

# **Indeksowanie i wyszukiwanie**

---

# Eksploracja danych w Internecie

■ **Index:** struktura danych tworzona na podstawie tekstu aby przyspieszyć wyszukiwanie

■ Wydajność indeksowania w systemach IR mierzy się przez:

■ **czas indeksowania:** czas niezbędny do budowy indeksu,

■ **przestrzeń indeksowania:** przestrzeń pamięci używana podczas generacji indeksu

■ **pamięć indeksu:** pamięć wymagana do zapisania indeksu

■ **opóźnienie zapytania (latency):** czas pomiędzy pojawieniem się zapytania i generacją odpowiedzi

■ **przepustowość zapytania:** średnia ilość pytań przetwarzanych na sekundę

■ Podczas modyfikacji tekstu indeks także podlega zmianom

---

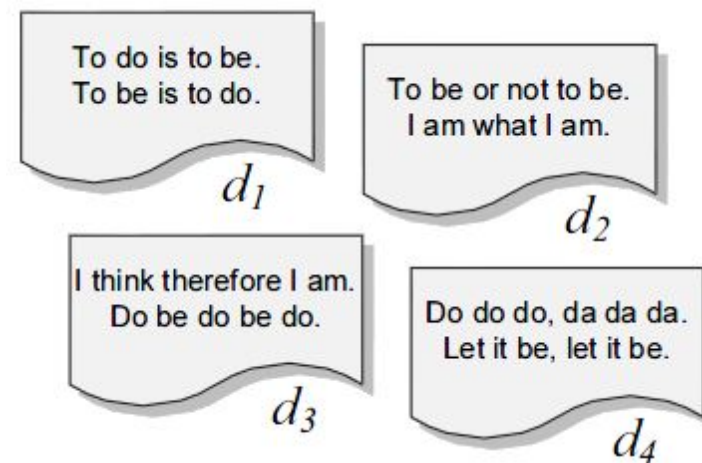
# Eksploracja danych w Internecie

- Bieżąca technologia indeksowania nie jest dobrze przystosowana do bardzo częstych zmian w zbiorze tekstów
  - Zbiory pół-statyczne (*semi-static*) są modyfikowane w regularnych, stałych przedziałach czasowych (np. raz dziennie)
  - Większość zbiorów tekstowych w sieci jest indeksowana pół-statycznie
- 
- **Indeks odwrócony**: mechanizm indeksowania zbiorów tekstowych przyspieszający wyszukiwanie
  - Struktura tego indeksu jest złożona z 2 elementów: **słownika** i **wystąpień** (*occurences*)
  - Słownik: zbiór różnych słów tekstu; dla każdego elementu słownika indeks zapamiętuje zawierające go dokumenty (indeks odwrócony)
-

# Eksploracja danych w Internecie

- Macierz **term-dokument** jest rzadka i wymaga dużo pamięci do przechowywania

Vocabulary	$n_i$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
to	2	4	2	-	-
do	3	2	-	3	3
is	1	2	-	-	-
be	4	2	2	2	2
or	1	-	1	-	-
not	1	-	1	-	-
I	2	-	2	2	-
am	2	-	2	1	-
what	1	-	1	-	-
think	1	-	-	1	-
therefore	1	-	-	1	-
da	1	-	-	-	3
let	1	-	-	-	2
it	1	-	-	-	2



... - należy, korzystając z słownika powiązać listę dokumentów;  
zbiór takich list to wystąpienia (*occurences*)

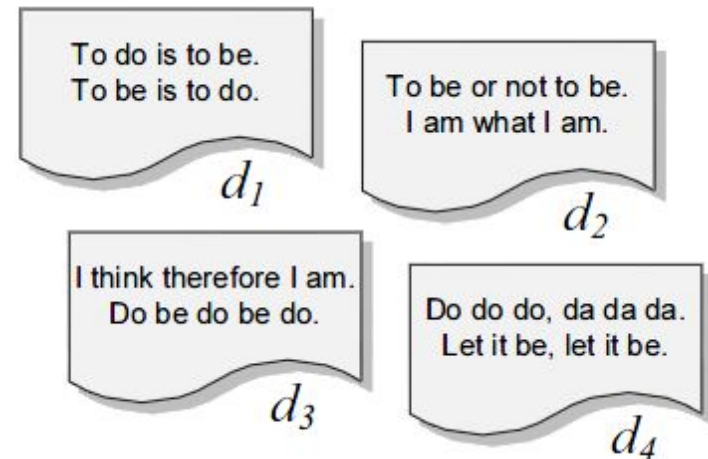
# Eksploracja danych w Internecie

- Podstawowy indeks odwrotny – zbiór list zawierających identyfikatory dokumentów i ilości wystąpień :

Vocabulary	$n_i$
to	2
do	3
is	1
be	4
or	1
not	1
I	2
am	2
what	1
think	1
therefore	1
da	1
let	1
it	1

Occurrences as inverted lists

[1,4],[2,2]  
[1,2],[3,3],[4,3]  
[1,2]  
[1,2],[2,2],[3,2],[4,2]  
[2,1]  
[2,1]  
[2,2],[3,2]  
[2,2],[3,1]  
[2,1]  
[3,1]  
[3,1]  
[4,3]  
[4,2]  
[4,2]

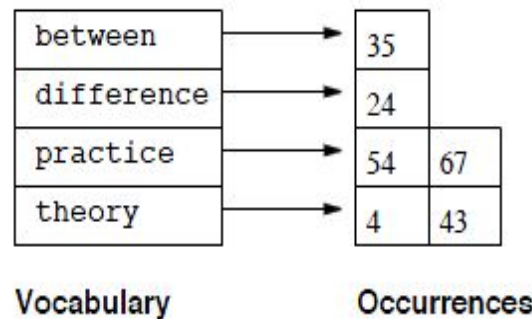


# Indeksowanie i wyszukiwanie

- Podstawowy indeks odwrotny nie jest wystarczający do wyszukiwania odpowiedzi na pytania ze zwrotami (phrase) lub przybliżone (proximity queries)
- W tym celu należy go uzupełnić o pozycję każdego słowa w każdym dokumencie tworząc pełny indeks odwrotny

1 4 12 18 21 24 35 43 50 54 64 67 77 83  
In theory, there is no difference between theory and practice. In practice, there is.

Text



# Indeksowanie i wyszukiwanie

■ Pełny indeks odwrotny (adresujący słowa) – przykład:

Vocabulary	$n_i$
to	2
do	3
is	1
be	4
or	1
not	1
I	2
am	2
what	1
think	1
therefore	1
da	1
let	1
it	1

Occurrences as full inverted lists

[1,4,[1,4,6,9]], [2,2,[1,5]]

[1,2,[2,10]], [3,3,[6,8,10]], [4,3,[1,2,3]]

[1,2,[3,8]]

[1,2,[5,7]], [2,2,[2,6]], [3,2,[7,9]], [4,2,[9,12]]

[2,1,[3]]

[2,1,[4]]

[2,2,[7,10]], [3,2,[1,4]]

[2,2,[8,11]], [3,1,[5]]

[2,1,[9]]

[3,1,[2]]

[3,1,[3]]

[4,3,[4,5,6]]

[4,2,[7,10]]

[4,2,[8,11]]

To do is to be.  
To be is to do.

$d_1$

To be or not to be.  
I am what I am.

$d_2$

I think therefore I am.  
Do be do be do.

$d_3$

Do do do, da da da.  
Let it be, let it be.

$d_4$

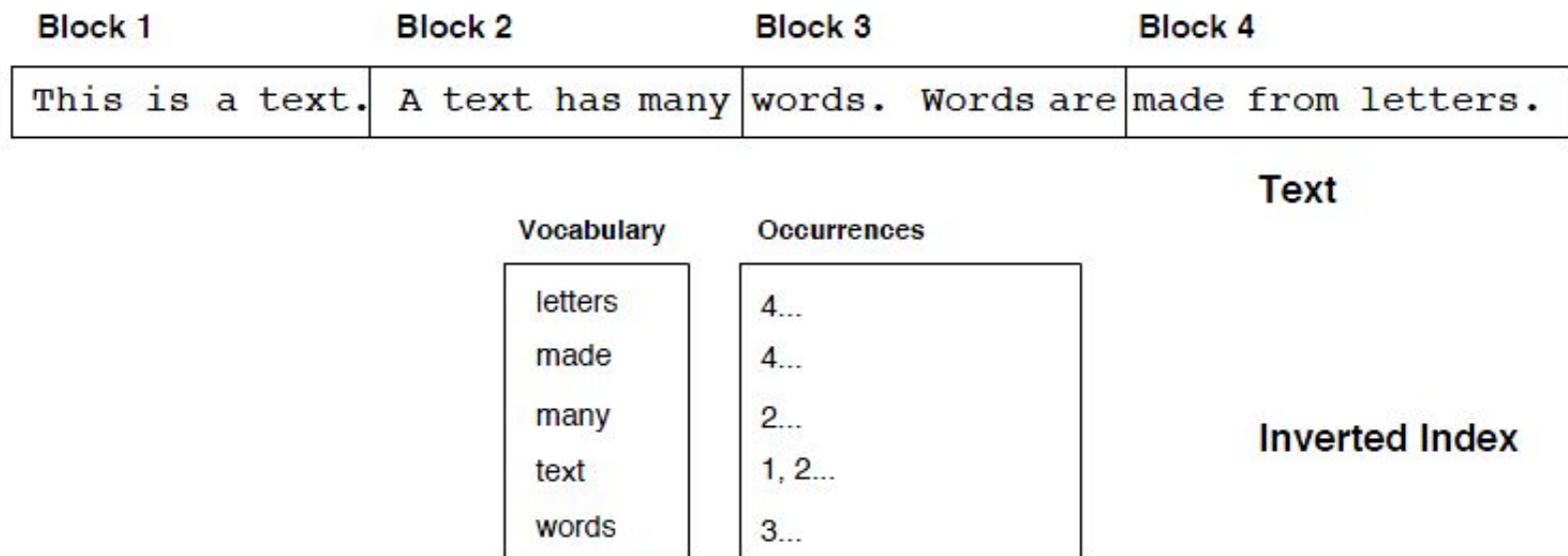
# Indeksowanie i wyszukiwanie

- Przestrzeń zajmowana przez słownik jest relatywnie mała w porównaniu z rozmiarem tekstu; rośnie jak  $O(n^\beta)$ , gdzie  $\beta \in [0.4, 0.6]$ ,  $n$  – rozmiar zbioru.
  - We wzorcowej kolekcji dokumentów TREC-3 1GB dokumentów posiada słownik rzędu zajmujący ok. 5MB
  - Słownik można dodatkowo redukować poprzez różne techniki np. *stemming*.
  - Indeksy adresujące tylko dokumenty typowo zajmują 20% do 40% rozmiaru tekstu, kiedy usuwa się tzw. wyrazy nieistotne (*stopwords*).
-



# Indeksowanie i wyszukiwanie

- Technika adresowania blokowego ograniczająca wymagania przestrzeni adresowej
- Dokument dzieli się na bloki i zapisuje tylko adresy bloków zawierające wyrazy, zamiast adresów poszczególnych wyrazów



# Indeksowanie i wyszukiwanie

- Przykład: przestrzeń zajmowana przez indeksy odwrotne zależy od rozmiaru dokumentów ; w każdej kolekcji lewa kolumna indeksuje tylko wyrazy istotne, prawa wszystkie wyrazy

Index granularity	Single document (1 MB)		Small collection (200 MB)		Medium collection (2 GB)	
Addressing words	45%	73%	36%	64%	35%	63%
Addressing documents	19%	26%	18%	32%	26%	47%
Addressing 64K blocks	27%	41%	18%	32%	5%	9%
Addressing 256 blocks	18%	25%	1.7%	2.4%	0.5%	0.7%



# Indeksowanie i wyszukiwanie

- Podział tekstu na niewielkie bloki stałej wielkości zwiększa efektywność wyszukiwania – długie bloki są częściej wybierane i ich przeszukiwanie trwa dłużej
  - Powtarzające się referencje do tych samych słów, w tym samym kontekście sprowadza się do jednej referencji
-

# Indeksowanie i wyszukiwanie

- Zapytania w formie pojedynczych słów (single word):
  - przeszukiwanie słownika może być prowadzone z użyciem haszowania, drzew trie lub B-drzew,
  - Pierwsze dwie metody dają koszt wyszukiwania  $O(m)$ , gdzie  $m$  – długość zapytania
  - Przyjmuje się, że słownik pozostaje w pamięci operacyjnej a lista wystąpień jest pobierana z dysku
-

# Indeksowanie i wyszukiwanie

- Zapytania w formie wielu słów (multiple word):
  - **Pytania koniunktywne (AND):** poszukują wszystkich słów zapytania z listą indeksu odwrotnego dla każdego z nich. Poszukuje się iloczynu zbiorów list odwrotnych.
  - **Pytania dysjunktywne (OR):** skleja się listy indeksów odwrotnych poszczególnych słów
  
  - Najbardziej czasochłonna operacja na indeksach odwrotnych to łączenie list wystąpień
  - $m, n$  – rozmiary dwóch rozpatrywanych list w pamięci szeregowej
    - $m \ll n$  to najlepiej  $m$  razy przeszukać listę  $n$  elementów aby dokonać wstawienia
    - $m \approx n$  można zastosować dwukrotnie algorytm przeszukiwania binarnego – wymaga średnio  $m+n$  porównań
-

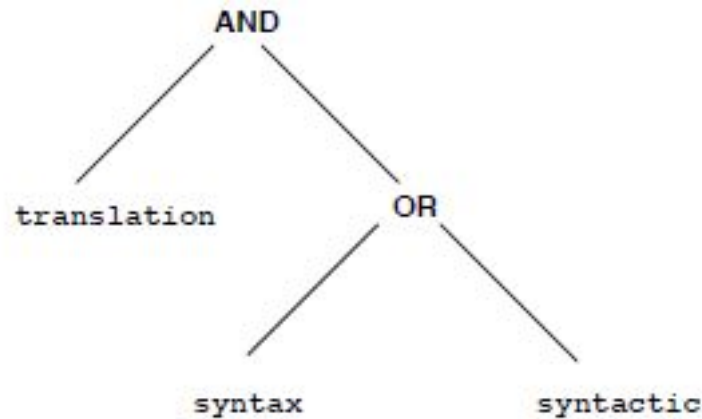


# Indeksowanie i wyszukiwanie

- Pytania kontekstowe (frazy i zapytania przybliżone):
    - listy elementów są przeszukiwane aby znaleźć pozycje gdzie pojawia się ciągła sekwencja słów (frazy) lub sekwencja słów dostatecznie blisko siebie (pytania przybliżone)
    - Stosuje się algorytmy podobne jak przy dwóch łączeniu list
    - Dla wyszukania fraz można stosować także indeksowanie par słów przy pomocy zbliżonych algorytmów
-

# Indeksowanie i wyszukiwanie

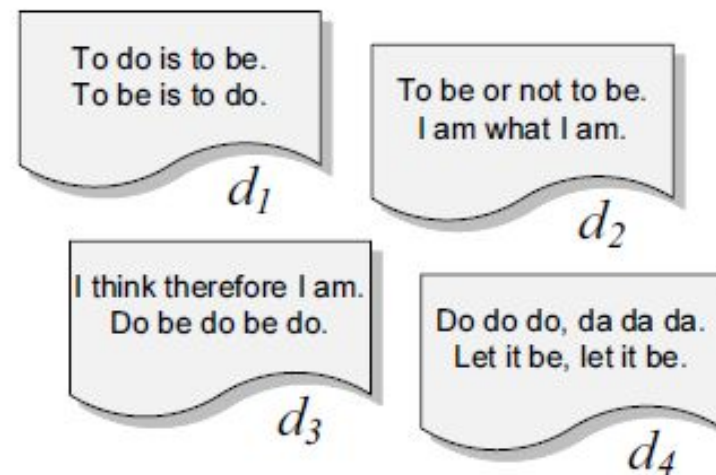
- Zapytania boolowskie: - składnia w formie drzewa



- w pierwszej fazie określa się które dokumenty są do porównania,
  - w drugiej fazie ocenia się istotność dokumentów,
  - w trzeciej fazie wyznacza się dokładne pozycje dopasowania
-

# Indeksy odwrotne - ranking

- Jak znaleźć k pierwszych dokumentów mając listy odwrotne posortowane według wag?
- W przypadku pojedynczego słowa zapytania sortowanie już zostało wykonane
- Dla innych zapytań trzeba skleić odpowiednie listy
- Np. poszukujemy odpowiedzi na pytanie dysjunktywne „to do” w kolekcji dokumentów





# Indeksy odwrotne - ranking

- W najprostszym i najkosztowniejszym podejściu wykonuje się ranking wszystkich dokumentów np. w modelu wektorowym aby wybrać te najbardziej istotne.
  - Przy wykorzystaniu indeksu odwrotnego można zmaksymalizować iloczyn TF-IDF używając następującego podejścia heurystycznego :
    - Przeszukujemy termy w porządku malejącym IDF i wybieramy najpierw „to” o większej wartości IDF,
    - przeszukujemy listę odwrotną termu „to” wg. malejących TF i wybieramy skończoną ilość najlepszych dokumentów np. dwa
    - przeszukujemy listę odwrotną termu „do” i zastępujemy dokumenty z listy „to” jeżeli wartości TF nowych dokumentów są lepsze od poprzednio wybranych
-



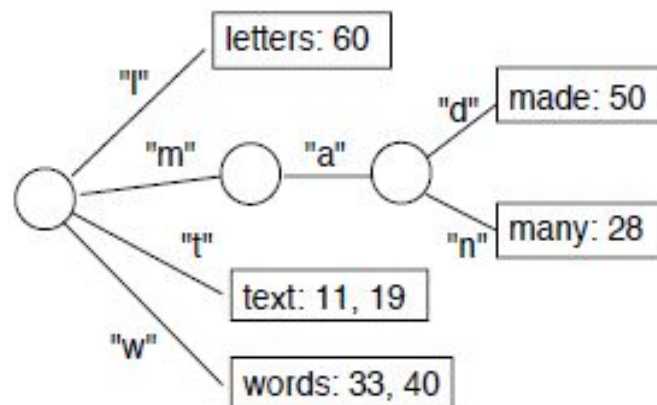
# Indeksy odwrotne - ranking

- Budowa indeksu w pamięci RAM jest prosta i nie wymaga szczególnych nakładów obliczeniowych
  - Tworzy się pustą strukturę danych do przechowywania słownika (B-drzewo, tablicę haszującą itp. )
  - Podczas skanowania tekstu szuka się bieżącego słowa w słowniku
  - Jeśli słowo jest nowe zostaje dodane do słownika przed dalszym przetwarzaniem
  - Duża tablica indeksu jest alokowana tam gdzie zapisuje się identyfikatory kolejnych słów tekstu
-

# Indeksy odwrotne - ranking

- Pełny indeks odwrotny dla przykładowego tekstu z algorytmem inkrementacyjnym:

1    6   9 11    17 19   24   28   33    40   46   50   55   60  
This is a text. A text has many words. Words are made from letters.

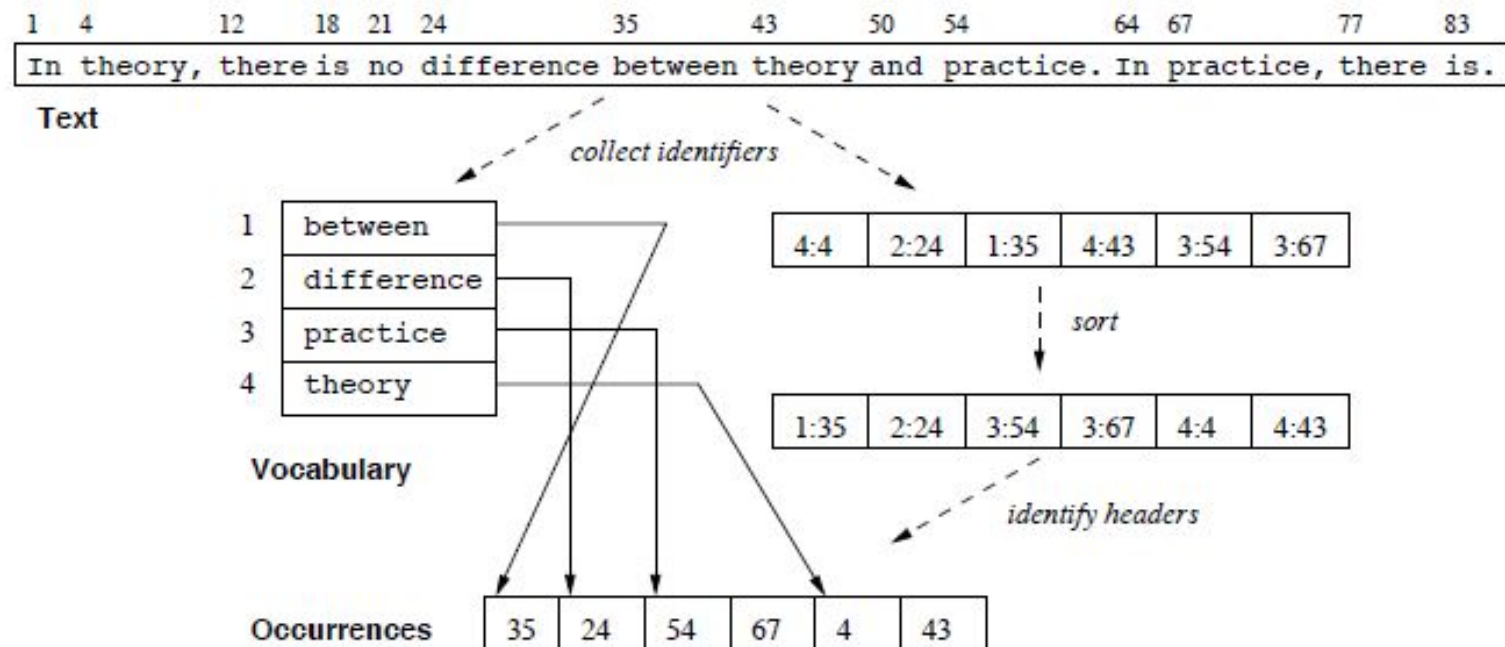


Text

Vocabulary trie

# Indeksy odwrotne - ranking

■ Pełny indeks odwrotny z algorytmem sortującym dla przykładowego tekstu :



■ Aby uniknąć sortowania całości indeksu można tworzyć osobne listy dla każdego wyrazu w słowniku

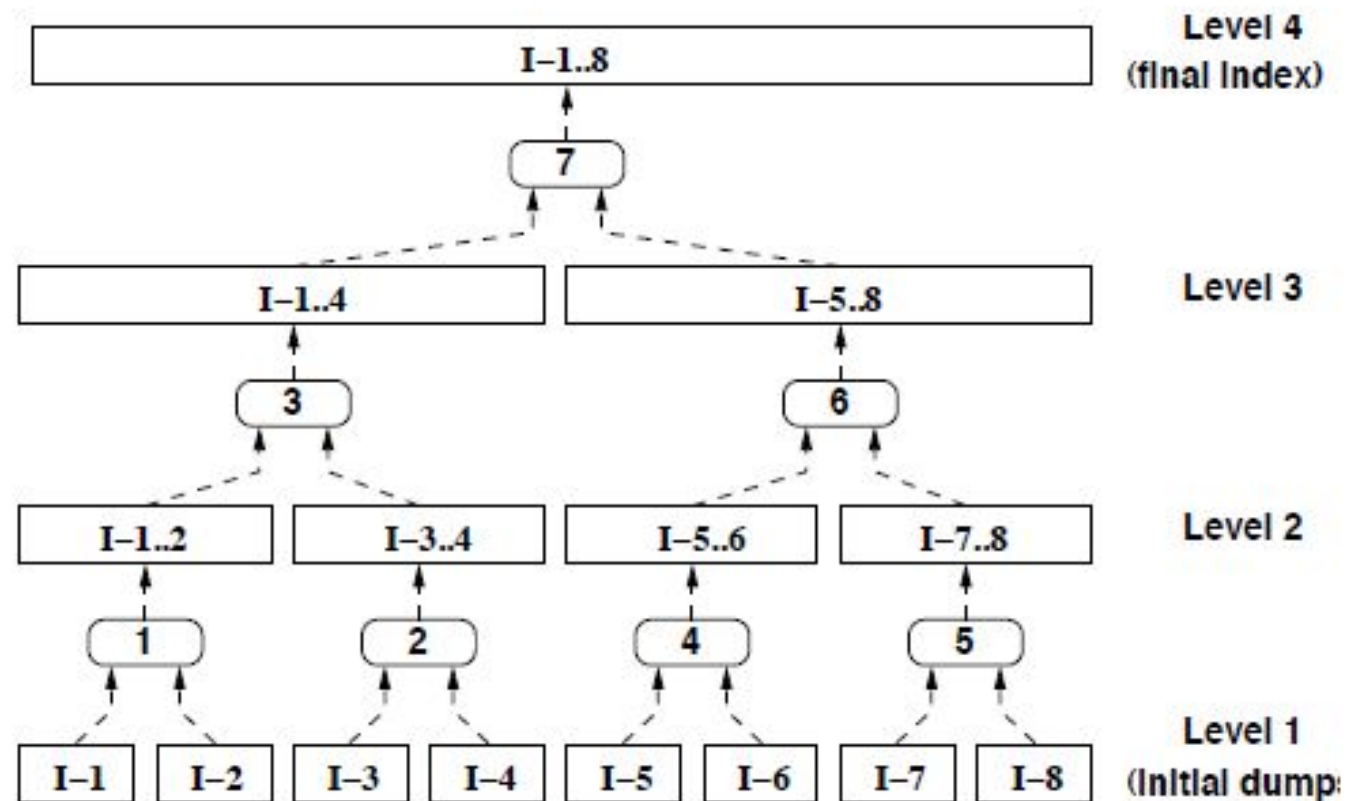
■ Z uwagi na ograniczenia pamięci preferowana jest lista bloków, każdy z wieloma elementami

# Indeksy odwrotne - ranking

- Kiedy zakończy się tworzenie listy wystąpień słownik i ta lista są zapisane w różnych plikach na dysku
- Słownik zawiera tylko wskaźniki do list odwrotnych dla każdego ze słów, co pozwala trzymać słownik w pamięci głównej (RAM)
- Po wyczerpaniu pamięci głównej uzyskany indeks częściowy jest przenoszony z pamięci głównej do dysku
- Takie indeksy częściowe są potem składane w sposób hierarchiczny

# Indeksy odwrotne - ranking

- Składanie binarne indeksów cząstkowych:



# Indeksy odwrotne - ranking

- Indeks odwrócony można aktualizować na trzy sposoby:
    - przez przebudowywanie – gdy badany tekst nie jest zbyt długi,
    - przez przyrostowe aktualizacje – podczas przeszukiwania indeksu gdy wymagane są zmiany,
    - przez fragmentaryczne składanie – nowe dokumenty są oddzielnie indeksowane i ich indeks cząstkowy jest składany z indeksem głównym (najlepszy sposób w ogólnym przypadku)
-



# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Do implementacji systemów IR preferowane są indeksy odwrotne
  - Sprawdzają się one gdy słowniki nie są zbyt duże, w przeciwnym razie efektywność ich użycia drastycznie maleje
  - Indeksy odwrotne sprawdzają się w przypadku języków zachodnich, ale nie w językach niemieckim lub fińskim, które łączą krótkie sylaby w długie słowa; nie sprawdzają się także w językach dalekowschodnich
  - Nie pyta się o słowa składane, ale o poszczególne składniki je tworzące
  - W takich przypadkach używa się metody drzew i tablic przyrostkowych
-



# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Drzewa i tablice przyrostkowe umożliwiają przeszukiwanie indeksowe dowolnych podłańcuchów pasujących do łańcucha zapytania,
- Indeksy traktują tekst jako jeden długi łańcuch a każdy znak w tekście jest traktowany jako przyrostek tekstowy (text **suffix**)
- Przykład: suffiksy w tekście „missing missisipi”

```
missing mississippi  
issing mississippi  
ssing mississippi  
..  
ppi  
pi  
i
```

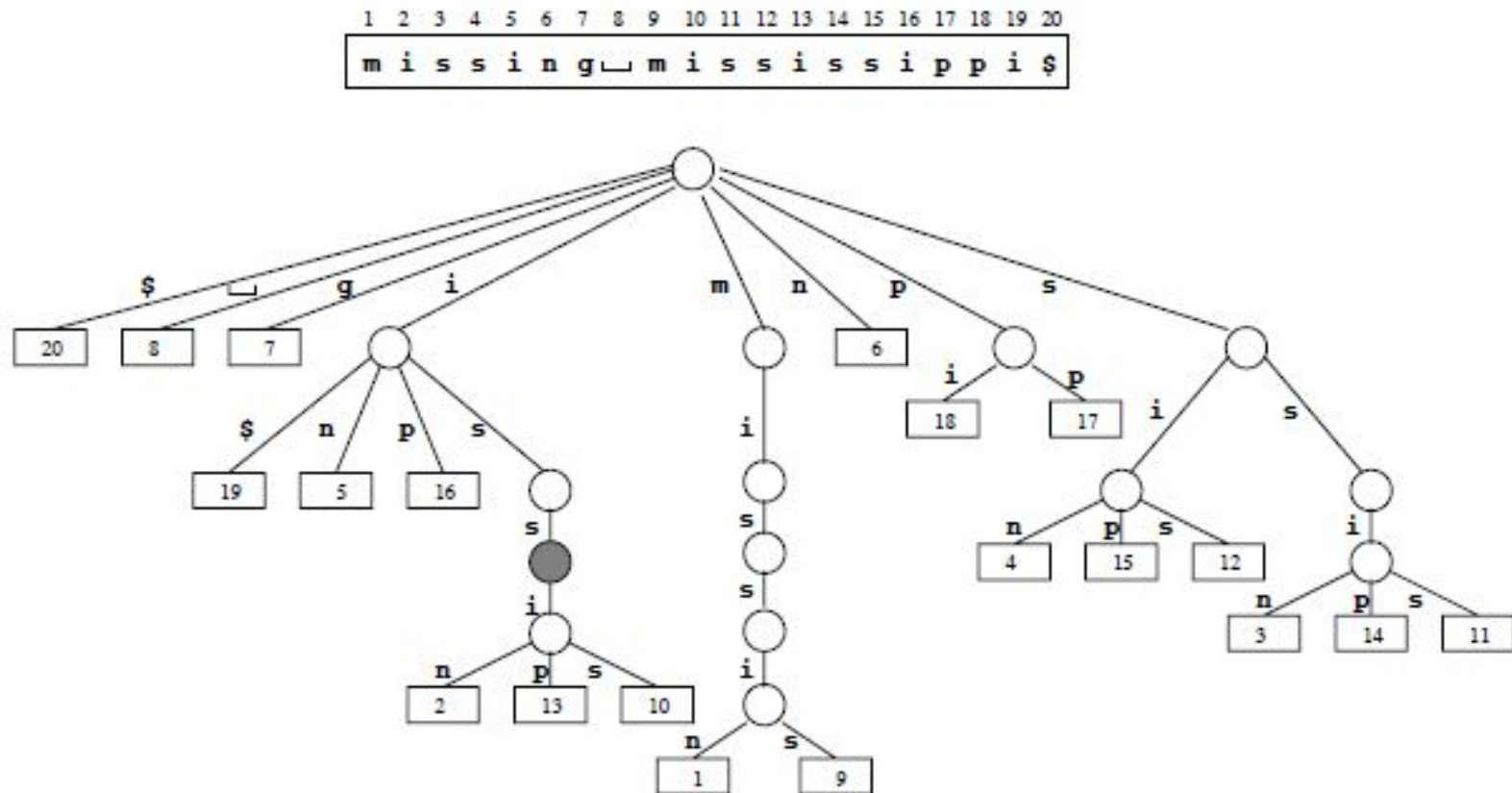
---

# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Strukturę przyrostków można opisać w oparciu o przyrostkowe drzewo wyszukiwania (*suffix trie* - *trie od retrieval*)
- Drzewa przyrostkowe to struktury danych, które zapisują zbiory łańcuchów tak, że można odtworzyć dowolny łańcuch w czasie proporcjonalnym do jego długości, niezależnie od ilości zapisanych łańcuchów
- Zbiór przyrostków  $P = \{P_1, \dots, P_r\}$  zapisanych jako drzewo wyszukiwania stanowi deterministyczny automat skończony (DFA) rozpoznający  $P_1 | \dots | P_r$ ; poszukiwanie łańcucha przyrostkowego  $P$  jest równoznaczne z rozpoznaniem tego łańcucha przez DFA
- Drzewo przyrostkowe w tej wersji to struktura danych trie zawierająca wszystkie przyrostki tekstu:  $T = t_1 t_1 \dots t_n, \$'$
- Liście drzewa trie zawierają wskaźniki do przyrostków  $t_1 t_1 \dots t_n$

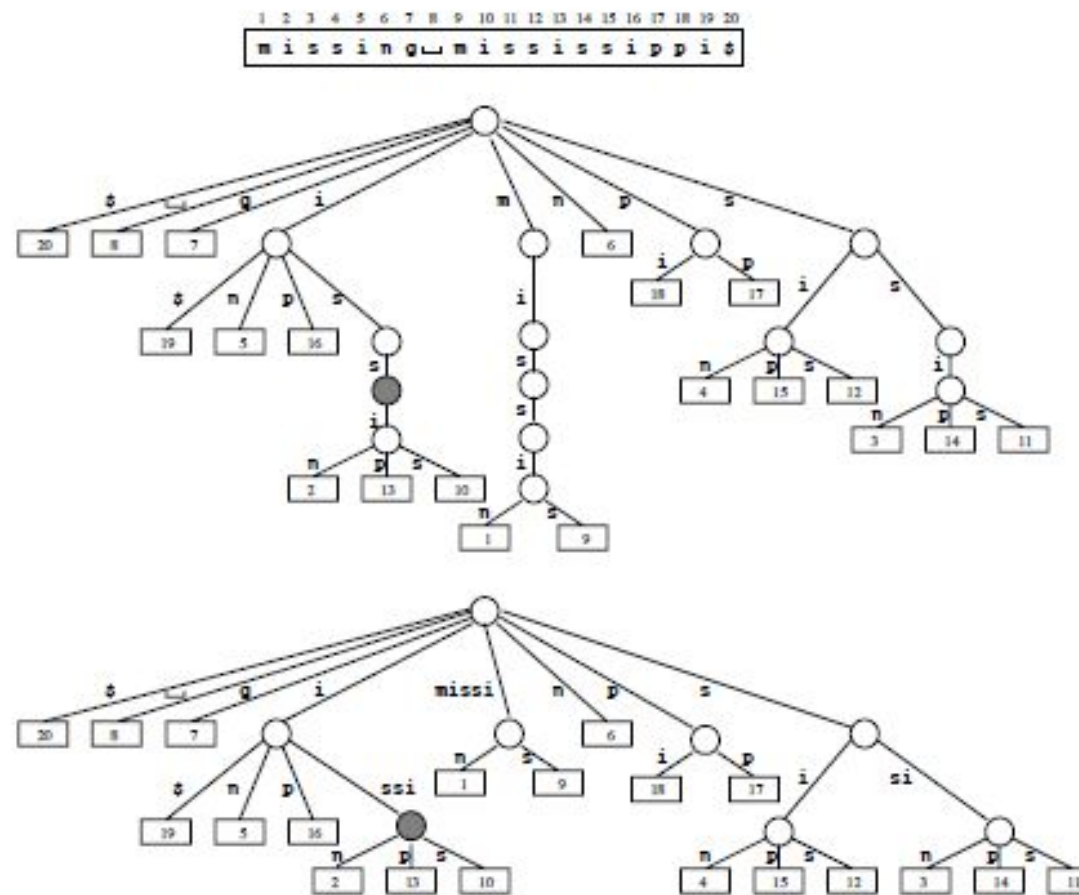
# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Drzewo wyszukiwania dla tekstu „missing missipi”



# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Normalne drzewo przyrostkowe – krawędzie bez rozgałęzień są wyeliminowane

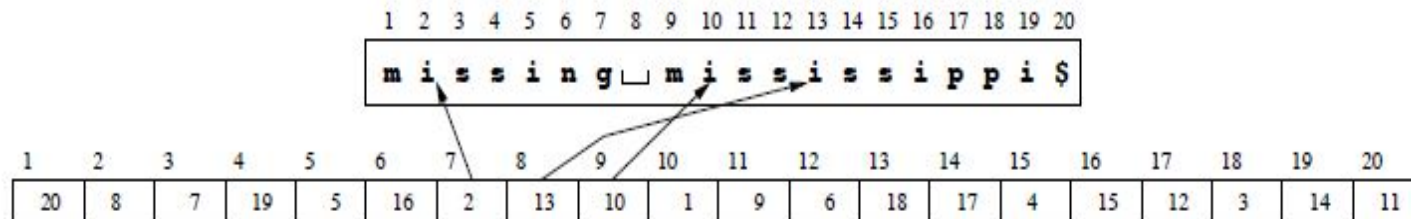


# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Drzewa przyrostkowe zajmują dużo miejsca w pamięci
  - Zależnie od implementacji zajmują 10 do 20 razy więcej miejsca niż pierwotny tekst
  - Ponadto indeksy jako drzewa przyrostkowe są efektywne przede wszystkim w pamięci RAM
- 
- **Tablica przyrostkowa** dla tekstu  $T$  jest definiowana jako tablica wskaźników na wszystkie przyrostki  $T$ , które zostały uprzednio wysortowane leksykograficznie (jako liście drzewa przyrostkowego od lewej do prawej)

# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Tablice przyrostkowe mają podobną funkcjonalność jak drzewa ale mniejsze wymagania pamięciowe – typowo są 4 razy większe od indeksowanego tekstu
- Tablice przyrostkowe nieco mają dłuższe czasy dostępu niż drzewa podczas wyszukiwania
- Tablica przyrostków dla tekstu „missing missisipi”



# Drzewa i tablice przyrostkowe

## ■ Poszukiwanie łańcuchów:

- Dotyczy wszystkich łańcuchów (części przedrostkowych) pasujących do przyrostka  $P = p_1p_2...p_m$
  - Polega na przesuwaniu się w drzewie wyszukiwania po kolejnych znakach  $P$ .
  - Możliwe są 3 sytuacje:
    - $P$  nie pojawia się w tekście  $T$  – nie ma ścieżki odpowiadającej  $P$  w drzewie wyszukiwania
    - $P$  zostaje znalezione przed osiągnięciem liścia w gałęzi drzewa – pojawi się na wszystkich pozycjach liści związanych z jego gałęzią
    - Liść drzewa pojawi się przed zakończeniem łańcucha  $P$ ; należy kontynuować porównywanie tekstu aż do liścia aby zweryfikować obecność  $P$
-



# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Jeżeli poszukiwanie dotyczy normalnego drzewa przyrostkowego krawędzie są skojarzone z całymi podłańcuchami
  - Wszystkie etykiety krawędzi odchodzące od danego wężła różnią się pierwszym znakiem
-



# Drzewa i tablice przyrostkowe

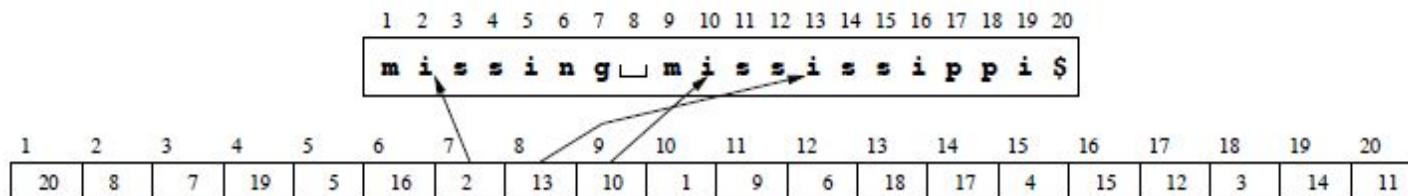
- Pseudokod przeszukiwania drzewa przyrostkowego:

**Suffix-Tree-Search** ( $S, P = p_1 p_2 \dots p_m$ )

- (1)  $i \leftarrow 1$
  - (2) **while** *true* **do**
  - (3)   **if**  $S$  is a leaf pointing to  $j$  **then**
  - (4)     **if**  $p_i \dots p_m = t_{j+i-1} \dots t_{j+m-1}$
  - (5)       **then return**  $S$
  - (6)       **else return** *null*
  - (7)   **if** there is an edge  $S \xrightarrow{p'_1 \dots p'_s} S' \wedge p'_1 = p_i$  **then**
  - (8)      $j \leftarrow 0$
  - (9)     **while**  $j < s \wedge i + j \leq m \wedge p'_{j+1} = p_{i+j}$  **do**  $j \leftarrow j + 1$
  - (10)     $i \leftarrow i + j$
  - (11)    **if**  $i > m$  **then return**  $S'$
  - (12)    **if**  $j < s$  **then return** *null*
  - (13)     $S \leftarrow S'$
  - (14) **else return** *null*
-

# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Przeszukiwanie tablicy przyrostkowej jest typu binarnego z pośrednimi porównaniami
- Każdy krok binarnego wyszukiwania wymaga porównania  $P$  z przyrostkiem tekstu



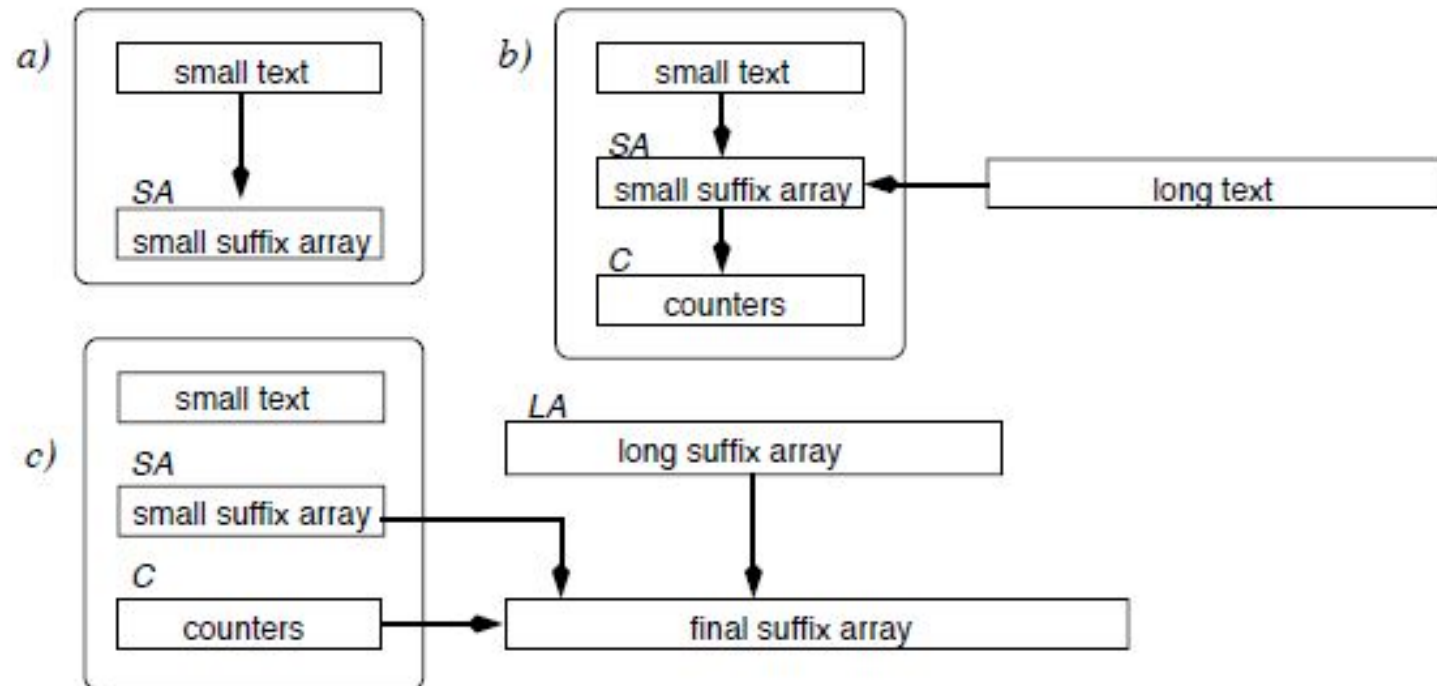


# Drzewa i tablice przyrostkowe

- **Drzewa i tablice przyrostkowe dla dużych tekstów**
  - Kiedy dane tablic przyrostkowych lub tekstu nie mieszczą się w pamięci głównej specjalne algorytmy są wymagane do pracy z pamięcią zewnętrzną
  - Tekst dzieli się na bloki, które mogą być sortowane w pamięci głównej
  - Dla każdego bloku buduje się tablicę przyrostkową w pamięci głównej i składa się ją z resztą tej tablicy zbudowaną dla poprzednich bloków
-

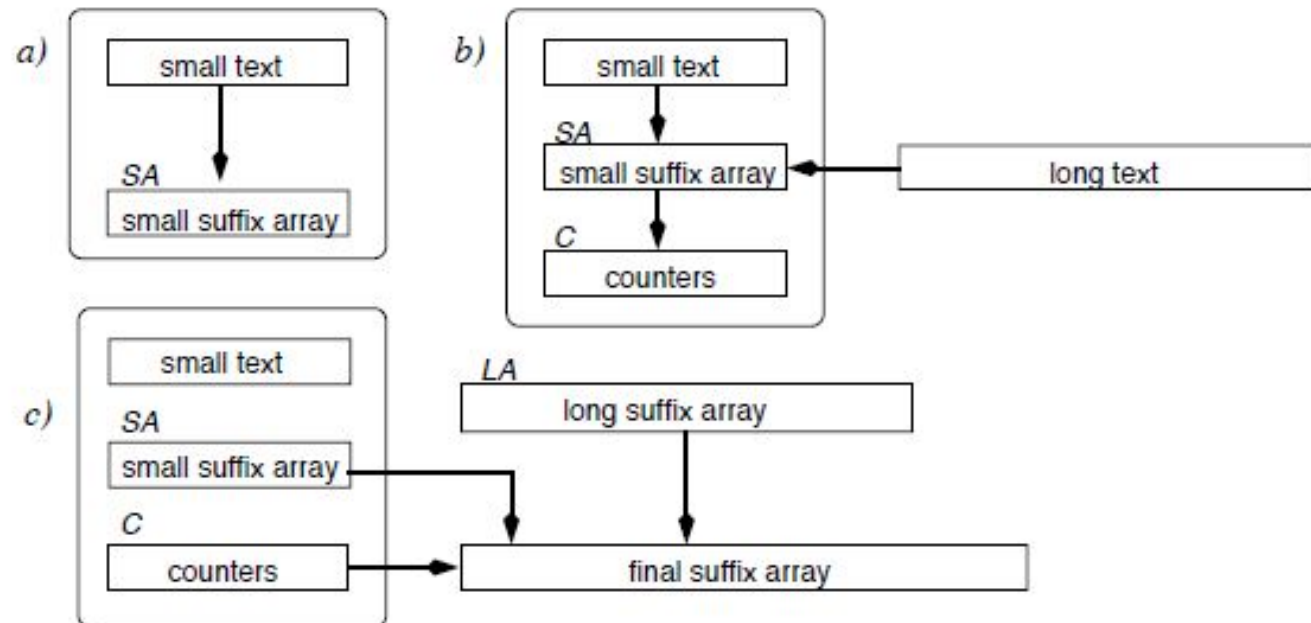
# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Krok budowy tablicy przyrostkowej dla dużych tekstów:
  - a) utworzenie małej tablicy przyrostków *SA*,
  - b) wypełnienie tablicy liczników *C*,
  - c) sklejenie tablic *LA* dla bloków  $1, 2, \dots, i-1$  oraz tablicy *SA* dla bloku  $i$



# Drzewa i tablice przyrostkowe

- Tablica liczników  $C$  w każdej komórce  $C[j]$  zapamiętuje ile przyrostków  $LA$  jest do wstawienia pomiędzy  $SA[j]$  i  $SA[j+1]$
- Obliczenie  $C$  nie wymaga dostępu do  $LA$ ; tekst odpowiadający  $LA$  jest sekwencyjnie wczytywany do pamięci głównej
- Każdy przyrostek tekstu jest poszukiwany w  $SA$ ; jeśli jest pomiędzy  $SA[j]$  i  $SA[j+1]$  to inkrementujemy  $C[j]$



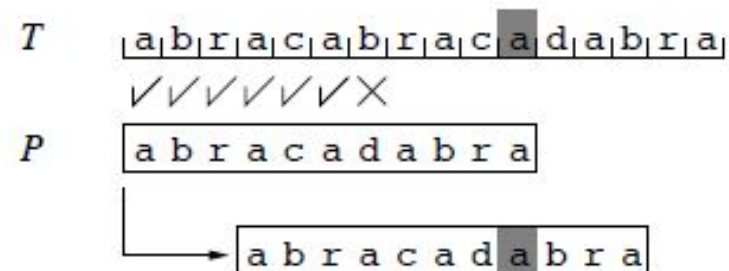
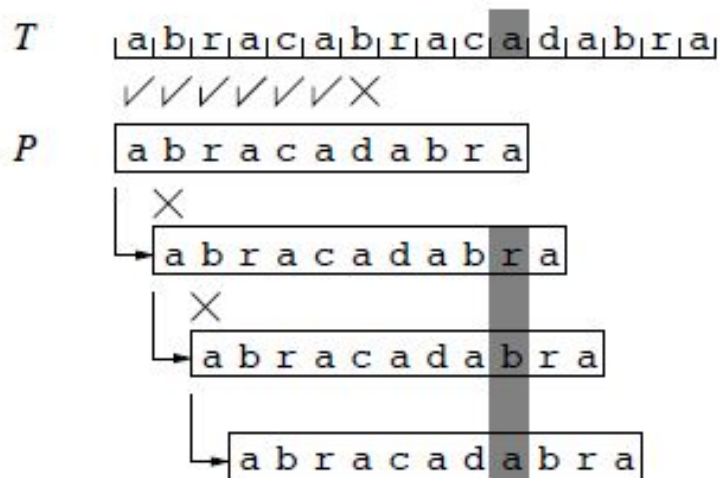
- 
- Diagram illustrating the alignment of a text string  $T$  with a pattern  $P$ .
- $T$ : a b r a c a b r a c a d a b r a
- $P$ : a b r a c a d a b r a
- The alignment shows  $T$  shifted to the right, with mismatches marked by 'X' at positions 1, 2, and 3. The vertical bar in  $T$  aligns with the 10th character 'd' in  $P$ .

# Wyszukiwanie sekencyjne

- Algorytm Horspool'a: najszybszy algorytm wyszukiwania łańcuchów dla języków naturalnych
  - Wykorzystuje pomysł przesuwania okna ze wzorcem jak poprzednio
  - Wstępnie przelicza tabelę  $d$  przesunięć okna indeksowaną znakami alfabetu;  $d[c]$  zapisuje o ile pozycji trzeba przesunąć okno, jeżeli jego ostatnim znakiem jest  $c$ .
  - Inaczej,  $d[c]$  jest odległością od końca wzorca  $p_m$ , z wyłączeniem tego końca, do ostatniego wystąpienia  $c$  w  $P$ .
-

# Wyszukiwanie sekwencyjne

## ■ Algorytm Horspool'a – przykład





# Wyszukiwanie sekwencyjne

- Algorytm Horspool'a – pseudokod

**Horspool** ( $T = t_1t_2 \dots t_n$ ,  $P = p_1p_2 \dots p_m$ )

- (1) **for**  $c \in \Sigma$  **do**  $d[c] \leftarrow m$
- (2) **for**  $j \leftarrow 1 \dots m - 1$  **do**  $d[p_j] \leftarrow m - j$
- (3)  $i \leftarrow 0$
- (4) **while**  $i \leq n - m$  **do**
- (5)      $j \leftarrow 1$
- (6)     **while**  $j \leq m \wedge t_{i+j} = p_j$  **do**  $j \leftarrow j + 1$
- (7)     **if**  $j > m$  **then** report an occurrence at text position  $i + 1$
- (8)      $i \leftarrow i + d[t_{i+m}]$

- Przy długich wzorcach i krótkim alfabecie algorytm Horspool'a nie jest efektywny
-

# Wyszukiwanie sekwencyjne

- W przypadku ogólnym można przesuwać okno używając  $q$  końcowych znaków, a nie tylko ostatniego; jaka byłaby najlepsza wartość  $q$ ?
- Jeżeli  $\sigma$  oznacza rozmiar alfabetu to wartość przesunięcia  $\pi\sigma^q < m$ , stąd  $q = \log_{\sigma}(m)$  i średni czas szukania wynosi  $O(n\log_{\sigma}(m)/m)$

# Wyszukiwanie sekencyjne

## ■ Programowanie dynamiczne:

■ Klasyczna metoda przybliżonego dopasowania łańcuchów wskazująca pozycje, gdzie wzorzec  $P$  pojawia się z co najwyżej  $k$  błędami.

■ Stosuje się różne definicje błędów dopasowania:

- odległość Hamminga – ilość niezbędnych podstawień znaków w tekście niezbędna dla dopasowania fragmentu tekstu do wzorca
  - odległość edycyjna (Levensteina) – ilość usunięć, wstawień i zamiany znaków w tekście niezbędna dla dopasowania fragmentu tekstu do wzorca
-

# Wyszukiwanie sekwencyjne

- Wylicza się tablicę  $C[0 \dots m, 0 \dots n]$  elementów  $C[i, j]$  reprezentujących minimalne ilości  $k$  błędów przy dopasowaniu wzorca  $p_1 p_2 \dots p_i$  do tekstu  $t_1 t_2 \dots t_j$ .
- Tablicę wyznacza się następująco:

$$C[0, j] = 0,$$

$$C[i, 0] = i,$$

$$C[i, j] = \begin{cases} C[i-1, j-1] & \text{if } (p_i = t_j) \\ 1 + \min(C[i-1, j], C[i, j-1], C[i-1, j-1]) & \text{else} \end{cases}$$

- Dopasowanie pojawia się na pozycjach  $j$ , takich że  $C[m, j] \leq k$ .
-

# Wyszukiwanie sekwencyjne

Przykład – programowanie dynamiczne poszukujące słowa 'colour' w tekście 'kolorama' z  $k=2$  błędami; \* opisuje wybraną pozycję wzorca

		k	o	l	o	r	a	m	a
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	1	1	1	1	1	1	1	1	1
o	2	2	1	2	1	2	2	2	2
l	3	3	2	1	2	2	3	3	3
o	4	4	3	2	1	2	3	4	4
u	5	5	4	3	2	2	3	4	5
r	6	6	5	4	3	2*	3	4	5

Odległość 2\* znaków jest spełniona w sensie Hamminga i Levensteina

---



# Drzewa i tablice przyrostkowe

Programowanie dynamiczne w przypadku ogólnym wymaga  $O(mn)$  czasu.

W przedstawionym wariancie korzystającym tylko z poprzedzającej kolumny  $C[\cdot, j-1]$  do wyliczenia kolumny bieżącej  $C[\cdot, j]$  algorytm może być implementowany w przestrzeni  $O(m)$ .

---



# **Drzewa i tablice przyrostkowe**

---



# **Drzewa i tablice przyrostkowe**

---





# **Drzewa i tablice przyrostkowe**

---