärverknüpfung

Nach der Definition von affinen Ebenen über Ternärkörpern sind die Punkte und Geraden in \mathcal{A}' von der Form

$$\mathcal{B}' = \mathcal{K} \times \mathcal{K},$$

$$\mathcal{G}' = \{\mathbf{g}(A, B) \mid A, B \in \mathcal{K}\} \cup \{\mathbf{g}(C) \mid C \in \mathcal{K}\}$$

mit

$$\mathbf{g}(A, B) = \{(X, Y) \in \mathcal{K}^2 \mid \mathcal{T}(A, Y, X) = B\}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{g}(C) = \{(X, Y) \in \mathcal{K}^2 \mid Y = C\}. \quad (3.4)$$

Das heisst, wir suchen eine Bijektion, welche \mathcal{B} auf \mathcal{B}' und gleichzeitig die Geraden \mathcal{G} auf \mathcal{G}' abbildet. Wir betrachten die Geraden als Menge von Punkten und können die Bijektion auf ihre Elemente anwenden.

Wir definieren nun $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ mit $P \mapsto \varphi(P) = (X, Y)$, wobei X, Y auf der x -Achse liegen so, dass

- \overline{PX} parallel zur y -Achse ist,
- $\overline{PY'}$ parallel zur x -Achse ist,
- $\overline{YY'}$ parallel zur Gerade $\overline{11'}$ ist.

In Abbildung 3.2a sieht man die Konstruktion von $\varphi(P)$. Zudem bemerken wir, dass φ eine Bijektion ist. Denn die Konstruktion von φ ist umkehrbar.

Lemma 3.9 Die Abbildung φ ist ein Isomorphismus zwischen \mathcal{A} und \mathcal{A}' .

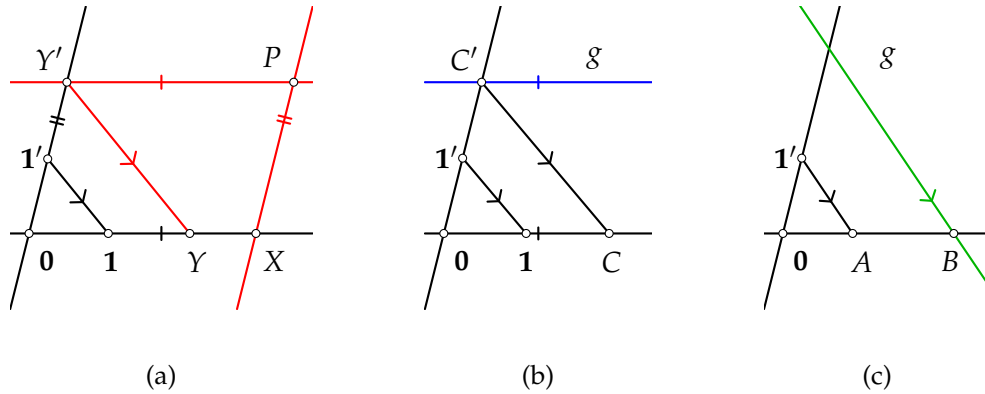


Abbildung 3.2: Für die Funktion φ gelten die Gleichungen (a) $\varphi(P) = (X, Y)$, (b) $\varphi(g) = \mathbf{g}(C)$, (c) $\varphi(g) = \mathbf{g}(A, B)$.

Beweis Wir haben bereits gesehen, dass φ eine Bijektion zwischen \mathcal{B} und \mathcal{B}' ist.

Sei nun $g \in \mathcal{G}$ eine Gerade. Falls g eine \mathbf{x} -Gerade ist, dann können wir C' den Schnittpunkt von g mit der \mathbf{y} -Achse und C den Schnittpunkt der Parallele zu $\overline{11'}$ durch C' mit der \mathbf{x} -Achse konstruieren. Siehe Abbildung 3.2b.

Dann gilt nach der Definition von φ

$$P \in g \Leftrightarrow \varphi(P) = (X, Y) \text{ mit } Y = C$$

und wir erhalten

$$\varphi(g) = \{\varphi(P) \mid P \in g\} = \{(X, Y) \in \mathcal{K}^2 \mid Y = C\} = \mathbf{g}(C).$$

Falls nun g keine \mathbf{x} -Gerade ist, dann sei B der Schnittpunkt von g mit der \mathbf{x} -Achse und A auf der \mathbf{x} -Achse mit $\overline{1'A} \parallel g$. Siehe Abbildung 3.2c.

Offenbar gilt nach der Definition der Ternärverknüpfung \mathcal{T} und φ

$$P \in g \Leftrightarrow \mathcal{T}(A, Y, X) = B \text{ mit } \varphi(P) = (X, Y)$$

und wir erhalten

$$\varphi(g) = \{\varphi(P) \mid P \in g\} = \{(X, Y) \in \mathcal{K}^2 \mid \mathcal{T}(A, Y, X) = B\} = \mathbf{g}(A, B).$$

Zudem folgt aus der Eindeutigkeit dieser Konstruktionen, dass φ auch für die Geraden injektiv ist. Weiter gibt es für alle $C \in \mathcal{K}$ ein $g \in \mathcal{G}$ mit $\varphi(g) = \mathbf{g}(C)$ und für alle $A, B \in \mathcal{K}$ ein $g \in \mathcal{G}$ mit $\varphi(g) = \mathbf{g}(A, B)$. Somit ist φ für die Geraden surjektiv, insbesondere bijektiv.

Die Abbildung φ ist nun ein Isomorphismus zwischen \mathcal{A} und \mathcal{A}' , da für alle $P \in \mathcal{B}$ und $g \in \mathcal{G}$ gilt,

$$P \in g \Leftrightarrow \varphi(P) \in \varphi(g). \quad \square$$

Nun können wir zeigen, dass $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ wirklich ein Ternärkörper ist.

Satz 3.10 *Der Ternärkörper über einer affinen Ebene ist ein Ternärkörper.*

Beweis Wir müssen zeigen, dass die Axiome $T1, T2, T3, T4$ gelten. Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ der Ternärkörper über \mathcal{A} .

$T1$: $0, 1 \in \mathcal{K}$ erfüllen nach der Definition der Ternärverknüpfung \mathcal{T} alle gewünschten Eigenschaften.

$T2$: Seien $A, B, D \in \mathcal{K}$. Die Geraden $\mathbf{g}(A, D)$ und $\mathbf{g}(B)$ schneiden sich in einem eindeutigen Punkt (X, Y) , da \mathcal{A}' nach Lemma 3.9 eine affine Ebene ist. Die Geraden $\mathbf{g}(A, D)$ und $\mathbf{g}(B)$ können nicht parallel sein, da ihre Urbilder nicht parallel sind. Somit gilt

$$\mathcal{T}(A, Y, X) = D \text{ und } Y = B.$$

Wir erhalten $\mathcal{T}(A, B, X) = D$. Die Eindeutigkeit von X folgt aus der Eindeutigkeit von (X, Y) .

$T3$: Seien $A, B, A', B' \in \mathcal{K}$ und $A \neq A'$. Die Geraden $\mathbf{g}(A, B)$ und $\mathbf{g}(A', B')$ sind nicht parallel, denn aus $A \neq A'$ folgt, dass ihre Urbilder nicht parallel sein können. Somit schneiden sich die Geraden $\mathbf{g}(A, B)$ und $\mathbf{g}(A', B')$ in einem eindeutigen Punkt (X, Y) und wir erhalten

$$\mathcal{T}(A, Y, X) = B \text{ und } \mathcal{T}(A', Y, X) = B'.$$

$T4$: Seien $X, Y, X', Y' \in \mathcal{K}$ und $Y \neq Y'$. Die Punkte (X, Y) und (X', Y') können nicht auf einer Gerade der Form $\mathbf{g}(C)$ liegen, da $Y \neq Y'$. Somit existieren eindeutige $A, B \in \mathcal{K}$ so, dass die Gerade $\mathbf{g}(A, B)$ durch die Punkte (X, Y) und (X', Y') gehen. Daraus folgt:

$$\mathcal{T}(A, Y, X) = B = \mathcal{T}(A, Y', X') \quad \square$$

Nun haben wir folgendes Korollar gezeigt.

Korollar 3.11 *Affine Ebenen sind bis auf Isomorphie affine Ebenen über Ternärkörpern.*

Bemerkung 3.12 *Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{A}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$ isomorph zu \mathcal{A} ist. Es gilt auch, dass für ein $\mathcal{K}(\mathcal{A}(\mathcal{K}); (0, 0), (0, 1), (1, 0))$ isomorph zu \mathcal{K} ist. Für eine affine Ebene \mathcal{A} und zwei unterschiedlichen Basen müssen aber die Ternärkörper nicht isomorph sein.*

3.4 Doopelloops und kartesische Gruppen

Für einen Ternärkörper $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ lassen sich zwei Operationen definieren.

$$+ : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}, \quad a + b \mapsto \mathcal{T}(a, \mathbf{1}, b) \quad (3.5)$$

$$* : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}, \quad a * b \mapsto \mathcal{T}(a, b, \mathbf{0}) \quad (3.6)$$

Die Verknüpfung (3.5) wird *Addition* und (3.6) *Multiplikation* genannt.

Definition 3.13 Eine Ternärkörper $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ ist linear, falls für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ gilt

$$\mathcal{T}(a, b, c) = \mathcal{T}(\mathcal{T}(a, b, \mathbf{0}), \mathbf{1}, c) = a * b + c. \quad (3.7)$$

Wie bei den reellen Zahlen, \mathbb{R} , üblich schreiben wir anstatt $(a * b) + c$ nur $a * b + c$.

In \mathbb{R} bilden die Addition und Multiplikation mit \mathbb{R} beziehungsweise $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ Gruppen. Bei Ternärkörpern muss dies nicht der Fall sein. Wir werden aber sehen, dass sie Loops ergeben.

Definition 3.14 Sei \mathcal{L} eine nicht-leere Menge und $\circ : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}; (a, b) \mapsto a \circ b$ eine binäre Verknüpfung. (\mathcal{L}, \circ) ist ein Loop, falls folgende Axiome gelten:

L1 Für alle $a, b \in \mathcal{L}$ existieren eindeutige $x, y \in \mathcal{L}$ mit $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$.

L2 Es existiert ein $e \in \mathcal{L}$ mit $\forall a \in \mathcal{L} : a \circ e = e \circ a = a$.

Nach dem Axiom L1 ist das neutrale Element aus Axiom L2 eindeutig.

Bemerkung 3.15 Falls die Verknüpfung \circ assoziativ ist, also für alle $a, b, c \in \mathcal{L}$ gilt $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, dann ist (\mathcal{L}, \circ) eine Gruppe mit neutralem Element e . Denn alle Elemente $a \in \mathcal{L}$ haben ein eindeutiges beidseitiges Inverses. Nach Axiom L1 gilt

$$\exists! x, y \in \mathcal{L} : a \circ x = e \text{ und } y \circ a = e.$$

Mit Axiom L2 und der Assoziativität folgt nun

$$y = y \circ e = y \circ (a \circ x) = (y \circ a) \circ x = e \circ x = x.$$

Wir zeigen nun, dass Addition und Multiplikation mit \mathcal{K} beziehungsweise $\mathcal{K} \setminus \{0\}$ Loops sind.

Lemma 3.16 Für einen Ternärkörper $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ sind $(\mathcal{K}, +)$ und $(\mathcal{K} \setminus \{0\}, *)$ Loops.

Beweis Wir beweisen zuerst, dass $(\mathcal{K}, +)$ ein Loop ist.

L1: Seien $a, b \in \mathcal{K}$, dann existiert nach Axiom T2 ein eindeutiges $x \in \mathcal{K}$ mit $b = \mathcal{T}(a, \mathbf{1}, x) = a + x$. Aus $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ folgt, dass nach Axiom T4 ein eindeutiges $y \in \mathcal{K}$ existiert mit

$$y + a = \mathcal{T}(y, \mathbf{1}, a) = \mathcal{T}(y, \mathbf{0}, b) = b.$$

L2: Aus Axiom T1 folgt direkt, dass $\mathbf{0} \in \mathcal{K}$ das Axiom L2 erfüllt.

Es bleibt zu zeigen, dass $(\mathcal{K} \setminus \{\mathbf{0}\}, *)$ ein Loop ist.

L1: Seien $a, b \in \mathcal{K} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dann gilt $a \neq \mathbf{0}$ und nach Axiom T4 existiert ein eindeutiges $y \in \mathcal{K}$ mit

$$y * a = \mathcal{T}(y, a, \mathbf{0}) = \mathcal{T}(y, \mathbf{0}, b) = b.$$

Zudem ist $y = \mathbf{0}$, da sonst aus Axiom T1 die Gleichung $b = \mathcal{T}(y, a, \mathbf{0}) = \mathcal{T}(\mathbf{0}, a, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ folgt. Nach Axiom T3 existiert ein eindeutiges $(x, y') \in \mathcal{K}^2$ mit $\mathcal{T}(a, x, y') = b$ und $\mathcal{T}(\mathbf{0}, x, y') = \mathbf{0}$. Nun muss aber $y' = \mathbf{0}$ sein und wir erhalten

$$a * x = \mathcal{T}(a, x, \mathbf{0}) = \mathcal{T}(a, x, y') = b.$$

L2: Nach Axiom T1 erfüllt $\mathbf{1}$ die gewünschte Eigenschaft von Axiom L1. \square

Lineare Ternärkörper können wir nun mit Hilfe von Doopelloops beschreiben.

Definition 3.17 Sei \mathcal{K} eine nicht leere Menge und $+, *$ zwei binäre Verknüpfungen von \mathcal{K} . Wir nennen das Tripel $(\mathcal{K}, +, *)$ einen Doopelloop falls folgende Axiome gelten:

K1 Das Paar $(\mathcal{K}, +)$ ist ein Loop mit neutralem Element $\mathbf{0}$.

K2 Das Paar $(\mathcal{K} \setminus \{\mathbf{0}\}, *)$ ist ein Loop mit neutralem Element $\mathbf{1}$.

K3 Für alle $a \in \mathcal{K}$ gilt $a * \mathbf{0} = \mathbf{0} * a = \mathbf{0}$.

K4 Für alle $a, b, a', b' \in \mathcal{K}$ mit $a \neq a'$ existiert ein eindeutiges $(x, y) \in \mathcal{K}^2$ mit $a * y + x = b$ und $a' * y + x = b'$.

K5 Für alle $x, y, x', y' \in \mathcal{K}$ mit $y \neq y'$ existiert ein eindeutiges $a \in \mathcal{K}$ mit $a * y + x = a * y' + x'$.

Satz 3.18 Für einen linearen Ternärkörper $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ ist $(\mathcal{K}, +, *)$ ein Doopelloop.

Beweis Nach Lemma 3.16 sind Axiome K1 und K2 erfüllt. Die Axiome K3, K4, K5 folgen mit der Linearität von $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ direkt aus den Axiomen T2, T3, T4. \square

In die andere Richtung können wir aus einem Doopelloop einen linearen Ternärkörper konstruieren.

Satz 3.19 Für einen Doopelloop $(\mathcal{K}, +, *)$ und die Abbildung,

$$\mathcal{T}(a, b, c) = a * b + c,$$

ist $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ ein linearer Ternärkörper.

Beweis \mathcal{T} ist offensichtlich linear. Aus den Axiomen $K1, K2, K3$ folgt $T1$. Weiter folgen aus den Axiomen $K2, K4, K5$ die Axiome $T2, T3, T4$. \square

Als nächstes verlangen wir die Assoziativität der Addition.

Definition 3.20 Wir nennen einen Doppelloop $(\mathcal{K}, +, *)$ eine kartesische Gruppe, falls für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ gilt

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Bemerkung 3.21 Für eine kartesische Gruppe $(\mathcal{K}, +, *)$ ist der Loop $(\mathcal{K}, +)$ assoziativ und nach Bemerkung 3.15 eine Gruppe. Wir können also für ein $a \in \mathcal{K}$ das Inverse Element mit $-a$ bezeichnen und schreiben anstelle $a + (-b)$ nur $a - b$.

Die Axiome $K1$ bis $K5$ geben uns nun ein neues Axiomensystem für kartesische Gruppen.

- C1 Das Paar $(\mathcal{K}, +)$ ist ein Gruppe mit neutralem Element $\mathbf{0}$.
- C2 Das Paar $(\mathcal{K} \setminus \{\mathbf{0}\}, *)$ ist ein Loop mit neutralem Element $\mathbf{1}$.
- C3 Für alle $a \in \mathcal{K}$ gilt $a * \mathbf{0} = \mathbf{0} * a = \mathbf{0}$.
- C4 Für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ mit $a \neq b$ existiert ein eindeutiges $y \in \mathcal{K}$ mit $a * y - b * y = c$.
- C5 Für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ mit $a \neq b$ existiert ein eindeutiges $x \in \mathcal{K}$ mit $-x * a + x * b = c$.

Beispiel 3.22 Wir können für die reellen Zahlen \mathbb{R} eine neue Multiplikation definieren. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \otimes b = \begin{cases} \frac{1}{2}ab & a, b < 0 \\ ab & \text{sonst} \end{cases}.$$

Das Tripel $(\mathbb{R}, +, \otimes)$ ist eine kartesische Gruppe. Dies kann man durch Rechnen zeigen.

Wenn wir nun $\mathcal{A}((\mathbb{R}, +, \otimes))$ konstruieren, dann erhalten wir die Moulton-Ebene aus Beispiel 1.7. Dies zusammen mit dem Satz 4.12 aus dem nächsten Kapitel beweist, dass in der Moulton-Ebene (d) und somit auch (p) , (s) in Richtung der X -Achse gelten.

Kapitel 4

Affine Ebenen über Doppelloops und kartesischen Gruppen

Im letzten Kapitel haben wir die Addition, Multiplikation und Linearität der Ternärkörper kennengelernt. Wir untersuchen nun diese algebraische Eigenschaften und werden diese geometrisch beschreiben. Es wird sich herausstellen, dass der Scherensatz und der Satz von Pappos-Pascal eng mit Assoziativ- respektive dem Kommutativgesetz der Addition verbunden sind. Weiter werden wir affine Ebenen über Doppelloops und kartesischen Gruppen charakterisieren. Schlussendlich sehen wir, dass die Existenz einer nicht-kommutativen kartesischen Gruppe eine affine Ebene definiert, in der in eine Richtung (d) , nicht aber (p) gilt.

Dieses Kapitel folgt dem Stufenaufbau der affinen Ebenen aus [2].

4.1 Parallelprojektionen

Bevor wir affine Ebenen über Doppelloops und kartesischen Gruppen untersuchen, führen wir das Konzept der Parallelprojektionen ein. Dies erleichtert uns den Umgang mit den algebraischen und geometrischen Eigenschaften.

Definition 4.1 ¹ Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, I)$ eine affine Ebene und $x, y, z \in \mathcal{G}$ paarweise verschieden mit $x \not\parallel y$ und $z \not\parallel y$. Dann definieren wir die Abbildung $\varphi_{zyx} : x \rightarrow z$ so, dass

$$P \in x \mapsto \varphi_{zyx}(P) = Q \in, \text{ wobei } \overline{PQ} \parallel y.$$

Wir nennen φ_{zyx} die Parallelprojektion von x nach z in y -Richtung. In Abbildung 4.1a ist φ_{zyx} dargestellt.

¹Lingenberg benutzt in [2] die Notation φ_{xyz} für φ_{zyx} . Wir haben diese Notation angepasst, da so der Definitions- und Zielbereich besser ersichtlich sind. So ist z.B. die Funktion $\varphi_{zhy} \circ \varphi_{ygz}$ eine wohldefinierte Abbildung von x nach z .

Bemerkung 4.2 Die Parallelprojektion φ_{zyx} ist eine Bijektion mit der inversen Abbildung $\varphi_{zyx}^{-1} = \varphi_{xyz}$. Denn es gilt $\varphi_{xyz} \circ \varphi_{zyx} = \text{id}_x$ und $\varphi_{zyx} \circ \varphi_{xyz} = \text{id}_z$. Dabei ist id_x, id_y die Identitätsabbildung auf x beziehungsweise y .

Wenn wir die Verknüpfung von $\varphi_{z'y'z}$ mit φ_{zyx} betrachten, dann folgt aus der Definition direkt $\varphi_{z'y'z} \circ \varphi_{zyx} = \varphi_{z'y'x}$.

Zudem gilt $\varphi_{xyz} = \varphi_{zy'x}$ genau dann, wenn $y \parallel y'$.

Als nächstes betrachten wir Parallelprojektionen zwischen parallelen Geraden. Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathbf{I})$ eine affine Ebene und $x, y, z \in \mathcal{G}$ paarweise verschieden mit $x \parallel z$ und $x \nparallel y$. Wir definieren die Menge

$$T_{xyz} = \{\varphi_{xsx} \circ \varphi_{zyx} \mid s \in \mathcal{G}\}. \quad (4.1)$$

Nach der Bemerkung 4.2 folgt direkt $\text{id}_x \in T_{xyz}$.

Lemma 4.3 Für $P, R \in x$ gibt es genau ein $\tau \in T_{xyz}$ mit $\tau(P) = R$.

Beweis Seien $Q = \varphi_{zyx}(P)$ und $s = \overline{QR}$, dann gilt $\varphi_{xsx}(\varphi_{zyx}(P)) = R$. Siehe Abbildung 4.1b. Somit hat $\tau = \varphi_{xsx} \circ \varphi_{zyx} \in T_{xyz}$ die gewünschte Eigenschaft. Falls es ein weiteres $s' \in \mathcal{G}$ gibt mit $\varphi_{xs's'}(\varphi_{zyx}(P)) = R$, dann folgt $s \parallel s'$ und $\varphi_{xsx} = \varphi_{xs's'}$. Somit ist τ eindeutig. \square

Bemerkung 4.4 Der Eigenschaft aus Lemma 4.3 sagen wir, dass die Menge T_{xyz} einfach linear transitiv auf x ist.

Die Elemente von T_{xyz} sind also Bijektionen auf der Menge x und somit gilt $T_{xyz} \subseteq \text{Sym}(x)$. Dabei ist $\text{Sym}(x)$ die Symmetriegruppe von x . Die Menge T_{xyz} ist aber im Allgemeinen keine Untergruppe von $\text{Sym}(x)$ und wir können aus $\tau, \tau' \in T_{xyz}$ nicht folgern, dass $\tau \circ \tau'$ in T_{xyz} ist.

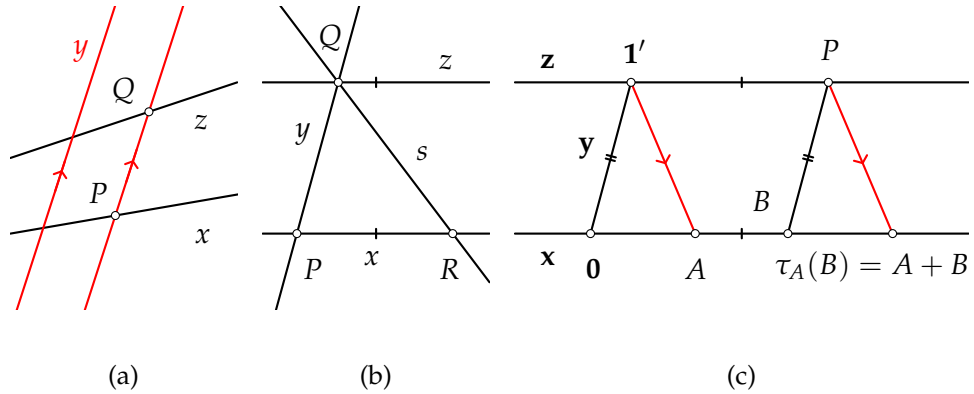


Abbildung 4.1: Die Addition in einem Ternärkörper können mit Parallelprojektionen ausgedrückt werden.

Bemerkung 4.5 Falls aber $T_{xyz} \subseteq \text{Sym}(x)$ abgeschlossen ist unter \circ , das heisst für alle $\tau, \tau' \in T_{xyz}$ gilt $\tau \circ \tau' \in T_{xyz}$, dann ist (T_{xyz}, \circ) eine Untergruppe von $\text{Sym}(x)$. Um dies zu sehen, müssen wir zeigen, dass für jedes Element in T_{xyz} das Inverse Element auch in T_{xyz} ist.

Sei $\tau \in T_{xyz}$ beliebig, $P \in x$ und $R = \tau(P)$. Nach Lemma 4.3 existiert ein eindeutiges $\tau' \in T_{xyz}$ mit $\tau'(R) = P$. Nun gilt

$$\begin{aligned} (\tau' \circ \tau)(P) &= \tau'(\tau(P)) = P, & \tau' \circ \tau &\in T_{xyz}, \\ \text{id}_x(P) &= P, & \text{id}_x &\in T_{xyz}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.3 folgt direkt $\text{id}_x = \tau' \circ \tau$. Somit ist das Inverse Element von τ in T_{xyz} .

Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, I)$ eine affine Ebene mit einer Basis $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}' \in \mathcal{B}$. Wir verwenden wieder die gleiche Notation wie in Abschnitt 3.4. Bemerke, dass wir mit x, y die x -Achse respektive die y -Achse bezeichnen.

Wir betrachten nun den Ternärkörper $(\mathcal{K}, \mathcal{T}) = \mathcal{K}(\mathcal{A}; \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}')$ über \mathcal{A} . Da \mathcal{K} die Menge aller Punkte auf der x -Achse ist, ist die Ternärverknüpfung \mathcal{T} für alle Punkte $A, B, C \in x$ wohldefiniert. Wir können also die Punkte $\mathcal{T}(A, B, C)$, $A + B$ und $A * B$ konstruieren. Die Konstruktion der Ternärverknüpfung wurde in Abbildung 3.1 dargestellt.

Weiter bezeichnen wir mit z die x -Gerade durch $\mathbf{1}'$. Nun können wir die Addition mit den Elementen aus T_{xyz} beschreiben. Nach Lemma 4.3 gibt es für alle $A \in x$ genau ein $\tau \in T_{xyz}$ mit $\tau(\mathbf{0}) = A$. Wir bezeichnen dieses τ mit τ_A . Die Addition von $A, B \in x$ ist nun genau

$$A + B = \tau_A(B) = \tau_A(\tau_B(\mathbf{0})). \quad (4.2)$$

Dies folgt direkt aus der Definition der Ternärverknüpfung und der Addition. In Abbildung 4.1c ist die Addition mit Hilfe von Parallelprojektionen dargestellt.

4.2 Affine Ebenen über Doppelloops

Wir möchten nun die Eigenschaft der Linearität geometrisch untersuchen und werden zeigen, dass in einer affinen Ebene über einem Doppelloop folgende Schliessungsfigur hält.

Definition 4.6 Seien $f \in \mathcal{G}$ eine Gerade und Π eine Richtung mit $f \notin \Pi$. Wir sagen f ist linear in Richtung Π , falls für alle Geraden $g, h \in \mathcal{G}$ mit $f \parallel g \parallel h$ und f, g, h paarweise verschieden sowie für alle $A, A' \in f, B, B' \in g, C, C' \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}, \overline{BC}, \overline{B'C'} \in \Pi$ gilt $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$. Siehe Abbildung 4.2.

Bemerkung 4.7 Seien Π und Ψ zwei unterschiedliche Richtungen. Falls $(d)_\Pi$ hält, dann ist jede Gerade $f \in \Pi$ linear in Ψ -Richtung.

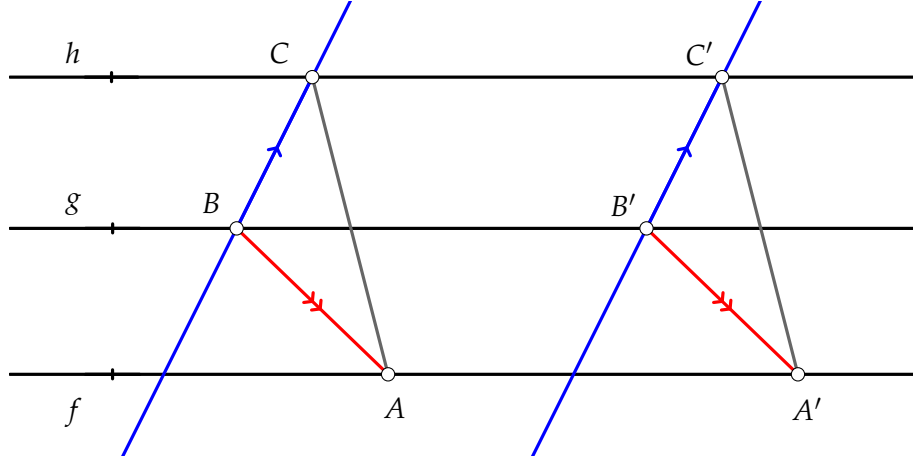


Abbildung 4.2: Falls die Geraden f linear in Richtung \overline{BC} ist, dann sind die Geraden \overline{AC} und $\overline{A'C'}$ parallel.

Satz 4.8 Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathbf{I})$ eine affine Ebene, $x \in \mathcal{G}$ und Π eine Richtung verschieden von der x -Richtung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) Es existieren $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}' \in \mathcal{B}$ paarweise verschieden mit $x = \overline{\mathbf{0}\mathbf{1}}$ und $\overline{\mathbf{0}\mathbf{1}'} \in \Pi$ so, dass $\mathcal{T}(\mathcal{A}; \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}')$ linear ist.
- ii) Für alle $y \in \Pi$ und von x verschiedenen x -Geraden z, z' gilt, $T_{xyz} = T_{xyz'}$.
- iii) Die Gerade x ist linear in Richtung Π .

Beweis Wir zeigen $i) \Rightarrow ii), ii) \Rightarrow iii), iii) \Rightarrow i)$.

$i) \Rightarrow ii)$: Sei $y = \overline{\mathbf{0}\mathbf{1}'}$, z die x -Gerade durch $\mathbf{1}'$ und z' eine von x, z verschiedene x -Gerade. Wenn wir zeigen, dass $T_{xyz} = T_{xyz'}$ folgt $ii)$. Da die Mengen $T_{xyz}, T_{xyz'}$ einfach linear transitiv sind, müssen wir nur $T_{xyz'} \subseteq T_{xyz}$ zeigen.

Sei $\tau' \in T_{xyz'}$ beliebig. Weiter sind $D = \tau'(\mathbf{0})$ und $\tau \in T_{xyz}$ mit $\tau(\mathbf{0}) = D$. Wir konstruieren $B' = z' \cap y$, $A \in x$ mit $\overline{A\mathbf{1}'} \parallel \overline{DB'}$ und $B \in x$ mit $\overline{\mathbf{1}\mathbf{1}'} \parallel \overline{BB'}$. Aus der Konstruktion von A, B folgt nun $D = \mathcal{T}(A, B, \mathbf{0}) = A * B$.

Sei $C \in x$ beliebig. Dann gelten nach Konstruktion, vergleiche mit Abbildung 4.3,

$$\tau(C) = D + C = A * B + C \quad \text{und} \quad \tau'(C) = \mathcal{T}(A, B, C).$$

Da $\mathcal{T}(\mathcal{A}; \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}')$ linear ist folgt $\tau'(C) = \tau(C)$ und wir erhalten $\tau' = \tau \in T_{xyz}$, da C beliebig war.

$ii) \Rightarrow iii)$: Seien g, h x -Geraden und x, g, h paarweise verschieden. Weiter seien $A, A' \in x$, $B, B' \in g$, $C, C' \in h$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ und $\overline{BC}, \overline{B'C'} \in \Pi$. Wir konstruieren $D = x \cap \overline{BC}$ und $D' = x \cap \overline{B'C'}$.

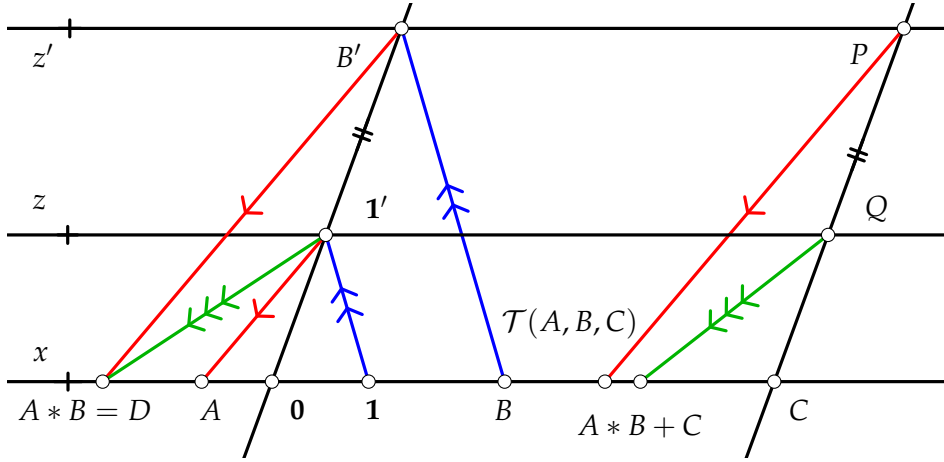


Abbildung 4.3

Dann existieren genau ein $\tau^g \in \mathcal{T}_{xyg}$ und $\tau^h \in \mathcal{T}_{xyh}$ mit $\tau^g(D) = A$ und $\tau^h(D) = A$. Da nach ii) $\mathcal{T}_{xyg} = \mathcal{T}_{xyh}$ gilt, folgt $\tau^g = \tau^h$. Weiter gilt nach Konstruktion $\tau^g(D') = A'$ und wir erhalten $\tau^h(D') = A'$. Dies beweist, dass die Geraden \overline{AC} und $\overline{A'C'}$ parallel sind.

iii) \Rightarrow i): Seien $0, 1 \in x$ paarweise verschiedene Punkte und $1' \in \mathcal{B} \setminus x$ so, dass $y = \overline{01'} \in \Pi$. Seien $A, B, C \in x$ beliebig. Konstruiere $\mathcal{T}(A, B, C)$, $A * B + C$ und bezeichne alle Punkte und Geraden aus der Konstruktion wie in der Abbildung 4.3. Da x linear in Richtung Π ist, muss die Gerade durch $\mathcal{T}(A, B, C)$ und Q parallel sein zu der Gerade $\overline{D1'}$ und ist somit auch parallel zu der Gerade durch $A * B + C$ und Q . Daraus schliessen wir $\mathcal{T}(A, B, C) = A * B + C$ und die Linearität von $\mathcal{T}(\mathcal{A}; 0, 1, 1')$, da A, B, C beliebig waren. \square

Bemerkung 4.9 Mit Bemerkung 3.12 und Satz 3.19 sehen wir, dass in einer Affinen Ebene über einem Doppelloop die x -Achse linear in y -Richtung ist.

4.3 Affine Ebenen über kartesischen Gruppen

Bei einer kartesischen Gruppe verlangen wir die Assoziativität der Addition. Wir werden sehen, dass diese eng mit (s) verbunden ist.

Satz 4.10 Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ eine affine Ebene und $x, z \in \mathcal{G}$ paarweise verschieden mit $x \parallel z$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) Es existieren $0, 1, 1' \in \mathcal{B}$ paarweise verschieden mit $x = \overline{01}$, $1' \in z$ so, dass die Addition in $\mathcal{T}(\mathcal{A}; 0, 1, 1')$ assoziativ ist.
- ii) Es existiert eine Gerade y so, dass (T_{xyz}, \circ) eine Gruppe ist.

iii) Für alle $y, y' \in \mathcal{G}$ mit $y \nparallel x$ und $x \nparallel y'$ gilt $T_{xyz} = T_{xy'z}$.

iv) Die Schliessungsfigur (s) gilt zwischen x und z .

Beweis Wir zeigen: $i) \Rightarrow ii), ii) \Rightarrow iii), iii) \Rightarrow iv), iv) \Rightarrow i)$.

$i) \Rightarrow ii)$: Sei $y = \overline{01'}$. Wir beweisen, dass $T_{xyz} \subseteq \text{Sym}(x)$ eine Untergruppe ist. Nach Bemerkung 4.5 müssen wir nur zeigen, dass T_{xyz} mit der Verknüpfung \circ abgeschlossen ist.

Seien $\tau_A, \tau_B \in T_{xyz}$, dann gilt $\tau_A(0) = A$ und $\tau_B(0) = B$. Sei $C \in x$ beliebig, dann folgt aus der Gleichung 4.2 und der Assoziativität der Addition:

$$\tau_A(\tau_B(C)) = A + (B + C) = (A + B) + C = \tau_{A+B}(C)$$

Da aber $C \in x$ beliebig war, folgt $\tau_A \circ \tau_B = \tau_{A+B} \in T_{xyz}$. Somit ist T_{xyz} unter \circ abgeschlossen.

$ii) \Rightarrow iii)$: Sei $y' \in \mathcal{G}$ und $y \nparallel x$. Wenn wir zeigen, dass $T_{xyz} = T_{xy'z}$, dann folgt $iii)$. Da T_{xyz} und $T_{xy'z}$ einfach linear transitiv auf x sind, reicht es zu zeigen, dass $T_{xy'z} \subseteq T_{xyz}$. Sei nun $\tau \in T_{xy'z}$. Dann ist $\tau = \varphi_{xsx} \circ \varphi_{zy'x}$ für ein $s \in \mathcal{G}$. Nun folgt mit der Bemerkung 4.2

$$\begin{aligned} \tau &= \varphi_{xsx} \circ \varphi_{zy'x} \\ &= \varphi_{xsx} \circ (\varphi_{zyx} \circ \varphi_{xyz}) \circ \varphi_{zy'x} \\ &= (\varphi_{xsx} \circ \varphi_{zyx}) \circ ((\varphi_{zy'x})^{-1} \circ (\varphi_{xyz})^{-1})^{-1} \\ &= \underbrace{(\varphi_{xsx} \circ \varphi_{zyx})}_{\in T_{xyz}} \circ \underbrace{(\varphi_{xy'z} \circ \varphi_{zyx})^{-1}}_{\in T_{xyz}}. \end{aligned}$$

Da (T_{xyz}, \circ) eine Gruppe ist, folgt $\tau \in T_{xyz}$.

$iii) \Rightarrow iv)$: Seien die Punkte $A, A', C, C' \in z$ und $B, B', D, D' \in x$ so, dass gilt $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}, \overline{BC} \parallel \overline{B'C'}, \overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$. Weiter seien $a = \overline{AB}, b = \overline{BC}, c = \overline{CD}$ und $d = \overline{AD}$.

Nun gilt $D = (\varphi_{xdz} \circ \varphi_{zax})(B)$ und $D = (\varphi_{xcz} \circ \varphi_{zbx})(B)$. Da $T_{xaz} = T_{xbz}$ einfach linear transitiv ist, erhalten wir

$$\varphi_{xdz} \circ \varphi_{zax} = \varphi_{xcz} \circ \varphi_{zbx}.$$

Somit folgt aus $D' = (\varphi_{xcz} \circ \varphi_{zbx})(B')$ und der obigen Gleichung sofort $D' = (\varphi_{xdz} \circ \varphi_{zax})(B')$. Dies impliziert aber $\overline{AD} = d \parallel \overline{A'D'}$.

$iv) \Rightarrow i)$: Seien $0, 1 \in x$ paarweise verschiedene Punkte und $1' \in \mathcal{B} \setminus x$. Wir bezeichnen mit y die Gerade $\overline{01'}$.

Seien $A, B, C \in x$ beliebig und konstruiere die Punkte $(A + B) + C, A + (B + C)$. Die Punkte dieser Konstruktion benennen wir wie in Abbildung 4.4.

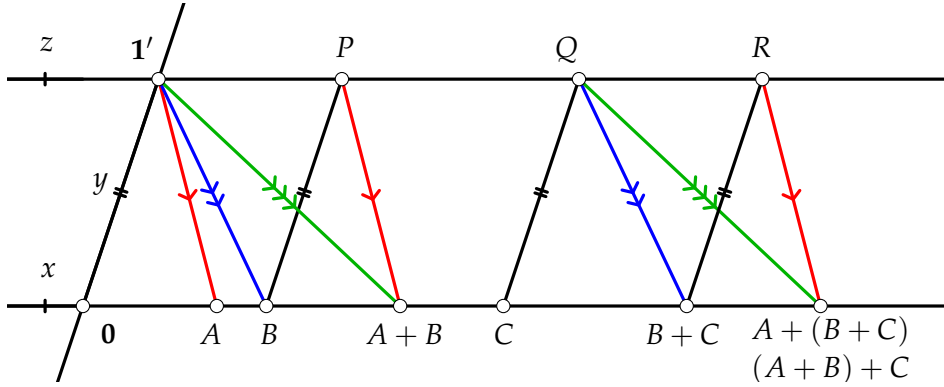


Abbildung 4.4

Weiter seien $D = A + B$, $E = B + C$, $F = (A + B) + C$, $G = A + (B + C)$. Da (s) zwischen x und z gilt, müssen die Gerade \overline{PD} und \overline{RF} parallel sein. Denn die Vierecke $D1'BP$ und $FQER$ erfüllen alle Voraussetzungen von (s). Da aber nach Konstruktion auch gilt $\overline{PD} \parallel \overline{RG}$ folgt $\overline{RF} = \overline{RG}$ und $F = G$. Dies impliziert $(A + B) + C = A + (B + C)$ und die Assoziativität der Addition. \square

Wie wir zeigen werden, gelten in affinen Ebenen über kartesische Gruppen (d) in die x -Richtung. In [2] werden dafür algebraische Argumente benutzt. Der untere Satz ermöglicht uns diesen auch geometrisch zu beweisen.

Satz 4.11 Für eine affine Ebene \mathcal{A} und zwei paarweise verschiedene Richtungen Π, Ψ sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) Die Schliessungsfigur $(d)_{\Pi}$ hält in \mathcal{A} .
- ii) Es existieren paarweise verschiedene Geraden $x, z \in \Pi$ so, dass (s) zwischen x, z hält und x linear in Ψ -Richtung ist.

Beweis Wir wissen aus Bemerkung 4.7, dass die Linearität von x ist in Ψ -Richtung aus $(d)_{\Pi}$ folgt. Zudem folgt (s) zwischen x und z nach Satz 2.10 auch aus $(d)_{\Pi}$.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Sei x linear in Ψ -Richtung und (s) hält zwischen x und z . Wir werden $(d)_{\Pi}$ in 3 Schritten beweisen.

1) (s) hält zwischen x und allen anderen x -Geraden:

Sei g eine x -Gerade. Wir können annehmen, dass x, z, g paarweise verschieden sind. Sonst haben wir nichts zu beweisen. Seien nun $A, A', C, C' \in g$ und $B, B', D, D' \in x$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$, $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$.

Weiter können wir annehmen, dass die Punkte A, A', C, C' und B, B', D, D' paarweise verschieden sind. Sonst folgt $\overline{AD} \parallel \overline{A'D'}$ direkt. Wir konstruieren

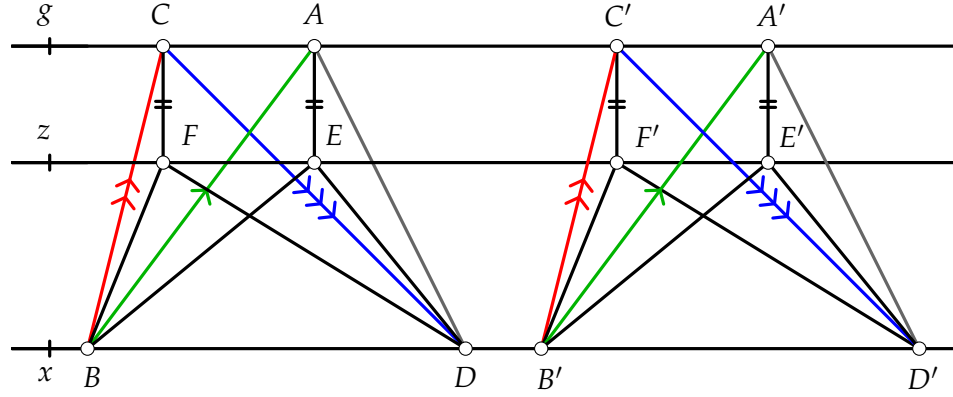


Abbildung 4.5

die Punkte $E, F, E', F' \in z$ so, dass die Geraden $\overline{AE}, \overline{CF}, \overline{A'E'}, \overline{C'F'}$ Ψ -Geraden sind. Vergleiche mit Abbildung 4.5.

Nun folgt aus der Linearität von x in Ψ -Richtung, dass $\overline{EB} \parallel \overline{E'B'}, \overline{BF} \parallel \overline{B'F'}, \overline{FD} \parallel \overline{F'D'}$. Wenden wir (s) auf die Vierecke $EBFD$ und $E'B'F'D'$ an, dann bekommen wir $\overline{ED} \parallel \overline{E'D'}$. Da x linear in Ψ -Richtung ist müssen nun auch \overline{AD} und $\overline{A'D'}$ parallel sein. Da g beliebig war folgt 1).

2) x ist linear in alle Richtungen ungleich Π :

Seien g, h x -Geraden und x, g, h paarweise verschieden. Weiter seien $A, A' \in x, B, B' \in g$ und $C, C' \in h$ so, dass $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$.

Konstruiere $D = x \cap \overline{BC}, D' = x \cap \overline{B'C'}$ und $E, E' \in g$ mit $\overline{CE}, \overline{C'E'} \in \Psi$. Siehe Abbildung 4.6a. Nun folgt aus der Linearität von x in Ψ -Richtung, dass $\overline{DE} \parallel \overline{D'E'}$. Die Vierecke $EDBA$ und $E'D'B'A'$ erfüllen nun die Voraussetzungen von 1) und wir erhalten $\overline{EA} \parallel \overline{E'A'}$. Dies hat nun aber mit der Linearität von x in Ψ -Richtung die Folge, dass \overline{AC} parallel zu $\overline{A'C'}$ ist.

Dies beweist, dass x linear in Richtung \overline{AB} ist und 2) folgt.

3) $(d)_{\Pi}$ hält.

Seien f, g, h paarweise verschiedene x -Geraden und $A, A' \in f, B, B' \in g, C, C' \in h$ so, dass $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$. Konstruiere den Schnittpunkt $X = x \cap \overline{AC}$ und den Punkt $X' \in x$ mit $\overline{CX} \parallel \overline{C'X'}$ wie in Abbildung 4.6b.

Da x linear in Richtung \overline{BC} ist, folgt $\overline{XB} \parallel \overline{X'B'}$. Da x auch linear in Richtung \overline{AC} ist, erhalten wir $\overline{AX} \parallel \overline{A'X'}$. Aus der Konstruktion folgt nun, dass gilt

$$\overline{A'X'} \parallel \overline{AX} = \overline{AC} = \overline{XC} \parallel \overline{X'C'}.$$

□

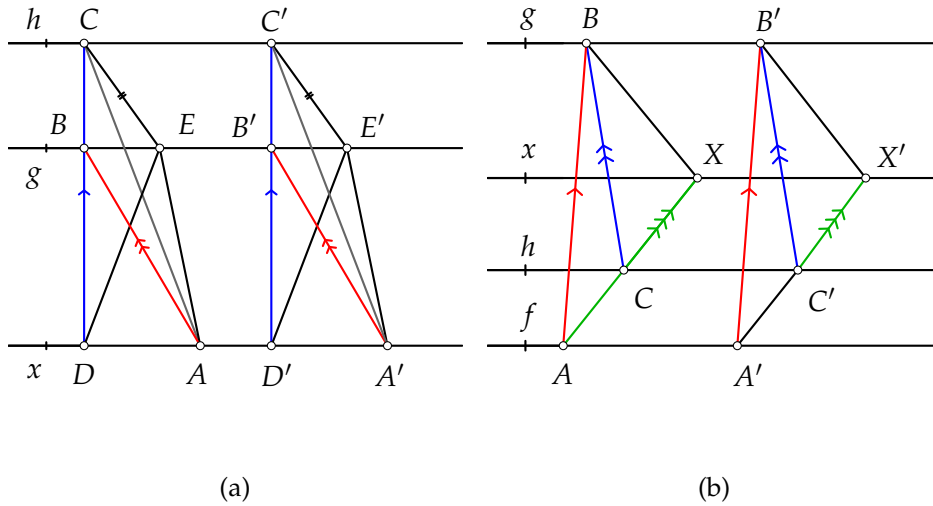


Abbildung 4.6

Daraus folgt $\overline{A'X'} = \overline{A'C'} = \overline{X'C'}$ und $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$. Da $f, g, h \in \Pi$ und die Dreiecke $ABC, A'B'C'$ beliebig waren hält $(d)_{\Pi}$ in \mathcal{A} .

Dieser Satz ermöglicht uns nun das folgende Korollar zu beweisen.

Korollar 4.12 Für eine affine Ebene \mathcal{A} mit Basis $0, 1, 1'$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) Die Schliessungsfigur (d) hält in x -Richtung.
- ii) Der Ternärkörper $\mathcal{T}(\mathcal{A}; 0, 1, 1')$ ist eine kartesische Gruppe.

Beweis Falls (d) in x -Richtung hält, dann ist die x linear in y -Richtung und (s) hält zwischen x und z , der x -Gerade durch $1'$. Satz 4.8 und Satz 4.10 implizieren, dass $\mathcal{T}(\mathcal{A}; 0, 1, 1')$ linear ist und eine assoziative Addition hat. Dies zeigt dass, $\mathcal{T}(\mathcal{A}; 0, 1, 1')$ eine kartesische Gruppe ist.

Falls $\mathcal{T}(\mathcal{A}; 0, 1, 1')$ eine kartesische Gruppe ist, dann folgt aus Satz 4.8 und 4.10, dass die x -Achse linear in y -Richtung ist und (s) zwischen x und z hält. Nach dem Satz 4.11 folgt nun (d) in die x -Richtung. \square

Bemerkung 4.13 Aus dem Korollar 4.12 folgt mit Bemerkung 3.12 auch, dass in einer affinen Ebene über einer kartesischen Gruppe (d) in x -Richtung hält.

4.4 Nicht-kommutative kartesische Gruppen

Wie der folgende Satz zeigt, können wir die Kommutativität der Addition auch geometrisch interpretieren.

Satz 4.14 Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathbf{I})$ eine affine Ebene und $x, z \in \mathcal{G}$ paarweise verschieden mit $x \parallel z$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) Es existieren paarweise verschiedene Punkte $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}' \in \mathcal{B}$ mit $x = \overline{\mathbf{0}\mathbf{1}}, \mathbf{1}' \in z$ so, dass die Addition in $\mathcal{T}(\mathcal{A}; \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}')$ kommutativ und assoziativ ist.
- ii) Es existiert eine Gerade $y \in \mathcal{G}$ so, dass (T_{xyz}, \circ) eine kommutative Gruppe ist.
- iii) Die Schliessungsfigur (p) hält zwischen x und z .
- iv) Für alle paarweise verschiedenen Punkte $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}' \in \mathcal{B}$ mit $x = \overline{\mathbf{0}\mathbf{1}}, \mathbf{1}' \in z$ sind die Addition in $\mathcal{T}(\mathcal{A}; \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}')$ kommutativ und assoziativ.

Beweis Wir zeigen $i) \Rightarrow ii), ii) \Rightarrow iii), iii) \Rightarrow iv)$. Die Implikation $iv) \Rightarrow i)$ folgt direkt.

$i) \Rightarrow ii)$: Sei $y = \overline{\mathbf{0}\mathbf{1}'}$. Aus Satz 4.10 folgt, dass (T_{xyz}, \circ) eine Gruppe ist. Seien $\tau_A, \tau_B \in T_{xyz}$ beliebig. Es gilt $\tau_A \circ \tau_B = \tau_{A+B}$ und es folgt:

$$\tau_A \circ \tau_B = \tau_{A+B} = \tau_{B+A} = \tau_B \circ \tau_A$$

aus $A + B = B + A$. Dies beweist die Kommutativität von (T_{xyz}, \circ) .

$ii) \Rightarrow iii)$: Seien $A, B', C \in z, A', B, C' \in x$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}, \overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$. Bezeichne die Geraden $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC'}$ mit f, g, h . Wir können nun die obigen Punkte mit Parallelprojektionen beschreiben. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \varphi_{zfx}(A') &= B', & \varphi_{xgz}(B') &= C', & \varphi_{zhx}(C') &= A, \\ \varphi_{xfz}(A) &= B, & \varphi_{zgx}(B) &= C. \end{aligned}$$

Wenn wir zeigen, dass $\varphi_{xhz}(C) = A'$ gilt, dann folgt $\overline{A'C} \parallel h = \overline{AC'}$. Weiter erhalten wir aus $ii)$ und dem Satz 4.10, dass (T_{xfz}, \circ) eine kommutative Gruppe ist. Aus den obigen Gleichungen folgern wir

$$\begin{aligned} \varphi_{xhz}(C) &= (\varphi_{xhz} \circ \varphi_{zgx} \circ \varphi_{xfz} \circ \varphi_{zhx} \circ \varphi_{xgz} \circ \varphi_{zfx})(A') \\ &= (\varphi_{xhz} \circ \varphi_{zgx} \circ (\varphi_{zhx}^{-1} \circ \varphi_{xfz}^{-1})^{-1} \circ (\varphi_{xgz} \circ \varphi_{zfx}))(A') \\ &= (\varphi_{xhz} \circ \varphi_{zgx} \circ \underbrace{(\varphi_{xhz} \circ \varphi_{zfx})^{-1}}_{\in T_{xfz}} \circ \underbrace{(\varphi_{xgz} \circ \varphi_{zfx})}_{\in T_{xfz}})(A') \\ &= (\varphi_{xhz} \circ \varphi_{zgx} \circ (\varphi_{xgz} \circ \varphi_{zfx}) \circ (\varphi_{xhz} \circ \varphi_{zfx})^{-1})(A') \quad (4.3) \\ &= (\varphi_{xhz} \circ \varphi_{zgx} \circ \varphi_{xgz} \circ \varphi_{zfx} \circ \varphi_{xfz} \circ \varphi_{zhx})(A') \\ &= \text{id}_x(A') = A'. \end{aligned}$$

Die Gleichung (4.3) ist korrekt, da T_{xfz} kommutativ ist.

$iii) \Rightarrow i)$: Seien $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in x$ paarweise verschieden und $\mathbf{1}' \in z$ und $A, B \in x$ beliebig. Wir konstruieren die Punkte $A + B, B + A$ und bezeichnen alle

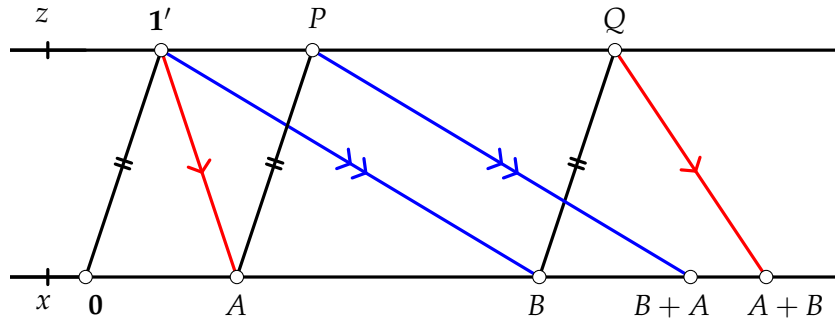


Abbildung 4.7

Punkte der Konstruktion wie in Abbildung 4.7. Da (p) zwischen x und z gilt, muss die Gerade durch Q und $B + A$ parallel zu $\overline{1'A}$. Da die Gerade durch Q und $A + B$ auch parallel zu $\overline{1'A}$, folgt $A + B = B + A$.

Die Assoziativität der Addition folgt nach Satz 4.10, da (p) zwischen x und z nach Bemerkung 2.13 auch (s) zwischen x und z impliziert. \square

Bemerkung 4.15 Ob im obigen Satz bei der Aussage i) die Assoziativität weggelassen werden kann, ist eine offene Frage.

Wenn nun eine kartesische Gruppe $(\mathcal{K}, +, *)$ eine nicht-kommutative Addition hat, dann folgt aus dem Satz 4.14, dass (p) in x -Richtung nicht gelten kann. Da \mathcal{K} aber eine kartesische Gruppe ist, gilt nach Korollar 4.12, dass (d) in x -Richtung hält.

Dass es nicht-kommutative kartesische Gruppen gibt, wurde im Artikel [5] bewiesen. Es ist leicht zu sehen, dass die Axiome der kartesischen Gruppen aus dem Artikel äquivalent zu den Axiomen in Bemerkung 3.21 sind. So kann man aus \mathbb{Z} mit freien Erweiterungen und unendlichen Vereinigungen eine nicht-kommutative kartesische Gruppe bilden. Diese und alle nicht-kommutativen kartesischen Gruppen aus dem Artikel sind unendlich. Ob es auch endliche kartesische Gruppen gibt, ist eine offene Frage.

Endliche affine Ebenen

Wie sich die Endlichkeit auf die Schliessungsfiguren (d) , (p) und (s) auswirkt, ist noch nicht genau untersucht. Wir werden in diesem Kapitel zeigen, dass für eine affine Ebene der Ordnung p , eine Primzahl, die Schliessungsfiguren (d) , (p) und (s) äquivalent sind.

5.1 Affine Ebenen mit prim-Ordnung

Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, I)$ eine endliche affine Ebene. Weiter bemerken wir, dass zwischen zwei Geraden g, h eine Bijektion existiert. Zum Beispiel φ_{hyg} für ein geeignetes $y \in \mathcal{G}$. Daraus folgt, dass auf allen Geraden in \mathcal{A} gleich viele Punkte liegen. Eine endliche affine Ebene hat *Ordnung* n , falls auf ihren Geraden n Punkte liegen.

Bemerkung 5.1 *Es ist eine offene Frage, ob es eine affine Ebene, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist, gibt.*

Bevor wir nun zeigen können, dass in einer endlichen affinen Ebene mit prim-Ordnung (d) , (p) , (s) äquivalent sind, benötigen wir zwei Lemmas.

Lemma 5.2 *Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, I)$ eine affine Ebene, $x, z \in \mathcal{G}$ zwei paarweise verschiedene, parallele Geraden und (s) gilt zwischen x und z . Weiter seien $y, y' \in \mathcal{G} \setminus \Pi_x$. Für die Bijektionen $\tau \in T_{xyz}$, $\tau' \in T_{xy'z}$ gilt die folgende Aussage.*

Wenn ein Punkt $P \in x$ existiert mit $\tau(P) = \tau'(P)$, dann folgt $\tau = \tau'$.

Beweis Nach Satz 4.10 folgt $T_{xyz} = T_{xy'z}$. Somit gilt für $\tau, \tau' \in T_{xyz}$ und $\tau(P) = \tau'(P)$. Da T_{xyz} einfach linear transitiv auf x ist, folgt $\tau = \tau'$. \square

Lemma 5.3 *Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, I)$ eine affine Ebene so, dass $(s)_\Pi$ für eine Richtung Π gilt. Für paarweise verschieden geraden $x, z, z' \in \Pi$ und $y \in \mathcal{G} \setminus \Pi$ gilt*

$$\forall \sigma \in T_{xyz'}, \tau \in T_{xyz} \exists \tau' \in T_{xyz}, \sigma' \in T_{xyz'} : \sigma \circ \tau = \tau' \circ \sigma' \in \text{Sym}(x).$$

(

Nun können wir $\sigma \circ \tau$ umformen. Es gilt

$$\sigma \circ \tau = \varphi_{xsz'} \circ \varphi_{z'yx} \circ \varphi_{xyz} \circ \varphi_{zgx} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} &= \varphi_{xsz} \circ \varphi_{zsz'} \circ \varphi_{z'yz} \circ \varphi_{zgx} \\ &= \varphi_{xsz} \circ \varphi_{zhz'} \circ \varphi_{z'gz} \circ \varphi_{zgx} \quad (5.4) \\ &= \varphi_{xsz} \circ (\varphi_{zhx} \circ \varphi_{xhz}) \circ \varphi_{zhz'} \circ \varphi_{z'gx} \\ &= \varphi_{xsz} \circ \varphi_{zhx} \circ \varphi_{xhz'} \circ \varphi_{z'gx} \\ &= \underbrace{(\varphi_{xsz} \circ \varphi_{zhx})}_{=\tau' \in T_{xhz}} \circ \underbrace{(\varphi_{xhz'} \circ \varphi_{z'gx})}_{=\sigma' \in T_{xgz'}}. \end{aligned}$$

Dabei verwenden wir bei Schritt 5.3 die Gleichung (5.1) und bei 5.4 die Gleichung (5.2). Bei den anderen Schritten verwenden wir jeweils die Bemerkung 4.2.

Da (s) zwischen x, z sowie x, z' gilt, folgen mit Satz 4.10 die Gleichungen $T_{xhz} = T_{xyz}$, $T_{xgz'} = T_{xyz'}$. Die Behauptung folgt, da $\sigma \circ \tau = \tau' \circ \sigma'$ mit $\tau' \in T_{xyz}$ und $\sigma' \in T_{xyz'}$. \square

Um nun den nächsten Satz zu beweisen, benutzen wir einige einfache Resultate aus der Gruppentheorie. Diese Resultate befinden sich im Anhang A.

Satz 5.4 Für eine endliche affine Ebene $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, I)$ mit Ordnung p , eine Primzahl, und eine Richtung Π gilt $(d)_\Pi \Leftrightarrow (p)_\Pi \Leftrightarrow (s)_\Pi$.

Beweis Nach Satz 2.10 und Satz 2.12 müssen wir nur $(s)_\Pi \Rightarrow (p)_\Pi$ und $(s)_\Pi \Rightarrow (d)_\Pi$ beweisen.

$(s)_\Pi \Rightarrow (p)_\Pi$: Seien $x, z \in \Pi$ paarweise verschieden. Da (s) zwischen x und z gilt, gibt es nach Satz 4.10 ein $y \in \mathcal{G}$ so, dass (T_{xyz}, \circ) eine Gruppe ist. Da T_{xyz} einfach linear transitiv auf x ist, gilt $|(T_{xyz}, \circ)| = |x| = p$. Aus Satz A.9 folgt die Kommutativität von (T_{xyz}, \circ) und somit (p) zwischen x und z mit dem Satz 4.14.

Da $x, z \in \Pi$ beliebig waren, erhalten wir $(p)_\Pi$.

$(s)_\Pi \Rightarrow (d)_\Pi$: Seien $x \in \Pi$ und $y \in \mathcal{G} \setminus \Pi$. Wenn wir zeigen, dass x linear in y -Richtung ist, dann erhalten wir $(d)_\Pi$ mit Satz 4.11. Denn die Schliessungsfigur (s) hält zwischen x und allen Geraden $z \in \Pi$ mit $z \neq x$.

Wir nehmen an, dass x nicht linear in y -Richtung ist und zeigen einen Widerspruch. Da x nicht linear in y -Richtung ist, existieren mit Satz 4.8 zwei Geraden $z, z' \in \mathcal{G} \setminus \Pi$ mit $T_{xyz} \neq T_{xyz'}$.

Da (s) zwischen x, z und x, z' hält, sind die Mengen (T_{xyz}, \circ) , $(T_{xyz'}, \circ)$ Gruppen der Ordnung p , analog wie im ersten Teil des Beweises. Wir sehen, dass gilt

$$T_{xyz} \cap T_{xyz'} = \{\text{id}_x\}. \quad (5.5)$$

Denn ein Element $\text{id}_x \neq \tau \in T_{xyz'} \cap T_{xyz}$ impliziert mit Satz A.9 die Gleichung $(T_{xyz}, \circ) = \langle \tau \rangle = (T_{xyz'}, \circ)$ und ist ein Widerspruch zur Annahme.

Wir betrachten nun die Menge

$$\mathcal{G} = \{\tau \circ \sigma \mid \tau \in T_{xyz}, \sigma \in T_{xyz'}\} \subseteq \text{Sym}(x)$$

und zeigen, dass \mathcal{G} aus p^2 Elementen besteht.

Seien $\tau_1 \circ \sigma_1, \tau_2 \circ \sigma_2 \in \mathcal{G}$ mit $\tau_1 \circ \sigma_1 = \tau_2 \circ \sigma_2$, dann gilt

$$\tau_2^{-1} \circ \tau_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1} \in T_{xyz} \cap T_{xyz'}.$$

Aus Gleichung (5.5) erhalten wir $\tau_1 = \tau_2$ und $\sigma_1 = \sigma_2$. Somit ist die Abbildung $(\tau, \sigma) \in T_{xyz} \times T_{xyz'} \mapsto \tau \circ \sigma \in \mathcal{G}$ eine Bijektion und wir erhalten die Gleichung $|\mathcal{G}| = |T_{xyz} \times T_{xyz'}| = p^2$.

Als nächstes zeigen wir, dass \mathcal{G} eine Untergruppe von $\text{Sym}(x)$ ist. Dies folgt mit Proposition A.6, wenn \mathcal{G} mit \circ abgeschlossen ist.

Seien $\tau_1 \circ \sigma_1, \tau_2 \circ \sigma_2 \in \mathcal{G}$ beliebig, dann gibt es nach Lemma 5.3 ein $\tau' \in T_{xyz}$ und ein $\sigma' \in T_{xyz'}$ mit $\sigma_1 \circ \tau_2 = \tau' \circ \sigma'$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} (\tau_1 \circ \sigma_1) \circ (\tau_2 \circ \sigma_2) &= \tau_1 \circ \sigma_1 \circ \tau_2 \circ \sigma_2 \\ &= \tau_1 \circ \tau' \circ \sigma' \circ \sigma_2 \\ &= \underbrace{(\tau_1 \circ \tau')}_{\in T_{xyz}} \circ \underbrace{(\sigma' \circ \sigma_2)}_{\in T_{xyz'}} \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Somit ist \mathcal{G} eine Untergruppe von $\text{Sym}(x)$.

Aus dem Satz von Lagrange A.7 folgt nun, dass $|\mathcal{G}| = p^2$ ein Teiler von $|\text{Sym}(x)| = p!$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch, da p prim ist. \square

Satz 5.4 impliziert direkt das folgende Korollar.

Korollar 5.5 *In einer endliche affinen Ebene mit Ordnung p , eine Primzahl, sind (s) , (p) , (d) äquivalent.*

Anhang A

Gruppen

Diese Arbeit verwendet einige einfache Aussagen der Gruppentheorie. Alle Sätze und Definitionen in diesem Anhang wurden aus [6] übernommen. Für die Beweise verweisen wir jeweils auf die entsprechenden Seiten.

Definition A.1 Sei \mathcal{G} eine nicht-leere Menge und $\circ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}; (a, b) \mapsto a \circ b$ eine binäre Verknüpfung. (\mathcal{G}, \circ) ist eine Gruppe, falls folgende Axiome gelten:

G1 Für alle $a, b, c \in \mathcal{G}$ gilt $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

G2 Es existiert ein $e \in \mathcal{G}$ mit $\forall a \in \mathcal{G} : a \circ e = e \circ a = a$.

G3 Für alle $a \in \mathcal{G}$ existiert ein $a^{-1} \in \mathcal{G}$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Bemerkung A.2 Das Element e aus Axiom G2 ist eindeutig und wir nennen es das neutrale Element. Das Element a^{-1} aus Axiom G3 ist eindeutig und wir nennen es das inverse Element von a .

Wir nennen eine Gruppe (\mathcal{G}, \circ) endlich, falls \mathcal{G} eine endliche Menge ist. Mit $|\mathcal{G}|$ bezeichnen wir die Ordnung von \mathcal{G} .

Satz A.3 [Example A-4.14 (i), 6, S. 128] Sei \mathcal{M} eine nicht-leere Menge, dann ist

$$\text{Sym}(\mathcal{M}) = \{\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \mid \varphi \text{ ist eine Bijektion}\}$$

mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe.

Falls \mathcal{M} endlich ist und $n = |\mathcal{M}|$, dann gilt:

$$|\text{Sym}(\mathcal{M})| = n!$$

Definition A.4 Wir nennen eine Gruppe (\mathcal{G}, \circ) kommutativ, falls für alle $a, b \in \mathcal{G}$ gilt, dass $a \circ b = b \circ a$.

Definition A.5 Sei (\mathcal{G}, \circ) eine Gruppe, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ ist eine Untergruppe von \mathcal{G} , falls

- i) $e \in \mathcal{H}$
- ii) $\forall x, y \in \mathcal{H} : x \circ y \in \mathcal{H}$
- iii) $\forall x \in \mathcal{H} : x^{-1} \in \mathcal{H}$

Jede Untergruppe ist wieder eine Gruppe.

Proposition A.6 [Corollary A-4.32, 6, S. 146] Eine nicht leere Menge \mathcal{H} einer endlichen Gruppe (\mathcal{G}, \circ) ist genau dann eine Untergruppe, wenn für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt $x \circ y \in \mathcal{H}$.

Satz A.7 (Satz von Lagrange) [Theorem A-4.43, 6, S. 141] Falls \mathcal{H} eine Untergruppe einer endlichen Gruppe (\mathcal{G}, \circ) ist, dann ist $|\mathcal{H}|$ ein Teiler von $|\mathcal{G}|$.

Definition A.8 Sei (\mathcal{G}, \circ) eine Gruppe. Wir nennen \mathcal{G} zyklisch, falls es ein $a \in \mathcal{G}$ gibt mit

$$\mathcal{G} = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Das Element a nennen wir einen Generator von \mathcal{G} .

Mit a^n bezeichnen wir die Potenz in der Gruppe (\mathcal{G}, \circ) .

Der letzte Satz ist eine Zusammenstellung aus den Sätzen [Corollary A-4.47, 6, S. 147], [Theorem A-4.36, 6, S. 142] und [Corollary A-4.18, 6, S. 132].

Satz A.9 Sei p eine Primzahl. Eine Gruppe (\mathcal{G}, \circ) der Ordnung p ist zyklisch, kommutativ und jedes Element in $\mathcal{G} \setminus \{e\}$ ist ein Generator von \mathcal{G} .

Literatur-/Quellenverzeichnis

- [1] David Hilbert. „Die fünf Axiomgruppen“. In: *Grundlagen der Geometrie*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1922, S. 2–23. ISBN: 978-3-663-15954-4. DOI: [10.1007/978-3-663-15954-4_2](https://doi.org/10.1007/978-3-663-15954-4_2). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-663-15954-4_2.
- [2] Rolf Lingenberg. *Grundlagen der Geometrie*. ger. Mannheim, 1978.
- [3] Herbert Naumann. „Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie“. In: *Mathematische Zeitschrift* 60.1 (Dez. 1954), S. 120–141. ISSN: 1432-1823. DOI: [10.1007/BF01187367](https://doi.org/10.1007/BF01187367). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01187367>.
- [4] Victor Pambuccian und Celia Schacht. „The Axiomatic Destiny of the Theorems of Pappus and Desargues“. In: *Geometry in History*. Hrsg. von S. G. Dani und Athanase Papadopoulos. Cham: Springer International Publishing, 2019, S. 355–399. ISBN: 978-3-030-13609-3. DOI: [10.1007/978-3-030-13609-3_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-13609-3_8). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-13609-3_8.
- [5] Günter Pickert. „Nichtkommutative cartesische Gruppen“. German. In: *Arch. Math.* 3 (1952), S. 335–342. ISSN: 0003-889X; 1420-8938/e.
- [6] Joseph J. Rotman. *Advanced modern algebra. Part 1. 3rd edition*. English. 3rd edition. Bd. 165. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2015, S. xiv + 706. ISBN: 978-1-4704-1554-9/hbk.
- [7] P. Scherk und R. Lingenberg. *Rudiments of plane affine geometry*. eng. Toronto, 1975.
- [8] Wanda Szmielew. *From affine to Euclidean geometry : an axiomatic approach*. eng;pol. Dordrecht, 1983.



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Declaration of originality

The signed declaration of originality is a component of every semester paper, Bachelor's thesis, Master's thesis and any other degree paper undertaken during the course of studies, including the respective electronic versions.

Lecturers may also require a declaration of originality for other written papers compiled for their courses.

I hereby confirm that I am the sole author of the written work here enclosed and that I have compiled it in my own words. Parts excepted are corrections of form and content by the supervisor.

Title of work (in block letters):

Kleine affine Schliessungsfiguren und ihre algebraische Bedeutung

Authored by (in block letters):

For papers written by groups the names of all authors are required.

Name(s):

Huber

First name(s):

Alexander

With my signature I confirm that

- I have committed none of the forms of plagiarism described in the '[Citation etiquette](#)' information sheet.
- I have documented all methods, data and processes truthfully.
- I have not manipulated any data.
- I have mentioned all persons who were significant facilitators of the work.

I am aware that the work may be screened electronically for plagiarism.

Place, date

Rafz, 12.02.2021

Signature(s)

A. Huber

For papers written by groups the names of all authors are required. Their signatures collectively guarantee the entire content of the written paper.