

Wyposażeni w narzędzie do obliczania zespolonego pierwiastka kwadratowego możemy, używając takiego samego wzoru, jak ten dla rozwiązań rzeczywistych, rozwiązać w liczbach zespolonych dowolne równanie kwadratowe. Jeżeli równanie, które chcemy rozwiązać, ma postać:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

gdzie wszystkie występujące liczby są zespolone, to możemy zapisać jego rozwiązania jako

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Podobnie jak dla obliczania zespolonego pierwiastka kwadratowego błędy mogą wystąpić, jeżeli  $|4ac|$  jest małe w porównaniu z  $|b^2|$ .

Jak pokazaliśmy, równania kwadratowe mają dwa pierwiastki zespolone. Ogólnie, każdy wielomian stopnia  $n \geq 1$  ma dokładnie  $n$  zer zespolonych, przy czym zera te trzeba liczyć z krotnościami. I tak na przykład, jeżeli w równaniu kwadratowym  $b^2 = 4ac$ , to pierwiastek podwójny  $z_1 = z_2$  liczony jest dwukrotnie.

Omówimy teraz przykład, który pojawi się w dalszej części tego rozdziału. Należy rozwiązać, z dokładnością do trzech miejsc po przecinku, równanie

$$z^2 - z + c = 0,$$

gdzie  $c = -1/2 + (1/2)i$ . Powyższy przepis mówi, że musimy obliczyć (przyjmujemy  $a = 1$  i  $b = -1$ )

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3 - 2i}}{2}.$$

Teraz stosujemy algorytm obliczania pierwiastka kwadratowego z  $3 - 2i$  (w tym przypadku będzie  $u = 3$  oraz  $v = -2$ ). A zatem,

$$x = \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} \approx 1,817,$$

$$y = \frac{v}{2x} \approx \frac{-2}{2 \cdot 1,817} \approx -0,550,$$

i dalej

$$\sqrt{3 - 2i} \approx \pm(1,817 - 0,550i).$$

Wstawiając tę wartość do wyrażenia na  $z_1$  i  $z_2$ , otrzymujemy

$$z_{1,2} \approx \frac{1 \pm (1,817 - 0,550i)}{2},$$

tzn.

$$z_1 \approx 1,408 - 0,275i,$$

$$z_2 \approx -0,408 + 0,275i.$$

### 13.4. Więźniowie kontra uciekinierzy

Jesteśmy teraz dobrze przygotowani do poruszenia właściwego tematu tego rozdziału: zbiorów Julii. Najprostszym przykładem jest procedura iterowania (w dziedzinie zespolonej) funkcji nieliniowej

$$z \rightarrow z^2.$$

Geometrycznie, podnoszenie do kwadratu liczby zespolonej oznacza, że odpowiednia „długość” liczby  $z$  jest podnoszona do kwadratu, a odpowiedni kąt,  $\arg z$  — podwajany (mod  $2\pi$ ). W poniższej tabeli przedstawiamy trzy przykłady. Wybieramy jeden punkt początkowy wewnątrz okręgu jednostkowego, tzn. o wartości bezwzględnej mniejszej niż 1, drugi na okręgu jednostkowym, a trzeci na zewnątrz niego.<sup>7</sup> Podnosząc  $z$  do kwadratu, otrzymujemy  $z^2$ , potem  $z^4$  i tak dalej, tak jak w tabeli 13.1.

	długość	kąt	długość	kąt	długość	kąt
$z$	0,8	10°	1,0	10°	1,50	50°
$z^2$	0,64	20°	1,0	20°	2,25	100°
$z^4$	0,4096	40°	1,0	40°	5,06	200°
$z^8$	0,1678	80°	1,0	80°	25,63	40°
$z^{16}$	0,0281	160°	1,0	160°	656,90	80°
$z^{32}$	0,0008	320°	1,0	320°	431439,89	160°

**Tabela 13.1:** Orbits trzech punktów początkowych pod działaniem prostego przekształcenia  $z \rightarrow z^2$

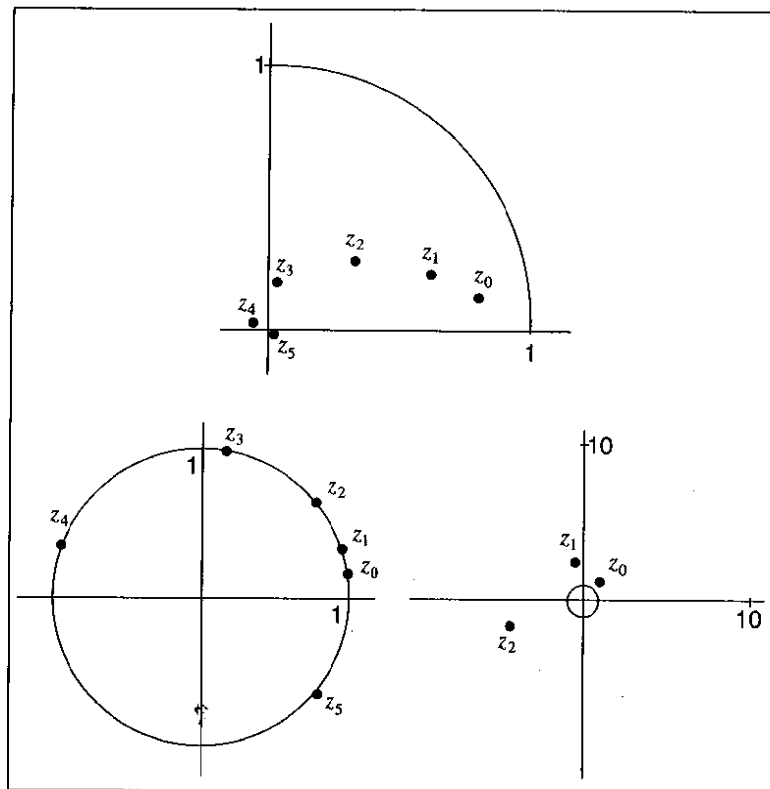
W tabeli 13.1 pokazano dynamikę generowanych punktów. We wszystkich przypadkach możemy zaobserwować, że

<sup>7</sup> Okrąg jednostkowy jest to zbiór tych punktów na płaszczyźnie zespolonej, których odległość od początku układu współrzędnych jest równa 1, tj.  $\{x + yi: x^2 + y^2 = 1\}$ .

**Dynamika  
przekształcenia  
 $z \rightarrow z^2$**

## Iterowanie

$$z \rightarrow z^2$$



**Rysunek 13.10:** Iterowanie trzech punktów początkowych z tabeli 13.1

ciągi punktów krążą wokół początku układu współrzędnych. Jednakże punkt początkowy wewnątrz okręgu jednostkowego wiedzie do ciągu zbieżnego do początku układu, punkt dokładnie na okręgu jednostkowym — do ciągu, który zostaje tam na zawsze, natomiast punkt na zewnątrz — do ciągu, który ucieka do nieskończoności, tj. wartości bezwzględne kolejnych iteracji stają się coraz większe (zob. rys. 13.10). W rzeczywistości, jeżeli wartość bezwzględna punktu początkowego wynosi na przykład 10, to wartościami bezwzględnymi kolejnych iteracji będą liczby:  $100 = 10^2$  dla pierwszej,  $10\,000 = 10^4$  dla drugiej,  $100\,000\,000 = 10^8$  dla trzeciej,  $10\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{16}$  dla czwartej,  $100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{32}$  dla szóstej i tak dalej. Można zatem powiedzieć, że wartości bezwzględne już po kilku krokach dosłownie eksplodują.

Powyższe obserwacje prowadzą do ważnej dychotomii dynamiki: płaszczyzna zespolona wartości początkowych zostaje podzielona na dwa podzbiory. Do pierwszego z nich należą te punkty początkowe, dla których iteracje uciekają. Nazwiemy go *zbiorem punktów-uciekierów*  $U$ . Dla wszystkich innych punktów początkowych iteracje pozostają na zawsze w obszarze ograniczonym. Punkty o tej własności tworzą *zbiór punktów-więźniów*  $W$ . Zwracamy uwagę, że  $W$  jest dyskiem o promieniu 1 wokół zera, natomiast  $U$  jest jego zewnętrzem.<sup>8</sup> Granicą między  $W$  a  $U$  jest okrąg jednostkowy. W obecnym kontekście będziemy go nazywać *zbiorem Julii* dla tej iteracji.

Dla wartości początkowych należących do zbioru Julii, tzn. takich, że  $|z| = 1$ , iteracje generują jedynie punkty, które znowu leżą na okręgu jednostkowym. Innymi słowy zbiór Julii jest *niezmienniczy* pod działaniem przekształcenia.

Zwróćmy uwagę na to, że wewnątrz zbioru  $W$  można interpretować jako basen przyciągania punktu 0. Jeżeli ograniczymy się do rzeczywistych punktów początkowych  $z_0$ , to zachowanie można przedstawić za pomocą iteracji graficznej (zob. rys. 13.11).

Zwróćmy uwagę na to, że iterowane przekształcenie ma dwa punkty stałe: 0 i 1. Jednakże 0 jest punktem przyciągającym, a 1 odpychającym, tzn. jeżeli wystartujemy blisko 1, na przykład z punktu  $z_0 = 1 + \varepsilon$ , to  $z_1$  będzie około dwukrotnie dalej od 1 niż  $z_0$ ,  $z_1 = (1 + \varepsilon)^2 \approx 1 + 2\varepsilon$ . Jeżeli będziemy rozważać iteracje  $z^2$  na sferze, tak jak wyjaśniono w paragrafie poprzednim, biegun północny będzie atraktorem dla dynamiki  $z \rightarrow z^2$ . W taki sposób zbiór uciekinierów  $U$  może również być interpretowany jako basen przyciągania — punktu w nieskończoności. A zatem dychotomia dynamiki polega na tym, że pewne orbity  $z_0, z_1, z_2, \dots$  uciekają do nieskończoności, a inne nie.

Mamy więc dwa atraktory: początek układu współrzędnych 0 i punkt w nieskończoności. Ich basenami przyciągania są odpowiednio: otwarty dysk jednostkowy i zewnętrzne dysku. Punkty brzegowe natomiast, leżące na okręgu jednostkowym, nieprzerwanie wędrują po tym okręgu. To

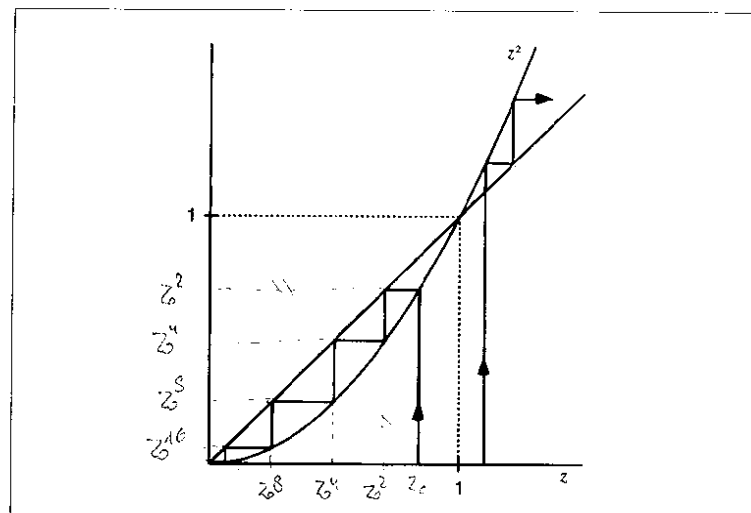
**Zbiór uciekinierów i zbiór więźniów**

**Dwa baseny przyciągania**

**Punkty stałe i baseny przyciągania**

<sup>8</sup> Por. paragraf o zbiorze Cantora jako o zbiorze punktów-więźniów z rozdz. 2.

Iteracja  
graficzna dla  
 $z \rightarrow z^2$



**Rysunek 13.11:** Punkty początkowe  $z_0$ , dla których  $|z_0| < 1$ , szybko zbiegają do początku układu, a punkty, dla których  $|z_0| > 1$ , uciekają do nieskończoności

właśnie brzeg, który jest wspólny dla obu basenów przyciągania, nosi nazwę zbioru Julii. W naszym prościutkim przykładzie zbiór Julii jest okręgiem jednostkowym, a zatem obiektem pochodzącym z klasycznej geometrii euklidesowej. Jednakże przypadek ten jest wyjątkowy: okrąg nie jest fraktalem, a większość zbiorów Julii to fraktale. Poza tą własnością posiada on jednak wiele ważnych własności typowych dla zbiorów Julii: jest on brzegiem basenów przyciągania, a dynamika na nim jest chaotyczna.

Zbiory Julii dla  
rodziny  
kwadratowej

Przypadek szczególny  $z \rightarrow z^2$  stanowi dla nas drzwi wejściowe do zadziwiającej menażerii pięknych fraktalnych zbiorów Julii. Jeden z działów tego ogrodu zoologicznego został zbudowany wokół iteracji przekształceń  $R_c(z) = z^2 + c$ , gdzie  $c$  jest pewnym parametrem zespolonym. Zbiór Julii dla  $z \rightarrow z^2$  leży w jego centrum, wystarczy przyjąć  $c = 0$ . Tak samo jak okrąg jednostkowy jest brzegiem zbioru uciekinierów dla  $R_0(z) = z^2$ , inne zbiory Julii są brzegami zbiorów uciekinierów dla  $z \rightarrow z^2 + c$ . Właśnie tę własność można przyjąć za ich definicję. By zobaczyć inne zbiory Julii potrzebny nam jest specjalny przyrząd do ich oglądania. Dowiemy się teraz, jak zbudować takie urządzenie. W rzeczywistości będzie to tylko wizualizacja zbioru uciekinierów  $U$  dla dowolnie wybranego  $c$ , cokolwiek bowiem pozostanie poza

nim będzie leżało w zbiorze więźniów  $W$ , a wspólnym brzegiem  $U$  i  $W$  jest zbiór Julii.

Zacznijmy od sformułowania pewnych ścisłych definicji. **Definicja** Zbiorem uciekinierów dla parametru  $c$  jest

$$U_c = \{z_0 : |z_n| \rightarrow \infty, \text{ gdy } n \rightarrow \infty\}.$$

Przy tej definicji orbita  $z_0, z_1, z_2, \dots$  punktu początkowego  $z_0$  jest oczywiście dana przez

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Zbiorem więźniów dla parametru  $c$  jest

$$W_c = \{z_0 : z_0 \notin U_c\},$$

jest to dopełnienie zbioru  $U_c$ . Zbiór Julii dla parametru  $c$  jest brzegiem zbioru uciekinierów  $U_c$ . Punkt nazywamy punktem brzegowym, jeżeli dowolnie blisko niego możemy znaleźć zarówno punkty, które uciekają, jak i punkty będące więźniami.

Jako pierwszy przykład wybierzmy  $c = -0,5 + 0,5i$  i kilka różnych punktów początkowych (zob. tab. 13.2 i 13.3). Możemy zaobserwować dwa podstawowe typy zachowania. W pierwszej tabeli iterowane punkty uciekają do nieskończoności. W drugiej tabeli iterowane punkty nie uciekają do nieskończoności, ale po pewnym czasie stabilizują się wokół pewnej wartości, mianowicie  $z \approx -0,408 + 0,275i$ . Ten typ zachowania sugeruje, że znowu mamy dwa baseny przyciągania, ale zero tym razem nie jest żadnym z punktów przyciągających. W paragrafie 13.6 wyznaczmy punkty stałe tego przekształcenia jako rozwiązania pewnego równania.

Na rysunku 13.12 pokazano wynik rozszerzonego eksperymentu, w którym testowano wszystkie punkty płaszczyzny. Zbiór więźniów jest zaznaczony na czarno, a wszystko co pozostało białe należy do zbioru uciekinierów. Brzeg czarnego obszaru jest zbiorem Julii. Oczywiście krzywa graniczna jest typowym fraktalem. Niezależnie od tego, w jakim stopniu powiększymy obszar blisko zbioru Julii, zawsze otrzymamy coś wyglądającego podobnie do obszaru przed powiększeniem (rys. 13.13).

Kluczem do wyznaczenia zbioru uciekinierów  $U_c$  jest obserwacja, że punkty  $z_k$  z orbity uciekną na pewno do nieskończoności, jeżeli tylko ich wartość bezwzględna jest dostatecznie duża. Wydaje się to jasne, bowiem kwadrat dużej liczby

**Pierwszy  
fraktalny zbiór  
Julii**

**Punkt,  
z którego się  
wraca**

Trzej  
uciekinierzy

	Orbita 1		Orbita 2		Orbita 3	
	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
$z_0$	1,00	0,00	0,50	0,25	0,00	0,88
$z_1$	0,50	0,50	-0,31	0,75	-1,27	0,50
$z_2$	-0,50	1,00	-0,96	0,03	0,87	-0,77
$z_3$	-1,25	-0,50	0,43	0,44	-0,34	-0,85
$z_4$	-0,81	1,75	-0,51	0,88	-1,12	1,07
$z_5$	-2,90	3,34	-1,01	-0,39	-0,41	-1,90
$z_6$	-3,26	-18,91	0,37	1,30	-3,93	2,04
$z_7$	-347,46	123,68	-2,04	1,46	10,79	-15,52
$z_8$			1,53	-5,46	-124,77	-334,49
$z_9$			-28,01	-16,27		

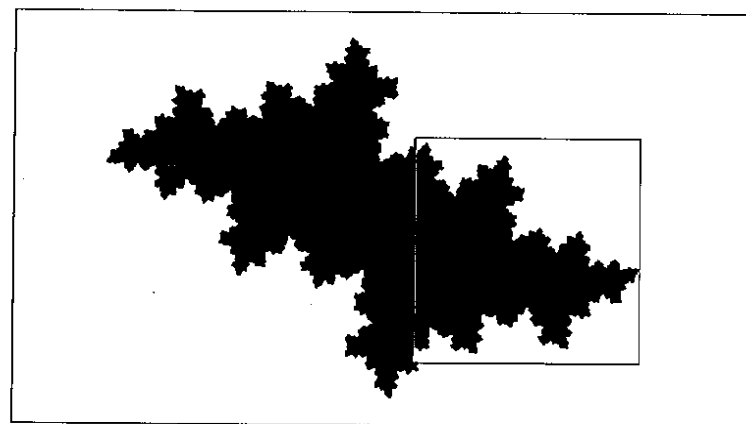
**Tabela 13.2:** Orbity trzech punktów początkowych dla  $z \rightarrow z^2 + c$ ,  $c = -0,5 + 0,5i$ . Wszystkie trzy orbity uciekają do nieskończoności

## Zbiór więźniów

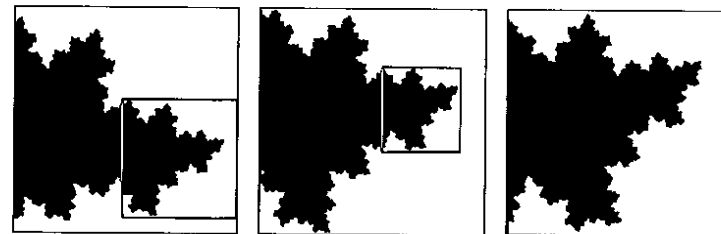
	Orbita 1		Orbita 2		Orbita 3	
	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
$z_0$	0,000	0,000	0,500	-0,250	-0,250	-0,500
$z_1$	-0,500	0,500	-0,313	0,250	-0,688	0,250
$z_2$	-0,500	0,000	-0,465	0,344	-0,090	0,156
$z_3$	-0,250	0,500	-0,402	0,180	-0,516	0,472
$z_4$	-0,688	0,250	-0,371	0,355	-0,456	0,013
$z_5$	-0,090	0,156	-0,488	0,237	-0,292	0,488
$z_{100}$	-0,473	0,291	-0,393	0,290	-0,438	0,217
$z_{200}$	-0,394	0,279	-0,411	0,271	-0,409	0,290
$z_{300}$	-0,411	0,273	-0,409	0,276	-0,407	0,272
$z_{400}$	-0,408	0,276	-0,409	0,275	-0,409	0,276
$z_{500}$	-0,409	0,275	-0,409	0,275	-0,409	0,275

**Tabela 13.3:** Orbity trzech punktów początkowych dla  $z \rightarrow z^2 + c$ ,  $c = -0,5 + 0,5i$ . Żadna z nich nie ucieka do nieskończoności. Wydaje się, że zbiegają one do punktu  $z \approx 0,41 + 0,28i$

jest znacznie większy od niej samej, a dodawanie stałej nie powinno w tej sytuacji mieć znaczenia. W następnym kroku iteracji  $z \rightarrow z^2 + c$  efekt ten zaznacza się jeszcze silniej. W rezultacie widzimy, że przy iterowaniu dużych (co do wartości bezwzględnej — *przyp. tłum.*) liczb  $z$  stałą  $c$  można zaniedbać, zatem zachowanie będzie takie samo jak dobrze już przez nas rozumiane zachowanie iteracji  $z \rightarrow z^2$ . Powstaje jednak pytanie, jak duża musi być ta wartość bezwzględna, by można było na pewno stwierdzić, że orbita ucieknie do nieskończoności? Szczęśliwie dla nas istnieje optymalna odpowiedź na



**Rysunek 13.12:** Czarnym kolorem zaznaczono zbiór więźniów dla  $z \rightarrow z^2 + c$ ,  $c = -0,5 + 0,5i$ . Punkty poza nim uciekają do nieskończoności. Powiększenie obszaru wziętego w ramkę pokazuje na rysunku 13.13



**Rysunek 13.13:** Kolejne powiększenia zbioru więźniów dla  $z \rightarrow z^2 + c$ ,  $c = -0,5 + 0,5i$ , w pobliżu punktu brzegowego. Kolejne rysunki (od lewej do prawej) są powiększeniami kolejnych małych obszarów, branych w ramkę na rysunku poprzednim

to pytanie. Wartość ta jest dana przez pewną dającą się obliczyć liczbę  $r(c)$ , zależną od parametru  $c$ . Można wykazać, że właściwym wyborem jest większa z liczb  $|c|$  i 2:

$$r(c) = \max(|c|, 2).$$

A zatem jeżeli  $|z_k|$  przekracza  $r(c)$ , to możemy być pewni, że iteracje uciekają do nieskończoności. Algorytm, który klasyfikuje punkty początkowe pod kątem należenia do zbioru uciekinierów lub do zbioru więźniów może więc działać w sposób następujący. Jeżeli wartość bezwzględna pewnej iteracji przekroczy  $r(c)$ , to algorytm się kończy i zalicza dany punkt początkowy do zbioru uciekinierów. Jest jasne, że wartość bezwzględna iteracji punktu, który ucieka do nieskoń-

**Zbiór więźniów dla**  
 $c = -0,5 + 0,5i$

**Powiększenia zbioru więźniów dla**  
 $c = -0,5 + 0,5i$

czoności, musi w końcu przekroczyć wartość  $r(c)$ . Gdyby tak nie było, to punkty z orbity nigdy nie oddaliłyby się dostatecznie od zera, a punkt początkowy byłby więźniem. Zatem kryterium rzeczywiście wyłapuje wszystkie punkty, które są uciekinierami. Ale w praktyce może się zdarzyć, że orbita ucieka z dysku o promieniu  $r(c)$  dopiero po bardzo długim czasie. Musimy więc ograniczyć maksymalną dopuszczalną liczbę iteracji. Przyjmijmy — z dokładnością daną przez algorytm — że jeżeli wartości bezwzględne iteracji danego punktu przez ten czas nie przekroczą  $r(c)$ , to punkt początkowy nie należy do basenu przyciągania punktu w nieskończoności, lecz do zbioru więźniów.

### Promień progowy

Udowodnimy teraz następujące stwierdzenie:

*Niech  $z$  będzie liczbą zespoloną, której wartość bezwzględna jest nie mniejsza niż  $c$  i nie większa niż 2. Wtedy  $z$  jest uciekinierem przy iterowaniu przekształcenia  $z \rightarrow z^2 + c$ .*

Niech będzie dany parametr  $c$ , a  $r(c) = \max(|c|, 2)$ . Zakładamy, że punkt początkowy iteracji spełnia warunki

$$|z| \geq |c| \text{ oraz } |z| > 2.$$

Istnieje wtedy (mała) dodatnia liczba  $\varepsilon > 0$  taka, że  $|z| = 2 + \varepsilon$ . Z nierówności trójkąta dla liczb zespolonych mamy

$$|z|^2 = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|.$$

Rozwiązując tę nierówność względem  $|z^2 + c|$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |z^2 + c| &\geq |z^2| - |c| \\ &= |z|^2 - |c| \\ &\geq |z|^2 - |z| \\ &= (|z| - 1)|z| \\ &= (1 + \varepsilon)|z|. \end{aligned}$$

A zatem po jednokrotnym przebiegu wartość bezwzględna wzrośnie co najmniej o czynnik  $1 + \varepsilon$ . Wartość bezwzględna  $k$ -tego obrazu punktu  $z$  będzie co najmniej  $(1 + \varepsilon)^k$  razy większa niż wartość bezwzględna  $|z|$ . Tym samym wartości bezwzględne dążą do nieskończoności i  $z$  należy do basenu przyciągania punktu w nieskończoności.

Z tego stwierdzenia wynika natychmiast, że jeżeli którykolwiek z punktów orbity  $z \rightarrow z^2 + c$  przekracza co do wartości bezwzględnej liczbę  $r(c) = \max(|c|, 2)$ , to orbita musi uciec do nieskończoności. Zatem punkt początkowy tej orbity należy do zbioru uciekinierów.

Pokażemy teraz, w jaki sposób można wykorzystać tę ważną własność w algorytmie, coraz lepiej przybliżającym zbiór więźniów. Na początek wybierzmy parametr  $c$  i wyznaczmy promień progowy  $r(c) = \max(|c|, 2)$ . Ponadto określmy, jakim obszarem na płaszczyźnie zespolonej jesteśmy zainteresowani i umieścmy go na siatce pikseli na ekranie komputera. Piksele odpowiadają punktom początkowym orbit, które zaraz będziemy badać. Najpierw sprawdzamy, czy są takie punkty początkowe  $z_0$ , których wartość bezwzględna przekracza  $r(c)$ . Wszystkie je można odrzucić, wiadomo już, że należą one do zbioru uciekinierów  $U_c$ . A zatem pierwszym przybliżeniem zbioru więźniów  $W_c$  będzie po prostu dysk o promieniu  $r(c)$  i środku w zerze. Przybliżenie to oznaczać będziemy przez  $Q_c^{(0)}$ ,

$$Q_c^{(0)} = \{z_0 : |z_0| \leq r(c)\}.$$

Następnie jeden raz działamy przekształceniem na pozostałe punkty (albo piksele), otrzymując dla każdego piksela liczbę zespoloną  $z_1$ . Ponownie stosujemy kryterium uciekania orbit. Jeżeli wartość bezwzględna  $|z_1|$  jest większa niż  $r(c)$ , to odpowiedni punkt początkowy jest uciekinierem i może zostać wykluczony z dalszych rozważań. W rezultacie otrzymamy nieco lepsze przybliżenie zbioru więźniów. Składa się on z wszystkich punktów, które po jednej iteracji przekształcenia  $R_c$  wciąż pozostają w  $Q_c^{(0)}$ . Powiemy, że tworzą one przeciwobraz zbioru  $Q_c^{(0)}$  i oznaczymy go przez  $Q_c^{(-1)}$ :

$$Q_c^{(-1)} = \{z_0 : |z_1| \leq r(c)\}.$$

Powtarzamy następnie procedurę dla wszystkich pozostałych punktów, co da nam kolejne przybliżenie, i tak dalej. Po każdej iteracji odrzucamy pewne punkty, a zatem przybliżamy się do zbioru więźniów. Formalnie można napisać

$$Q_c^{(-k)} = \{z_0 : |z_k| \leq r(c)\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

oraz

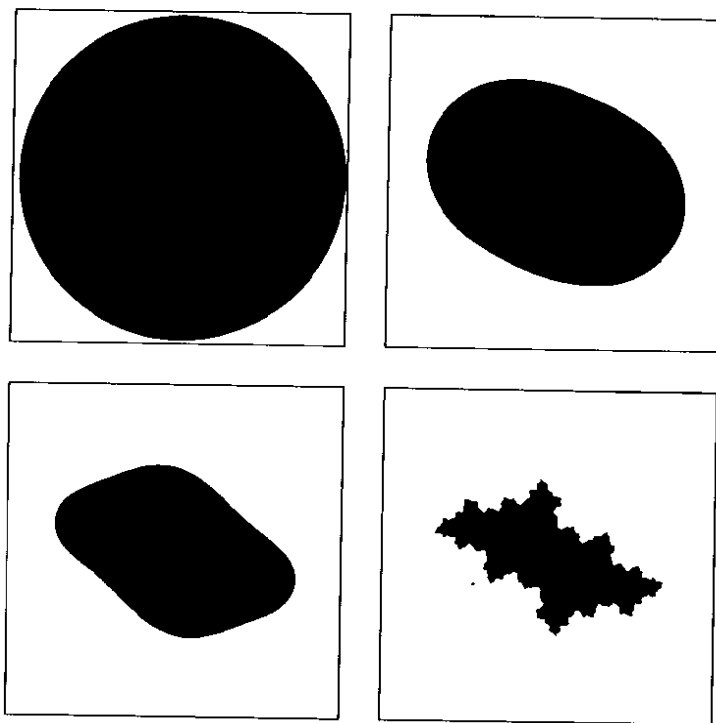
$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_c^{(-k)} = P_c.$$

W przypadku  $c = 0$  możemy po prostu opisać te zbiory wzorem. Mamy wtedy  $r(c) = 2$ , więc początkowym przybliżeniem  $Q_c^{(0)}$  będzie dysk o promieniu 2. Kolejne przybliże-

**Przybliżenia zbioru uciekinierów**

**Przypadek  $c =$**

Przybliżenia dla  
 $c = -0,5 + 0,5i$



**Rysunek 13.14:** Przybliżenia dla  $c = -0,5 + 0,5i$ . U góry po lewej pokazano pierwsze przybliżenie,  $Q_c^{(0)}$  (dysk o promieniu 2). Na dalszych rysunkach pokazano  $Q_c^{(-k)}$ , gdzie  $k = 1, 2$  oraz 10

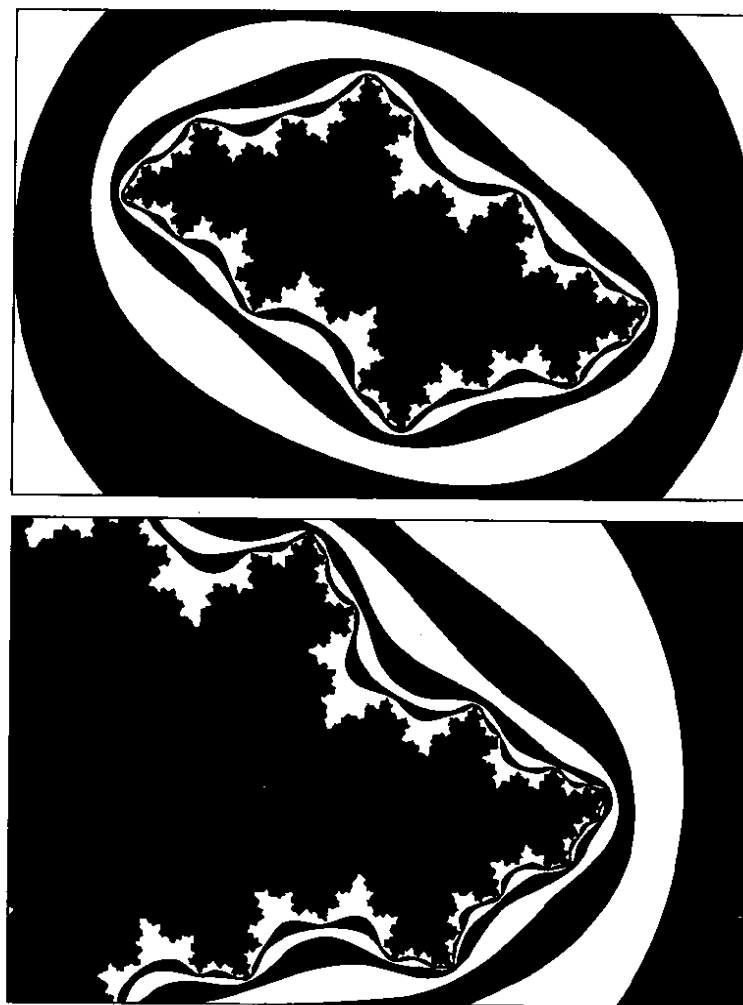
nia też będą dyskami. Na przykład  $Q_c^{(-1)}$  składa się z tych wszystkich punktów  $z$ , dla których  $|z^2| \leq 2$ . Jest to zbiór punktów  $z$ , spełniających  $|z| \leq \sqrt{2}$ . A zatem  $Q_c^{(-1)}$  jest dyskiem o promieniu  $\sqrt{2}$ . Promieniem kolejnego przybliżenia,  $Q_c^{(-2)}$ , jest  $\sqrt{\sqrt{2}} = 2^{1/4}$ . Otrzymujemy wzór ogólny

$$Q_c^{(-k)} = \{z_0 : |z_0| \leq 2^{1/2^k}\}.$$

Ciąg promieni szybko zbiega do 1, czyli do promienia dysku, będącego zbiorem więźniów  $W_c$ . A oto lista kilku pierwszych promieni: 2, 1,414, 1,189, 1,090, 1,044, 1,022, 1,011, 1,005, ...

**Przypadek**  
 $c = -0,5 + 0,5i$

W przypadku z rysunków 13.12 i 13.13, gdzie  $c = -0,5 + 0,5i$ , nie potrafimy podać jawnych wyrażeń opisujących przybliżenia zbioru więźniów, ale na rysunku 13.14 pokazujemy kolejne jego przybliżenia.



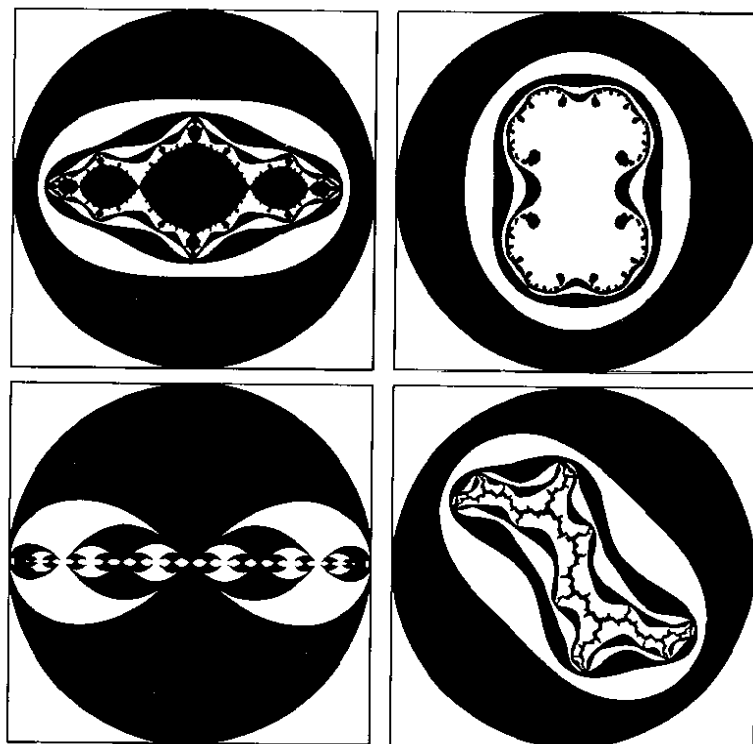
**Rysunek 13.15:** Na górnym rysunku przedstawiono nałożone na siebie przybliżenia dla  $c = -0,5 + 0,5i$ , zaznaczone na przemian na biało i na czarno. Na czarno:  $Q_c^{(0)}$ ,  $Q_c^{(-2)}$ ,  $Q_c^{(-4)}$  oraz  $Q_c^{(-20)}$ , a na biało:  $Q_c^{(-1)}$ ,  $Q_c^{(-3)}$  oraz  $Q_c^{(-5)}$ . Na rysunku dolnym pokazano powiększenie okolicy brzegu. Na czarno:  $Q_c^{(0)}$ ,  $Q_c^{(-2)}$ ,  $Q_c^{(-4)}$ ,  $Q_c^{(-6)}$  oraz  $Q_c^{(-20)}$ , a na biało:  $Q_c^{(-1)}$ ,  $Q_c^{(-3)}$ ,  $Q_c^{(-5)}$  oraz  $Q_c^{(-7)}$

Możemy nakładać przybliżenia jedno na drugie, kolejne na poprzednie. W ten sposób łatwiej będzie je porównywać, a ponadto wyraźniej zobaczymy, w jaki sposób przybliżany jest zbiór więźniów. W tym celu trzeba zaznaczać kolejne przybliżenia na przemian różnymi kolorami, na przy-

Przybliżenia  
kolorowane na  
przemian

**Przybliżenia**  
nakładane jed-  
na drugie

## Przybliżenia



Rysunek 13.16: Przybliżenia dla  $c = -1, 0, 4, -2$ ,  $i$  (od górnego lewego rysunku do dolnego prawego)

kład białym i czarnym. Na naszym kolejnym rysunku 13.15 pokazaliśmy przybliżenia oznaczane w taki właśnie sposób.  $Q_c^{(0)}$ ,  $Q_c^{(-2)}$  oraz  $Q_c^{(-10)}$  są czarne, a  $Q_c^{(-1)}$  i  $Q_c^{(-5)}$  są białe.

Na rysunku 13.16 tak właśnie postąpiono dla innych parametrów  $c$ . Możemy zaobserwować całą gamę różnorodnych efektów. Dla  $c = -1$  otrzymujemy spójny (złożony z jednej części) zbiór Julii, będący wspólnym brzegiem dwóch basenów przyciągania (basenu nieskończoności i basenu ograniczonego atraktora, którym w tym przypadku jest cykl o okresie 2:  $-1, 0, -1, 0, \dots$ ). W pozostałych przypadkach nie istnieje ograniczony atraktor, zbiór więźniów nie ma punktów wewnętrznych i pokrywa się ze zbiorem Julii. Dla  $c = 0, 4$  zbiór więźniów rozmywa się na pył punktów, a dla  $c = -2$  i  $c = i$  możemy zaobserwować przypadki brzegowe: zbiór Julii jest pojedynczym zbiorem spójnym. Jesteśmy już bliżej odkrycia ważnej dychotomii: zbiory więźniów są albo

## 13.4. Więźniowie kontra uciekinierzy

spójne, albo są pyłem punktów. Będziemy omawiać szerzej to zagadnienie w par. 13.7.

Algorytmy wyznaczające zbiory Julii (i zbiór Mandelbrota) zostały spopularyzowane przez artykuł w *Scientific American*.<sup>9</sup> Chcielibyśmy wizualizować przybliżenia zbioru więźniów,  $Q_c^{(-k)}$ , za pomocą kolorowania siatki pikseli, na przykład takiej, jak ta z rysunku 13.2. Piksel o współrzędnych  $x$  oraz  $y$  jest zaznaczany na czarno, jeżeli  $z = x + iy$  należy do  $Q_c^{(-k)}$ . Zaczniemy od omówienia algorytmu za pomocą zapisu zespolonego dla zmiennych  $c$  oraz  $y$ . Przy jego implementacji trzeba pamiętać o poprawnym użyciu zasad dodawania i mnożenia liczb zespolonych.

```
R = max (|c|, 2)
i = 0
while (i < k)
  if (|z| > R) then
    return (z należy do zbioru więźniów)
  end if
  z = z*z + c
  i = i + 1
end while
return (z należy do  $Q_c^{(-k)}$ )
```

Algorytm ten wymaga iterowania  $z*z + c$ . Musimy być ostrożni. Niech bowiem  $x$  oraz  $y$  będą częścią rzeczywistą i urojoną liczby  $z$ , natomiast  $cr$  oraz  $ci$  — odpowiednimi częściami liczby  $c$ . Łatwo można popełnić błąd. Przy wykonywaniu poleceń

```
x = x*x - y*y + cr
y = 2*x*y + ci
```

błąd polega na tym, że kiedy obliczana jest nowa wartość dla  $y$ , stara wartość  $x$  już przepadła (została zastąpiona nową wartością), a zatem  $2*x*y$  nie jest tym, czego byśmy oczekiwali. Poprawiona wersja musi oczywiście używać dodatkowej zmiennej do przechowywania nowej wartości  $x$ , na przykład

```
temp = x*x - y*y + cr
y = 2*x*y + ci
x = temp
```

<sup>9</sup> A. K. Dewdney, Computer Recreations: A computer microscope zooms in for a look at the most complex object in mathematics, *Scientific American*, sierpień 1985, s. 16-25.

Szczegóły  
implementacji  
algorytmu

Należy jeszcze podać wskazówkę, jak poprawić wydajność implementacji. Jest znacznie efektywniej sprawdzać, czy  $|z|^2 > R^2$  niż sprawdzać, czy  $|z| > |R|$ , ponieważ  $|z|^2 = x^2 + y^2$ , a obliczanie wartości bezwzględnej  $|z|$  wymaga wyciągania pierwiastka, co jest procedurą kosztowną obliczeniowo. Ponadto liczby  $x^2$  i  $y^2$  mogą być wykorzystane w kolejnej iteracji, co dodatkowo przyspieszy algorytm. A oto szczegóły:

```

R2 = max(|c|, 2) * max(|c|, 2)
i = 0
x2 = x*x
y2 = y*y
while (i < k)
  if (x2 + y2 > R2) then
    return (z należy do zbioru uciekinierów)
  end if
  y = 2*x*y + ci
  x = x2 - y2 + cr
  i = i+1
  x2 = x*x
  y2 = y*y
end while
return (z należy do  $Q_c^{(-k)}$ )

```

Program na zakończenie rozdziału 14 jest typową implementacją tego algorytmu, ale dla zbioru Mandelbrota, a nie dla zbioru Julii.

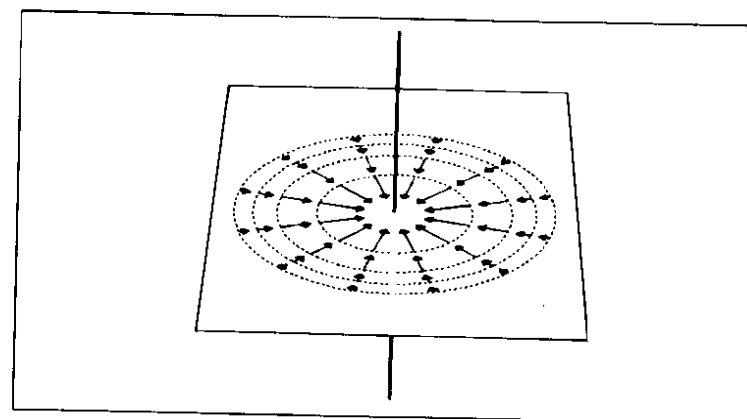
### 13.5. Krzywe ekwipotencjalne i linie pola dla zbiorów Julii

Okazało się, że przedstawianie zbioru więźniów  $W_c$  za pomocą kolejnych przybliżeń  $Q_c^{(-k)}$  było bardzo owocnym pomysłem. Zobaczmy teraz, jak można tę metodę jeszcze udoskonalić. Prowadzi nas to do prac Douady'ego i Hubbarda. Musiało upłynąć więcej niż 60 lat od pionierskich prac Fatou i Julii z początku naszego stulecia, zanim Douady i Hubbard rozwinęli nowe metody, mogące odkryć sekrety zbiorów Julii. Znaleźli piękną drogę, wykorzystując analogię do elektrostatyki.

**Pole elektrostatyczne**

Można wyobrażać sobie zbiór więźniów jako kawałek metalu naładowany ujemnie. Ładunek ten wytwarza w otaczającej przestrzeni *pole elektrostatyczne*, które oddziałuje

### 13.5. Krzywe ekwipotencjalne i linie pola dla zbiorów Julii



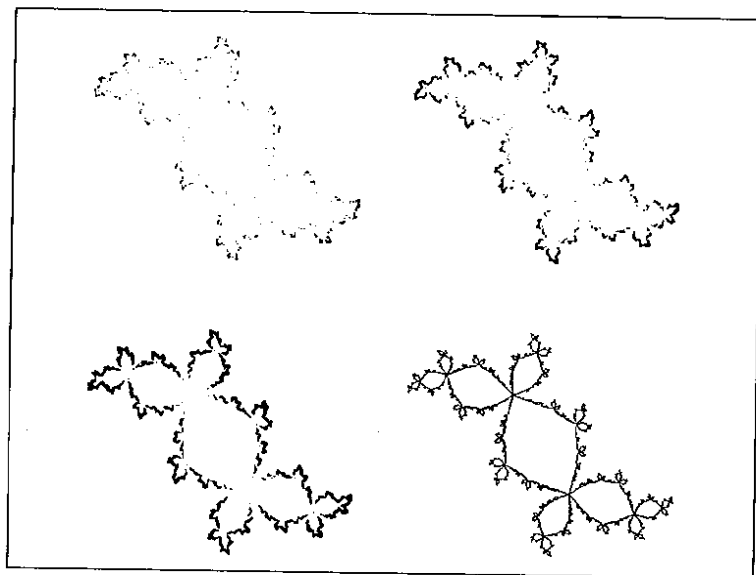
**Pole wokół przewodu**

**Rysunek 13.17:** Pole elektrostatyczne wytwarzane przez naładowany przewód, pokazane w przekroju poprzecznym prostokątnym do przewodu

jako siła przyciągająca na dowolny mały dodatni ładunek próbny. Pole to można przedstawić za pomocą wektorów wskazujących, jaki jest kierunek i jaka jest wartość tej siły przypadająca na jednostkę ładunku próbnego (zob. rys. 13.17). Krzywe tworzone przez te wektory, od danego punktu do naładowanego zbioru więźniów, są to drogi, po których nieskończenie małe ładunki próbne poruszałyby się pod działaniem tego pola. Krzywe te nazywają się *liniami pola*.

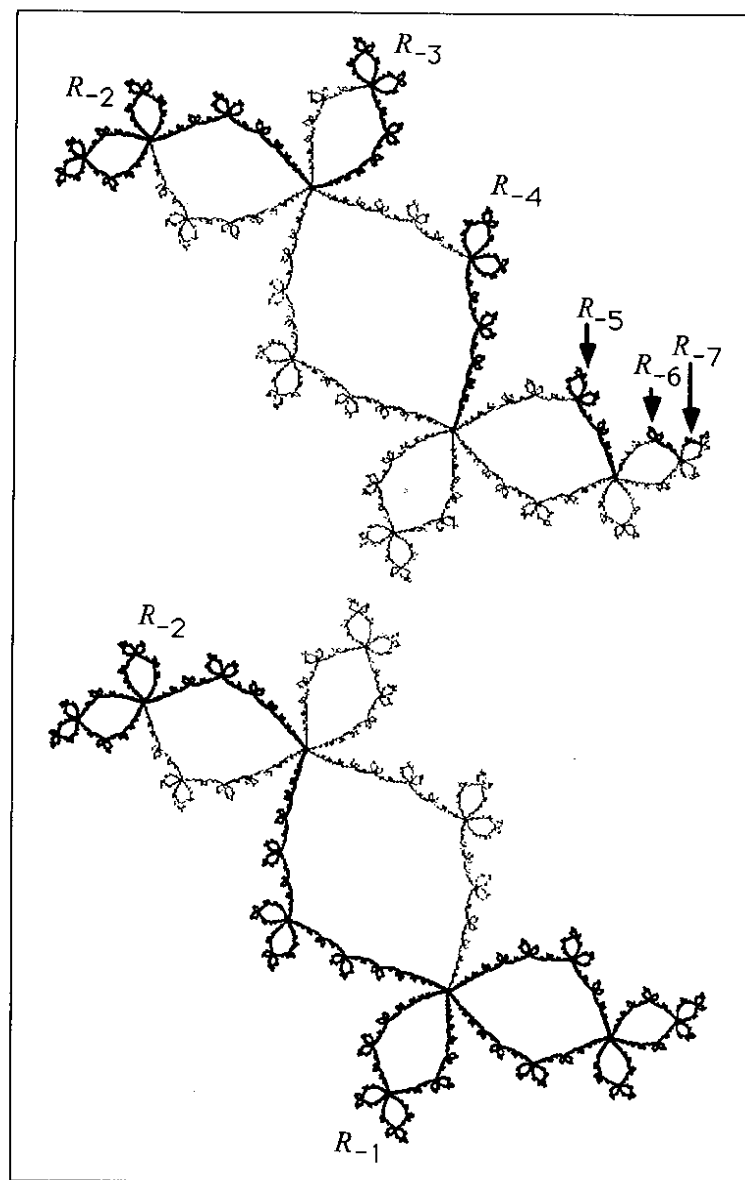
Prawa elektrostatyki stosują się do przedmiotów i ładunków w przestrzeni trójwymiarowej, natomiast zbiory więźniów i zbiory Julii są zanurzone w dwuwymiarowej przestrzeni liczb zespolonych. Niemniej jednak płaski zbiór więźniów umieszczony w przestrzeni trójwymiarowej wytwarza pole elektrostatyczne zależne od wszystkich trzech współrzędnych przestrzennych. Ponieważ nasz opis powinien być dwuwymiarowy, postępujemy będziemy w sposób następujący. Przedłużamy zbiór więźniów w trzeci wymiar: rozważamy nieskończenie długi zbiór cylindryczny, który ma w przekroju poprzecznym zbiór więźniów. Wyobraźmy sobie, że zbiór ten jest naładowany nieskończonym ładunkiem, jednorodnie rozłożonym na całej jego długości. Pole elektrostatyczne, wytwarzane przez taki rozszerzony zbiór więźniów jest takie samo we wszystkich przekrojach poprzecznych, każdy z nich zatem opisuje w zupełności całe pole.



Postępy gry  
w chaos

**Rysunek 13.26:** Obliczanie zbioru Julii dla parametru  $c = -0,12 + 0,74i$  (zbiór ten został nazwany przez Douady'ego i Hubbarda *królikiem*). Mimo, że zachowanie gry w chaos nie jest w tym przypadku zbyt satysfakcjonujące, pierwszy zarys zbioru Julii pojawia się dość szybko. Na górnym lewym rysunku jest 1000 punktów, na górnym prawym 10 000. Na dolnym lewym rysunku narysowano aż 100 000 punktów. Do stworzenia prawego dolnego rysunku użyto zmodyfikowanej metody iteracji wstecz i przedstawiono jedynie 4750 punktów

Ponadto jeżeli ponownie  $z$  będzie punktem ze zbioru Julii, możemy zapytać: jakiego rodzaju punktem jest obraz  $z$ , tj.  $z^2 + c$ ? Nie może on należeć do basenu przyciągania punktu w nieskończoności, wtedy bowiem również punkt początkowy  $z$  byłby uciekinierem, co jest niemożliwe — wybraliśmy  $z$  ze zbioru Julii. Z drugiej strony  $z^2 + c$  nie może leżeć we wnętrzu zbioru więźniów: musi zatem leżeć na jego brzegu. Powodem tego jest ciągłość przekształceń kwadratowych: dowolnie blisko punktu  $z$  znajdują się punkty-uciekiniery. Ciągłość przekształcenia  $z \rightarrow z^2 + c$  implikuje, że to samo musi być prawdą również dla zbioru punktów po przekształceniu. Podsumowując, obserwację tę można wyrazić słowami, że zbiór Julii jest niezmienniczy nie tylko względem przekształceń odwrotnych  $w \rightarrow +\sqrt{w-c}$  oraz  $w \rightarrow -\sqrt{w-c}$ , ale również pod działaniem wyjściowego przekształcenia  $z \rightarrow z^2 + c$ .

Samo-  
podobieństwo  
zbioru Julii

**Rysunek 13.27:** Samopodobieństwo zbioru Julii. Na tych dwóch rysunkach pokazano, w jaki sposób mały fragment zbioru Julii, oznaczony przez  $R_{-7}$ , jest wielokrotnie przekształcany. Po każdym przekształceniu pokryty fragment zbioru Julii, zaznaczony grubszą linią i oznaczony od  $R_{-6}$  do  $R_{-1}$ , powiększa się. Po sześciu iteracjach wynik  $R_{-1}$  jest już połową zbioru Julii, jeszcze jedno zastosowanie przekształcenia  $z \rightarrow z^2 + c$  i dostajemy cały zbiór Julii  $R_0$