

1. Celem laboratorium było użycie metod MC do oszacowania wartości trzech całek

$$C_1 = \int_{-3}^3 (1 + \tanh(x)) dx = 6$$

$$C_2 = \int_0^{10} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(10) - \arctan(0) = 1.47112767$$

$$C_3 = \int_0^1 \cos^{10}(\pi x) dx = 0.24609375$$

2. Metody szacowania

2.1. Metoda podstawowa

Całka postaci:

$$C = \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

Posiada niejawną postać fgp, należy ją wprowadzić aby móc wykorzystać metody MC. Wobec tego należy zmodyfikować wzór 1 mnożąc i dzieląc funkcję podcałkową przez fgp argumentu f(x). Dodatkowo warto losować wartości x przy pomocy rozkładu jednorodnego wobec czego fgp przyjmuje stałą wartość równą:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad (2)$$

Dla x z przedziału [a, b].

Zmodyfikowana postać wzoru 1 dana jest wzorem 3.

$$C = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx \quad (3)$$

Podstawiając za 1/f(x) wartość (b-a) otrzymamy równanie 4.

$$C = \int_a^b [(b-a)g(x)] f(x) dx \quad (4)$$

Posiada ono jawną postać fgp argumentów funkcji g(x) wobec czego wartość całki można oszacować za pomocą wzoru 5.

$$C \approx \bar{g} = \frac{1}{N} \sum_a^b (b-a) g(x_i) \quad (5)$$

N-ty moment:

$$\overline{g^n} = \frac{1}{N} \sum_a^b [(b-a)g(x_i)]^n \quad (6)$$

Wariancja średniej:

$$\sigma_{\bar{g}}^2 = \frac{\overline{g^2} - \bar{g}^2}{N} \quad (7)$$

2.2. Metoda losowania systematycznego

Metoda ta polega na podziale obszaru całkowania na M podobszarów o równej lub różnej szerokości. W przypadku tego zadania, obszary są równe i jest ich 10. Dzięki temu granice (lewa i prawa) przedziałów wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}x_m &= a + \Delta x(m-1) \\ x_{m+1} &= a + \Delta x\end{aligned}\quad (8)$$

Gdzie: $m \in \{1, 2, 3 \dots M\}$ oraz $\Delta x = \frac{b-a}{M}$

Każdy podprzedział, ze względu na równy podział oraz jednorodność rozkładu, posiada takie samo prawdopodobieństwo na wylosowanie zmiennej z danego podprzedziału i wynosi ono $p_m = 1/M$.

1,2 moment oraz wariancja każdego podprzedziału obliczana jest za pomocą wzorów 9 i 10

$$\overline{g_m^n} = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} [(b-a)g(x_{im})]^n \quad (9)$$

$$\sigma_m^2 = \overline{g_m^2} - \overline{g_m}^2 \quad (10)$$

Szacowana wartość całki dla całego obszaru oraz jej wariancja średniej wynoszą:

$$C \approx \overline{g} = \sum_{m=1}^M p_m \overline{g_m} \quad (11)$$

$$\sigma_{\overline{g}}^2 = \sum_{m=1}^M \frac{p_m^2}{N_m} \sigma_m^2 \quad (12)$$

2.3. Metoda losowania warstwowego

Metoda ta różni się od metody losowania systematycznego jedynie sposobem doboru liczby losowań do przedziału. Określa się ją za pomocą wzoru 13

$$N_m = \frac{p_m \widehat{\sigma_m}}{\sum_{j=1}^M p_j \widehat{\sigma_j}} N \quad (13)$$

Gdzie: $\widehat{\sigma_m}$ - to prognozowana wartość odchylenia standardowego, liczone za pomocą metody podstawowej dla niewielkiego N np. 100.

3. Wyniki

3.1. C1

Metoda 1	\bar{g}	σ	$\frac{\sigma}{\bar{g}}$ [%]
N = 100	6.02258	0.482645	8.01394
N = 1000	6.1547	0.156163	2.53729
N = 10000	6.06685	0.0489886	0.807481
N = 100000	6.01613	0.0155009	0.257655

Tabela 1. Tabela z wynikami wartości dla całki C1 obliczonej przy pomocy metody podstawowej.

Metoda 2	\bar{g}	σ	$\frac{\sigma}{\bar{g}}$ [%]
N = 100	6.03446	0.051039	0.8458
N = 1000	6.00184	0.015266	0.2544
N = 10000	6.00684	0.004874	0.0811
N = 100000	6.00099	0.001541	0.0257

Tabela 2. Tabela z wynikami wartości dla całki C1 obliczonej przy pomocy losowania systematycznego.

Metoda 3	\bar{g}	σ	$\frac{\sigma}{\bar{g}}$ [%]
N = 100	4.83656	0.0350421	0.724524
N = 1000	6.0097	0.0107511	0.178895
N = 10000	6.00317	0.00345783	0.0576001
N = 100000	6.00032	0.00109299	0.0182155

Tabela 3. Tabela z wynikami wartości dla całki C2 obliczonej przy pomocy losowania warstwowego.

3.2. C2

Metoda 1	\bar{g}	σ	$\frac{\sigma}{\bar{g}}$ [%]
N = 100	1.57114	0.26208	16.6809
N = 1000	1.5053	0.0769674	5.11308
N = 10000	1.44908	0.0236924	1.63499
N = 100000	1.46633	0.00753093	0.513591

Tabela 4. Tabela z wynikami wartości dla całki C2 obliczonej przy pomocy metody podstawowej.

N	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10
100	11	10	8	11	9	12	10	10	11	8
1000	103	110	86	96	84	94	123	105	107	92
10000	972	992	989	970	1009	1000	1045	1012	989	1022
100000	9963	10041	9783	10034	10080	9955	10189	9760	10202	9993

Tabela 5. Ilość liczb należących do odpowiednich przedziałów, która została wylosowana w celu oszacowania całki za pomocą metody podstawowej.

Metoda 2	\bar{g}	σ	$\frac{\sigma}{\bar{g}} [\%]$
N = 100	1.49984	0.055543	3.7032
N = 1000	1.47023	0.018255	1.2416
N = 10000	1.47203	0.005793	0.3935
N = 100000	1.46754	0.001852	0.1262

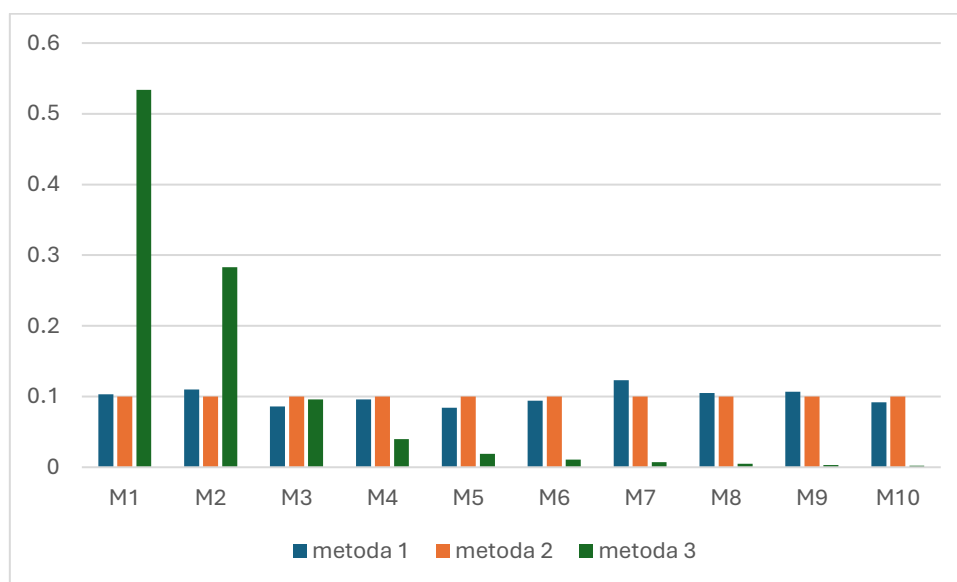
Tabela 6. Tabela z wynikami wartości dla całki C2 obliczonej przy pomocy losowania systematycznego.

Metoda 3	\bar{g}	σ	$\frac{\sigma}{\bar{g}} [\%]$
N = 100	1.45697	0.0310791	2.13313
N = 1000	1.46379	0.00938046	0.640835
N = 10000	1.46876	0.00300501	0.204596
N = 100000	1.47089	0.000950303	0.0646076

Tabela 7. Tabela z wynikami wartości dla całki C2 obliczonej przy pomocy losowania warstwowego.

N	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10
100	53	29	9	4	2	1	1	0	0	1
1000	534	283	96	40	19	11	7	5	3	2
10000	5369	2814	956	394	194	110	67	43	30	23
100000	53328	28647	9299	3982	2015	1098	657	450	307	217

Tabela 8. Ilość liczb należących do odpowiednich przedziałów, która została wylosowana w celu oszacowania całki za pomocą metody losowania warstwowego.



Rys 1. Znormalizowany histogram ilości wylosowanych liczb z danego przedziału dla całki C2 oszacowanej trzema metodami, przedział M1(0,1), M2[1,2) itd.

3.3. C3

Metoda 1	\bar{g}	σ	$\frac{\sigma}{\bar{g}} [\%]$
N = 100	0.24022	0.034736	14.4603
N = 1000	0.24656	0.010599	4.29884
N = 10000	0.24508	0.003399	1.38668
N = 100000	0.24647	0.001075	0.436109

Tabela 9. Tabela z wynikami wartości dla całki C3 obliczonej przy pomocy metody podstawowej.

Metoda 2	\bar{g}	σ	$\frac{\sigma}{\bar{g}} [\%]$
N = 100	0.25403	0.007475	2.94266
N = 1000	0.24571	0.00269	1.09495
N = 10000	0.24647	0.000845	0.342998
N = 100000	0.24589	0.00027	0.109844

Tabela 10. Tabela z wynikami wartości dla całki C3 obliczonej przy pomocy losowania systematycznego.

Metoda 3	\bar{g}	σ	$\frac{\sigma}{\bar{g}} [\%]$
N = 100	0.255113	0.00701474	2.74966
N = 1000	0.246392	0.00186759	0.757977
N = 10000	0.246817	0.000595242	0.241168
N = 100000	0.246191	0.000188838	0.076704

Tabela 11. Tabela z wynikami wartości dla całki C3 obliczonej przy pomocy losowania warstwowego.

4. Wnioski

W przypadku każdej całki metody zachowywały się podobnie. Najgorzej wypadła metoda podstawowa, która uzyskiwała największe odchylenie standardowe oraz błąd względny. Metoda losowania systematycznego wyraźnie zmniejszyła odchylenie standardowe względem poprzedniczki. Najlepsza okazała się metoda losowania warstwowego, która dopasowywała ilość losowanych punktów z przedziału, do zmienności funkcji podcałkowej w danym przedziale. W przypadku całki C2 dało to ciekawy rozkład histogramu ilości wylosowanych liczb z danego przedziału (rys 1), który swoim kształtem przypomina badaną funkcję podcałkową. Różnice w wysokościach słupków między metodami pierwszą i drugą są niewielkie, gdyż w pierwszej metodzie korzystaliśmy z rozkładu normalnego na całym obszarze całkowania, natomiast w metodzie drugiej „na sztywno” przypisaliśmy jednakową liczbę losowań z każdego podprzedziału. Tak więc metoda druga to idealny przypadek metody pierwszej.