

Wady metod opartych na macierzach \mathbf{Y}_n i \mathbf{Y}_w

Macierz \mathbf{Y}_n (a także \mathbf{Y}_w) bardzo prosto się układa nawet dla złożonych układów, a na podstawie jej kofaktorów można łatwo obliczyć dowolne transmitancje, ale. . .

- Wszystkie gałęzie muszą mieć postać prądową.
- Nie można reprezentować źródeł napięciowych idealnych (ani niezależnych, ani sterowanych).
- Nie można reprezentować źródeł sterowanych prądem.
- Nie można wprost obliczyć prądu gałęzi, tylko napięcia.

Jak sobie poradzić z tymi problemami? Wykorzystać **zyratory**!

Żyrator — właściwości i model

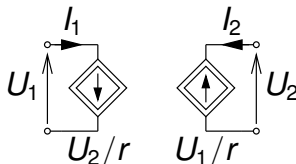
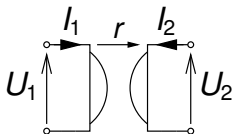
Tellegen 1948

Równania żyratora (r — opór żyracji albo stała żyracji):

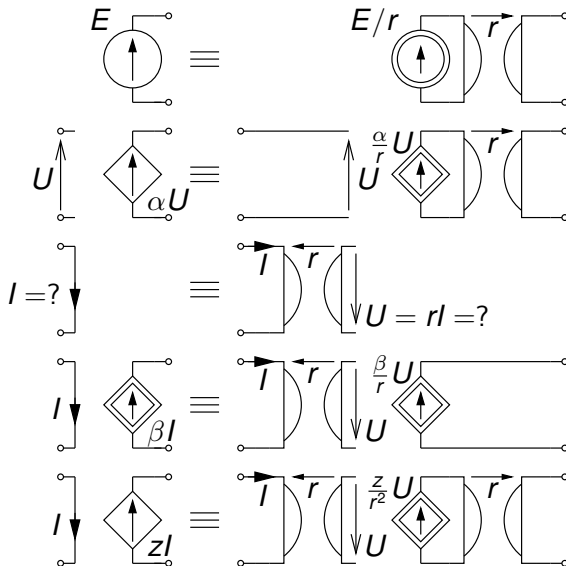
$$U_1 = -rI_2, \quad I_1 = U_2/r, \quad r \in \mathbb{R}^+$$

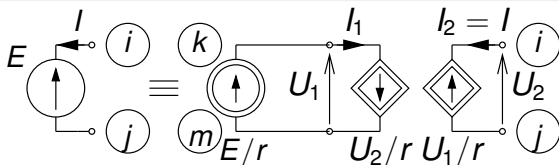
Właściwości żyratora:

- $U_1/I_1 = r^2 \cdot (-I_2)/U_2$ — zmiana „rodzaju” obciążenia,
- $U_2 = U'_2 + U''_2 \Rightarrow I_1 = I'_1 + I''_1$ — połączenia szeregowo po stronie wtórnej przechodzą na równoległe po pierwotnej,
- $-I_2 = (-I'_2) + (-I''_2) \Rightarrow U_1 = U'_1 + U''_1$ — poł. równoległe po stronie wtórnej przechodzą na szeregowo po pierwotnej,
- $I_1 = J \Rightarrow U_2 = Jr$ — źr. prądowe przechodzi w napięciowe,
- $I_1 = 0 \Rightarrow U_2 = 0$ — rozwarcie przechodzi w zwarcie, które może służyć do „pomiaru” prądu, gdyż $-U_1 = rI_2$.



Żyrator — modelowanie gałęzi innych niż prądowe



Od modelu żyratorowego do ZMPW — przykład dla E 

Nieoznaczone r-nia admitancyjne $\mathbf{Y}_n \mathbf{V}_n = \mathbf{J}_n$ (gdzie $g = 1/r$):

$$\begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad m \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ k \\ m \end{array} \begin{bmatrix} & & -g & g \\ & & g & -g \\ g & -g & & \\ -g & g & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ E_g \\ -E_g \end{bmatrix}$$

Węzeł $m \rightarrow$ masa, r-nie k dzielimy przez g , podst. $I = -V_k g$:

$$\begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & -1 \\ 1 & -1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ E \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{szablon ZMPW}$$

Szablony ZMPW dla gałęzi innych niż prądowe

TABLE 2. STAMPS FOR THE ELEMENTS IN FIG. 2.

Voltage source	a	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & +1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ e_x \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -V \end{bmatrix}$
VCVS	a	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & +1 & +A & -A & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ e_x \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$
CCCS	a	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ e_x \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$
CCVS	a	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & +1 & \cdot & \cdot & +R & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ e_x \\ e_y \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$

W układzie równań pojawiają się dodatkowe zmienne prądowe.

Antonio Carlos M. de Queiroz: *Compact Nodal Analysis With Controlled Sources Modeled by Ideal Operational Amplifiers, Proc. 38th Midwest Symposium on Circuits and Systems. Rio de Janeiro, Brazil, 1995*

Podstawowe założenia przekształcenia Fouriera

- Metoda operatorowa służy do analizy stanów nieustalonych — pobudzenia muszą być oryginałami.
- Możemy pobudzić układ sygnałem $x(t)$ niezerowym dla $t < 0$, jeśli jest on **bezwzględnie całkowny**:

$$\forall t_1, t_2 \quad \exists \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt, \quad \wedge \quad \exists \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt$$

- Stosujemy wtedy *przekształcenie Fouriera*.
 - sygnał stały dla $t \in (-\infty, +\infty) \longleftrightarrow$
liczba rzeczywista X (wartość)
 - sygnał sinusoidalny dla $t \in (-\infty, +\infty) \longleftrightarrow$
liczba zespolona X (wskaz)
 - sygnał okresowy dla $t \in (-\infty, +\infty) \longleftrightarrow$
ciąg zespolony $\{X^{(k)}\}$ (szereg Fouriera)
 - sygnał oryginalny (określony dla $t > t_0$) \longleftrightarrow
funkcja zespolona $\bar{x}(s)$ (transformata Laplace'a)
 - sygnał bezwzględnie całkowny dla $t \in (-\infty, +\infty) \longleftrightarrow$
funkcja zespolona $X(j\omega)$ (transformata Fouriera)

Przekształcenie Fouriera

Przekształcenie Fouriera (oznaczane literą \mathcal{F})...

... przyporządkowuje funkcji $x(t)$ zmiennej rzeczywistej t jej \mathcal{F} -transformatę $X(j\omega)$, będącą funkcją zmiennej rzeczywistej ω :

$$X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Dla porównania współczynniki zespolonego szeregu Fouriera:

$$X^{(k)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \omega = k\omega_1 = k\frac{2\pi}{T}$$

i jednostronna transformata Laplace'a:

$$\bar{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

wyrażają się bardzo podobnymi wzorami jak \mathcal{F} -transformata.

Z porównania wzorów wynika, że jeśli $x(t)$ jest oryginałem bezwzględnie całkownym, to $X(j\omega) = \bar{x}(j\omega)$.

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

Interpretacja widmowa

Transformata odwrotna $\mathcal{F}^{-1} [X(j\omega)]$ wyraża się niemal identycznym wzorem jak \mathcal{F} :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1} [X(j\omega)] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- $\int d\omega$ oznacza „sumowanie” po wszystkich ciągłych $\omega \dots$
- \dots zespolonych sygnałów harmonicznym $e^{j\omega t}$.
- A zatem $X(j\omega)/(2\pi)$ możemy interpretować jako **gęstość** zespolonej amplitudy sumowanych sygnałów.

Funkcja $X(j\omega)$ to **gęstość widmowa** sygnału $x(t)$ albo jego **widmo ciągłe** (dla odróżnienia od prążkowego widma sygnału okresowego, czyli ciągu współczynników szeregu Fouriera).

$$X(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$A(\omega)$ – widmo amplitudowe, $\varphi(\omega)$ – widmo fazowe

Właściwości przekształcenia Fouriera

Niech $x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$ i $y(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$ będą sygnałami bezwzględnie całkowalnymi. Niech $\alpha, \beta, t_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$.

przekształcenie liniowe	$\alpha x(t) + \beta y(t) \longleftrightarrow \alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega)$
zmiana skali czasu	$x(t/\alpha) \longleftrightarrow \alpha X(\alpha j\omega)$
opóźnienie	$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
modulacja zespolona	$x(t)e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(j(\omega - \omega_0))$
różniczkowanie	$\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j\omega X(j\omega)$
całkowanie	$\int_0^t x(t')dt' \longleftrightarrow X(j\omega)/(j\omega)$

Twierdzenie o wartości granicznej: $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} X(j\omega) = 0$.

Dla sygnałów całkowalnych z kwadratem (klasy L^2 , czyli o ograniczonej energii) obowiązuje twierdzenie Parsevala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)d\omega$$

Lewa strona to energia ($\times R$ lub $\frac{1}{R}$) wydzielona w oporze R .

Splot dwu- i jednostronny

Dla sygnałów całkowalnych z kwadratem (klasy L^2 , czyli o ograniczonej energii) obowiązuje twierdzenie Borela:

$$[x * y](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')y(t - t')dt' \longleftrightarrow X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$$

Analogicznie dla przekształcenia Laplace'a (sygnałów oryginalnych) splot dwustronny automatycznie przechodzi w jednostronny:

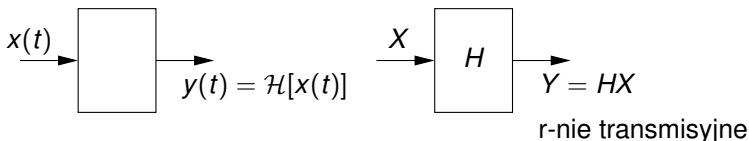
$$[x * y](t) = \int_0^t x(t')y(t - t')dt' \longleftrightarrow \bar{x}(s) \cdot \bar{y}(s)$$

Splot ma fundamentalne znaczenie przy opisie transmisji sygnału przez układ liniowy.

Czwórnik jako układy transmisyjne

Czwórnik transmisyjny może pracować w różnych kontekstach:

- pobudzenie oryginalne przy z.w.p. (\mathcal{L} -transformata)
- pobudzenie bezwzględnie całkowalne (\mathcal{F} -transformata)
- pobudzenie sinusoidalne w stanie ust. (met. wskazowa)
- pobudzenie stałe w stanie ust. (analiza DC)
- pobudzenie okresowe w stanie ust. (szereg Fouriera)

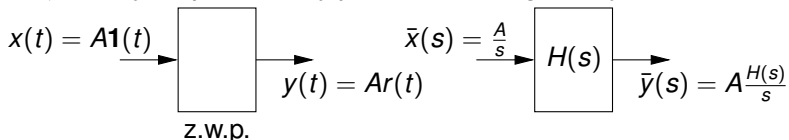


Czwórnik o transmitancji H dokonuje operacji \mathcal{H} na sygnale:

- | | | |
|-----------------------|---------------|--------------------------------------|
| skupiony | \Rightarrow | H wymierna (por. ukł. opóźn.) |
| liniowy i bezźródłowy | \Rightarrow | \mathcal{H} liniowa |
| stacjonarny | \Rightarrow | \mathcal{H} niezmiennicza w czasie |
| realnie istniejący | \Rightarrow | \mathcal{H} przyczynowa |

Charakterystyki czasowe – odpowiedź jednostkowa

Odpowiedź jednostkowa (skokowa) $r(t)$ – na pobudzenie będące funkcją skoku jednostkowego (Heaviside'a). Stała $A \neq 0$ – tylko po to, żeby jednostki się zgadzały.



Zauważmy, że $\mathcal{L}[r(t)] = H(s)/s$, a zatem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \frac{H(s)}{s}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega)$$

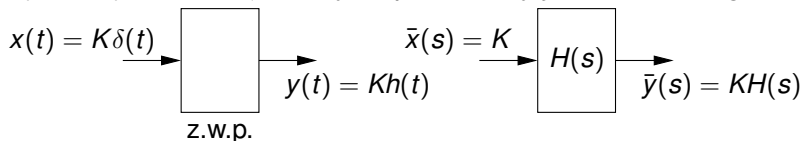
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} r(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \frac{H(s)}{s}) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega)$$

Zachowanie dla małych/dużych częstotliwości możemy określić na bazie odpowiedzi jednostkowej dla dużych/malych czasów.

Przykład – dzielnik całkujący RC (filtr LP): $H(s) = \frac{1/\tau}{s+1/\tau}$, więc $r(t) = (1 - e^{-t/\tau})\mathbf{1}(t) \Rightarrow H(0) = r(\infty) = 1, H(\infty) = r(0^+) = 0$.

Charakterystyki czasowe – odpowiedź impulsowa

Odpowiedź impulsowa $h(t)$ – na pobudzenie dystrybucją delta (Diraca). Stała $K \neq 0$ – tylko po to, żeby jednostki się zgadzały.



Takiego pobudzenia **nie da się zrealizować w praktyce**.

Zauważmy, że $\mathcal{L}[h(t)] = H(s)$. **Przykład** – dzielnik całkujący

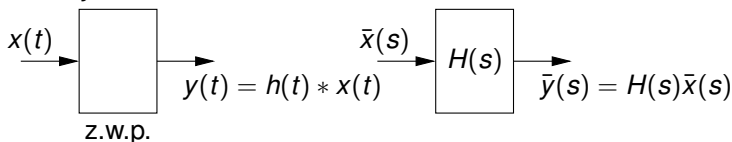
RC: $H(s) = \frac{1/\tau}{s+1/\tau}$, więc $h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\mathbf{1}(t)$ (pochodna $r(t)$).

Właściwości i związki między charakterystykami czasowymi:

- Dla $t < 0$ mamy $r(t) = 0$ i $h(t) = 0$ – przyczynowość
- $h(t) = \frac{d}{dt}r(t) = r'(t) + r(0^+)\delta(t)$ – operator $\frac{d}{dt}$ oznacza tu pochodną *dystrybucyjną*
- $r(t) = \int_0^t h(t')dt' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\varepsilon}^t h(t')dt'$
- Jeśli $H(s) = L(s)/M(s)$ i $\text{st } L(s) < \text{st } M(s) (\leq)$, to $h(t)$ ($r(t)$) nie ma składników dystrybucyjnych. Na ogół tak jest.

Splot pobudzenia z odpowiedzią impulsową

Konsekwencja twierdzenia Borela:

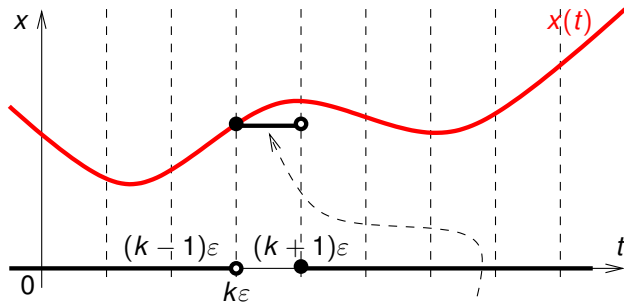


Jeśli $h(t)$ nie ma składników dystrybucyjnych, to:

$$y(t) = \int_0^t h(t-t')x(t')dt' = \int_0^t h(t')x(t-t')dt'.$$

Dlaczego?

Splot pobudzenia z odpowiedzią jednostkową – c.d.



$$x_k(t) = x(k\varepsilon)\delta_\varepsilon(t - k\varepsilon)$$

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k\varepsilon)\delta_\varepsilon(t - k\varepsilon)$$

$$y(t) \approx \sum_{k=0}^{t/\varepsilon} x(k\varepsilon)h_\varepsilon(t - k\varepsilon)\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t x(t')h(t - t')dt' = x(t) * h(t)$$