Zwykła i nieoznaczona macierz admitancji węzłowych

Załóżmy, że wszystkie gałęzie mają postać prądową:

$$\boldsymbol{Y}_w = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}^\mathrm{T}$$

$\boldsymbol{Y}_w$ — macierz admitancji węzłowych ($r \times r$, nieosobliwa)

$$\boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{A}_p \boldsymbol{Y} \boldsymbol{A}_p{}^\mathrm{T}$$

$\boldsymbol{Y}_n$ — nieoznaczona macierz admitancyjna ($w \times w$, osobliwa)

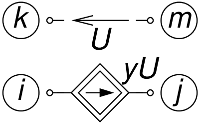
- Suma elementów każdego wiersza/kolumny jest zerem.
- Macierz $\boldsymbol{Y}_n$ można odtworzyć z macierzy $\boldsymbol{Y}_w$.
- Macierz $\boldsymbol{Y}_w$ powstaje z macierzy $\boldsymbol{Y}_n$ przez wykreślenie wiersza i kolumny odpowiadających masie.
- Macierz $\boldsymbol{Y}_n$ umożliwia łatwe przejścia WE $\leftrightarrow$ WB $\leftrightarrow$ WC.

Macierz $\boldsymbol{Y}_n$ może występować w równaniach sieci:

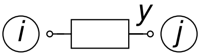
$$\boldsymbol{Y}_w \boldsymbol{V} = \boldsymbol{J}_w \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Y}_n \boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{J}_n$$

$\boldsymbol{J}_n$ — wektor $\boldsymbol{J}_w$ uzupełniony o sumę wydajności źródeł wpływających do masy, $\boldsymbol{V}_n$ — potencjały wszystkich węzłów względem jakiegoś *zewnętrznego* punktu odniesienia.

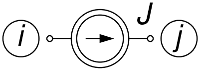
Formułowanie nieoznaczonej macierzy admitancyjnej



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & m \end{array} \\ \boldsymbol{Y}_n = \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \boldsymbol{Y}_n = \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\boldsymbol{J}_n = \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \begin{bmatrix} -J \\ J \end{bmatrix}$$

Tworząc nieoznaczoną macierz admitancyjną...

...po prostu sumujemy wkłady od poszczególnych elementów.

Nie wymaga to spełnienia żadnych warunków regularności, algorytm prosty w implementacji, łatwa dekompozycja układu.

Interpretacja nieoznaczonej macierzy admitancyjnej

Dla sieci bez sprzężeń (niekoniecznie planarnej):

- $J_{n\ k}$ suma wydajności prądowych wpływających do węzła k
- $Y_{n\ kk}$ suma wszystkich admitancji incydentnych z węzłem k
- $Y_{n\ km}$ minus admitancja między węzłami k i m (zero, jeśli takiej admitancji nie ma).

Przykład — kaskadowe połączenie dzielników napięciowych.

```
syms Y1 Y2 Y3 Y4; gnd = 4;
Yn = sym(zeros(gnd,gnd));
Yn = addadmit(Yn, 1,2,   Y1);
Yn = addadmit(Yn, 2,gnd, Y2);
Yn = addadmit(Yn, 2,3,   Y3);
Yn = addadmit(Yn, 3,gnd, Y4);

function Yn = addadmit(Yn, i, j, y)
  Yn(i,i) = Yn(i,i) + y;
  Yn(j,j) = Yn(j,j) + y;
  Yn(i,j) = Yn(i,j) - y;
  Yn(j,i) = Yn(j,i) - y;
end
```

Właściwości nieoznaczonej macierzy admitancyjnej

- Po zwarciu dwóch węzłów i, j ich potencjały stają się jednakowe, a prądy wpływające do tych węzłów sumują się. Nowa macierz $\boldsymbol{Y}_n'$ powstaje z oryginalnej przez zastąpienie wierszy i oraz j ich sumą oraz zastąpienie kolumn i oraz j ich sumą. Zmienią się numery węzłów!
- Jeżeli chcemy usunąć z obwodu węzeł k (który nie jest incydentny z żadnym źródłem niezależnym), to usuwamy z macierzy wiersz i kolumnę k, ale przedtem modyfikujemy wszystkie pozostałe elementy wg schematu:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad j \quad & \quad k \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} y_{ij} - \dfrac{y_{ik}y_{kj}}{y_{kk}} & y_{ik} \\ y_{kj} & y_{kk} \end{bmatrix} \end{array}$$

  Jest to uogólnienie przekształcenia gwiazda$\rightarrow$trójkąt.
- Macierzy $\boldsymbol{Y}_n$ można użyć do opisu wielobiegunnika.
- Dla układu odwracalnego macierz $\boldsymbol{Y}_n$ jest symetryczna.
- Wszystkie kofaktory (1-go rzędu) macierzy $\boldsymbol{Y}_n$ są równe.

Kofaktory

Wai-Kai Chen: *Active network analysis*, World Scientific, 1991

Oznaczmy przez $\boldsymbol{Y}_{i|j}$ macierz $\boldsymbol{Y}$ z usuniętym wierszem i i kolumną j, przez $\boldsymbol{Y}_{rs|pq}$ macierz $\boldsymbol{Y}$ z usuniętymi wierszami r, s i kolumnami p, q, itd.

Kofaktor (pierwszego rzędu) — dopełnienie algebraiczne

$$Y_{i|j} = (-1)^{i+j} |\boldsymbol{Y}_{i|j}|$$

Kofaktor (drugiego rzędu)

$$Y_{rs|pq} = \operatorname{sgn}(r-s)\operatorname{sgn}(p-q)(-1)^{r+s+p+q} |\boldsymbol{Y}_{rs|pq}|$$

Kofaktor (trzeciego rzędu)

$$Y_{rsp|rsq} = \operatorname{sgn}(r-p)\operatorname{sgn}(r-q)\operatorname{sgn}(s-p)\operatorname{sgn}(s-q)(-1)^{p+q} |\boldsymbol{Y}_{rsp|rsq}|$$

Uwaga: $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Kofaktor to „minor ze znakiem”.

Wyznaczanie funkcji układowych na podstawie $\boldsymbol{Y}_n$

Wiele f-cji układowych można obliczyć z kofaktorów $\boldsymbol{Y}_n$.

Załóżmy, że mamy czwórnik bezźródłowy ($\boldsymbol{J}_n = 0$) o wejściu r–s i wyjściu p–q, opisany macierzą $\boldsymbol{Y}_n$. Jego transmitancje:

$$H_{iu} = \left.\frac{U_{pq}}{I_{sr}}\right|_{I_{pq}=0} = \frac{Y_{n\ rs|pq}}{Y_{n\ i|j}}$$

$$H_{u} = \left.\frac{U_{pq}}{U_{rs}}\right|_{I_{pq}=0} = \frac{Y_{n\ rs|pq}}{Y_{n\ rs|rs}}$$

$$H_{i} = \left.\frac{I_{pq}}{I_{sr}}\right|_{U_{pq}=0} = \frac{Y_{n\ rs|pq}}{Y_{n\ pq|pq}}$$

$$H_{ui} = \left.\frac{I_{pq}}{U_{rs}}\right|_{U_{pq}=0} = \frac{Y_{n\ rs|pq}}{Y_{n\ rsp|rsp} + Y_{n\ rsq|rsq} - Y_{n\ rsp|rsq} - Y_{n\ rsq|rsp}}$$

Impedancja dwójnika o zaciskach r-s opisanego przez $\boldsymbol{Y}_n$:

$$Z_{rs}\big|_{I_{pq}=0} = \left.\frac{U_{rs}}{I_{sr}}\right|_{I_{pq}=0} = \frac{Y_{n\ rs|rs}}{Y_{n\ i|j}}$$

Przykład — kaskada dzielników napięciowych

```
r = 1; s = 4;              % wejście
p = 3; q = 4;              % wyjście

Y_rs_pq = Yn;              % z oryginalnej macierzy
Y_rs_pq([r,s],:) = []; % usuwamy wiersze oraz
Y_rs_pq(:,[p,q]) = []; % usuwamy kolumny
                           % i liczymy kofaktor
Y_rs_pq = sign(r-s) * sign(p-q) * (-1)^(r+p+s+q) * det(Y_rs_pq);

Y_rs_rs = Yn;              % z oryginalnej macierzy
Y_rs_rs([r,s],:) = []; % usuwamy wiersze oraz
Y_rs_rs(:,[r,s]) = []; % usuwamy kolumny
                           % liczymy kofaktor
Y_rs_rs = sign(r-s) * sign(r-s) * (-1)^(r+r+s+s) * det(Y_rs_rs);

i = randi(4); j = randi(4);
Y_i_j = Yn;                % z oryginalnej macierzy
Y_i_j([i],:) = [];         % usuwamy dowolny wiersz oraz
Y_i_j(:,[j]) = [];         % usuwamy dowolną kolumnę
                           % liczymy kofaktor
Y_i_j = (-1)^(i+j) * det(Y_i_j);

Hu = Y_rs_pq / Y_rs_rs % transmitancja napięciowa
Hiu = simplify(Y_rs_pq / Y_i_j)  % transmitancja prądowo-napięciowa
```

Interpretacja parametrów łańcuchowych ...

... jako odwrotności transmitancji zwarciowo-rozwarciowych ...

$$a_{11} = \left.\frac{U_{rs}}{U_{pq}}\right|_{I_{pq}=0} = \frac{1}{H_u} \qquad a_{12} = \left.\frac{U_{rs}}{I_{pq}}\right|_{U_{pq}=0} = \frac{1}{H_{ui}}$$

$$a_{21} = \left.\frac{I_{sr}}{U_{pq}}\right|_{I_{pq}=0} = \frac{1}{H_{iu}} \qquad a_{22} = \left.\frac{I_{sr}}{I_{pq}}\right|_{U_{pq}=0} = \frac{1}{H_i}$$

rozwarte zaciski $p - q$ zwarte zaciski $p - q$

... wynika z równań łańcuchowych:

$$\begin{cases} U_{rs} = a_{11} U_{pq} + a_{12} I_{pq} \\ I_{sr} = a_{21} U_{pq} + a_{22} I_{pq} \end{cases}$$

Na podstawie $\boldsymbol{Y}_n$ można obliczyć macierz łańcuchową $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{Y_{n\ rs|pq}} \left[\begin{array}{c|c} Y_{n\ rs|rs} & Y_{n\ rsp|rsp} + Y_{n\ rsq|rsq} - Y_{n\ rsp|rsq} - Y_{n\ rsq|rsp} \\ \hline Y_{n\ i|j} & Y_{n\ pq|pq} \end{array} \right]$$

Liczniki a_{ij} są wielomianami charakterystycznymi zmiennej s:
$a_{11} = n_{zo}/m$, $a_{12} = n_{zz}/m$, $a_{21} = n_{oo}/m$, $a_{22} = n_{oz}/m$.

Źródła sterowane idealne

Źródła sterowane *liniowe*:				r-nia czwórnikowe
VCVS	$e = \alpha u_1$	α – wzm. napięciowe	$\Longrightarrow$	$i_1 = 0, u_2 = \alpha u_1$
VCCS	$j = g u_1$	g – transkonduktancja	$\Longrightarrow$	$i_1 = 0, i_2 = g u_1$
CCVS	$e = r i_1$	r – transrezystancja	$\Longrightarrow$	$u_1 = 0, u_2 = r i_1$
CCCS	$j = \beta i_1$	β – wzm. prądowe	$\Longrightarrow$	$u_1 = 0, i_2 = \beta i_1$

Współczynniki sterowania (α, g, r i β) $\in \mathbb{R}$.

VCCS sterowane „własnym" napięciem $\equiv$ przewodności $\pm g$.

CCVS sterowane „własnym" prądem $\equiv$ oporowi $\pm r$.

Źródła sterowane:

- jeśli nie redukują się do oporu (ew. oporu ujemnego), to wymagają ułożenia równań Kirchhoffa
- mają warianty „rzeczywiste" (nieidealne)
- jeśli są nieidealne, to źródło napięciowe można zamienić na równoważne mu prądowe i odwrotnie
- podlegają zasadzie ruchliwości źródeł
- nie dają wkładów w zasadzie superpozycji – wkłady liczymy *tylko* od źródeł niezależnych (autonomicznych)

Wzmacniacz operacyjny (OA)

Wzmacniacz operacyjny jest granicznym przypadkiem źródła sterowanego (dowolnego) dla współczynnika sterowania $\to \infty$.

$$\begin{array}{rllcl}
\text{VCVS} & i_1 = 0 & u_2 = \alpha u_1 & \Longrightarrow & u_1 = u_2/\alpha \xrightarrow{\alpha\to\infty} 0 \\
\text{VCCS} & i_1 = 0 & i_2 = g u_1 & \Longrightarrow & u_1 = i_2/g \xrightarrow{g\to\infty} 0 \\
\text{CCVS} & u_1 = 0 & u_2 = r i_1 & \Longrightarrow & i_1 = u_2/r \xrightarrow{r\to\infty} 0 \\
\text{CCCS} & u_1 = 0 & i_2 = \beta i_1 & \Longrightarrow & i_1 = i_2/\beta \xrightarrow{\beta\to\infty} 0 \\
\text{OA} & i_1 = 0 & u_1 = 0 & &
\end{array}$$

Wrota wejściowe wzmacniacza operacyjnego stanowią bezprądowe zwarcie. Jeżeli jeden z zacisków wejściowych jest na masie, to drugi stanowi masę pozorną.

Układy z OA mogą symulować np. źródła sterowane.

nulator + norator = nullor

Nulator — początek układu na płaszczyźnie (u, i)

Wejście OA opisane jest dwoma równaniami: $i_1 = 0$ (bezprądowe) oraz $u_1 = 0$ („zwarcie"). Te dwa równania opisują pseudodwójnik zwany nulatorem (ang. *null* – zero).

Norator — cała płaszczyzna (u, i)

Wyjście OA nie jest opisane żadnym równaniem. Nie jest określone ani napięcie, ani prąd. Zależą one od elementów otaczających wzmacniacz. Wyjście OA można reprezentować pseudodwójnikiem zwanym noratorem (ang. *nor* – ani).

Nullor

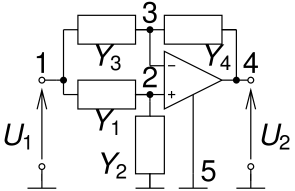
Aby zgadzała się liczba równań elementów, nulator i norator muszą zawsze występować w układzie jako para zwana nullorem. Dlatego nazywane są one pseudodwójnikami.

Nullor a nieoznaczona macierz admitancyjna

- Norator między węzłami i oraz $j \Rightarrow$ wiersze i oraz j macierzy $\boldsymbol{Y}_n$ zastępujemy ich sumą.
- Nulator między węzłami i oraz $j \Rightarrow$ kolumny i oraz j macierzy $\boldsymbol{Y}_n$ zastępujemy ich sumą.
- Po wstawieniu pary nulator-norator macierz pozostaje kwadratowa, ale jej rozmiar się zmniejsza o 1.
- Równoległe połączenie nulatora i noratora to zwarcie.
- Szeregowe połączenie nulatora i noratora to rozwarcie.

Uwaga! Wstawienie pary nulator-norator wymaga dość skomplikowanego przenumerowania węzłów.

Przykład: układ wzmacniacza odwracająco-nieodwracającego.



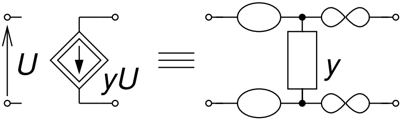
$$\boldsymbol{Y}_n = \begin{bmatrix} Y_1+Y_3 & -Y_1 & -Y_3 & 0 & 0 \\ -Y_1 & Y_1+Y_2 & 0 & 0 & -Y_2 \\ -Y_3 & 0 & Y_3+Y_4 & -Y_4 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_4 & Y_4 & 0 \\ 0 & -Y_2 & 0 & 0 & Y_2 \end{bmatrix}$$

Przykład — implementacja w MATLAB-ie

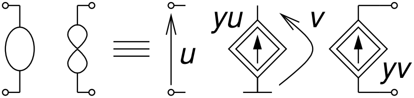
```
syms Y1 Y2 Y3 Y4; gnd = 5;  Yn = sym(zeros(gnd,gnd));
                            Yn = addadmit(Yn, 1,2,   Y1);
                            Yn = addadmit(Yn, 2,gnd, Y2);
                            Yn = addadmit(Yn, 1,3,   Y3);
                            Yn = addadmit(Yn, 3,4,   Y4);
Yn(4,:) = Yn(4,:) + Yn(gnd,:); Yn(gnd,:) = []; % norator
Yn(:,2) = Yn(:,2) + Yn(:,3);   Yn(:,3)   = []; % nulator
row = [1 2 3 4 4];          % przenumerowanie wierszy (norator)
col = [1 2 2 3 4];          % przenumerowanie kolumn  (nulator)
r = 1; s = 5;               % wejście wg oryginalnej numeracji
p = 4; q = 5;               % wyjście wg oryginalnej numeracji
Y_rs_pq = Yn;               % z oryginalnej macierzy
Y_rs_pq(row([r,s]),:) = []; % usuwamy wiersze oraz
Y_rs_pq(:,col([p,q])) = []; % usuwamy kolumny
                            % i liczymy kofaktor
Y_rs_pq = sign(row(r)-row(s)) * sign(col(p)-col(q)) * ...
         (-1)^(row(r)+row(s)+col(p)+col(q)) * det(Y_rs_pq);
Y_rs_rs = Yn;               % z oryginalnej macierzy
Y_rs_rs(row([r,s]),:) = []; % usuwamy wiersze oraz
Y_rs_rs(:,col([r,s])) = []; % usuwamy kolumny
                            % liczymy kofaktor
Y_rs_rs = sign(row(r)-row(s)) * sign(col(r)-col(s)) * ...
         (-1)^(row(r)+row(s)+col(r)+col(s)) * det(Y_rs_rs);
Hu = Y_rs_pq / Y_rs_rs      % transmitancja napięciowa
```

Modelowanie jednych elementów aktywnych innymi

Nulatorowo-noratorowy model źródła VCCS:



Model pary nulator-norator wykorzystujący dwa źródła VCCS:



Model taki wykorzystano w programie NAP2. Na podobnym pomyśle oparta jest zmodyfikowana metoda potencjałów węzłowych. (Potencjał węzła wewnętrznego modelu można dla $y = 1$ S interpretować jako prąd noratora.)

Niektóre nullory można zrealizować jako wzmacniacze operacyjne (norator na masie) lub tranzystory (nulator połączony z noratorem).

Klasyfikacja czwórnikowych elementów aktywnych

Impedancja wejściowa czwórnika obciążonego impedancją Z_2:

$$Z_{in} = \frac{a_{11} Z_2 + a_{12}}{a_{21} Z_2 + a_{22}}$$

Konwertery impedancyjne: $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, np. VCVS, CCCS

$$Z_{in} = \frac{a_{11}}{a_{22}} \cdot Z_2, \quad K = \frac{a_{11}}{a_{22}} \text{ — wsp. konwersji}$$

- $K < 0$: NIC — konwerter ujemno-impedancyjny
- $K > 0$: PIC — transformator idealny ($K = \gamma^2$)

Inwertery impedancyjne: $a_{11} = a_{22} = 0$, np. VCCS, CCVS

$$Z_{in} = \frac{a_{12}}{a_{21}} \cdot \frac{1}{Z_2}, \quad N = \frac{a_{12}}{a_{21}} \text{ — wsp. inwersji}$$

- $N < 0$: NIV — np. czwórniki „T” i „Π” z impedancjami $\pm Z$
- $N > 0$: PIV — żyrator ($N = r^2$)