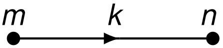
Definicja grafu (skierowanego – tzw. digrafu)

Graf skierowany $\mathcal{G}$ to trójka uporządkowana $\mathcal{G} = \langle V, E, I \rangle$

- V – niepusty zbiór wierzchołków (*vertex*) numerowanych od 0
  TO: węzły ($0 \longrightarrow$ masa)
- E – zbiór krawędzi (*edge*) rozłączny z V TO: gałęzie
- I – funkcja incydencji $E \xrightarrow{I} V \times V$: każdej krawędzi przyporządkowujemy uporządkowaną parę (niekoniecznie różnych) wierzchołków – początek i koniec
  TO: zwrot zgodny ze strzałką prądu

Mówimy, że krawędź jest *incydentna* z oboma swoimi końcami.
Podgraf $\mathcal{G}' = \langle V', E', I \rangle$, gdzie $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$ (ta sama I).
Interpretacja geometryczna: punkty (V) i linie (E) w przestrzeni 3D (graf *planarny* da się narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi).

$$e_k \xrightarrow{I} \langle v_m, v_n \rangle$$



Reprezentacje grafu

- Pełna macierz incydencji $\boldsymbol{A}_p = [a_{wk}]_{|V|\times|E|}$ – b. rzadka!

$$a_{wk} = \begin{cases} 1 & \text{wierzchołek } w \text{ jest początkiem krawędzi } k \\ -1 & \text{wierzchołek } w \text{ jest końcem krawędzi } k \\ 0 & \text{wierzchołek } w \text{ nie należy do krawędzi } k \end{cases}$$

  Nie można reprezentować pętli własnych wierzchołków.

- Pełna macierz sąsiedztwa wierzchołków $\boldsymbol{B}_p = [b_{mn}]_{|V|\times|V|}$

$$b_{mn} = \begin{cases} k & e_k \xrightarrow{I} \langle v_m, v_n \rangle \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

  Nie można reprezentować krawędzi równoległych.

- Listy incydencji – dla każdego wierzchołka podajemy numery wszystkich wierzchołków *do* których prowadzi od niego krawędź, wraz z numerami tych krawędzi:

$$\mathcal{L}[m] = \{\ldots, \langle n, k \rangle, \ldots\}$$

  Brak ograniczeń, mała pamięć, szybkie przeszukiwanie.

Drogi i cykle $\leftarrow$ *kierunki krawędzi nie mają znaczenia!*

Droga...

...*uporządkowany* ciąg *różnych* krawędzi $\langle e_1, \ldots, e_l \rangle$ taki, że:

1. każde dwie sąsiednie krawędzie e_k, e_{k+1} mają wspólny wierzchołek,
2. żadna inna krawędź $e_1, \ldots e_{k-1}, e_{k+2}, \ldots e_l$ nie jest z tym wierzchołkiem incydentna,
3. pierwsza krawędź e_1 jest incydentna z wierzchołkiem będącym początkiem drogi, a ostatnia krawędź e_l jest incydentna z wierzchołkiem będącym końcem drogi,
4. początek i koniec drogi są różne.

Cykl (kontur, droga zamknięta, *circuit*) – definicja j.w., ale...

4. początek i koniec drogi są identyczne.

Zbiór wszystkich cykli (zorientowanych $\overset{\triangleright}{\bigcirc}$) oznaczymy przez C.

Reprezentacja cykli, klasyfikacja grafów

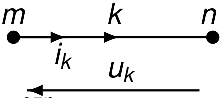
- Pełna macierz cykli $\boldsymbol{D}_p = [d_{c\,k}]_{|C|\times|E|}$

$$d_{c\,k} = \begin{cases} 1 & \text{cykl } c \text{ zawiera krawędź } k \text{ ze zgodnym zwrotem} \\ -1 & \text{cykl } c \text{ zawiera krawędź } k \text{ z przeciwnym zwrotem} \\ 0 & \text{cykl } c \text{ nie zawiera krawędzi } k \end{cases}$$

  Macierz $\boldsymbol{A}_p$ jednoznacznie określa graf $\mathcal{G}$ (grafy *izomorficzne* mają jednakowe macierze incydencji).
  Macierz $\boldsymbol{D}_p$ nie określa jednoznacznie grafu $\mathcal{G}$.
- Klasyfikacja grafów:
  - Graf spójny – każde dwa wierzchołki należą do jakiejś drogi.
  - Graf silnie spójny – każde dwa wierzchołki należą do jakiegoś cyklu.
  - Graf niespójny (rozłączny) – dzieli się na spójne *składowe*.
  - Graf sieciowy – graf skierowany silnie spójny bez pętli własnych wierzchołków (przedmiot zainteresowań TO).
  - Graf z wagami – każdej krawędzi przyporządkowujemy „wagę” (np. liczbę rzeczywistą).

Zastosowanie grafów w teorii obwodów

Wprowadzamy wektory prądów i napięć gałęziowych: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{u}$.



PPK $\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$, ale $\mathrm{rz}(\boldsymbol{A}_p) \overset{\text{ozn.}}{=} r = |V| - 1$ (tzw. *rząd* $\mathcal{G}$), więc możemy pominąć jeden wiersz (odpowiadający masie), otrzymując macierz incydencji $\boldsymbol{A}$ o rozmiarach $r \times |E|$.

$$\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{i} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$$

NPK $\boldsymbol{D}_p\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, ale $\mathrm{rz}(\boldsymbol{D}_p) \overset{\text{ozn.}}{=} c = |E| - |V| + 1$ (tzw. *liczba cyklomatyczna* $\mathcal{G}$), więc możemy pominąć wiele wierszy, pozostawiając liniowo niezależne (np. dla grafu planarnego – oczka), otrzymując macierz cykli $\boldsymbol{D}$ o rozmiarach $c \times |E|$.

$$\boldsymbol{D}_p\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

Ortogonalność: $\boldsymbol{A}_p{\boldsymbol{D}_p}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{D}_p{\boldsymbol{A}_p}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$. dow. Deo, *Teoria grafów...*, tw. 9.8

Jak znaleźć macierz $\boldsymbol{D}$? Trzeba wybrać jakieś *drzewo* $\mathcal{G}$.

Im dalej w las, tym więcej drzew…

Drzewo (*tree*) grafu $\mathcal{G}$…

…to jego spójny podgraf $\mathcal{T}$ zawierający wszystkie wierzchołki i nie zawierający żadnego cyklu.

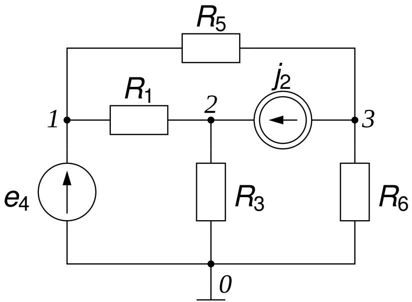
Twierdzenie Cayleya (1889)

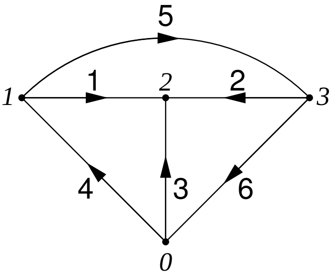
Liczba drzew grafu pełnego wynosi $|V|^{|V|-2}$.

Każde drzewo zawiera $r = |V| - 1$ krawędzi. Dołączenie *dowolnej* kolejnej krawędzi (jednej spośród $c = |E| - |V| + 1$ pozostałych) powoduje powstanie cyklu. Tak otrzymane cykle stanowią *układ fundamentalny* cykli względem drzewa $\mathcal{T}$– odpowiadają im liniowo niezależne wiersze $\boldsymbol{D}_p \longrightarrow \boldsymbol{D}$. Ponumerujmy krawędzie tak, że pierwsze $|V| - 1$ należy do $\mathcal{T}$, a cykle zgodnie z numeracją krawędzi *dopełnienia* $\overline{\mathcal{T}}$. Wtedy:

$$\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{A}_{\mathcal{T}} | \boldsymbol{A}_{\overline{\mathcal{T}}}\right], \quad \boldsymbol{D} = [\boldsymbol{D}_{\mathcal{T}} | \boldsymbol{1}], \quad \text{przy czym } \boldsymbol{D}_{\mathcal{T}} = -\left(\boldsymbol{A}_{\mathcal{T}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\overline{\mathcal{T}}}\right)^{\mathsf{T}}.$$

Przykład





Oprócz PPK i NPK obwód opisują równania gałęziowe:

$$u_1 = R_1 i_1, \;\; i_2 = j_2, \;\; u_3 = R_3 i_3, \;\; u_4 = -e_4, \;\; u_5 = R_5 i_5, \;\; u_6 = R_6 i_6$$

Przykład – rozwiązanie w MATLAB-ie

```
% Pełna macierz incydencji:
Ap = [  0  0  1  1  0 -1 % v0
        1  0  0 -1  1  0 % v1
       -1 -1 -1  0  0  0 % v2
        0  1  0  0 -1  1 % v3
     ]%e1 e2 e3 e4 e5 e6

% Pełna macierz cykli:
Dp = [  1  0 -1  1  0  0 % c1 (oczko 1)
       -1  1  0  0  1  0 % c2 (oczko 2)
        0 -1  1  0  0  1 % c3 (oczko 3)
        0  0  0  1  1  1 % c4 (oczko odniesienia)
       -1  0  1  0  1  1 % c5
        1 -1  0  1  0  1 % c6
        0  1 -1  1  1  0 % c7
     ]%e1 e2 e3 e4 e5 e6

% Wektory prądów i napięć gałęziowych:
syms i1 i2 i3 i4 i5 i6    % zmienne symboliczne
i = [i1 i2 i3 i4 i5 i6].' % .' to operator transpozycji

syms u1 u2 u3 u4 u5 u6
u = [u1 u2 u3 u4 u5 u6].'
```

Przykład – rozwiązanie w MATLAB-ie, c.d.

```
% Prądowe prawo Kirchhoffa:
-Ap * i
rank(Ap)
A = Ap(2:end, :) % usuwamy wierzchołek v0
-A * i

% Napięciowe prawo Kirchhoffa:
Dp * u
rank(Dp)
D = Dp(1:3, :) % wybieramy tylko oczka 1, 2 i 3
D * u

% Obliczenie D na podstawie A:
AT  = A(:, 1:3)
AT1 = A(:, 4:end)
DT = -(AT\AT1).'
Dx = [DT, eye(size(DT,1))] % powinno zachodzić Dx == D

% Rozwiązanie obwodu metodą "brutalnej siły"
syms R1 R3 R5 R6 j2 e4
rozw = solve([-i1+i4-i5==0, i1+i2+i3==0, -i2+i5-i6==0, u1-u3+u4==0,...
  -u1+u2+u5==0, -u2+u3+u6==0, u1==R1*i1, i2==j2, u3==R3*i3, u4==...
  -e4, u5==R5*i5, u6==R6*i6], [i1,i2,i3,i4,i5,i6,u1,u2,u3,u4,u5,u6]);
```