Considere el clásico problema de combinación de productos sujeto a restricciones de disponibilidad de recursos:

$$\text{Max } z = x1 + 3x2$$

$$\text{s.a}$$

$$x1 + 4x2 \leq 100$$

$$x1 + 2x2 \leq 60$$

$$x1 + x2 \leq 50$$

$$x1, x2 \geq 0$$

MAXIMIZAR: $Z = 1\ X_1 + 3\ X_2$

sujeto a

$1\ X_1 + 4\ X_2 \le 100$
$1\ X_1 + 2\ X_2 \le 60$
$1\ X_1 + 1\ X_2 \le 50$
$X_1, X_2 \ge 0$

MAXIMIZAR: $Z = 1\ X_1 + 3\ X_2 + 0\ X_3 + 0\ X_4 + 0\ X_5$

sujeto a

$1\ X_1 + 4\ X_2 + 1\ X_3 = 100$
$1\ X_1 + 2\ X_2 + 1\ X_4 = 60$
$1\ X_1 + 1\ X_2 + 1\ X_5 = 50$
$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \ge 0$

Tabla 1			1	3	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_3	0	100	1	4	1	0	0
P_4	0	60	1	2	0	1	0
P_5	0	50	1	1	0	0	1
Z		0	-1	-3	0	0	0

Tabla 2			1	3	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_2	3	25	0.25	1	0.25	0	0
P_4	0	10	0.5	0	-0.5	1	0
P_5	0	25	0.75	0	-0.25	0	1
Z		75	-0.25	0	0.75	0	0

Tabla 3			1	3	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_2	3	20	0	1	0.5	-0.5	0
P_1	1	20	1	0	-1	2	0
P_5	0	10	0	0	0.5	-1.5	1
Z		80	0	0	0.5	0.5	0

Matriz inversa

Precio sombra

La solución óptima es Z = 80
$X_1 = 20$
$X_2 = 20$

$$A_J \qquad\qquad\qquad\qquad (A_J)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Microsoft Excel 16.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [AS.xlsx]Sheet1
Informe creado: 13/07/2021 04:08:35 p. m.

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
B5	var x1	20	0	1	0.5	0.25
C5	var x2	20	0	3	1	1

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
D10	z	100	0.5	100	20	20
D11	z	60	0.5	60	6.666666667	10
D12	z	40	0	50	1E+30	10

a. Realice un análisis de sensibilidad para el vector del lado derecho de las restricciones.

Rango de insensibilidad para recurso b_1

$$\boxed{b_1' = b_1 + \alpha}$$

$$\alpha \in IR \;/\; \underbrace{X_J^* = \text{constante}}_{((A_J)^{-1} b)_j \geq 0, j \in J}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 100 + \alpha \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$(A_J)^{-1} b' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 + \alpha \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 20 \\ (\alpha + 40)/2 \\ (\alpha + 20)/2 \end{pmatrix}$$

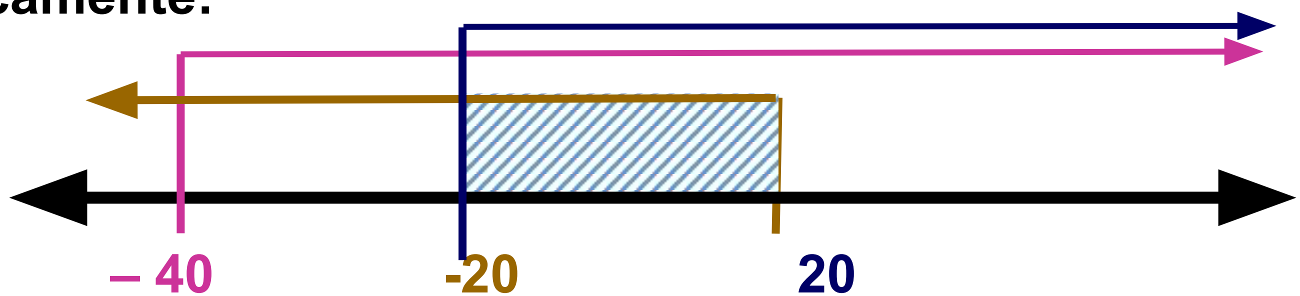
Para la **factibilidad** debe cumplirse que:

$-\alpha+20 \geq 0 \Rightarrow -\alpha \geq -20 \Rightarrow \alpha \leq 20$

$(\alpha+40)/2 \geq 0 \Rightarrow \alpha+40 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -40$

$(\alpha+20)/2 \geq 0 \Rightarrow \alpha+20 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -20$

Gráficamente:



Del gráfico se desprende el **intervalo** para: $\alpha \longrightarrow -20 \leq \alpha \leq 20$

Pero $\quad b_1' = b_1 + \alpha \qquad \alpha = b_1' - 100$

$\Rightarrow \quad -20 \leq b_1' - 100 \leq 20 \qquad \boxed{80 \leq b_2' \leq 120}$

Es el **rango** de **insensibilidad**

a. **Realice un análisis de sensibilidad para el vector del lado derecho de las restricciones.**

Rango de insensibilidad para recurso b_1

$$\boxed{b_1' = b_1 + \alpha}$$

$$\alpha \in \mathrm{IR} \;/\; \underbrace{X_J^* = \text{constante}}_{((A_J)^{-1} b)_j \geq 0,\ j \in J}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 100 + \alpha \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$(A_J)^{-1} b' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 + \alpha \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 20 \\ (\alpha + 40)/2 \\ (\alpha + 20)/2 \end{pmatrix}$$

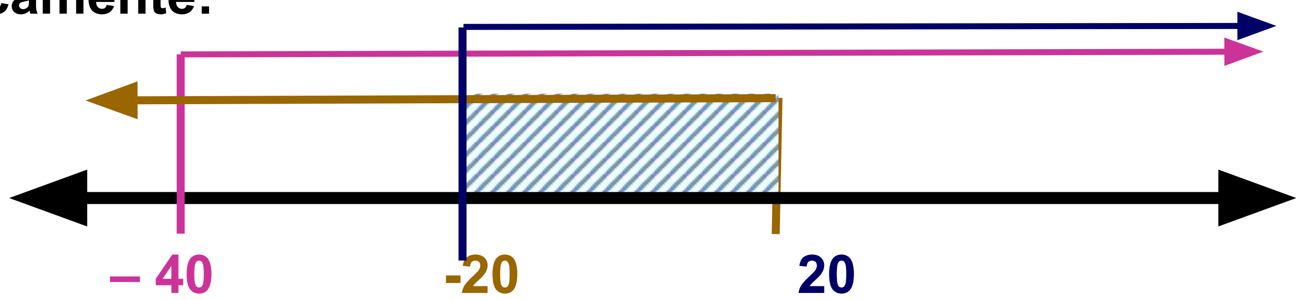
Para la factibilidad debe cumplirse que:

$-\alpha+20 \geq 0 \Rightarrow -\alpha \geq -20 \Rightarrow \alpha \leq 20$

$(\alpha+40)/2 \geq 0 \Rightarrow \alpha+40 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -40$

$(\alpha+20)/2 \geq 0 \Rightarrow \alpha+20 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -20$

Gráficamente:



Del gráfico se desprende el intervalo para: $\alpha \longrightarrow -20 \leq \alpha \leq 20$

Pero $b_1' = b_1 + \alpha$ $\qquad \alpha = b_1' - 100$

$\Rightarrow -20 \leq b_1' - 100 \leq 20$ $\quad \boxed{80 \leq b_2' \leq 120}$

Es el rango de insensibilidad

Rango de insensibilidad para recurso b_2

$$\boxed{b_2' = b_2 + \alpha}$$

$$\alpha \in IR \;/\; \underbrace{X_J^* = \text{constante}}_{((A_J)^{-1} b)_j \geq 0, j \in J}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 + \alpha \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$(A_J)^{-1} b' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 60 + \alpha \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+20 \\ (-\alpha+40)/2 \\ (-3\alpha+20)/2 \end{pmatrix}$$

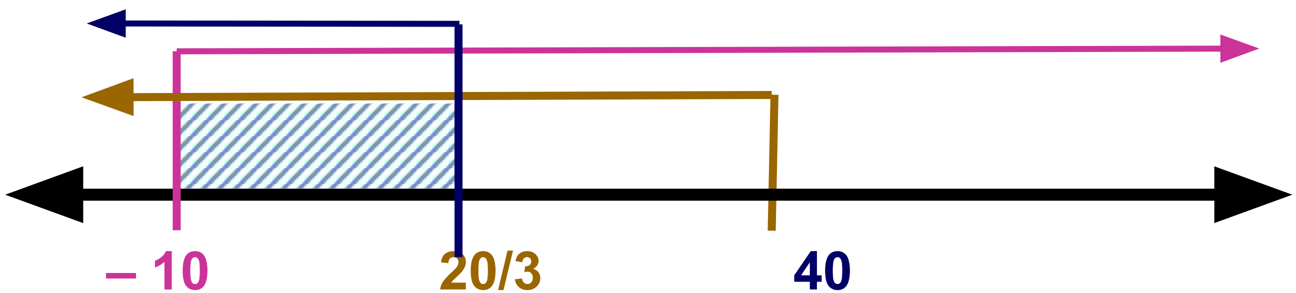
Para la factibilidad debe cumplirse que:

$2\alpha+20 \geq 0 \Rightarrow 2\alpha \geq -20 \Rightarrow \alpha \geq -10$

$(-\alpha+40)/2 \geq 0 \Rightarrow -\alpha+40 \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 40$

$(-3\alpha+20)/2 \geq 0 \Rightarrow -3\alpha+20 \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 20/3$

Gráficamente:



Del gráfico se desprende el intervalo para: $\alpha \longrightarrow -10 \leq \alpha \leq 20/3$

Pero $\quad b_2' = b_2 + \alpha \qquad \alpha = b_2' - 60$

$\Rightarrow \quad -10 \leq b_2' - 60 \leq 20/3$

$$\boxed{50 \leq b_2' \leq 200/3}$$

Es el rango de insensibilidad

Rango de insensibilidad para recurso b_3

$$\boxed{b_3' = b_3 + \alpha}$$

$$\alpha \in IR \;/\; \underbrace{X_J^* = \text{constante}}_{((A_J)^{-1} b)_j \geq 0,\ j \in J}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 50+\alpha \end{pmatrix}$$

$$(A_J)^{-1} b' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 50+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ \alpha+10 \end{pmatrix}$$

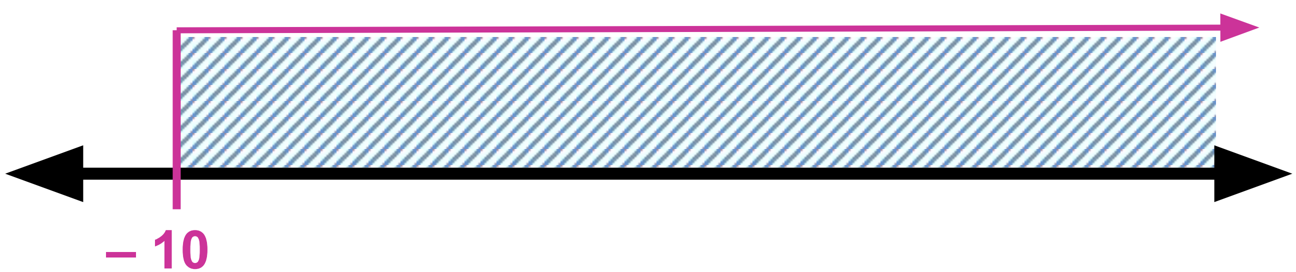
Para la factibilidad debe cumplirse que:

$20 \geq 0$

$20 \geq 0$

$\alpha + 10 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 10$

Gráficamente:



Del gráfico se desprende el intervalo para: $\alpha \longrightarrow -10 \leq \alpha$

Pero $b_3' = b_3 + \alpha \qquad \alpha = b_3' - 50$

$\Rightarrow -10 \leq b_3' - 50$

$\boxed{40 \leq b_3'}$

Es el rango de insensibilidad

b. Realice un análisis de sensibilidad para el vector de coeficientes de la función objetivo.

Variación en el vector **C1**

$$C' = [\ (1+\alpha)\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ]$$

Solo puede afectar condición de optimalidad

Verificación de **Optimalidad**

$$X_J = \{ X_1, X_2, X_3 \}$$

$$X_{\bar{J}} = \{ X_4, X_5 \}$$

$$\begin{array}{cccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ C_J = & [\ (1+\alpha) & 3 & 0\ ] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & X_4 & X_5 \\ C_{\bar{J}} = & [\ 0 & 0\ ] \end{array}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{\bar{J}}} = C_{\bar{J}} - C_J \underbrace{(A_J)^{-1} A_{\bar{J}}}_{}$$

Se puede leer directamente desde la tabla

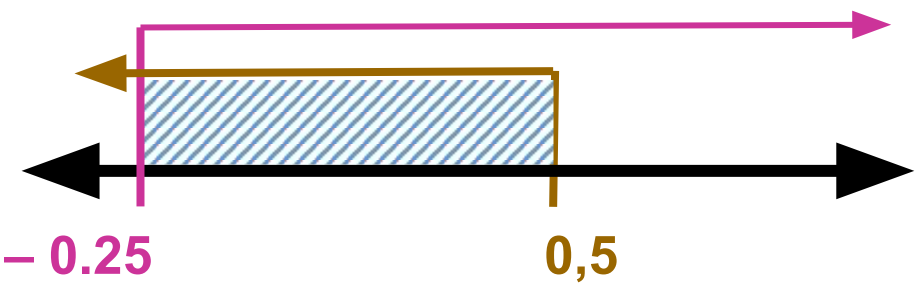
$$\frac{\partial z}{\partial x_J} = [\,0 \quad 0\,] - [\,(1+\alpha) \quad 3 \quad 0\,] \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x_4} & \dfrac{\partial z}{\partial x_5} \end{pmatrix} = \begin{matrix} -[\,(-2\alpha+1)/2 \quad (4\alpha+1)/2\,] \geq (0,0) \\ [\,-(-2\alpha+1)/2 \quad -(4\alpha+1)/2\,] \leq (0,0) \end{matrix}$$

$(2\alpha-1) \leq 0 \;\Rightarrow\; \alpha \leq 0.5$

$(-4\alpha-1) \leq 0 \;\Rightarrow\; \alpha \geq -0.25$

Gráficamente:



Del gráfico se desprende el intervalo para: $\alpha \longrightarrow -0.25 \leq \alpha \leq 0.5$

Pero $\quad c_1' = c_1 + \alpha \qquad \alpha = c_1' - 1$

$\Rightarrow \quad -0.25 \leq c_1' - 1 \leq 0.5$

$$\boxed{0.75 \leq c_1' \leq 1.5}$$

Variación en el vector C2

$C' = [\,1 \quad (3+\alpha) \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$

Solo puede afectar condición de optimalidad

Verificación de Optimalidad

$X_J = \{ X_1 , X_2 , X_3 \}$

$X_{\bar{J}} = \{ X_4 , X_5 \}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \end{array} \\ C_J = & [\,1 \quad (3+\alpha) \quad 0\,] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} X_4 & X_5 \end{array} \\ C_{\bar{J}} = & [\,0 \quad 0\,] \end{array}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{\bar{J}}} = C_{\bar{J}} - C_J \underbrace{(A_J)^{-1} A_{\bar{J}}}_{\text{Se puede leer directamente desde la tabla}}$$

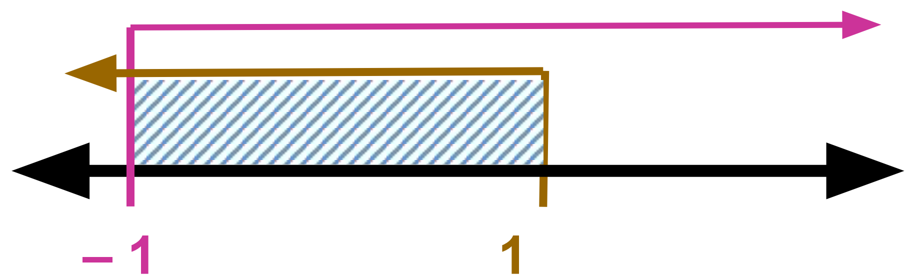
$$\frac{\partial Z}{\partial X_J} = [\,0 \quad 0\,] - [\,1 \;\; (3+\alpha) \;\; 0\,] \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_J} = \left(\frac{\partial Z}{\partial X_4} \quad \frac{\partial Z}{\partial X_5} \right) = \begin{matrix} -[\,(\alpha+1)/2 \quad (-\alpha+1)/2\,] \geq (0,0) \\ [\,-(\alpha+1)/2 \quad -(-\alpha+1)/2\,] \leq (0,0) \end{matrix}$$

$(-\alpha-1) \leq 0 \Rightarrow \alpha \geq -1$

$(\alpha-1) \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1$

Gráficamente:



Del gráfico se desprende el intervalo para: $\alpha \longrightarrow -1 \leq \alpha \leq 1$

Pero $\quad c_2' = c_2 + \alpha \qquad \alpha = c_2' - 1$

$\Rightarrow \quad -1 \leq c_2' - 3 \leq 1$

$$\boxed{2 \leq c_2' \leq 4}$$

c. **Suponga que se evalúa la posibilidad de fabricar un nuevo producto x nuevo de modo que el problema queda descrito como**

$$\text{Max } z = x1 + 3x2 + xnuevo$$

s.a

$$x1 + 4x2 + 5xnuevo \leq 100$$

$$x1 + 2x2 + 3xnuevo \leq 60$$

$$x1 + x2 + 2xnuevo \leq 50$$

$$x1,\ x2, xnuevo \geq 0$$

Cambio en el vector C

$$\begin{array}{rcccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ C = & [\,1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\,] \\ C' = & [\,1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\,] \end{array}$$

Cambio en la matriz $A_{\bar{J}}$

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ A = & \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$A' = \left(\begin{array}{c:c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}}_{A_J} & \underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}}_{A_{\bar{J}}} \end{array}\right)$$

Verificación de Optimalidad

$X_J = \{ X_1 , X_2 , X_3 \}$

$X_{\bar{J}} = \{ X_4 , X_5 \}$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{\bar{J}}} = C_{\bar{J}} - C_J (A_J)^{-1} A_{\bar{J}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{\bar{J}}} = [\,0 \;\; 0 \;\; 1\,] - [\,1 \;\; 3 \;\; 0\,] \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{\bar{J}}} = \left(\frac{\partial Z}{\partial X_4} \quad \frac{\partial Z}{\partial X_5} \quad \frac{\partial Z}{\partial X_6} \right) = [\,-1/2 \;\; 0 \;\; -3\,]$$

como $\dfrac{\partial Z}{\partial X_6} < 0$ se mantiene la optimalidad

Tabla 3			1	3	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_2	3	20	0	1	0.5	-0.5	0
P_1	1	20	1	0	-1	2	0
P_5	0	10	0	0	0.5	-1.5	1
Z		80	0	0	0.5	0.5	0

La solución óptima es Z = 80
$X_1 = 20$
$X_2 = 20$

Tabla 3			1	3	1	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**
P_2	3	20	0	1	1	0.5	-0.5	0
P_1	1	20	1	0	1	-1	2	0
P_6	0	10	0	0	0	0.5	-1.5	1
Z		80	0	0	3	0.5	0.5	0

La solución óptima es Z = 80
$X_1 = 20$
$X_2 = 20$
$X_3 = 0$