Sformułowanie problemu sieciowego

Chcemy „rozwiązać układ”, czyli znaleźć wszystkie napięcia i prądy.

- Wprowadzamy jako niewiadome wektor prądów gałęziowych $\boldsymbol{i} = [i_1, \ldots, i_g]^\mathrm{T}$ i wektor napięć gałęziowych $\boldsymbol{u} = [u_1, \ldots, u_g]^\mathrm{T}$ (przeciwnie zastrzałkowanych).
- Mamy łącznie $2g$ niewiadomych — potrzeba $2g$ równań.
- Równania równowagi (niezależne liniowo):

PPK $\boldsymbol{Ai} = \boldsymbol{0} \quad \longleftarrow \quad r = w - 1$ równań
NPK $\boldsymbol{Du} = \boldsymbol{0} \quad \longleftarrow \quad c = g - w + 1$ równań

  Razem mamy g jednorodnych równań liniowych.

- Brakujące g równań to równania gałęziowe, opisujące zachowanie gałęzi. Dla sieci liniowej są to równania liniowe, dające się zapisać w postaci macierzowej.

Układ $2g$ równań z $2g$ niewiadomymi jest duży — jak go zredukować, żeby nie odwracać macierzy $2g \times 2g$?

Przekształcenie obwodowe

Twierdzenie o przekształceniu obwodowym

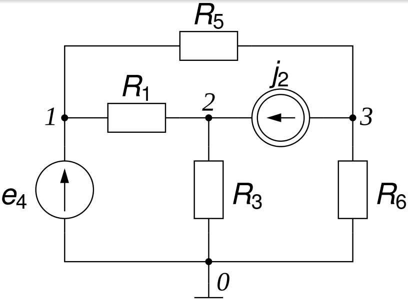
dow. PTO3, s.64

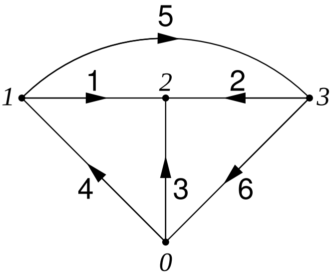
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{i}_o = [i_{o1}, \ldots, i_{oc}]^{\mathrm{T}} : \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{i}_o$$

- $\boldsymbol{i}_o$ — wektor prądów obwodowych
- Prądy obwodowe zależą od wyboru macierzy cykli.
- Na podstawie prądów obwodowych można odtworzyć wszystkie prądy gałęziowe, a jest ich mniej ($c < g$).
- Jeśli $\boldsymbol{D}$ wybraliśmy wg układu cykli fundamentalnych względem drzewa, to prądy obwodowe są równe $\pm$ prądom gałęzi przeciwdrzewa.
- Jeśli dla sieci planarnej $\boldsymbol{D}$ jest macierzą oczek (jednakowo zorientowanych), to $\boldsymbol{i}_o$ jest wektorem prądów oczkowych:
  - Prąd gałęzi wspólnej oczek k i m to $\pm(i_{ok} - i_{om})$.
  - Prąd gałęzi wspólnej oczka k i oczka odniesienia to $\pm i_{ok}$.

Równania równowagi są równoważne równaniom bez macierzy incydencji: $\quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{i}_o, \quad \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

Przykład przekształcenia obwodowego






```
syms io1 io2 io3
io=[io1 io2 io3].'; % wektor prądów obwodowych
D1 = [  1  0 -1  1  0  0 % c1 (oczko 1)
        0 -1  1  0  0  1 % c3 (oczko 3)
        0  0  0  1  1  1 % c4 (oczko odniesienia)
     ]%e1 e2 e3 e4 e5 e6 - macierz cykli   (drzewo {346})
D0 = [  1  0 -1  1  0  0 % c1 (oczko 1)
       -1  1  0  0  1  0 % c2 (oczko 2)
        0 -1  1  0  0  1 % c3 (oczko 3)
     ]%e1 e2 e3 e4 e5 e6 - macierz oczkowa (drzewo {123})
D1.'  * io, D0.' * io % prądy gałęziowe
```

Uwagi praktyczne do przekształcenia obwodowego

Prądy obwodowe rysujemy na schemacie układu tak jak cykle (np. oczka).

- Jeżeli przy gałęzi jest jedna strzałka prądu obwodowego, to prąd tej gałęzi jest równy $\pm$ prądowi obwodowemu, w zależności od zwrotów.
- Jeżeli przy gałęzi jest więcej strzałek prądów obwodowych, to prąd tej gałęzi jest równy sumie tych prądów obwodowych, ze znakami $\pm$ w zależności od zwrotów.

Przekształcenie węzłowe

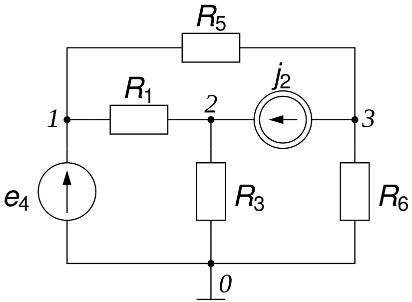
Twierdzenie o przekształceniu węzłowym dow. PTO3, s.66–67

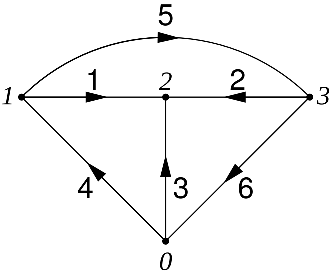
$$\boldsymbol{Du} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{v} = [v_1, \ldots, v_r]^{\mathrm{T}} : \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}$$

- $\boldsymbol{v}$ — wektor potencjałów węzłowych
- Potencjały węzłowe zależą od wyboru węzła masy.
- Na podstawie potencjałów węzłowych można odtworzyć wszystkie napięcia gałęziowe, a jest ich mniej ($r < g$).
- Napięcie gałęzi „na masie” jest równe $\pm$ potencjałowi węzłowemu jej końca nie będącego masą.
- Napięcie gałęzi „pływającej” jest równe różnicy potencjałów węzłowych jej końców.

Równania równowagi są równoważne równaniom bez macierzy cykli: $\quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{Ai} = \boldsymbol{0}$

Przykład przekształcenia węzłowego






```
syms v1 v2 v3
v = [v1 v2 v3].'; % wektor potencjałów węzłowych
A0 = [  1  0  0 -1  1  0 % v1
       -1 -1 -1  0  0  0 % v2
        0  1  0  0 -1  1 % v3
     ]%e1 e2 e3 e4 e5 e6 - macierz incydencji (masa 0)
A0.' * v % napięcia gałęziowe
```

Zasada (twierdzenie) Tellegena (ZT)

$p_t = \boldsymbol{u}^\mathrm{T}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^\mathrm{T}\boldsymbol{u} = 0$

Suma mocy pobieranych przez wszystkie gałęzie (moc całkowita pobierana przez układ) jest w każdej chwili zerowa.

Jest odpowiednikiem zasady zachowania energii, obowiązującym dla dowolnego obwodu skupionego:

$$w_t(t) = \int_{t_0}^{t} p_t(t')\mathrm{d}t' = \mathrm{const} \quad \Leftrightarrow \quad p_t(t) \equiv 0$$

Dowód 1 (z NPK): $\boldsymbol{u}^\mathrm{T}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{u}^\mathrm{T}(\boldsymbol{D}^\mathrm{T}\boldsymbol{i}_o) = (\underbrace{\boldsymbol{Du}}_{\mathbf{0}})^\mathrm{T}\boldsymbol{i}_o = 0$

Dowód 2 (z PPK): $\boldsymbol{i}^\mathrm{T}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}^\mathrm{T}(\boldsymbol{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{v}) = (\underbrace{\boldsymbol{Ai}}_{\mathbf{0}})^\mathrm{T}\boldsymbol{v} = 0$

Z dowolnych dwóch praw z trójki {PPK, NPK, ZT} wynika trzecie prawo.

Uogólnienie zasady Tellegena

- Załóżmy, że mamy dwa różne, ale izomorficzne układy o prądach i napięciach gałęziowych odpowiednio $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{u}_1$ oraz $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{u}_2$. Grafy układów są izomorficzne, więc mają identyczne macierze $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{D}$.
- Ze struktury dowodów ZT wynika spełnienie zależności:

$$\boldsymbol{u}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{i}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2 = 0$$

- Te iloczyny skalarne nie mają już interpretacji mocy.
- Zastosowanie uogólnionej ZT — analiza wrażliwości metodą obwodów dołączonych.

Oznaczenia uniwersalne

Dalej ograniczymy się do układów SLS, rozważanych w różnych kontekstach.

kontekst	U, E	I, J	Z, Y
obw. rezystancyjne	$u(t), e(t)$	$i(t), j(t)$	R, G
obw. DC w st. ust.	U, E	I, J	$Z(0), Y(0)$
obw. AC w st. ust.	wskazy U, E	wskazy I, J	$Z(\mathrm{j}\omega), Y(\mathrm{j}\omega)$
pob. bezwzg. całk.	$\mathcal{F}[u], \mathcal{F}[e]$	$\mathcal{F}[i], \mathcal{F}[j]$	$Z(\mathrm{j}\omega), Y(\mathrm{j}\omega)$
st. nieust. (z.w.p.)	$\bar{u}, \bar{e}$	$\bar{i}, \bar{j}$	$Z(s), Y(s)$

Obwody prądu okresowego w stanie ustalonym są złożeniem obwodów DC i AC wynikającym z zasady superpozycji.

Równania gałęziowe — sieć bez sprzężeń

- Sieć bez sprzężeń — każda gałąź niezależna od innych.
- Jako dwójnik liniowy, da się ona przedstawić w postaci zastępczego źródła Thévenina (tzw. postać napięciowa) lub Nortona (tzw. postać prądowa).
- Konwencja: zwrot źródła zgodny ze zwrotem prądu.
- Jeśli *wszystkie* gałęzie mają postać napięciową, to:

  $$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}$$

  gdzie $\boldsymbol{Z} = \mathrm{diag}(Z_k)$ — macierz impedancji gałęziowych.
- Jeśli *wszystkie* gałęzie mają postać prądową, to:

  $$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{J}$$

  gdzie $\boldsymbol{Y} = \mathrm{diag}(Y_k)$ — macierz admitancji gałęziowych.
- Jeśli *wszystkie* gałęzie da się przedstawić *obu* postaciach, to zachodzi równoważność obu form wszystkich źródeł:

  $$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{E}$$

  przy czym macierze $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y}^{-1}$ i $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}^{-1}$ są nieosobliwe.

Równania gałęziowe — sieć ze sprzężeniami

- Sieć ze sprzężeniami — gałęzie mogą zależeć od innych.
- Jeśli *wszystkie* gałęzie mają postać napięciową ze ŹNSP (np. sieć ze sprzężeniami magnetycznymi), to:

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{diag}(Z_k)\boldsymbol{I} + \boldsymbol{r}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E} = \underbrace{\left(\mathrm{diag}(Z_k) + \boldsymbol{r}\right)}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}$$

- Jeśli *wszystkie* gałęzie mają postać prądową ze ŹPSN, to:

$$\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(Y_k)\boldsymbol{U} + \boldsymbol{g}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{J} = \underbrace{\left(\mathrm{diag}(Y_k) + \boldsymbol{g}\right)}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{J}$$

- Konwencja: zwrot ŹNSP zgodny ze zwrotem napięcia, a ŹPSN – ze zwrotem prądu.
- $\boldsymbol{Z}$ i $\boldsymbol{Y}$ nie są już diagonalne i nie muszą być symetryczne.
- Nie każdy układ można przedstawić w takich postaciach.

R-nia gałęziowe i r-nia równowagi ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{D}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}$) to układ aż $2g$ r-ń z $2g$ niewiadomymi — jak zredukować ich liczbę?

Metoda prądów obwodowych

Jeśli każda gałąź da się przedstawić w postaci napięciowej, to:

$$\boldsymbol{AI} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{DU} = \mathbf{0} \text{ ale } \boldsymbol{U} = \boldsymbol{ZI} - \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{DZI} - \boldsymbol{DE} = \mathbf{0} \text{ ale } \boldsymbol{I} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_o$$

$$\underbrace{\boldsymbol{DZD}^{\mathrm{T}}}_{\boldsymbol{Z}_o}\boldsymbol{I}_o = \underbrace{\boldsymbol{DE}}_{\boldsymbol{E}_o}$$

$$\boldsymbol{Z}_o\boldsymbol{I}_o = \boldsymbol{E}_o$$

gdzie $\boldsymbol{Z}_o$ — macierz impedancji obwodowych $c \times c$, zaś $\boldsymbol{E}_o$ — wektor obwodowych SEM. Rozwiązanie:

$$\boldsymbol{I}_o = \boldsymbol{Z}_o^{-1}\boldsymbol{E}_o, \quad \boldsymbol{I} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_o, \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{ZI} - \boldsymbol{E}$$

wymaga odwrócenia macierzy $c \times c$.

Interpretacja macierzy impedancji obwodowych. . .

. . . dla sieci planarnej bez sprzężeń, której wszystkie oczka są zorientowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara:

$E_{o\ k}$ suma wszystkich SEM wzdłuż oczka k
($+$ dla zgodnych zwrotów, a $-$ dla przeciwnych)

$Z_{o\ kk}$ suma wszystkich impedancji wzdłuż oczka k

$Z_{o\ km}$ minus impedancja wspólna oczek k i m

Metoda potencjałów węzłowych

Jeśli każda gałąź da się przedstawić w postaci prądowej, to:

$$\boldsymbol{DU} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{AI} = \mathbf{0} \;\text{ ale }\; \boldsymbol{I} = \boldsymbol{YU} + \boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{AYU} + \boldsymbol{AJ} = \mathbf{0} \;\text{ ale }\; \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{AYA}^{\mathsf{T}}}_{\boldsymbol{Y}_w}\boldsymbol{V} = \underbrace{-\boldsymbol{AJ}}_{\boldsymbol{J}_w}$$

$$\boldsymbol{Y}_w\boldsymbol{V} = \boldsymbol{J}_w$$

gdzie $\boldsymbol{Y}_w$ — macierz admitancji węzłowych $r \times r$, zaś $\boldsymbol{J}_w$ — wektor prądów węzłowych. Rozwiązanie:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Y}_w^{-1}\boldsymbol{J}_w, \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{I} = \boldsymbol{YU} + \boldsymbol{J}$$

wymaga odwrócenia macierzy $r \times r$.

Interpretacja macierzy admitancji węzłowych...

...dla sieci bez sprzężeń (niekoniecznie planarnej):

$J_{w\ k}$ suma wydajności prądowych wpływających do węzła k

$Y_{w\ kk}$ suma wszystkich admitancji incydentnych z węzłem k

$Y_{w\ km}$ minus admitancja między węzłami k i m (zero, jeśli takiej admitancji nie ma).

Macierz admitancji węzłowych ma bardzo ważne uogólnienie — nieoznaczoną macierz admitancyjną.