1. Celem laboratorium było użycie metod MC do oszacowania wartości trzech całek
2. Metody szacowania
   1. Metoda podstawowa

Całka postaci:

*(1)*

Posiada niejawną postać fgp, należy ją wprowadzić aby móc wykorzystać metody MC. Wobec tego należy zmodyfikować wzór 1 mnożąc i dzieląc funkcję podcałkową przez fgp argumentu f(x). Dodatkowo warto losować wartości x przy pomocy rozkładu jednorodnego wobec czego fgp przyjmuje stałą wartość równą:

*(2)*

Dla x z przedziału [a, b].

Zmodyfikowana postać wzoru 1 dana jest wzorem 3.

*(3)*

Podstawiając za 1/f(x) wartość (b-a) otrzymamy równanie 4.

*(4)*

Posiada ono jawną postać fgp argumentów funkcji g(x) wobec czego wartość całki można oszacować za pomocą wzoru 5.

*(5)*

N-ty moment:

*(6)*

Wariancja średniej:

*(7)*

* 1. Metoda losowania systematycznego

Metoda ta polega na podziale obszaru całkowania na M podobszarów o równej lub różnej szerokości. W przypadku tego zadania, obszary są równe i jest ich 10. Dzięki temu granice (lewa i prawa) przedziałów wynoszą odpowiednio:

*(8)*

Gdzie: oraz

Każdy podprzedział, ze względu na równy podział oraz jednorodność rozkładu, posiada takie samo prawdopodobieństwo na wylosowanie zmiennej z danego podprzedziału i wynosi ono pm = 1/M.

1,2 moment oraz wariancja każdego podprzedziału obliczana jest za pomocą wzorów 9 i 10

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |
|  | (10) |

Szacowana wartość całki dla całego obszaru oraz jej wariancja średniej wynoszą:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |
|  | (12) |

* 1. Metoda losowania warstwowego

Metoda ta różni się od metody losowania systematycznego jedynie sposobem doboru liczby losowań do przedziału. Określa się ją za pomocą wzoru 13

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Gdzie: - to prognozowana wartość odchylenia standardowego, liczone za pomocą metody podstawowej dla niewielkiego N np. 100.

1. Wyniki
   1. C1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Metoda 1 |  |  | [%] |
| N = 100 | 6.02258 | 0.482645 | 8.01394 |
| N = 1000 | 6.1547 | 0.156163 | 2.53729 |
| N = 10000 | 6.06685 | 0.0489886 | 0.807481 |
| N = 100000 | 6.01613 | 0.0155009 | 0.257655 |

Tabela 1.Tabela z wynikami wartości dla całki C1 obliczonej przy pomocy metody podstawowej.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Metoda 2 |  |  | [%] |
| N = 100 | 6.03446 | 0.051039 | 0.8458 |
| N = 1000 | 6.00184 | 0.015266 | 0.2544 |
| N = 10000 | 6.00684 | 0.004874 | 0.0811 |
| N = 100000 | 6.00099 | 0.001541 | 0.0257 |

Tabela 2. Tabela z wynikami wartości dla całki C1 obliczonej przy pomocy losowania systematycznego.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Metoda 3 |  |  | [%] |
| N = 100 | 4.83656 | 0.0350421 | 0.724524 |
| N = 1000 | 6.0097 | 0.0107511 | 0.178895 |
| N = 10000 | 6.00317 | 0.00345783 | 0.0576001 |
| N = 100000 | 6.00032 | 0.00109299 | 0.0182155 |

Tabela 3.Tabela z wynikami wartości dla całki C2 obliczonej przy pomocy losowania warstwowego.

* 1. C2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Metoda 1 |  |  | [%] |
| N = 100 | 1.57114 | 0.26208 | 16.6809 |
| N = 1000 | 1.5053 | 0.0769674 | 5.11308 |
| N = 10000 | 1.44908 | 0.0236924 | 1.63499 |
| N = 100000 | 1.46633 | 0.00753093 | 0.513591 |

Tabela 4.Tabela z wynikami wartości dla całki C2 obliczonej przy pomocy metody podstawowej.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 | M7 | M8 | M9 | M10 |
| 100 | 11 | 10 | 8 | 11 | 9 | 12 | 10 | 10 | 11 | 8 |
| 1000 | 103 | 110 | 86 | 96 | 84 | 94 | 123 | 105 | 107 | 92 |
| 10000 | 972 | 992 | 989 | 970 | 1009 | 1000 | 1045 | 1012 | 989 | 1022 |
| 100000 | 9963 | 10041 | 9783 | 10034 | 10080 | 9955 | 10189 | 9760 | 10202 | 9993 |

Tabela 5. Ilość liczb należących do odpowiednich przedziałów, która została wylosowana w celu oszacowania całki za pomocą metody podstawowej.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Metoda 2 |  |  | [%] |
| N = 100 | 1.49984 | 0.055543 | 3.7032 |
| N = 1000 | 1.47023 | 0.018255 | 1.2416 |
| N = 10000 | 1.47203 | 0.005793 | 0.3935 |
| N = 100000 | 1.46754 | 0.001852 | 0.1262 |

Tabela 6.Tabela z wynikami wartości dla całki C2 obliczonej przy pomocy losowania systematycznego.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Metoda 3 |  |  | [%] |
| N = 100 | 1.45697 | 0.0310791 | 2.13313 |
| N = 1000 | 1.46379 | 0.00938046 | 0.640835 |
| N = 10000 | 1.46876 | 0.00300501 | 0.204596 |
| N = 100000 | 1.47089 | 0.000950303 | 0.0646076 |

Tabela 7.Tabela z wynikami wartości dla całki C2 obliczonej przy pomocy losowania warstwowego.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 | M7 | M8 | M9 | M10 |
| 100 | 53 | 29 | 9 | 4 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1000 | 534 | 283 | 96 | 40 | 19 | 11 | 7 | 5 | 3 | 2 |
| 10000 | 5369 | 2814 | 956 | 394 | 194 | 110 | 67 | 43 | 30 | 23 |
| 100000 | 53328 | 28647 | 9299 | 3982 | 2015 | 1098 | 657 | 450 | 307 | 217 |

Tabela 8. Ilość liczb należących do odpowiednich przedziałów, która została wylosowana w celu oszacowania całki za pomocą metody losowania warstwowego.

Rys 1. Znormalizowany histogram ilości wylosowani liczby z danego przedziału dla całki C2 oszacowanej trzema metodami, przedział M1(0,1), M2[1,2) itd.

* 1. C3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Metoda 1 |  |  | [%] |
| N = 100 | 0.24022 | 0.034736 | 14.4603 |
| N = 1000 | 0.24656 | 0.010599 | 4.29884 |
| N = 10000 | 0.24508 | 0.003399 | 1.38668 |
| N = 100000 | 0.24647 | 0.001075 | 0.436109 |

Tabela 9.Tabela z wynikami wartości dla całki C3 obliczonej przy pomocy metody podstawowej.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Metoda 2 |  |  | [%] |
| N = 100 | 0.25403 | 0.007475 | 2.94266 |
| N = 1000 | 0.24571 | 0.00269 | 1.09495 |
| N = 10000 | 0.24647 | 0.000845 | 0.342998 |
| N = 100000 | 0.24589 | 0.00027 | 0.109844 |

Tabela 10.Tabela z wynikami wartości dla całki C3 obliczonej przy pomocy losowania systematycznego.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Metoda 3 |  |  | [%] |
| N = 100 | 0.255113 | 0.00701474 | 2.74966 |
| N = 1000 | 0.246392 | 0.00186759 | 0.757977 |
| N = 10000 | 0.246817 | 0.000595242 | 0.241168 |
| N = 100000 | 0.246191 | 0.000188838 | 0.076704 |

Tabela 11.Tabela z wynikami wartości dla całki C3 obliczonej przy pomocy losowania warstwowego.

1. Wnioski

W przypadku każdej całki metody zachowywały się podobnie. Najgorzej wypadała metoda podstawowa, która uzyskiwała największe odchylenie standardowe oraz błąd względny. Metoda losowania systematycznego wyraźnie zmniejszyła odchylenie standardowe względem poprzedniczki. Najlepsza okazała się metoda losowania warstwowego, która dopasowywała ilość losowanych punktów z przedziału, do zmienności funkcji podcałkowej w danym przedziale. W przypadku całki C2 dało to ciekawy rozkład histogramu ilości wylosowani liczby z danego przedziału (rys 1), który swoim kształtem przypomina badaną funkcję podcałkową. Różnice w wysokości słupków między metodami pierwszą i drugą są niewielkie, gdyś w pierwszej metodzie korzystaliśmy z rozkładu normalnego na całym obszarze całkowania, natomiast w metodzie drugiej ,,na sztywno” przypisaliśmy jednakową liczbę losowań z każdego podprzedziału. Tak więc metoda druga to idealny przypadek metody pierwszej.